Δεύτερο Φυλλάδιο Εργασίας
Απειροστικός Λογισμός Ι
Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

Πρώτο Θέμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$. Είναι η συνάρτηση αυτή συνεχής στο 0; Αν όχι, μπορείτε να την επεκτείνετε κατά τρόπο συνεχή; Στην συνέχεια να εξετάσετε την συνεχή επέκταση της ως προς την παραγωγισιμότητα στο σημείο μηδέν. Θεωρώντας την $g(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ εξετάστε όλα τα προηγούμενα ερωτήματα. Τέλος, αποδείξτε με κάθε λεπτομέρεια το παρακάτω θεώρημα,

Θεώρημα 1 *Αν* $-1 < x < 1$ *τότε*

- $\arcsin^{'}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arccos^{'}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arctan^{'}(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Δεύτερο Θέμα

Να υπολογισθούν τα παρακάτω όρια

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} x^2\ln x$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^x e^x - e^{x^2})$ (Θεωρήστε την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^{x^2}}$ και στην συνέχεια τον λογάριθμο της πρώτης ποσότητας)

(v) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^x}{e^{x^2}}$ (Σημειώστε ότι $\frac{x^x}{e^{x^2}} = e^{x\ln x - x^2}$)

(vi) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x(e^x+1) - (1+e^x)\ln(1+e^x))$

(vii) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x}$

Τρίτο Θέμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4, & \text{όταν } -3 \leq x \leq 1 \\ e^{x-1} + 6, & \text{όταν } 1 < x \leq 5 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-3, 5]$; Είναι παραγωγίσιμη στο ίδιο διάστημα; Σε ποια σημεία του $[-3, 5]$ θα ψάξετε για τοπικά ακρότατα; Ποια είναι τα ολικά ακρότατα; Είναι άνω ή κάτω φραγμένη;

Τέταρτο Θέμα

Κατασκευάστε τον πίνακα ακροτάτων και φραγμάτων των παρακάτω συναρτήσεων και στην συνέχεια καταγράψτε το πεδίο τιμών τους. Στην συνέχεια εξετάστε, ανά δυο, για ποια ζευγάρια συναρτήσεων ορίζεται η σύνθεση.

(i) $f(x) = xe^x - (1 + e^x)\ln(1 + e^x)$, $x \in (0, +\infty)$

(ii) $g(x) = (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}$, $x \in (0, +\infty)$

(iii) $h(x) = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\frac{2}{5}} - \frac{x^2}{2}$

(iv) $d(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2|x|, & \text{όταν } x \in [-3, 2] \\ 2x^2 - 2x + 12, & \text{όταν } x \in (2, 3] \end{cases}$

(v) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{όταν } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{όταν } 1 < x \leq 3 \end{cases}$

(vi) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{όταν } x < 1 \\ (x-2)^2, & \text{όταν } x \geq 1 \end{cases}$

(vii) $f(x) = x^x$, $x \in [1, 4)$

$(viii)$ $f(x) = \begin{cases} \frac{(0.4)^x}{\ln 0.4} - \frac{x^2}{2}, & \text{όταν } x \in [0, 1) \\ \frac{1+x^2}{x^2} + \frac{0.4}{\ln 0.4} - \frac{5}{2}, & \text{όταν } x \in [1, +\infty) \end{cases}$

(ix) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2}, & \text{όταν } x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{όταν } 1 < x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{1+x}, & \text{όταν } x > 2 \end{cases}$

(x) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^4, & \text{όταν } x < 1 \\ \ln x, & \text{όταν } x \geq 1 \end{cases}$

(xi) $f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{όταν } 0 < x < 1 \\ (x-1)^4, & \text{όταν } x \geq 1 \end{cases}$

Σημειώστε ότι τα ακρότατα θα βρίσκονται είτε στα κλειστά άκρα της συνάρτησης, είτε στα σημεία που μηδενίζεται η παράγωγος είτε στα σημεία που δεν υπάρχει παράγωγος. Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής τότε αναλύστε το πεδίο ορισμού της σε υποδιαστήματα στα οποία είναι συνεχής. Σε μια τέτοια περίπτωση το πεδίο τιμών της συνάρτησης θα είναι, εν γένει, ένωση διαστημάτων.

Πέμπτο Θέμα

(i) Για ποιο $a \in \mathbb{R}$, αν υπάρχει, ισχύει ότι $a \ln x - x^2 \leq x - 2$ για κάθε $x > 0$;

(ii) Δείξτε ότι $e^x \geq x + 1$ για $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

(iii) Δείξτε ότι $e^x - 1 \leq xe^x$ για $x \in \mathbb{R}$

(iv) Δείξτε ότι $e^{x-1} \geq 1 + \ln x$ για $x > 0$

(v) Δείξτε ότι $x^e \leq e^x$ για $x > 0$

(vi) Δείξτε ότι $x(e^x + 1) + 1 < (1 + e^x)\ln(1 + e^x)$, για $x \in \mathbb{R}$

(vii) Για $p, q \in (1, \infty)$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ αποδείξτε ότι ισχύει $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ όταν $x \geq 0$ και $y \geq 0$. (θεωρείστε την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$)

Θέτοντας την κατάλληλη συνάρτηση το πρόβλημα ανάγεται στην κατασκευή του πίνακα ακροτάτων και φραγμάτων. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Geogebra για να έχετε το γράφημα της συνάρτησης και στην συνέχεια να αποδείξετε τις κατάλληλες ιδιότητες (μονοτονία, ακρότατα, φράγματα κ.τ.λ.)

Έκτο Θέμα

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x$. Αποδείξτε ότι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος σταθερού σημείου στο $[0, 1]$ και στην συνέχεια δώστε μια προσέγγιση του σημείου ξ το οποίο είναι τέτοιο ώστε $\left(\frac{2}{5}\right)^\xi - \xi = 0$. Για να βρείτε την ρίζα της συνάρτησης $f(x) = 0.4^x - x$ εφαρμόστε επίσης την μέθοδο της διχοτόμησης και την μέθοδο του Νεύτωνα. Μπορείτε να καταγράψετε τα μειονεκτήματα και τα πλεονεκτήματα της κάθε μεθόδου; Τέλος, καταγράψτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{(0.4)^x}{\ln 0.4} - \frac{x^2}{2}$.

Έβδομο Θέμα

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{2x+3}{5x-6}}dx$. (Θέτουμε $t = \sqrt{\frac{2x+3}{5x-6}}$)

(ii) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos x + \sin^2 x}dx$. (Θέτουμε $t = \cos x$)

(iii) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. (Θέτουμε $x = \sin t$).

(iv) $\displaystyle\int x\sqrt{3x^2-2}dx$. (Θέτουμε $x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cosh t$).

(v) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x^2+5}}{x}dx$. (Θέτουμε $x=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\sinh t$).

(vi) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{-x}+e^{2x}}dx$. (Θέτουμε $x=\ln t$).

και στην συνέχεια, παραγωγίζοντας το αποτέλεσμα σας, επαληθεύστε.

Όγδοο Θέμα

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\displaystyle\int \sqrt{7x+4}dx$. (Θέτουμε $t=7x+4$)

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$. (Θέτουμε $t=x-1$)

(iii) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$. (Θέτουμε $t=\sqrt{x}$).

(iv) $\displaystyle\int x^7\sqrt[3]{x^4+1}dx$. (Θέτουμε $t=x^4+1$).

(v) $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-x}dx$. (Θέτουμε $t=1-x$).

(vi) $\displaystyle\int \left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 dx$. (Ίσως χρειαστεί διαίρεση πολυωνύμων).

και στην συνέχεια, παραγωγίζοντας το αποτέλεσμα σας, επαληθεύστε.

Ένατο Θέμα

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(i) $\displaystyle\int \cos(2x+3)e^{-2x}dx$

(ii) $\displaystyle\int \sin(5x-4)e^{3x}dx$

(iii) $\displaystyle\int x^3\ln x dx$

(iv) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x-1)^3(x^2+1)^2}dx$ (Ανάλυση σε απλά κλάσματα).

(v) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+1}dx$ (Βρείτε ρίζες του παρονομαστή και αναλύστε σε απλά κλάσματα).

και στην συνέχεια, παραγωγίζοντας το αποτέλεσμα σας, επαληθεύστε.

Δέκατο Θέμα

Να δοθεί ο αναδρομικός τύπος για τον υπολογισμό των παρακάτω ολοκληρωμάτων

(i) $\displaystyle\int \cos^n x dx$ ($I_n = \int \cos^n x dx = \sin x \cos^{n-1} x + (n-1)\int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx$. Όμως $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$).

(ii) $\displaystyle\int \ln^n x dx$ ($I_n = \int \ln^n x dx = \int (x)' \ln^n x dx = \cdots$).

(iii) $\displaystyle\int x^n \sin tx dx$ όπου $t \neq 0$ ($I_n = \int x^n \sin tx dx = -\frac{1}{t}\int x^n \cos tx dx = \cdots$)

(iv) $\displaystyle\int e^x \sin^n x dx$ ($\int e^x \sin^n x dx = e^x \sin^n x - n\int e^x \sin^{n-1} x \cos x dx = \cdots$).

Ενδέκατο Θέμα

Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\begin{aligned}
2\sin A\cos B &= \sin(A+B)+\sin(A-B)\\
2\sin A\sin B &= \cos(A-B)-\cos(A+B)\\
2\cos A\cos B &= \cos(A-B)+\cos(A+B)\\
\cos^2 x &= \frac{1+\cos 2x}{2}
\end{aligned}$$

υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$\int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx, \quad \text{όταν } n, m \in \mathbb{N}$$

και στην συνέχεια, παραγωγίζοντας το αποτέλεσμα σας, επαληθεύστε.