ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 2: "ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι"
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ – ΤΜΗΜΑ Σ.Α.Χ.Μ.
18 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2021, 09:00–12:00

ΘΕΜΑ 1. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} x+y+z&=1\\ x+\alpha y+\beta z&=2\\ x+\alpha^2 y+\beta^2 z&=4 \end{aligned}$$

για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 2. Δίνεται ο πίνακας

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα $B=3A^{2005}-6A+I_3$.

ΘΕΜΑ 3. Έστω $A \in M_3(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A^3=0_3$. Έστω $B=(I_3+A)^2-A$ και $\Gamma=(I_3-A)^2+A$. Να αποδείξετε τα παρακάτω:

(α) Οι πίνακες B και Γ είναι αντιστρέψιμοι και να βρεθούν οι αντίστροφοί τους.

(β) Οι πίνακες $B-\Gamma$ και $B^2-\Gamma^2$ είναι μη αντιστρέψιμοι.

(γ) Ο πίνακας $B+\Gamma$ είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφός του.

ΘΕΜΑ 4. (α) Στον παρακάτω πίνακα W να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $t \in \mathbb{R}$ ώστε να έχουμε $\det(W)=\alpha$, $\alpha \neq 1$.

$$W=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1\\ t & 1+t & t & t\\ t^2 & t^2 & 1+t^2 & t^2\\ t^3 & t^3 & t^3 & 1+t^3 \end{pmatrix}.$$

(β) Αν τα στοιχεία του $n \times n$ πίνακα A και του A^{-1} είναι ακέραιοι, τότε να αποδείξετε ότι και οι δύο ορίζουσες είναι 1 ή -1, αιτιολογώντας κάθε ισχυρισμό σας.

ΘΕΜΑ 5. (α) Έστω $A, P \in M_3(\mathbb{C})$ δύο αντιστρέψιμοι πίνακες τέτοιοι ώστε $AP=PA^{-1}$. Να αποδείξετε ότι μια ιδιοτιμή του πίνακα A είναι το 1 ή το -1.

(β) Δίνεται ο πίνακας

$$M=\begin{pmatrix} -3 & 6 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Με χρήση του Θεωρήματος των Cayley–Hamilton, να υπολογιστεί ο αντίστροφος (αν υπάρχει) του πίνακα M. Να βρείτε επίσης το ελάχιστο πολυώνυμο του M.

(γ) Εξηγήστε γιατί ο Z δεν είναι ποτέ όμοιος με τον $Z+I$.

(δ) Αν ο 3×3 πίνακας N έχει ιδιοτιμές $0, 1, 2$ ποιές είναι οι ιδιοτιμές του $N(N-I)(N-2I)$;

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΟΥ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ 2 ΣΤΙΣ 18/01/2021

ΘΕΜΑ 1 Βλ. αρχείο 12/01/2021, άσκηση 25, σελίδα 7.

ΘΕΜΑ 2 Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

$$\det(A - x I_3) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & -2 \\ 0 & -x & 0 \\ 3 & 0 & -4-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1 \to c_1 + c_3}{=} \begin{vmatrix} -1-x & 0 & -2 \\ 0 & -x & 0 \\ -1-x & 0 & -4-x \end{vmatrix}$$

$$= (-1-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -x & 0 \\ 1 & 0 & -4-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3 \to r_3 - r_1}{=} (-1-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -2-x \end{vmatrix}$$

$$= (-x)(1+x)(2+x).$$

Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = 3x^{2005} - 6x + 1$.

Έχουμε $B = p(A)$. Επίσης,

(1) $p(x) = \chi_A(x)\pi(x) + \upsilon(x)$,

όπου $\upsilon(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ για κάποια $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$B = p(A) = \chi_A(A)\pi(A) + \upsilon(A)$$

και επομένως από το Θεώρημα Cayley-Hamilton,

$$B = \upsilon(A) = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3.$$

Υπολογίζουμε τα α, β, γ. Από την (1) έχουμε:

- Για $x = 0$,

$$3 \cdot 0^{2005} - 6 \cdot 0 + 1 = \chi_A(0)\pi(0) + \alpha 0^2 + \beta \cdot 0 + \gamma$$

$\Rightarrow \gamma = 1$. (διότι $\chi_A(0) = 0$)

- Για $x = -1$,

$$3 \cdot (-1)^{2005} - 6(-1) + 1 = \chi_A(-1)\pi(-1) + \alpha(-1)^2 + \beta(-1) + 1$$

$\Rightarrow \alpha - \beta = 3$ (διότι $\chi_A(-1) = 0$).

- Για $x = -2$,

$$3(-2)^{2005} - 6(-2) + 1 = \chi_A(-2)\pi(-2) + \alpha(-2)^2 + \beta(-2) + 1$$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha - \beta = -3\cdot 2^{2004} + 6 \quad (\text{διότι } \chi_A(-2)=0).$$

Επομένως καταλήγουμε στο ακόλουθο σύστημα με αγνώστους τα α, β

$$\alpha - \beta = 3$$
$$2\alpha - \beta = -3\cdot 2^{2004} + 6.$$

από όπου παίρνουμε πολύ εύκολα ότι

$$\alpha = 3\left(1 - 2^{2004}\right)$$
$$\beta = -3\cdot 2^{2004}$$

Επομένως,

$$B = 3\left(1-2^{2004}\right)A^2 - 3\cdot 2^{2004}A + I_3. \quad \square$$

ΘΕΜΑ 3

Έχουμε:

$$B = (I_3 + A)^2 - A$$

$$= (I_3 + A)(I_3 + A) - A$$

$$= I_3 + A + A + A^2 - A$$

$$= A^2 + A + I_3 .$$

$$\Gamma = (I_3 - A)^2 + A$$

$$= (I_3 - A)(I_3 - A) + A$$

$$= I_3 - A - A + A^2 + A$$

$$= A^2 - A + I_3 .$$

(α) Δοθέντος ότι $A^3 = O_3$ και σκέφτοντας τις ταυτότητες

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \quad \text{και} \quad x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2),$$

είναι εύκολο να δείξετε ότι

$$A^3 - I_3 = (A - I_3)(A^2 + A + I_3) = (A - I_3) B$$

$$\Rightarrow -I_3 = (A - I_3) B$$

$$\Rightarrow (I_3 - A) B = I_3 \quad (*)$$

και

$$A^3+I_3=(A+I_3)(A^2-A+I_3)=(A+I_3)\Gamma$$

$$\Rightarrow I_3=(A+I_3)\Gamma \qquad (**).$$

Από τις (*) και (**) παίρνουμε ότι οι Β και Γ είναι αντιστρέψιμοι και $B^{-1}=I_3-A$ και $\Gamma^{-1}=A+I_3$.

(β) $B-\Gamma=A^2+A+I_3-A^2+A-I_3=2A$.

Αφού ο Α δεν είναι αντιστρέψιμος (διότι $A^3=O_3$) έπεται ότι ο $B-\Gamma$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Για τον $B^2-\Gamma^2$: Από τις ισότητες

$B=A^2+A+I_3$ και $\Gamma=A^2-A+I_3$ εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι $B\Gamma=A^4+A^2+I_3=\Gamma B$ και άρα $B\Gamma=\Gamma B$. Επομένως, $B^2-\Gamma^2=(B-\Gamma)(B+\Gamma)$.

Αφού ο $B-\Gamma$ δεν είναι αντιστρέψιμος, από την προηγούμενη ισότητα παίρνουμε ότι ο $B^2-\Gamma^2$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

(γ) Έχουμε $B+\Gamma=A^2+A+I_3+A^2-A+I_3=2(A^2+I_3)$.

Επίσης, $(A^2+I_3)(A^2-I_3)=A^4+A^2-A^2-I_3=-I_3$

διότι $A^4 = A^3 A = O_3 \cdot A = O_3$.

Άρα, $(A^2 + I_3)(I_3 - A^2) = I_3$ και συνεπώς

$2(A^2 + I_3)\left[\frac{1}{2}(I_3 - A^2)\right] = I_3$.

Επομένως, ο $B+\Gamma$ είναι αντιστρέψιμος και

$(B+\Gamma)^{-1} = \frac{1}{2}(I_3 - A^2)$. $\square$

<u>ΘΕΜΑ 4</u> (α) Έχουμε:

$$\det(W) = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ t & 1+t & t & t \\ t^2 & t^2 & 1+t^2 & t^2 \\ t^3 & t^3 & t^3 & 1+t^3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{C_1 \to C_1 - \alpha C_4 \\ C_2 \to C_2 - C_4 \\ C_3 \to C_3 - C_4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ t(1-\alpha) & 1 & 0 & t \\ t^2(1-\alpha) & 0 & 1 & t^2 \\ t^3(1-\alpha)-\alpha & -1 & -1 & 1+t^3 \end{vmatrix}$$

Αναπτύσσουμε ως προς τα στοιχεία της <u>1ης</u> γραμμής

$$= -\begin{vmatrix} t(1-\alpha) & 1 & 0 \\ t^2(1-\alpha) & 0 & 1 \\ t^3(1-\alpha)-\alpha & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_3 \to r_3 + r_2}{=} \; - \begin{vmatrix} t(1-\alpha) & 1 & 0 \\ t^2(1-\alpha) & 0 & 1 \\ t^2(1-\alpha)+t^3(1-\alpha)-\alpha & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{προς τα στοιχεία της } 3^{\text{ης}} \text{ στήλης}}{\overset{\text{Αναπτύσσουμε ως}}{=}} \begin{vmatrix} t(1-\alpha) & 1 \\ t^2(1-\alpha)+t^3(1-\alpha)-\alpha & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -t(1-\alpha) - t^2(1-\alpha) - t^3(1-\alpha) + \alpha$$

$$= (1-\alpha)(-t^3 - t^2 - t) + \alpha$$

$$= (\alpha - 1)\, t\,(t^2 + t + 1) + \alpha .$$

Θέλουμε $\det(W) = \alpha$, όπου $\alpha \neq 1$.

Ισοδύναμα, από τα παραπάνω,

$$(\alpha - 1)\, t\,(t^2 + t + 1) = 0 \,, \quad \alpha \neq 1$$

ισοδύναμα

$$t(t^2 + t + 1) = 0 .$$

Επειδή $t \in \mathbb{R}$ και το τριώνυμο $t^2 + t + 1$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$ (Διακρίνουσα $= -3 < 0$) έπεται ότι $t = 0$.

(β) Εφόσον $A, A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$ (υπόθεση), έπεται ότι $\det(A), \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$ (βλ. 1/12/2020, άσκηση 12, σελίδα 22 — η απόδειξη έπρεπε να υπάρχει στη λύση σας, όπως υποδεικνύεται στη διατύπωση του θέματος).

Εφόσον $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$, και $\det(A), \det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$, είναι προφανές ότι και οι δύο ορίζουσες είναι 1 ή -1.

$\square$

<u>ΘΕΜΑ 5</u> (α) Από τη σχέση $AP = PA^{-1}$ παίρνουμε $A^{-1} = P^{-1}AP$. Άρα, οι πίνακες A και A^{-1} είναι όμοιοι. Όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία, όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές. Συνεπώς, οι πίνακες A και A^{-1} έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές με τις ίδιες αντίστοιχες αλγεβρικές πολλαπλότητες.

Από την άλλη μεριά, γνωρίζουμε ότι αν το λ είναι μια ιδιοτιμή του αναστρέψιμου πίνακα A (οπότε $\lambda \neq 0$), τότε το $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^{-1}.

Από τα παραπάνω και το γεγονός ότι ο A είναι 3×3, έπεται αμέσως ότι μια ιδιοτιμή του A είναι το 1 ή το −1.

(β) Έχουμε

$$\det(M - x I_3) = \begin{vmatrix} -3-x & 6 & 0 \\ 2 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x) \begin{vmatrix} -3-x & 6 \\ 2 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_1 \to C_1 + C_2}{=} (3-x) \begin{vmatrix} 3-x & 6 \\ 3-x & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)^2 (1-x-6)$$

$$= (3-x)^2 (-x-5)$$

$$= -(x-3)^2 (x+5)$$

$$= -x^3 + x^2 + 21x - 45.$$

Άρα, ο M είναι αντιστρέψιμος (ο σταθερός όρος του χαρ/κού πολυωνύμου είναι $-45 \neq 0$, ή από την παραγοντοποιημένη μορφή $-(x-3)^2(x+5)$ του $\chi_M(x)$ το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του M).

Από το Θεώρημα των Cayley – Hamilton έχουμε

$$-M^3+M^2+21M-45I_3=O_3$$

$$\Rightarrow \quad -M^3+M^2+21M=45I_3$$

$$\Rightarrow \quad -M^2+M+21I_3=45M^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad M^{-1}=\frac{1}{45}\left(-M^2+M+21I_3\right).$$

Τώρα, εφόσον $\chi_M(x)=-(x-3)^2(x+5)$, το $m_M(x)$ είναι ένα από τα παρακάτω πολυώνυμα

$$p_1(x)=(x-3)(x+5),\quad p_2(x)=(x-3)^2(x+5).$$

$$p_1(M)=(M-3I_3)(M+5I_3)=\begin{pmatrix}-6&6&0\\2&-2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&6&0\\2&6&0\\0&0&8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Άρα, $m_M(x)=(x-3)(x+5)$.

(γ) Αν λ είναι ιδιοτιμή του Z, τότε το $\lambda+1$ είναι ιδιοτιμή του $Z+I$. Επομένως, οι πίνακες Z και $Z+I$ δεν έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές και συνεπώς δεν είναι ποτέ όμοιοι.

(δ) $N(N-I)(N-2I) = N^3-3N^2+2N$ και συνεπώς αν λ είναι μια ιδιοτιμή του N τότε το $\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$ είναι ιδιοτιμή του $N(N-I)(N-2I)$. Αφού οι ιδιοτιμές του N είναι $0,1,2$, οι ιδιοτιμές του 3×3 πίνακα $N(N-I)(N-2I)$ είναι $0,0,0$. $\square$

<u>Υπενθύμιση για τα (γ) και (δ) παραπάνω</u>: Από 7/12/2020, άσκηση 7, σελίδα 17, έχουμε ότι αν λ είναι ιδιοτιμή του $A\in M_n(K)$ και $p(x) = \alpha_m x^m + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ είναι ένα πολυώνυμο του x, όπου για $i=1,\dots,m$ $\alpha_i \in K$, τότε ο αριθμός $p(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του πολυωνυμικού πίνακα $p(A) = \alpha_m A^m + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$.