ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΜΑΘΗΜΑ 12

30/11/2020

(Συνέχεια ασκήσεων από Μάθημα 11.)

11) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \alpha & \beta & \gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε:

$$\det(A) \underset{i=2,3,4}{\overset{c_i \to c_i - c_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \beta-\alpha & \beta-\alpha \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha & \gamma-\alpha \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\alpha & \delta-\alpha \end{vmatrix}$$

$$\underset{c_3 \to c_3 - c_2}{\overset{c_4 \to c_4 - c_3}{=\!=}} \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\beta & 0 \\ \alpha & \beta-\alpha & \gamma-\beta & \delta-\gamma \end{vmatrix}$$

$$= \alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\gamma). \qquad \square$$

12) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_3y_2 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{pmatrix}.$$

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε:

$$\det(A) \overset{\substack{c_1 \to c_1 - c_2 \\ c_2 \to c_2 - c_3}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} x_1(y_1-y_2) & x_1(y_2-y_3) & 1+x_1y_3 \\ x_2(y_1-y_2) & x_2(y_2-y_3) & 1+x_2y_3 \\ x_3(y_1-y_2) & x_3(y_2-y_3) & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}$$

$$= (y_1-y_2)(y_2-y_3)\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & 1+x_1y_3 \\ x_2 & x_2 & 1+x_2y_3 \\ x_3 & x_3 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix}$$

$$= 0. \qquad \square$$

13) Η ακολουθία αριθμών του Fibonacci $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

$$a_1 = a_2 = 1 \quad \text{και} \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

(Έτσι, $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3$, $a_5 = 5$, $a_6 = 8$ κ.ο.κ.)

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τον $n\times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Να αποδείξετε ότι $\det(A_n) = \alpha_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Αποδεικνύουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο n.

Έχουμε ότι $\det(A_1) = 1 = \alpha_2$ και

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 = \alpha_3.$$

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ με $n > 2$, $\det(A_k) = \alpha_{k+1}$ για όλα τα $k = 1, \ldots, n-1$, και θα αποδείξουμε ότι $\det(A_n) = \alpha_{n+1}$.

Έχουμε:

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \det(A_{n-1}) + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{ανάπτυγμα ως προς τη πρώτη στείλη του } A_n.} \longrightarrow \text{τάξης } n-1$$

$$\overset{\text{Υπόθεση Επαγωγής}}{=} a_n + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{\substack{\text{ανάπτυγμα ως προς} \\ \text{τη πρώτη γραμμή της} \\ \text{δεύτερης ορίζουσας της} \\ \text{προηγούμενης ισότητας}}} \longrightarrow \text{τάξης } n-2$$

$$= a_n + \det(A_{n-2})$$

$$\overset{\text{Υπόθεση Επαγωγής}}{=} a_n + a_{n-1}$$

$$= a_{n+1}. \qquad \square$$

14) Έστω ο $n \times n$ πίνακας

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Η ορίζουσα του πίνακα $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ λέγεται <u>ορίζουσα του Vandermonde</u>. Να αποδείξετε ότι

$$\det\left(V(x_1, x_2, \dots, x_n)\right) = \prod_{\substack{i>j \\ 1 \le i,j \le n}} (x_i - x_j)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. (Όπου με "$\prod$" συμβολίζουμε το "γινόμενο".)

<u>ΛΥΣΗ</u> Αποδεικνύουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο n.

Για $n=2$ έχουμε ότι

$$V(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix},$$

οπότε $\det(V(x_1, x_2)) = x_2 - x_1$. Άρα, η (*) ισχύει για $n=2$. Υποθέτουμε ότι το αποτέλεσμα ισχύει για τις ορίζουσες Vandermonde τάξης n για κάποιο $n \geq 2$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για τις ορίζουσες Vandermonde τάξης $n+1$.

Έχουμε :

$$\det\left(V(x_1,\dots,x_{n+1})\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n+1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

$$\underset{i=n+1,n,\dots,2}{\overset{r_i \to r_i - x_1 r_{i-1}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_{n+1}-x_1 \\ 0 & (x_2-x_1)x_2 & (x_3-x_1)x_3 & \cdots & (x_{n+1}-x_1)x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (x_2-x_1)x_2^{n-1} & (x_3-x_1)x_3^{n-1} & \cdots & (x_{n+1}-x_1)x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Ανάπτυγμα ως προς 1η στήλη}}{=} \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_{n+1}-x_1 \\ (x_2-x_1)x_2 & (x_3-x_1)x_3 & \cdots & (x_{n+1}-x_1)x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \\ (x_2-x_1)x_2^{n-1} & (x_3-x_1)x_3^{n-1} & \cdots & (x_{n+1}-x_1)x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_{n+1} - x_1)\det\left(V(x_2,\dots,x_{n+1})\right)$$

$$\overset{\text{Υπόθεση Επαγωγής}}{=} (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_{n+1} - x_1)\prod_{\substack{i>j \\ 2\le i,j\le n+1}} (x_i - x_j)$$

$$= \prod_{\substack{i>j \\ 1\le i,j\le n+1}} (x_i - x_j).$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα και τη λύση. □

15) Να αποδείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} \nu\alpha_1+\beta_1 & \nu\alpha_2+\beta_2 & \nu\alpha_3+\beta_3 \\ \nu\beta_1+\gamma_1 & \nu\beta_2+\gamma_2 & \nu\beta_3+\gamma_3 \\ \nu\gamma_1+\alpha_1 & \nu\gamma_2+\alpha_2 & \nu\gamma_3+\alpha_3 \end{vmatrix} = (\nu^3+1)\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

ΛΥΣΗ Έχουμε:

$$\begin{vmatrix} \nu\alpha_1+\beta_1 & \nu\alpha_2+\beta_2 & \nu\alpha_3+\beta_3 \\ \nu\beta_1+\gamma_1 & \nu\beta_2+\gamma_2 & \nu\beta_3+\gamma_3 \\ \nu\gamma_1+\alpha_1 & \nu\gamma_2+\alpha_2 & \nu\gamma_3+\alpha_3 \end{vmatrix} \overset{\text{Ιδ. 6α}}{=} \begin{vmatrix} \nu\alpha_1 & \nu\alpha_2 & \nu\alpha_3 \\ \nu\beta_1+\gamma_1 & \nu\beta_2+\gamma_2 & \nu\beta_3+\gamma_3 \\ \nu\gamma_1+\alpha_1 & \nu\gamma_2+\alpha_2 & \nu\gamma_3+\alpha_3 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ v\beta_1+\gamma_1 & v\beta_2+\gamma_2 & v\beta_3+\gamma_3 \\ v\gamma_1+\alpha_1 & v\gamma_2+\alpha_2 & v\gamma_3+\alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{15.6\alpha}{=} \begin{vmatrix} v\alpha_1 & v\alpha_2 & v\alpha_3 \\ v\beta_1 & v\beta_2 & v\beta_3 \\ v\gamma_1+\alpha_1 & v\gamma_2+\alpha_2 & v\gamma_3+\alpha_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v\alpha_1 & v\alpha_2 & v\alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ v\gamma_1+\alpha_1 & v\gamma_2+\alpha_2 & v\gamma_3+\alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \underbrace{\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ v\beta_1 & v\beta_2 & v\beta_3 \\ v\gamma_1+\alpha_1 & v\gamma_2+\alpha_2 & v\gamma_3+\alpha_3 \end{vmatrix}}_{\substack{\parallel \\ 0}} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ v\gamma_1+\alpha_1 & v\gamma_2+\alpha_2 & v\gamma_3+\alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{15.6\alpha}{=} \begin{vmatrix} v\alpha_1 & v\alpha_2 & v\alpha_3 \\ v\beta_1 & v\beta_2 & v\beta_3 \\ v\gamma_1 & v\gamma_2 & v\gamma_3 \end{vmatrix} + \overbrace{\begin{vmatrix} v\alpha_1 & v\alpha_2 & v\alpha_3 \\ v\beta_1 & v\beta_2 & v\beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}}^{\substack{0 \\ \parallel}} +$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix} v\alpha_1 & v\alpha_2 & v\alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ v\gamma_1 & v\gamma_2 & v\gamma_3 \end{vmatrix}}_{=0} + \overbrace{\begin{vmatrix} v\alpha_1 & v\alpha_2 & v\alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}}^{=0} + \underbrace{\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ v\gamma_1 & v\gamma_2 & v\gamma_3 \end{vmatrix}}_{=0} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$= v^3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= v^3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(v^3 + 1\right) \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \qquad \square$$

ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

ΛΗΜΜΑ 1 Έστω $E \in M_n(\mathbb{R})$ στοιχειώδης πίνακας. Τότε $\det(E) \neq 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Ο E, ως στοιχειώδης πίνακας, προκύπτει από τον I_n εφαρμόζοντας κάποιον στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών, έστω e, στον I_n. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

(1) $e = r_i \longleftrightarrow r_j$ για κάποια i,j με $i \neq j$.

Τότε $\det(E) \overset{\text{Ιδ. 2}}{=} -\det(I_n) = -1 \neq 0$.

(2) $e = r_i \to r_i + \alpha \cdot r_j$ για κάποια i,j με $i \neq j$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

Τότε $\det(E) \overset{\text{Ιδ. 5}}{=} \det(I_n) = 1 \neq 0$.

(3) $e = r_i \to \alpha \cdot r_i$ για κάποιο $i \in \{1, \ldots, n\}$ και $\alpha \neq 0$.

Τότε $\det(E) \overset{\text{Ιδ. 4}}{=} \alpha \cdot \det(I_n) = \alpha \cdot 1 = \alpha \neq 0$. □

ΛΗΜΜΑ 2. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ και έστω $E \in M_n(\mathbb{R})$ στοιχειώδης πίνακας. Τότε

$$\det(E \cdot A) = \det(E)\det(A).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από την υπόθεση του Λήμματος, ο E προκύπτει από τον I_n εφαρμόζοντας στον I_n κάποιον στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών, έστω e. Από το Θεώρημα 1 της 9/11/2020 (σελ. 2), το γινόμενο EA είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας τον e στον A. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις:

(1) $e = r_i \leftrightarrow r_j$. Από την Ιδιότητα 2 των οριζουσών και την απόδειξη του Λήμματος 1 έχουμε:

$$\det(EA) = -\det(A) = \det(E)\det(A).$$

(2) $e = r_i \to r_i + a \cdot r_j$. Από την Ιδιότητα 5 των οριζουσών και την απόδειξη του Λήμματος 1 έχουμε:

$$\det(EA) = \det(A) = \det(E)\det(A).$$

(3) $e = r_i \to a \cdot r_i$. Από την Ιδιότητα 4 των οριζουσών και την απόδειξη του Λήμματος 1 έχουμε:

$$\det(EA) = a \cdot \det(A) = \det(E)\det(A). \qquad \square$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 1 Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $E_1, E_2, \ldots, E_k$ είναι στοιχειώδεις πίνακες στο $M_n(\mathbb{R})$, τότε

$$\det(E_k \ldots E_2 E_1 A) = \det(E_k) \ldots \det(E_2)\det(E_1)\det(A).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Με επαγωγή στο k, άσκηση για τον αναγνώστη. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Τότε ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k \in M_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $A = E_k \ldots E_2 E_1$, ή ισοδύναμα $A = E_k \ldots E_2 E_1 I_n$. Από το Πόρισμα 1, έχουμε

$$\det(A) = \det(E_k \ldots E_2 E_1 I_n) = \left(\prod_{i=1}^{k} \det(E_i)\right) \cdot \det(I_n)$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \det(E_i) \quad (\text{διότι } \det(I_n) = 1).$$

Από το Λήμμα 1, $\det(E_i) \neq 0$ για όλα τα $i = 1, \ldots, k$. Άρα, $\det(A) = \prod_{i=1}^{k} \det(E_i) \neq 0$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $\det(A) \neq 0$. Για να αποδείξουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος αρκεί να αποδείξουμε ότι $R_A = I_n$. Υποθέτουμε ότι $R_A \neq I_n$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

Εφόσον $R_A \in M_n(\mathbb{R})$ και R_A είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας, έπεται ότι η n-γραμμή του R_A είναι μηδενική. Άρα, $\det(R_A) = 0$.

Εφόσον ο R_A είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ στο $M_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $R_A = E_k \ldots E_2 E_1 A$. Από το Πόρισμα 1 έχουμε:

$$(*) \quad \det(R_A) = \det(E_k \ldots E_2 E_1 A) = \left(\prod_{i=1}^{k} \det(E_i)\right) \det(A).$$

Από την υπόθεση έχουμε $\det(A) \neq 0$ και από το Λήμμα 1 έχουμε $\det(E_i) \neq 0$ για όλα τα $i = 1, \ldots, k$. Άρα από την $(*)$ έχουμε $\det(R_A) \neq 0$. Άτοπο!

Συνεπώς $R_A = I_n$ και άρα ο A είναι αντιστρέψιμος, ολοκληρώνοντας την απόδειξη του $(\Leftarrow)$ και του Θεωρήματος. □

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 2</u> Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Τότε το ομογενές σύστημα $AX = 0$ έχει μοναδική λύση τη τετριμμένη αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Το ομογενές σύστημα $AX = 0$ έχει μοναδική λύση τη τετριμμένη αν και μόνο αν ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν (από το Θεώρημα 1) $\det(A) \neq 0$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Τότε

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Ο A είναι αντιστρέψιμος. Τότε υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ στο $M_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $A = E_k \ldots E_2 E_1$. Άρα, $AB = E_k \ldots E_2 E_1 B$.

Από το Πόρισμα 1 έχουμε:

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(E_k \ldots E_2 E_1 B) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k} \det(E_i)\right) \det(B) \\
&= \left[\left(\prod_{i=1}^{k} \det(E_i)\right) \cdot \det(I_n)\right] \det(B) \\
&= \det(\underbrace{E_k \ldots E_2 E_1 I_n}_{A}) \cdot \det(B) \\
&= \det(A) \cdot \det(B).
\end{aligned}$$

(β) Ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Τότε, από το Θεώρημα 1, $\det(A) = 0$. Άρα, $\det(A)\det(B) = 0$. Θα αποδείξουμε ότι $\det(AB) = 0$, οπότε θα έχουμε ότι $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Εφόσον ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, $R_A \neq I_n$. Άρα, η n-γραμμή του R_A είναι μηδενική. Επομένως, η n-γραμμή του $R_A \cdot B$

είναι μηδενική, αφού (η-γραμμή του $R_A \cdot B$) = (η-γραμμή του R_A)$\cdot B$.

Άρα, $\det(R_A B) = 0$. Τώρα, αφού ο A είναι γραμμο-ϊσοδύναμος με τον R_A, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ στο $M_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $A = E_k \ldots E_2 E_1 R_A$.

Άρα, $AB = (E_k \ldots E_2 E_1)(R_A B)$. Από το Πόρισμα 1 έχουμε:

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det\big((E_k \ldots E_2 E_1)(R_A B)\big)\\ &= \left(\prod_{i=1}^{k} \det(E_i)\right) \det(R_A B)\\ &= \left(\prod_{i=1}^{k} \det(E_i)\right) \cdot 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς $\det(AB) = 0$ όπως το θέλαμε. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος. $\square$

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ 2</u>. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αν $A_1, \ldots, A_k$ είναι πίνακες στο $M_n(\mathbb{R})$, τότε

$$\det(A_1 \ldots A_k) = \prod_{i=1}^{k} \det(A_i).$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Με επαγωγή στο k (και χρήση του Θεωρήματος 3), άσκηση για τον αναγνώστη. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ Αν $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

Για παράδειγμα, $\det(I_2 - I_2) = \det(O_2) = 0 \neq 2 = \det(I_2) + \det(-I_2)$.

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος. Τότε

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} .$$

ΛΥΣΗ Έχουμε:

$$AA^{-1} = I_n \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I_n)$$

$$\Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

($\det(A) \neq 0$ διότι ο A είναι αντιστρέψιμος, βλ. Θεώρημα 1). $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Ο προσαρτημένος πίνακας (adjoint matrix) του A, συμβολικά $\mathrm{adj}(A)$, είναι ο ανάστροφος του $n \times n$ πίνακα (c_{ij}), όπου για $i = 1, \ldots, n$ και $j = 1, \ldots, n$, c_{ij} είναι ο συμπαράγοντας του a_{ij} ($c_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$). Δηλαδή,

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \cdots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

<u>ΛΗΜΜΑ 3</u> Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Τότε ισχύει ότι

$$\mathrm{adj}(A)\cdot A = A\cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A)\cdot I_n$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Αποδεικνύουμε μόνον ότι $\mathrm{adj}(A)\cdot A = \det(A)\cdot I_n$ διότι η δεύτερη ισότητα αποδεικνύεται παρόμοια.

Έστω $A = (\alpha_{ij})$, $\mathrm{adj}(A) = (\beta_{ij})$ και $\mathrm{adj}(A)\cdot A = (\gamma_{ij})$.
Εφόσον $\mathrm{adj}(A) = (c_{ij})^t$, έχουμε $\beta_{ij} = c_{ji}$ για όλα τα $i = 1, \ldots, n$ και $j = 1, \ldots, n$.

Θα αποδείξουμε ότι για $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \det(A) & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases},$$

οπότε θα πάρουμε ότι $\mathrm{adj}(A)\cdot A = \det(A)\cdot I_n$.

Καταρχήν, για $i, j = 1, \ldots, n$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \beta_{i1}\alpha_{1j} + \beta_{i2}\alpha_{2j} + \cdots + \beta_{in}\alpha_{nj} \\ &= c_{1i}\alpha_{1j} + c_{2i}\alpha_{2j} + \cdots + c_{ni}\alpha_{nj} \end{aligned}$$

Άρα,

$$(*) \quad \gamma_{ij} = a_{1j}c_{1i} + a_{2j}c_{2i} + \dots + a_{nj}c_{ni}.$$

Έχουμε δύο περιπτώσεις για τα i και j.

(α) $i=j$. Τότε από την $(*)$ έχουμε

$$\gamma_{ii} = \underbrace{a_{1i}c_{1i} + a_{2i}c_{2i} + \dots + a_{ni}c_{ni}}_{\text{ανάπτυγμα της } \det(A) \text{ ως προς τη } i\text{-στήλη του } A}$$

$$= \det(A).$$

Άρα, $\gamma_{ii} = \det(A)$.

(β) $i \neq j$. Έστω $W = (w_{ij})$ ο $n \times n$ πίνακας που προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας την i-στήλη του A από την j-στήλη του A. Τότε $\det(W) = 0$ (διότι οι i- και j-στήλες του W είναι ίσες). Επίσης, επειδή οι στήλες του W είναι ίσες με αυτές του A εκτός ίσως από την i-στήλη, έχουμε ότι $W_{ki} = A_{ki}$ για όλα τα $k = 1, \dots, n$. Άρα, $c^{W}_{ki} = c_{ki}$ για όλα τα $k=1,\dots,n$, όπου c^{W}_{ki} ο συμπαράγοντας του στοιχείου w_{ki} και c_{ki} ο συμπαράγοντας του στοιχείου a_{ki}.

Επομένως, παίρνοντας το ανάπτυγμα της $\det(W)$ ως προς την i-στήλη του W, έχουμε:

$$0 = \det(W) = w_{1i} C_{1i}^{W} + w_{2i} C_{2i}^{W} + \dots + w_{ni} C_{ni}^{W}$$

$$= a_{1j} C_{1i} + a_{2j} C_{2i} + \dots + a_{nj} C_{ni}$$

$$\overset{(*)}{=} \gamma_{ij}.$$

Άρα, $\gamma_{ij} = 0$.

Από τα παραπάνω έχουμε

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \det(A) & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

όπως το θέλαμε. □

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 4</u> Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος. Τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> Από το Λήμμα 3 έχουμε:

$$\operatorname{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$$

$$\Rightarrow (\operatorname{adj}(A) \cdot A) A^{-1} = (\det(A) I_n) A^{-1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{adj}(A)(AA^{-1}) = \det(A)(I_n \cdot A^{-1})$$

$$\Rightarrow \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \quad (\text{διότι } \det(A) \neq 0).$$

□

<u>Παράδειγμα</u> Να αποδειχθεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο A^{-1} με χρήση του $\operatorname{adj}(A)$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\text{τη } 2^{\eta} \text{ γραμμή}}{\overset{\text{ανάπτυγμα ως προς}}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6.$$

Επομένως, $\det(A) = -6 \neq 0$, οπότε από το Θεώρημα 1 ο A είναι αντιστρέψιμος. Βρίσκουμε τώρα τον $\operatorname{adj}(A)$.

$$c_{11} = \det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2,$$

$$c_{12} = -\det(A_{12}) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 4,$$

$$c_{13} = \det(A_{13}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$c_{21} = -\det(A_{21}) = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$c_{22} = \det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$c_{23} = -\det(A_{23}) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6,$$

$$c_{31} = \det(A_{31}) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$c_{32} = -\det(A_{32}) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$c_{33} = \det(A_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\mathrm{adj}(A) \doteq \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Από το Θεώρημα 4 έχουμε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$