ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

ΜΑΘΗΜΑ 2

13/10/2020

<u>ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ</u> Στα παρακάτω, συμβολίζουμε με $\mathbb{K}$ ένα από τα σύνολα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, δηλαδή $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Αν χρειαστεί να αναφερθούμε ιδιαίτερα στο $\mathbb{Q}$, στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$ θα το αναφέρουμε ρητά.

Έστω $m, n \in \mathbb{N}$.

- Με $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $m\times n$ πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{K}$.
- Με $M_n(\mathbb{K})$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $n\times n$ πινάκων με στοιχεία στο $\mathbb{K}$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u> Έστω $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Λέμε ότι ο πίνακας B είναι <u>γραμμοϊσοδύναμος</u> με τον πίνακα A και γράφουμε $B \overset{\text{γραμ}}{\sim} A$ αν ο B μπορεί να προκύψει από τον A εφαρμόζοντας μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

Παράδειγμα Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και έστω

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A διότι μπορεί να προκύψει από τον A εφαρμόζοντας μια ακολουθία που αποτελείται από δύο στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών. Πράγματι,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 5 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

(1) Για κάθε $A \in M_{m \times n}(K)$, $A \overset{\text{γραμ.}}{\sim} A$.

(Αφού ο A μπορεί να προκύψει από τον A εφαρμόζοντας μηδέν το πλήθος (και άρα πεπερασμένο πλήθος) στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.)

(2) Για κάθε $A, B \in M_{m \times n}(K)$, αν $B \overset{\text{γραμ}}{\sim} A$ τότε και $A \overset{\text{γραμ}}{\sim} B$. (Διότι, αν $B \overset{\text{γραμ}}{\sim} A$, τότε ο A μπορεί να προκύψει από τον B εφαρμόζοντας τους αντίστροφους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών των μετασχηματισμών που εφαρμόσαμε για να πάρουμε τον B από τον A. Εφόσον το πλήθος των τελευταίων είναι πεπερασμένο (διότι υποθέσαμε ότι $B \overset{\text{γραμ}}{\sim} A$) έπεται ότι $A \overset{\text{γραμ}}{\sim} B$.)

(3) Για κάθε $A, B, \Gamma \in M_{m \times n}(K)$, αν $A \overset{\text{γραμ}}{\sim} B$ και $B \overset{\text{γραμ}}{\sim} \Gamma$, τότε $A \overset{\text{γραμ.}}{\sim} \Gamma$.

$$\left(\underbrace{\underbrace{\Gamma \rightarrow \cdots \rightarrow B}_{\substack{\text{πεπερασμένο πλήθος} \\ \text{στοιχ. μετ. γρ.}}} \underbrace{\longrightarrow \cdots \longrightarrow A}_{\substack{\text{πεπερασμένο πλήθος} \\ \text{στοιχ. μετ. γρ.}}}}_{\substack{\text{πεπερασμένο πλήθος} \\ \text{στοιχ. μετ. γραμμών}}} . \right)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $A \in M_{m\times n}(K)$ και έστω ότι ο A έχει τουλάχιστον μια μη μηδενική γραμμή.

Το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής του A λέγεται <u>ηγετικό στοιχείο</u> (ή <u>οδηγό στοιχείο</u>) της γραμμής.

Παράδειγμα Έστω

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Ο A έχει δύο μη μηδενικές γραμμές, την πρώτη και την τρίτη. Το ηγετικό στοιχείο της πρώτης γραμμής του A είναι ο αριθμός -1. Το ηγετικό στοιχείο της τρίτης γραμμής του A είναι ο αριθμός 3. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. Ένας $m\times n$ πίνακας A (με στοιχεία στο K, όπου $K \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) ονομάζεται <u>κλιμακωτός πίνακας</u> αν ικανοποιεί τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

(1) το ηγετικό στοιχείο σε κάθε μη μηδενική γραμμή είναι 1,

(2) το ηγετικό 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή βρίσκεται στα δεξιά του ηγετικού 1 της κάθε προηγούμενης γραμμής,

(3) οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται πάνω από τις μηδενικές γραμμές.

Ένας κλιμακωτός πίνακας λέγεται <u>ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας</u> αν

(4) το ηγετικό 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο στη στήλη στην οποία βρίσκεται αυτό το 1.

<u>Παραδείγματα.</u>

1) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας A ικανοποιεί τις ιδιότητες (1), (2) και (3) του παραπάνω ορισμού, και συνεπώς ο A είναι κλιμακωτός πίνακας.

[Το παρακάτω σχήμα δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό "κλιμακωτός".

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

κλίμακα (στα αρχαία ελληνικά, κλίμαξ) = σκάλα.]

Ωστόσο, ο A δεν είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας διότι η ιδιότητα (4) (του παραπάνω ορισμού) δεν ικανοποιείται. Πράγματι, το ηγετικό 1 της τρίτης γραμμής του A δεν είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της έκτης στήλης στην οποία βρίσκεται αυτό το 1, αφού $a_{16} = 6 \neq 0$. □

2) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 42 & \sqrt{2} & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Ο A δεν είναι κλιμακωτός πίνακας, αφού δεν ικανοποιείται η συνθήκη (3) του ορισμού. □

3) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Ο A δεν είναι κλιμακωτός πίνακας αφού δεν ικανοποιείται η συνθήκη (1) του ορισμού (το ηγετικό στοιχείο της πρώτης γραμμής είναι το 4 και $4 \neq 1$)

[Παρατηρείστε ότι ο A δεν ικανοποιεί ούτε τη συνθήκη (3).] $\square$

4) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο A ικανοποιεί τις συνθήκες (1) — (4) (του παραπάνω ορισμού), και συνεπώς ο A είναι ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας. $\square$

5) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

ο A δεν είναι κλιμακωτός πίνακας, αφού δεν ικανοποιείται η συνθήκη (2) του ορισμού. $\square$

Το πρώτο πολύ βασικό θεώρημα στη περιοχή αυτή είναι το ακόλουθο.

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> Για κάθε πίνακα $A \in M_{m \times n}(K)$ υπάρχει ακριβώς ένας $m \times n$ ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας με στοιχεία στο K, ο οποίος είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A.

[Οπότε από την Παρατήρηση (2) της σελίδας 3, έχουμε επίσης ότι κάθε $m \times n$ πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν (μοναδικό) $m \times n$ ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.]

<u>Συμβολισμός</u> Αν $A \in M_{m \times n}(K)$, τότε με R_A συμβολίζουμε τον (μοναδικό) $m \times n$ ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα ο οποίος είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A.

Δοθέντος ενός πίνακα $A \in M_{m \times n}(K)$, η μέθοδος που ακολουθούμε για να βρούμε τον R_A λέγεται <u>ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΤΩΝ GAUSS-JORDAN</u>.

Τα βήματα της μεθόδου αυτής είναι τα ακόλουθα.

ΒΗΜΑ 1 Ξεκίνησε με τη θέση (1,1) του δοθέντος πίνακα.

ΒΗΜΑ 2 Αν αυτή η θέση είναι μη μηδενική, τότε πήγαινε στο ΒΗΜΑ 4.

ΒΗΜΑ 3 Αν αυτή η θέση είναι μηδενική, τότε φέρε ένα μη μηδενικό στοιχείο στη θέση αυτή εναλλάσσοντας αυτή τη γραμμή με κάποια γραμμή παρακάτω. Αν δε μπορείς να φέρεις μη μηδενικό στοιχείο στη θέση αυτή, τότε μετακινήσου μια θέση προς τα δεξιά και πήγαινε στο ΒΗΜΑ 2. Αν δε μπορείς να μετακινηθείς μια θέση προς τα δεξιά, τότε η διαδικασία έχει τερματιστεί.

ΒΗΜΑ 4 Δημιούργησε μονάδα στη θέση αυτή πολλαπλασιάζοντας τη γραμμή επί τον αντίστροφο του αριθμού αυτής της θέσης.

ΒΗΜΑ 5 Δημιούργησε μηδενικά σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις αυτής της στήλης, προσθέτοντας κατάλληλα πολλαπλάσια αυτής της γραμμής στις υπόλοιπες γραμμές.

ΒΗΜΑ 6 Μετακινήσου μια θέση προς τα δεξιά και μια θέση προς τα κάτω και πήγαινε στο ΒΗΜΑ 2. Αν δε μπορείς να μετακινηθείς μια θέση προς τα δεξιά και μια θέση προς τα κάτω, τότε η διαδικασία έχει τερματιστεί. □

Παραδείγματα

1) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο απαλοιφής των Gauss-Jordan για να βρούμε τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα R_A.

Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{4} r_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 - \frac{11}{2} r_2]{r_1 \to r_1 + \frac{1}{4} r_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A$$

□

2) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Θα βρούμε τον R_A. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4 \to r_4 + 2r_1]{\substack{r_2 \to r_2 - 3r_1 \\ r_3 \to r_3 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 \to r_4 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to (-1) r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 \to r_4 - 3r_3]{\substack{r_1 \to r_1 - r_3 \\ r_2 \to r_2 + r_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A.$$

□

3) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Θα βρούμε τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα. Έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{4} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_2]{r_1 \to r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to \left(-\frac{1}{8}\right) r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \to r_2 - 2r_3]{r_1 \to r_1 + 3r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_A \; (= I_3).$$

$\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ (Ισότητα Πινάκων)

Δύο πίνακες $A=(\alpha_{ij})\in M_{m\times n}(K)$ και $B=(\beta_{ij})\in M_{p\times q}(K)$ λέγονται ίσοι και συμβολικά γράφουμε $A=B$, αν $m=p$, $n=q$ και $\alpha_{ij}=\beta_{ij}$ για όλα τα $i=1,\dots,m$ και $j=1,\dots,n$.

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $A,B\in M_{m\times n}(K)$. Τότε ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A αν και μόνο αν $R_A=R_B$, όπου R_A και R_B είναι οι ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες οι οποίοι είναι γραμμοϊσοδύναμοι με τους A και B, αντίστοιχα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. ($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι $B \overset{\gamma\rho\alpha\mu}{\sim} A$. Αφού $R_B \overset{\gamma\rho\alpha\mu}{\sim} B$, από την Παρατήρηση (3) της σελίδας 3 έπεται ότι $R_B \overset{\gamma\rho\alpha\mu}{\sim} A$. Επειδή ο R_A είναι ο μοναδικός ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας ο οποίος είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A, έπεται ότι $R_A=R_B$.

($\Leftarrow$) Υποθέτουμε ότι $R_A=R_B$. Γνωρίζουμε ότι

$$R_A \overset{\gamma\rho\alpha\mu}{\sim} A \qquad (1)$$

και $R_B \overset{\gamma\rho\alpha\mu}{\sim} B$, οπότε και

$$B \overset{\gamma\rho\alpha\mu}{\sim} R_B \qquad (2)$$

Από τις (1), (2) και την υπόθεση ότι $R_A = R_B$ έπεται (από την Παρατήρηση (3) της σελίδας 3) ότι $B \overset{\text{γραμμ.}}{\sim} A$. $\square$

<u>Παράδειγμα</u> Ποιοί από τους παρακάτω πίνακες είναι γραμμοϊσοδύναμοι μεταξύ τους;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Βρίσκουμε πρώτα τους ανηγμένους κλιμακωτούς πίνακες R_A, R_B και R_Γ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{4} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R_A,$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{7} r_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R_B,$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to \left(-\frac{1}{2}\right) r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{9} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R_\Gamma.$$

Εφόσον $R_A \neq R_B$ και $R_A = R_\Gamma$, από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε ότι οι A και Γ είναι γραμμοϊσοδύναμοι, και

και κανένας από τους A και Γ δεν είναι γραμμοϊσο-
δύναμος με τον B.

Να δείξετε πώς προκύπτει ο Γ από τον A εφαρμό-
ζοντας στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.

Από τα παραπάνω έχουμε:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{4} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to 9 r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \to (-2) r_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \Gamma. \qquad \square$$