ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΜΑΘΗΜΑ 9

16/11/2020

Υπενθυμίζουμε την έννοια του ανάστροφου πίνακα:

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Ο ανάστροφος πίνακας του A, συμβολικά A^t, είναι ο $n\times m$ πίνακας που προκύπτει δια εναλλαγής των γραμμών και στηλών του A.

Συνεπώς, $A^t = (\beta_{ij})$, όπου $\beta_{ij} = a_{ji}$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$ και $j = 1, 2, \ldots, m$.

<u>Παρατήρηση</u> Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι διαγώνιος, τότε $A^t = A$. Συγκεκριμένα, $I_n^t = I_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, έστω $A = (a_{ij})$ ένας διαγώνιος πίνακας στο $M_n(\mathbb{R})$ (οπότε $a_{ij} = 0$ για $i \neq j$). Έστω $A^t = (\beta_{ij})$.

Για $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ με $i \neq j$ έχουμε

$$\beta_{ij} = a_{ji} = 0.$$

Επίσης, $\beta_{ii} = a_{ii}$ για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$.

Άρα, $A^t = A$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ιδιότητες ανάστροφου πίνακα)

Ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) $(A^t)^t = A$, για κάθε $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(2) $(kA)^t = kA^t$, για κάθε $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ και κάθε $k \in \mathbb{R}$.

(3) $(A+B)^t = A^t + B^t$, για κάθε $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(4) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$, για κάθε $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

Πιο γενικά, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, αν $A_1, A_2, \ldots, A_k$ είναι πίνακες έτσι ώστε το γινόμενο $A_1 A_2 \cdots A_k$ ορίζεται, τότε $(A_1 A_2 \cdots A_k)^t = A_k^t \cdots A_2^t A_1^t$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (1) Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Έστω $A^t = (\beta_{ij})$ και $(A^t)^t = (\gamma_{ij})$. Τότε $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ και $(A^t)^t \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Για $1 \le i \le m$ και $1 \le j \le n$ έχουμε:

$$\gamma_{ij} = \beta_{ji} = a_{ij}.$$

Άρα, $(A^t)^t = A$.

(2) Αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη.

(3) Έστω $A=(\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ και $B=(\beta_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
Έστω επίσης $A^t=(\gamma_{ij})$, $B^t=(\delta_{ij})$, $(A+B)^t=(\varepsilon_{ij})$, και $A^t+B^t=(\zeta_{ij})$, όπου $i=1,\dots,n$ και $j=1,\dots,m$.

Για $1\le i\le n$ και $1\le j\le m$ έχουμε:

$$\varepsilon_{ij} = \alpha_{ji}+\beta_{ji} \quad (= (j,i) \text{ στοιχείο του } A+B)$$

$$= \gamma_{ij}+\delta_{ij} \quad (= (i,j) \text{ στοιχείο του } A^t+B^t)$$

$$= \zeta_{ij}$$

Άρα, $(A+B)^t = A^t+B^t$.

(4) Έστω $A=(\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B=(\beta_{ij}) \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $A^t=(\gamma_{ij})$, $B^t=(\delta_{ij})$, $AB=(\varepsilon_{ij})$, $(AB)^t=(\zeta_{ij})$ και $B^tA^t=(\eta_{ij})$. Τότε $A^t\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B^t\in M_{p\times n}(\mathbb{R})$, $AB\in M_{m\times p}(\mathbb{R})$, $(AB)^t\in M_{p\times m}(\mathbb{R})$ και $B^tA^t\in M_{p\times m}(\mathbb{R})$.

Για $1\le i\le p$ και $1\le j\le m$ έχουμε:

$$\zeta_{ij} = \varepsilon_{ji}$$

$$= \alpha_{j1}\beta_{1i}+\alpha_{j2}\beta_{2i}+\dots+\alpha_{jn}\beta_{ni}$$

$$(= (j\text{-γραμμή } A)\cdot(i\text{-στήλη } B))$$

$$= \gamma_{1j}\delta_{i1}+\gamma_{2j}\delta_{i2}+\dots+\gamma_{nj}\delta_{in}$$

$= \delta_{i1}\gamma_{1j} + \delta_{i2}\gamma_{2j} + \dots + \delta_{in}\gamma_{nj}$

(= (i - γραμμή B^t) $\cdot$ (j - στήλη A^t))

$= \eta_{ij}$.

Άρα, $\delta_{ij} = \eta_{ij}$. Επομένως, $(AB)^t = B^t \cdot A^t$.

Ο δεύτερος ισχυρισμός του (4) αποδεικνύεται με επαγωγή στο k και χρήση του πρώτου ισχυρισμού, και αφήνεται ως άσκηση για τον αναγνώστη. □

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Τότε ο A^t είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο A είναι αντιστρέψιμος. Επιπλέον, $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> ($\Leftarrow$) Έστω ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Έχουμε:

$$A^{-1}A = I_n$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)^t = I_n^t$$

$$\Rightarrow A^t (A^{-1})^t = I_n.$$

Από την τελευταία ισότητα και την άσκηση 1 της 10/11/2020 παίρνουμε ότι ο A^t είναι αντιστρέψιμος και $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

($\Rightarrow$) Έστω ότι ο A^t είναι αντιστρέψιμος.

Έχουμε:

$$(A^t)^{-1} A^t = I_n$$

$$\Rightarrow \left[(A^t)^{-1} A^t\right]^t = I_n^t$$

$$\Rightarrow (A^t)^t \left((A^t)^{-1}\right)^t = I_n$$

$$\Rightarrow A \cdot \left((A^t)^{-1}\right)^t = I_n$$

Από τη τελευταία ισότητα και την άσκηση 1 της 10/11/2020 παίρνουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. □

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Ένας $n \times n$ πίνακας A ονομάζεται:

(1) <u>συμμετρικός</u> αν $A^t = A$.

(2) <u>αντισυμμετρικός</u> αν $A^t = -A$.

(3) <u>ορθογώνιος</u> αν $AA^t = A^t A = I_n$ (δηλαδή, ο A είναι ορθογώνιος αν $A^t = A^{-1}$).

Παρατήρηση (1) Αν $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ είναι συμμετρικός, τότε $a_{ij}=a_{ji}$ για όλα τα $i=1,\dots,n$ και $j=1,\dots,n$ (το οποίο προκύπτει αμέσως από το γεγονός ότι $A^t=A$). Επομένως, σε ένα συμμετρικό πίνακα τα στοιχεία είναι συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο του πίνακα.

(2) Αν $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$ είναι αντισυμμετρικός, τότε $a_{ij}=-a_{ji}$ για όλα τα $i=1,\dots,n$ και $j=1,\dots,n$. Επομένως, σε ένα αντισυμμετρικό πίνακα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι όλα ίσα με μηδέν, αφού για κάθε $i=1,\dots,n$, $a_{ii}=-a_{ii}$ και συνεπώς $a_{ii}=0$.

(3) Κάθε τετραγωνικός πίνακας γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα. Πράγματι, έστω $A\in M_n(\mathbb{R})$. Τότε

$$A=\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t).$$

Ο πίνακας $\frac{1}{2}(A+A^t)$ είναι συμμετρικός:

$$\left[\frac{1}{2}(A+A^t)\right]^t=\frac{1}{2}(A+A^t)^t=\frac{1}{2}\left(A^t+(A^t)^t\right)$$
$$=\frac{1}{2}(A^t+A)$$
$$=\frac{1}{2}(A+A^t).$$

Ο πίνακας $\frac{1}{2}(A - A^t)$ είναι αντισυμμετρικός:

$$\left[\frac{1}{2}(A - A^t)\right]^t = \frac{1}{2}(A - A^t)^t = \frac{1}{2}\left(A^t - (A^t)^t\right)$$

$$= \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t).$$

<u>Παραδείγματα</u> (1) Οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

είναι συμμετρικοί.

(2) Οι πίνακες

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι αντισυμμετρικοί. □

Ασκήσεις

1) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι ο πίνακας AA^t είναι συμμετρικός.

ΛΥΣΗ $(AA^t)^t = (A^t)^t \cdot A^t = AA^t$. $\square$

2) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ αντισυμμετρικοί. Δείξτε ότι ο πίνακας $AB - BA$ είναι αντισυμμετρικός.

ΛΥΣΗ
$$
\begin{aligned}
(AB-BA)^t &= (AB)^t - (BA)^t \\
&= B^tA^t - A^tB^t \\
&= (-B)(-A) - (-A)(-B) \\
&= BA - AB \\
&= -(AB-BA).
\end{aligned}
$$
$\square$

3) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ συμμετρικοί. Δείξτε ότι το γινόμενο AB είναι συμμετρικός πίνακας αν και μόνο αν $AB = BA$

ΛΥΣΗ ($\Rightarrow$) Έστω ότι ο AB είναι συμμετρικός.

Τότε
$$(AB)^t = AB \qquad (1)$$

Επίσης,
$$(AB)^t = B^tA^t = BA \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε $AB = BA$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι $AB = BA$. Έχουμε:

$$(AB)^t = \underset{\substack{\text{υπόθεση} \\ \text{άσκησης}}}{B^t A^t = BA} = \underset{\substack{\text{υπόθεση} \\ (\Leftarrow)}}{AB}.$$

Άρα, AB είναι συμμετρικός. □

4) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ συμμετρικός αντιστρέψιμος πίνακας. Δείξτε ότι ο A^{-1} είναι επίσης συμμετρικός πίνακας.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε:

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A^{-1}.$$

Άρα, ο A^{-1} είναι συμμετρικός. □

<u>Ισοδύναμοι πίνακες</u>

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Τότε οι A και B καλούνται <u>ισοδύναμοι</u> αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in M_m(\mathbb{R})$ και $Q \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιοι ώστε

$$B = PAQ.$$

<u>Παρατήρηση</u> (1) Για κάθε $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ο A είναι ισοδύναμος με τον εαυτό του. ($A = I_m \cdot A \cdot I_n$ και I_m, I_n αντιστρέψιμοι.)

(2) Για κάθε $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, αν $B = PAQ$ για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες P και Q, τότε $A = P^{-1} B Q^{-1}$ (και P^{-1}, Q^{-1} είναι αντιστρέψιμοι).

(3) Για κάθε $A, B, \Gamma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, αν οι A, B είναι ισοδύναμοι και οι B, Γ είναι ισοδύναμοι, τότε και οι A, Γ είναι ισοδύναμοι. (Αν $B = PAQ$ για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες P και Q, και αν $\Gamma = P'BQ'$ για κάποιους αντιστρέψιμους πίνακες P' και Q', τότε $\Gamma = (P'P)A(QQ')$ και $P'P, QQ'$ είναι αντιστρέψιμοι. Άρα, οι A, Γ είναι ισοδύναμοι.)

Παρακάτω, θα δείξουμε ότι κάθε $m\times n$ πίνακας είναι ισοδύναμος με έναν $m\times n$ πίνακα της μορφής

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

Καταρχήν, σημειώνουμε ότι ανάλογα με τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών σε έναν πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, ορίζονται και οι <u>στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών</u> ως

(1) $c_i \to \alpha \cdot c_i$, $\alpha \neq 0$

(2) $c_i \to c_i + \alpha \cdot c_j$

(3) $c_i \leftrightarrow c_j$.

Επίσης, αν $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ τότε ο B λέγεται <u>στηλοϊσοδύναμος</u> με τον A αν προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας μια πεπερασμένη ακολουθία από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών.

<u>Ανάλογα με το Θεώρημα 3 (9/11/2020, σελ. 9)</u> έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Αν ένας $m\times n$ πίνακας B είναι στηλοϊσοδύναμος με έναν $m\times n$ πίνακα A, τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών πινάκων $E_1, E_2, \ldots, E_k$ έτσι ώστε

$$B = A E_1 E_2 \ldots E_k$$

Επομένως, υπάρχει ένας αντιστρέψιμος $n\times n$ πίνακας Q τέτοιος ώστε $B = AQ$ $(Q = E_1 E_2 \ldots E_k)$

Έστω τώρα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Τότε, όπως γνωρίζουμε (βλ. δεύτερο Πόρισμα, 9/11/2020, σελ. 12), υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_k$ έτσι ώστε

$$R_A = E_k \cdots E_2 E_1 A \qquad (1)$$

Θέτοντας $P = E_k \cdots E_2 E_1$, έχουμε ότι ο P είναι αντιστρέψιμος (ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων — οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι) και ότι $R_A = PA$.

Επιπλέον, προφανώς έχουμε ότι

$$P = E_k \cdots E_2 E_1 I_m \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) βλέπουμε ότι <u>ο P προκύπτει από τον I_m εφαρμόζοντας τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών με τη σειρά που χρησιμοποιήθηκαν για να πάρουμε τον R_A από τον A.</u>

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι τα ηγετικά 1 στον R_A εμφανίζονται στις στήλες $j_1, j_2, \dots, j_r$, όπου $j_1 < j_2 < \dots < j_r$. Αφαιρώντας κατάλληλα πολλαπλάσια αυτών των στηλών από στήλες που βρίσκονται μετά από αυτές και εν συνεχεία εναλλάσσοντας τις στήλες $c_1 \leftrightarrow c_{j_1}, c_2 \leftrightarrow c_{j_2}, \dots, c_r \leftrightarrow c_{j_r}$, παίρνουμε ότι ο R_A είναι στηλοϊσοδύναμος με τον πίνακα

$$(*) \qquad N = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

Αν $E_1', E_2', \ldots, E_l'$ είναι οι στοιχειώδεις πίνακες που αντιστοιχούν στους παραπάνω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών που εφαρμόσαμε για να πάρουμε τον N από τον R_A, τότε από το Θεώρημα της σελίδας 11 έχουμε ότι

$$N = R_A E_1' E_2' \ldots E_l' \qquad (3)$$

Θέτουμε $Q = E_1' E_2' \ldots E_l'$. Τότε ο Q είναι αντιστρέψιμος και $\underline{N = R_A Q}$, ή ισοδύναμα (εφόσον $R_A = P \cdot A$)

$$\boxed{N = PAQ}.$$

Επίσης, είναι σαφές ότι

$$Q = I_n \cdot E_1' E_2' \ldots E_l' \qquad (4)$$

Από τις (3) και (4) βλέπουμε ότι <u>ο Q προκύπτει από τον I_n εφαρμόζοντας τους ίδιους μετασχηματισμούς στηλών με τη σειρά που χρησιμοποιήθηκαν για να πάρουμε τον N από τον R_A.</u>

Από τα παραπάνω, παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Για κάθε $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P \in M_m(\mathbb{R})$ και $Q \in M_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε

$$N = PAQ$$

όπου N είναι ο $m\times n$ πίνακας που δίνεται από την (*).

(Επομένως, οι πίνακες A και N είναι ισοδύναμοι).

Ο πίνακας N του παραπάνω θεωρήματος, ο οποίος δίνεται από τον (*), λέγεται η <u>κανονική μορφή</u> του A.

<u>Παράδειγμα</u> Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Θέλουμε να βρούμε αντιστρέψιμους πίνακες $P \in M_3(\mathbb{R})$ και $Q \in M_4(\mathbb{R})$, τέτοιους ώστε

$$PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(4-r)} \\ \hline O_{(3-r)\times r} & O_{(3-r)\times(4-r)} \end{array}\right)$$

για κάποιο $r \leq 3$ (όπου r είναι ο βαθμός του A, όπως είδαμε στη θεωρία παραπάνω).

Από τη θεωρία, για τον ζητούμενο P, ο $P\cdot A$ είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του A και ο P προκύπτει από τον I_3 εφαρμόζοντας τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών με τη σειρά που χρησιμοποιήθηκαν για να πάρουμε τον R_A από τον A.

Εύρεση του $\underline{P}$:

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 3 \end{matrix}}_{A} \left| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_3} \right.\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} \right.\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 \to (-1) r_2} \left(\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix} \right.\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_2]{r_1 \to r_1 - r_2} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{R_A} \left| \underbrace{\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{matrix}}_{\underline{P}} \right.\right)$$

Επομένως,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(και $R_A = P \cdot A$)

<u>Εύρεση του Q:</u>

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{R_A} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_4}\right)$$

$$\xrightarrow[C_4 \to C_4 - C_1]{C_3 \to C_3 - 3C_1} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\xrightarrow[C_4 \to C_4 - C_2]{C_3 \to C_3 + 4C_2} \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{N} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{Q}\right)$$

Επομένως,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & O_{2\times 2} \\ \hline O_{1\times 2} & O_{1\times 2} \end{array}\right)$$

και

$$N = \underbrace{PA}_{\substack{\parallel \\ R_A}} Q .$$

Αν θέλουμε να γράψουμε τον Q ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων, τότε εργαζόμαστε ως εξής:

Έστω $E_1 = e_1(I_4)$, $e_1 = c_3 \to c_3 - 3c_1$

$E_2 = e_2(I_4)$, $e_2 = c_4 \to c_4 - c_1$

$E_3 = e_3(I_4)$, $e_3 = c_3 \to c_3 + 4c_2$

$E_4 = e_4(I_4)$, $e_4 = c_4 \to c_4 - c_2$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τότε $Q = E_1 E_2 E_3 E_4 \; (= e_4(e_3(e_2(e_1(I_4)))))$.

⊛ Σημειώστε ότι για τον Q, οι στοιχειώδεις πίνακες προκύπτουν από τον I_n εφαρμόζοντας έναν στοιχειώδη μετασχηματισμό στηλών. □