# ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

## ΜΑΘΗΜΑ 1

20/10/2020

**ΘΕΩΡΗΜΑ 2** Ένα γραμμικό σύστημα $m$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους επί του $\mathbb{R}$ είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του επαυξημένου πίνακα του συστήματος δεν έχει ηγετικό 1 στην τελευταία στήλη του.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ** Έστω

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,\dots,m)$$

ένα γραμμικό σύστημα $m$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους $x_1, x_2, \dots, x_n$ επί του $\mathbb{R}$, με επαυξημένο πίνακα $(A|B) = (a_{ij}|b_i)$. Έστω $(R|S) = (r_{ij}|s_i)$ ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του $(A|B)$.

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι το σύστημα $(*)$ είναι συμβιβαστό. Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι ο $(R|S)$ έχει ηγετικό 1 στην τελευταία στήλη του, δηλαδή στη στήλη $\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$.

Αυτό σημαίνει ότι για κάποιο $i$ με $1 \le i \le m$, $s_i = 1$ και $r_{ij} = 0$ για όλα τα $j = 1, \dots, n$.

Τότε όμως η $i$ - εξίσωση του γραμμικού συστήματος

$$(**) \qquad \sum_{j=1}^{n} r_{kj} x_j = s_k \qquad (k = 1, \ldots, m)$$

με επαυξημένο πίνακα του $(R|S)$, είναι η παρακάτω

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = s_i \, , \quad \text{με } s_i \neq 0 .$$

Εφόσον η τελευταία εξίσωση δεν έχει λύση, το σύστημα $(**)$ είναι αδύνατο. Από το Πόρισμα 1, το σύστημα $(*)$ είναι ισοδύναμο με το $(**)$, οπότε παίρνουμε ότι και το σύστημα $(*)$ είναι αδύνατο. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι είχαμε υποθέσει ότι το $(*)$ είναι συμβιβαστό. Άρα ο πίνακας $(R|S)$ δεν έχει ηγετικό 1 στη τελευταία στήλη του.

$(\Leftarrow)$ Υποθέτουμε ότι ο $(R|S)$ δεν έχει ηγετικό 1 στη τελευταία στήλη του. Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα $(*)$ είναι συμβιβαστό.

Έστω $r$ το πλήθος των ηγετικών μονάδων του $(R|S)$.

[ Παρατηρείστε ότι το $r$ είναι ίσο με το πλήθος των μη μηδενικών γραμμών του $(R|S)$, και είναι επίσης ίσο με το πλήθος των στηλών του $(R|S)$ στις οποίες εμφανίζονται οι ηγετικές μονάδες.]

Επομένως, οι μη μηδενικές γραμμές του $(R|S)$ είναι οι πρώτες $r$ γραμμές (δηλαδή, οι $r_1, r_2, \ldots, r_r$).

Λόγω της υπόθεσής μας, τα ηγετικά $1$ του $(R|S)$ βρίσκονται όλα στον πίνακα $R = (r_{ij})$. Εφόσον ο $R$ είναι $m \times n$ πίνακας έπεται ότι

$$r \leq n .$$

(α) $r = n$. Τότε ο πίνακας $(R|S)$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$(R|S) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & s_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_n \\ \hline \multicolumn{4}{c|}{O_{(m-n)\times n}} & O_{(m-n)\times 1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{matrix} \\ \hline O_{(m-n)\times n} & O_{(m-n)\times 1} \end{array}\right)$$

Επομένως, το σύστημα $(**)$ (δηλαδή, το σύστημα $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j = s_i$, $i = 1, \ldots, m$) είναι της μορφής:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 x_n = s_1 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + \ldots + 0 x_n = s_2 \\ \quad \cdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 x_2 + \ldots + x_n = s_n \\ 0 \cdot x_1 + 0 x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0 \\ \quad \cdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0 \end{array}\right.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις, είναι σαφές ότι το σύστημα (**) έχει μοναδική λύση τη $n$-άδα $(s_1, s_2, \dots, s_n)$. Εφόσον το (*) είναι ισοδύναμο με το (**) (από το Πόρισμα 1), έπεται ότι και το (*) έχει μοναδική λύση τη $(s_1, s_2, \dots, s_n)$. Άρα, το (*) είναι συμβιβαστό.

(β) $r < n$. Έστω $j_1, j_2, \dots, j_r$ οι στήλες του πίνακα $R = (r_{ij})$ στις οποίες εμφανίζονται τα ηγετικά 1, με $j_1 < j_2 < \dots < j_r$.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccc|c}
1 & \cdots & j_1 & \cdots & j_2 & \cdots & j_3 & \cdots & j_r & \cdots & n & n+1
\end{array} \\
(R|S) = & \left(\begin{array}{ccccccccccc|c}
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & s_1 \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & s_2 \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & & s_3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & \vdots \\
0 & & 0 & & 0 & & 0 & \cdots & 1 & \cdots & & s_r \\
\hline
 & & & & & O_{(m-r)\times n} & & & & & & O_{(m-r)\times 1}
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Τότε το σύστημα (**) (δηλαδή, το σύστημα $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j = s_i$, $i = 1, \ldots, m$) είναι της μορφής:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_{j_1 - 1} + x_{j_1} + \sum_{k=j_1+1}^{n} r_{1k} x_k = s_1 \\ 0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_{j_2 - 1} + x_{j_2} + \sum_{k=j_2+1}^{n} r_{2k} x_k = s_2 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + \ldots + 0 \cdot x_{j_r - 1} + x_{j_r} + \sum_{k=j_r+1}^{n} r_{rk} x_k = s_r \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0 \\ \vdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0 \end{cases}$$

ή ισοδύναμα

$$\left\{\begin{array}{l} x_{j_1} = s_1 - \sum_{k=j_1+1}^{n} r_{1k} x_k \\ \\ x_{j_2} = s_2 - \sum_{k=j_2+1}^{n} r_{2k} x_k \\ \quad \vdots \\ x_{j_r} = s_r - \sum_{k=j_r+1}^{n} r_{rk} x_k \end{array}\right.$$

Δίνοντας αυθαίρετες τιμές στους $n-r$ αγνώστους $x_k$, $k \neq j_1, j_2, \ldots, j_r$, οι οποίοι γι' αυτό το λόγο ονομάζονται <u>ελεύθεροι</u>, παίρνουμε (από τις παραπάνω σχέσεις) τιμές για τους αγνώστους $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_r}$. Οι προκύπτουσες $n$-άδες είναι λύσεις του συστήματος (**), και επειδή το (**) είναι ισοδύναμο με το (*) (από το Πόρισμα 1), οι $n$-άδες αυτές είναι λύσεις και του (*).

Εφόσον οι ελεύθεροι άγνωστοι παίρνουν αυθαίρετες τιμές στο $\mathbb{R}$, το σύστημα (**) έχει άπειρο πλήθος λύσεων, οπότε και το ισοδύναμο (προς το (**)) σύστημα (*) έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Άρα, το (*) είναι συμβιβαστό. Τα παραπάνω ολοκληρώνουν την απόδειξη του ($\Leftarrow$) και του Θεωρήματος. $\square$

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2 παίρνουμε εύκολα τα ακόλουθα πορίσματα.

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ 2</u> Ένα συμβιβαστό γραμμικό σύστημα $m$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους επί του $\mathbb{R}$ έχει:

(α) Μοναδική λύση αν $r = n$.

(β) Άπειρο πλήθος λύσεων αν $r < n$,

όπου $r$ το πλήθος των ηγετικών μονάδων του ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα του επαυξημένου πίνακα του συστήματος.

[ Σημειώστε ότι οι περιπτώσεις (α) και (β) είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις για ένα συμβιβαστό σύστημα, διότι από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι $r \le n$ για συμβιβαστά συστήματα $m$ γραμμικών εξισώσεων με $n$ αγνώστους. ]

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ 3</u> Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $m$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους, για το οποίο ισχύει $m < n$, έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

[ Πράγματι, εφόσον $m < n$ και $r \leq m$, έχουμε ότι $r < n$. Το συμπέρασμα τώρα έπεται από το Πόρισμα 2(β). ]

<u>ΠΟΡΙΣΜΑ 4</u> Ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $n$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους έχει μοναδική λύση την τετριμμένη αν και μόνο αν $R_A = I_n$, όπου $R_A$ ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του πίνακα $A$ των συντελεστών.

( Ισοδύναμα, ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $n$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους έχει μια μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν $R_A \neq I_n$.)

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Να επιλυθεί το παρακάτω σύστημα

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 14 \end{cases} \qquad (*)$$

ΛΥΣΗ Θα βρούμε πρώτα τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα του επαυξημένου πίνακα του $(*)$ (με τη μέθοδο απαλοιφής των Gauss - Jordan).

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 4r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to \left(-\frac{1}{5}\right) r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 + 5r_2]{r_1 \to r_1 - 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (R|S)$$

Το σύστημα με επαυξημένο πίνακα τον (R|S), το οποίο είναι ισοδύναμο με το (*), είναι

$$\begin{cases} x_1 + 0\cdot x_2 + x_3 = 2 \\ 0\cdot x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} x_1 = 2 - x_3 \\ x_2 = 2 + 2x_3 \end{cases}$$

Δίνοντας αυθαίρετες τιμές στον ελεύθερο άγνωστο $x_3$ παίρνουμε τιμές για τους $x_1$ και $x_2$. Οι προκύπτουσες τριάδες είναι λύσεις του τελευταίου συστήματος, και άρα είναι λύσεις του (*).

Επομένως, το (*) έχει άπειρο πλήθος λύσεων και η γενική μορφή των λύσεων είναι όλες οι τριάδες

$$(2 - x_3, 2 + 2x_3, x_3), \quad x_3 \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

2) Για ποιές τιμές της παραμέτρου k είναι το παρακάτω σύστημα αδύνατο;

$$\begin{cases} x_1 \qquad - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + kx_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$$

## ΛΥΣΗ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & k & -1 & -2 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & k & 5 & 4 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & k & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{k+3}{2} & 2 \\ 0 & k & 5 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to r_3 - k r_2} \overbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{k+3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{10-k(k+3)}{2} & 4-2k \end{array}\right)}^{U(k)}$$

Έχουμε : $\frac{10-k(k+3)}{2} = 0 \iff k = 2$ ή $k = -5$

και $4 - 2k = 0 \iff k = 2$.

Για $k = -5$ έχουμε ότι η τελευταία γραμμή του $U(-5)$ είναι η $(0, 0, 0, 14)$, και συνεπώς η $3^{η}$ εξίσωση του συστήματος με επαυξημένο πίνακα τον $U(-5)$ είναι η $0 \cdot x_1 + 0 x_2 + 0 \cdot x_3 = 14$, η οποία δεν έχει λύση.

Άρα, για $k=-5$, το σύστημα με επαυξημένο πίνακα τον $U(-5)$ είναι αδύνατο, και συνεπώς και το αρχικό σύστημα (με το οποίο είναι ισοδύναμο) είναι αδύνατο.

Για $k=2$, το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων (η τελευταία γραμμή του $U(2)$ είναι μηδενική, οπότε δεν υπάρχουν ηγετικές μονάδες στη τελευταία του στήλη και $r=2<3=$ πλήθος αγνώστων — βλ. Πόρισμα 2).

Για $k\neq 2$ και $k\neq -5$, το σύστημα έχει μοναδική λύση (διότι σε αυτή την περίπτωση, ο $U(k)$ δεν έχει ηγετικό στοιχείο στη τελευταία στήλη του και το πλήθος των ηγετικών στοιχείων του είναι ίσο με το πλήθος των αγνώστων — βλ. Πόρισμα 2). $\square$

**<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>** Δύο n-άδες πραγματικών αριθμών $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ λέγονται <u>ίσες</u>, και γράφουμε $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ αν $x_i = y_i$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$.

3) Να εξετάσετε αν υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(1, -7, -4) = x(2,1,1) + y(1,3,2)$.

**<u>ΛΥΣΗ</u>** Έχουμε:

$$(1,-7,-4) = x(2,1,1) + y(1,3,2)$$

$$\Leftrightarrow (1,-7,-4) = (2x, x, x) + (y, 3y, 2y)$$

$$\Leftrightarrow (1,-7,-4) = (2x+y, x+3y, x+2y)$$

$\Leftrightarrow$ το σύστημα

$$\begin{cases} 2x+y = 1 \\ x+3y = -7 \\ x+2y = -4 \end{cases}$$

είναι συμβιβαστό.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{2} r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \to \frac{2}{5} r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - \frac{3}{2} r_2]{r_1 \to r_1 - \frac{1}{2} r_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Το σύστημα που προκύπτει είναι το

$$\begin{cases} x + 0y = 2 \\ 0x + y = -3 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases},$$

το οποίο έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2, -3)$. Συνεπώς, το αρχικό σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2, -3)$. Επομένως έχουμε $(1, -7, -4) = 2(2, 1, 1) - 3(1, 3, 2)$. $\square$

4) Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 = 1 \\ x_2 + \lambda x_3 = 1 \\ x_3 + \lambda x_4 = \lambda \end{cases}$$

έχει (α) μοναδική λύση (β) καμία λύση (γ) άπειρο πλήθος λύσεων. Στις περιπτώσεις (α) και (γ) να παρουσιάσετε τις λύσεις.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \lambda & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \to r_2 - \lambda r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - (1-\lambda^2) r_2]{r_1 \to r_1 - \lambda r_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda^2-1) & 0 & \lambda(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \lambda \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \leftrightarrow r_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\lambda^2 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda^2-1) & 0 & \lambda(\lambda-1) \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2 \to r_2 - \lambda r_3 \\ r_4 \to r_4 - \lambda(\lambda^2-1) r_3}]{r_1 \to r_1 + \lambda^2 r_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \lambda^3 & (1-\lambda) + \lambda^3 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(1-\lambda^2) & \lambda(\lambda-1)\cdot[1-\lambda(\lambda+1)] \end{array}\right) = U(\lambda)$$

$$\lambda^2(1-\lambda^2)=0 \iff \lambda=0 \text{ ή } \lambda=-1 \text{ ή } \lambda=1,$$

$$\lambda(\lambda-1)[1-\lambda(\lambda+1)]=0 \iff \lambda=0 \text{ ή } \lambda=1 \text{ ή } \lambda=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{ή } \lambda=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Περιπτώσεις :

(α) $\lambda=0$. Τότε

$$U(0)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Παίρνουμε το εξής σύστημα (το οποίο είναι ισοδύναμο με το αρχικό, για $\lambda=0$):

$$\begin{cases} x_1+0x_2+0x_3+0x_4=1 \\ 0x_1+x_2+0x_3+0\cdot x_4=1 \\ 0x_1+0x_2+x_3+0\cdot x_4=0 \\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=1 \\ x_3=0 \\ x_4\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Επομένως έχουμε άπειρο πλήθος λύσεων και η γενική μορφή των λύσεων είναι όλες οι 4-άδες

$$(1,1,0,x_4), \text{ με } x_4\in\mathbb{R}.$$

(β) $\lambda = 1$. Τότε

$$U(1) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Το προκύπτον σύστημα είναι το

$$\begin{cases} x_1 + 0x_2 + 0x_3 + x_4 = 1 \\ 0x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 - x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} x_1 = 1 - x_4 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = 1 - x_4 \\ x_4 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Επομένως, έχουμε άπειρο πλήθος λύσεων και η γενική μορφή των λύσεων είναι όλες οι 4-άδες

$$(1 - x_4, x_4, 1 - x_4, x_4), \quad x_4 \in \mathbb{R}.$$

(γ) $\lambda = -1$. Τότε η $4^{η}$ γραμμή του πίνακα $U(-1)$ είναι η $(0, 0, 0, 0, 2)$, οπότε ο $U(-1)$ έχει ηγετικό στοιχείο στη τελευταία στήλη του. Άρα, στη περίπτωση αυτή, το σύστημα είναι αδύνατο.

(δ) $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$. Τότε

$$U(\lambda) \xrightarrow{r_4 \to \frac{1}{\lambda^2(1-\lambda^2)} r_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \lambda^3 & (1-\lambda)+\lambda^3 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda^2 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-\frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 - \lambda r_1]{\substack{r_1 \to r_1 - \lambda^3 r_4 \\ r_2 \to r_2 + \lambda^2 r_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & (-\lambda^3)\left(1-\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\right)+(1-\lambda)+\lambda^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda^2\left(1-\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\right)+1-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (-\lambda)\left(1-\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\right)+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1-\frac{1}{\lambda(\lambda+1)} \end{array}\right)$$

Στη περίπτωση αυτή έχουμε μοναδική λύση τη 4-άδα

$$\left((-\lambda^3)\left(1-\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\right)+(1-\lambda)+\lambda^3,\ \lambda^2\left(1-\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\right)+1-\lambda^2,\ (-\lambda)\left(1-\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\right)+\lambda,\ 1-\frac{1}{\lambda(\lambda+1)}\right)$$

Συνοψίζοντας, το σύστημα έχει:

(α) Μοναδική λύση αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$,

(β) Άπειρο πλήθος λύσεων αν $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$,

(γ) Καμία λύση αν $\lambda = -1$. $\square$

5) Να επιλυθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές των $\alpha, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \alpha \cdot x_2 + \alpha \cdot x_3 = b \\ x_1 + \alpha^2 x_2 + 2\alpha \cdot x_3 = \alpha b \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & b \\ 1 & \alpha^2 & 2\alpha & \alpha b \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 & b-1 \\ 0 & \alpha^2-1 & 2\alpha-1 & \alpha b-1 \end{array}\right) =$$

$$= U(\alpha, b)$$

Περιπτώσεις:

(1) $\alpha = 1$. Τότε

$$U(1,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & 1 & b-1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2-b \\ 0 & 0 & 1 & b-1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right) = V(b)$$

Διακρίνουμε τις εξής υποπεριπτώσεις:

(1i) $b = 1$. Τότε

$$V(1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Το προκύπτον σύστημα είναι το

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 = 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \quad ή \quad \begin{cases} x_1 = 1 - x_2 \\ x_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Εδώ έχουμε άπειρο πλήθος λύσεων και η γενική μορφή των λύσεων είναι όλες οι 3-άδες

$$(1 - x_2, x_2, 0), \quad x_2 \in \mathbb{R}$$

(1ii) $b \neq 1$. Τότε η τελευταία γραμμή του $V(b)$ είναι η $(0,0,0,b-1)$ με $b-1 \neq 0$. Στη περίπτωση αυτή το σύστημα είναι αδύνατο.

(2) $a \neq 1$. Τότε

$$U(a,b) \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{a-1} r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{b-1}{a-1} \\ 0 & a^2-1 & 2a-1 & ab-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 - (a^2-1) r_2]{r_1 \to r_1 - r_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a-b}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b-1}{a-1} \\ 0 & 0 & a \cdot (2-a) & a-b \end{array}\right) = W(a,b)$$

$a(2-a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ή $a = 2$

$a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$

Διακρίνουμε τρεις υποπεριπτώσεις για το $a$ στη $(3,3)$ θέση του $W(a,b)$ ($a=0$ ή $a=2$ ή ($a \neq 0$ και $a \neq 2$)):

(2i) $a = 0$. Τότε η τελευταία γραμμή του $W(0,b)$ είναι $(0,0,0,-b)$.

Υποπεριπτώσεις για το $b$:

(2i-1) Αν $b = 0$, τότε

$$W(0,0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Εδώ έχουμε άπειρο πλήθος λύσεων και η γενική μορφή των λύσεων είναι

$$(0, 1, x_3), \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

(2i-2) Αν $b \neq 0$, τότε η τελευταία γραμμή του πίνακα $W(0,b)$ είναι η $(0,0,0,-b)$ με $b \neq 0$. Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

(2ii) $\alpha = 2$. Τότε η τελευταία γραμμή του $W(2,b)$ είναι $(0,0,0,2-b)$. Υποπεριπτώσεις για το $b$:

(2ii-1) Αν $b=2$, τότε

$$W(2,2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Άπειρο πλήθος λύσεων και η γενική μορφή των λύσεων είναι όλες οι 3-άδες

$$(0, 1, x_3), \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

(2ii-2) Αν $b \neq 2$, τότε η τελευταία γραμμή του $W(2,b)$ είναι η $(0,0,0,2-b)$ με $2-b \neq 0$. Άρα, το σύστημα είναι αδύνατο.

(2iii) $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 2$. Τότε, για οποιοδήποτε $b \in \mathbb{R}$,

$$W(\alpha, b) \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{\alpha(2-\alpha)} r_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha - b}{\alpha - 1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{b-1}{\alpha-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha - b}{\alpha(2-\alpha)} \end{array}\right)$$

Εδώ έχουμε μοναδική λύση την 3-άδα

$$\left( \frac{\alpha - b}{\alpha - 1}, \frac{b-1}{\alpha - 1}, \frac{\alpha - b}{\alpha(2-\alpha)} \right)$$

<u>Συνοψίζοντας, το σύστημα έχει</u>:

(1) Μοναδική λύση αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$ και $\alpha \neq 2$ και $b \in \mathbb{R}$.

(2) Άπειρο πλήθος λύσεων αν ($\alpha = 0$ και $b = 0$) ή ($\alpha = 1$ και $b = 1$) ή ($\alpha = 2$ και $b = 2$).

(3) Καμία λύση αν ($\alpha = 0$ και $b \neq 0$) ή ($\alpha = 1$ και $b \neq 1$) ή ($\alpha = 2$ και $b \neq 2$). $\square$

6) Σωστό ή Λάθος ;

(α) Κάθε γραμμικό σύστημα $n$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους έχει μοναδική λύση.

(β) Κάθε γραμμικό σύστημα $n$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους είναι συμβιβαστό.

(γ) Ένα γραμμικό σύστημα $m$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους, όπου $m>n$, μπορεί να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(δ) Ένα γραμμικό σύστημα $m$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους, όπου $m<n$, μπορεί να είναι αδύνατο.

(ε) Ένα γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών $A$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων αν και μόνο αν ο $A$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με κλιμακωτό πίνακα ο οποίος περιέχει στήλη χωρίς ηγετική μονάδα.

<u>ΛΥΣΗ</u> (α) Λάθος. Για παράδειγμα, θεωρείστε τα παρακάτω δύο γραμμικά συστήματα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους $x$ και $y$:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \quad (1) \qquad \text{και} \qquad \begin{cases} x+y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \quad (2)$$

Το σύστημα (1) έχει άπειρο πλήθος λύσεων (η $2^η$ εξίσωση είναι ένα πολλαπλάσιο της $1^{ης}$ εξίσωσης, η γενική μορφή των λύσεων είναι $(1-y, y)$, $y \in \mathbb{R}$).

Το σύστημα (2) είναι αδύνατο.

(β) Λάθος, βλ. σύστημα (2) στο (α).

(γ) Σωστό. Θεωρούμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα 3 εξισώσεων με 2 αγνώστους $x$ και $y$:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(δ) Σωστό. Θεωρούμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 3 αγνώστους $x$, $y$ και $z$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Το σύστημα αυτό είναι αδύνατο.

(ε) Λάθος. Θεωρούμε το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Το σύστημα είναι αδύνατο. Από την άλλη μεριά, ο πίνακας των συντελεστών είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

για τον οποίο έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A .$$

Συνεπώς, ο $A$ είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον $R_A$, ο οποίος είναι (ανηγμένος) κλιμακωτός και η δεύτερη στήλη του δεν περιέχει ηγετικό $1$. □