

1. (40 μονάδες) Θεωρήστε το κανονικό γραμμικό μοντέλο $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{V})$, όπου \mathbf{X} είναι ένας $n \times p$ πίνακας συμμεταβλητών με $\text{rank}(X) = p$ και ο πίνακας \mathbf{V} είναι γνωστός p.d. πίνακας.
 - (α') Γράψτε τη πιθανοφάνεια που προκύπτει από το μοντέλο.
 - (β') Βρείτε τους εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας των $\boldsymbol{\beta}$ και σ^2 . (Μπορείτε να κάνετε χρήση αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 8 στις σημειώσεις μου)
 - (γ') Βρείτε τη μέγιστη τιμή που παίρνει ο λογάριθμος της πιθανοφάνειας.
 - (δ') Βρείτε τον πίνακα $\text{cov}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE})$.

2. (20 μονάδες) Θεωρήστε το κανονικό γραμμικό μοντέλο $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma})$, όπου \mathbf{X} είναι ένας $n \times p$ πίνακας συμμεταβλητών με $\text{rank}(X) = p$. Έστω πως υπάρχει αντιστρέψιμος συμμετρικός πίνακας \mathbf{F} για τον οποίο $\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{F}$.
 - (α') Δείξτε πως κάτω από αυτή την συνθήκη ισχύει $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE}$.
 - (β') Βρείτε την σ.π.π. του $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE}$. Η σ.π.π. να γραφεί σα συνάρτηση του \mathbf{F} .

3. (50 μονάδες) Θεωρήστε ένα πείραμα σε ποντίκια εργαστηρίου που αφορά στην εξεύρεση 'κατάλληλης' δόσολογίας ενός ποντικοφάρμακου. Η βιολόγος κάνει ένεση ποντικοφάρμακου σε επίπεδο δόσης x_{i1} , στο τυχαία επιλεγμένο ποντίκι i ($i = 1, \dots, 18$) που είναι υπέρβαρο ή όχι ($x_{i2} = 1$, αν είναι υπέρβαρο) και παρατηρεί αν το ποντίκι πέθανε σε χρονικό διάστημα 10 λεπτών. Η απόκριση, Y_i , παίρνει τη τιμή 1 αν το ποντίκι πεθάνει, αλλιώς παίρνει τη τιμή 0.
 - (α') Γράψτε ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο για τα δεδομένα σας.
 - (β') Γράψτε την πιθανοφάνεια του μοντέλου.
 - (γ') Γράψτε τις εκτιμητικές εξισώσεις για την ML εκτίμηση των παραμέτρων, χρησιμοποιώντας τα υπόλοιπα.
 - (δ') Στο αρχείο 'data for logistic regression.docx' θα βρείτε τα βασικά αποτελέσματα της ανάλυσης του πειράματος.
 - i. Επιβεβαιώστε πως οι εκτιμήσεις των παραμέτρων είναι όντως ML εκτιμήσεις.
 - ii. Δώστε εκτίμηση του λόγου των odds θανάτου δύο ποντικών που παίρνουν την ίδια δόση και όπου το ένα ποντίκι είναι υπέρβαρο (το άλλο όχι).