ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ I

ΜΑΘΗΜΑ 20

11/01/2021

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

#1. Να αποδείξετε ότι κάθε πολυώνυμο $p(x)$ βαθμού n με συντελεστή του x^n ίσο με $(-1)^n$ είναι χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in M_n(K)$. Συγκεκριμένα, αν $p(x) = (-1)^n q(x)$, όπου $q(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, τότε να αποδείξετε ότι ο $n \times n$ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $p(x)$.

ΛΥΣΗ Έχουμε:

$$\det(A - xI_n) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1}-x \end{vmatrix}$$

Μαθήματα 18 και 19: Διαγώνισμα (21/12/2020) και Λύσεις (22/12/2020), αντίστοιχα.

$$c_1 \to c_1 + x c_2 + x^2 c_3 + \dots + x^{n-1} c_n \quad \left| \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -x & 1 \\ -q(x) & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1}-x \end{matrix} \right|$$

→ ανάπτυγμα ως προς τα στοιχεία της $1^{ης}$ στήλης.

$$= (-1)^{n+1}\left(-q(x)\right) \underbrace{\left| \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -x & 1 \end{matrix} \right|}_{\substack{\text{κάτω τριγωνικός και} \\ \text{τα στοιχεία της κύριας} \\ \text{διαγωνίου ίσα με 1.}}}$$

$$= (-1)^n q(x) \cdot 1$$

$$= p(x). \qquad \square$$

#2. Να βρείτε πίνακες A, B, Γ έτσι ώστε

$\chi_A(x) = -x^3 + 2x - 1$, $\chi_B(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$,

$\chi_\Gamma(x) = -x^5 - x^4$.

#3 Έστω $A \in M_3(\mathbb{C})$ με $\chi_A(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$.

(α) Είναι ο A αντιστρέψιμος;

(β) Είναι ο $(A - 3I_3)(A - 4I_3)$ αντιστρέψιμος;

(γ) Υπολογίστε την ορίζουσα του $A^2 - 2A - 15I_3$.

(δ) Να βρείτε το $\chi_{A^2}(x)$.

<u>ΛΥΣΗ</u> (α) όχι, διότι ο σταθερός όρος του $\chi_A(x)$ είναι 0.

(β) Εύκολα βρίσκουμε ότι $\chi_A(x) = -x(x-1)(x-2)$.
Επομένως, οι ιδιοτιμές του A είναι $0, 1, 2$.
Αφού οι $3, 4$ δεν είναι ιδιοτιμές του A, έπεται ότι $\det(A - 3I_3) \neq 0$ και $\det(A - 4I_3) \neq 0$, και συνεπώς $\det[(A-3I_3)(A-4I_3)] = \det(A-3I_3)\det(A-4I_3) \neq 0$.
Άρα, ο πίνακας $(A-3I_3)(A-4I_3)$ είναι αντιστρέψιμος.

(γ) Από την θεωρία έπεται ότι αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A, τότε $\lambda^2 - 2\lambda - 15$ είναι μια ιδιοτιμή του $A^2 - 2A - 15I_3$ (βλ. 7/12/2020, άσκηση 7, σελ. 17).

Εφόσον οι ιδιοτιμές του A είναι οι $0, 1, 2$, έπεται ότι οι ιδιοτιμές του $A^2 - 2A - 15I_3$ είναι οι -15 με πολλαπλότητα 2 και -16 με πολλαπλότητα 1.

Άρα, $\det(A^2 - 2A - 15I_3) = (-15)^2(-16) = -3600$.

Ένας δεύτερος τρόπος επίλυσης του (γ) είναι ο ακόλουθος: Έχουμε

$$\det(A^2 - 2A - 15I_3) = \det((A - 5I_3)(A + 3I_3)) =$$

$$\det(A - 5I_3)\det(A + 3I_3) = \chi_A(5)\,\chi_A(-3) = -3600.$$

(δ) Αφού οι $0, 1, 2$ είναι ιδιοτιμές του A, έπεται ότι οι $0^2, 1^2, 2^2$ είναι ιδιοτιμές του A^2 και αφού ο A^2 είναι 3×3 πίνακας αυτές είναι όλες οι ιδιοτιμές του A^2. Άρα, $\chi_{A^2}(x) = -x(x-1)(x-4)$. $\square$

#4. Έστω $A \in M_n(K)$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας.
Αποδείξτε ότι αν $\chi_A(x) = (-1)^n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$,
τότε $\chi_{A^{-1}}(x) = (-1)^n \left(x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} x + \frac{(-1)^n}{a_0} \right)$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έχουμε:

$$\chi_{A^{-1}}(x) = \det(A^{-1} - x I_n)$$

$a_0 = \det(A) \neq 0$, βλ. Θεώρημα 8/12/2020, σελίδα 8.

$$= \frac{1}{\det(A)} \det(A) \det(A^{-1} - x I_n)$$

$$= \frac{1}{a_0} \det(I_n - x A)$$

$$= \frac{1}{a_0} (-1)^n \det(xA - I_n)$$

$$= \frac{1}{a_0} (-1)^n x^n \det\left(A - \frac{1}{x} I_n\right)$$

$$= \frac{1}{a_0} (-1)^n x^n \left((-1)^n \frac{1}{x^n} + a_{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{1}{x} + a_0 \right)$$

$$= (-1)^n \left(x^n + \frac{a_1}{a_0} x^{n-1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} x + \frac{(-1)^n}{a_0} \right).$$

$\square$

#5. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(α) Να εκφράσετε τον A^{-1} ως γραμμικό συνδυασμό των I_3, A και A^2.

(β) Να αποδείξετε ότι $A^{2006} - 2A^{2005} = A^2 - 2A$.

<u>ΛΥΣΗ</u> (α) Είναι $\chi_A(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$ (ελέγξτε).

Εφόσον ο σταθερός όρος του $\chi_A(x)$ είναι μη μηδενικός, ο A είναι αντιστρέψιμος. Από το Θεώρημα των Cayley - Hamilton έχουμε

$$-A^3 + 2A^2 + A - 2I_3 = O_3$$

$$\Rightarrow -A^2 + 2A + I_3 - 2A^{-1} = O_3$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\left(-A^2 + 2A + I_3\right).$$

(β) Έχουμε

$$-A^3 + 2A^2 + A - 2I_3 = O_3 \Rightarrow A^3 - 2A^2 = A - 2I_3$$

Από την τελευταία ισότητα παίρνουμε:

$$A^4 - 2A^3 = A^2 - 2A$$

$$A^5 - 2A^4 = A^3 - 2A^2 = A - 2I_3$$

$$A^6 - 2A^5 = A^2 - 2A$$

$$\dots$$

Με επαγωγή, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$A^{2n} - 2A^{2n-1} = A^2 - 2A \quad \text{για κάθε } n \geq 2.$$

Άρα, $A^{2006} - 2A^{2005} = A^2 - 2A.$ □

#6. Δίνεται ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα A είναι $\chi_A(x) = -x^3 + 2x - 3$.

Να απλοποιήσετε τη παράσταση $A^6 - 2A^4 + 2A^3 + 3A - 2I_3$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(x) = x^6 - 2x^4 + 2x^3 + 3x - 2$.

Διαιρώντας το $p(x)$ με το $\chi_A(x)$ έχουμε ότι

$p(x) = \chi_A(x)(1 - x^3) + x + 1$. Άρα,

$$A^6 - 2A^4 + 2A^3 + 3A - 2I_3 = p(A) = \chi_A(A)(I_3 - A^3) + A + I_3$$

$$= A + I_3,$$

διότι $\chi_A(A) = O_3$ από το Θεώρημα των Cayley-Hamilton. □

#7. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογίσετε τον πίνακα $A^{10}(A-2I_2)^{11}$.

ΛΥΣΗ Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

$$\det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} -1-x & 2 \\ -2 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 1-x & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix}$$

$$= (1-x)(3-x-2)$$

$$= (1-x)^2$$

$$= x^2 - 2x + 1$$

Από το Θεώρημα των Cayley - Hamilton έχουμε ότι $A^2 - 2A + I_2 = O_2$ ή ισοδύναμα $A(A - 2I_2) = -I_2$.

Άρα,

$$
\begin{aligned}
A^{10}(A-2I_2)^{11} &= A^{10}(A-2I_2)^{10}(A-2I_2)\\
&\overset{\circledast}{=} \big(A(A-2I_2)\big)^{10}(A-2I_2)\\
&= (-I_2)^{10}(A-2I_2)\\
&= A-2I_2\\
&= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

$\circledast$ Παρατηρείστε ότι $A(A-2I_2) = (A-2I_2)A$. $\square$

#8. Έστω $A \in M_3(K)$ με $\chi_A(x) = -x^3 + x$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει ότι

$$
A^n = \begin{cases} A, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ A^2, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}.
$$

#9. Έστω $A \in M_2(K)$ με $\chi_A(x) = x^2 - x$.

Να αποδείξετε ότι $A^n = A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

#10. Σωστό ή λάθος;

(α) Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ίδιες με τις ιδιοτιμές του ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα του A.

(β) Αν $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, τότε $p(I_n) = a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$.

(γ) Αν λ είναι μια ιδιοτιμή του A, τότε ο ιδιοχώρος του A που αντιστοιχεί στη λ είναι το σύνολο των ιδιοδιανυσμάτων του A που αντιστοιχούν στη λ.

(δ) Αν το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A, τότε καμία από τις στήλες του A δεν γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων στηλών του A.

ΛΥΣΗ (α) Λάθος. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τον πίνακα $A = 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Τότε $R_A = I_2$.

Ο πίνακας A έχει ιδιοτιμή το 2 με πολλαπλότητα 2, ενώ ο I_2 έχει ιδιοτιμή το 1 με πολλαπλότητα 2.

(β) Λάθος, διότι το $p(I_n)$ είναι πίνακας ενώ το $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ είναι αριθμός. Η σωστή ισότητα είναι
$$p(I_n) = a_n I_n^n + a_{n-1} I_n^{n-1} + \dots + a_1 I_n + a_0 I_n = (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) I_n.$$

(γ) Λάθος, διότι ο $V(\lambda)$ αποτελείται από τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στη λ, μαζί με το μηδενικό διάνυσμα (και γνωρίζουμε ότι κάθε ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα είναι μη μηδενικό διάνυσμα).

(δ) Σωστό. Καταρχήν, εφόσον το 0 δεν είναι ιδιοτιμή του A, έχουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος.
Άρα, $\det(A) \neq 0$. Έστω $c_1, c_2, \ldots, c_n$ οι n στήλες του A. Αποδεικνύουμε το ζητούμενο με απαγωγή εις άτοπο. Υποθέτουμε ότι για κάποιο j, $1 \leq j \leq n$, η στήλη c_j γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων στηλών του A. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $a_i \in K$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{j\}$, τέτοια ώστε

$$c_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i c_i$$

Έχουμε:

$$\det(A) = \det(c_1\ c_2 \ldots c_j \ldots c_n)$$

$$= \det\left(c_1\ c_2 \ldots \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i c_i \ldots c_n\right)$$

$$\overset{*}{=} a_1 \det(c_1\ c_2 \ldots c_1 \ldots c_n) +$$
$$a_2 \det(c_1\ c_2 \ldots c_2 \ldots c_n) + \ldots +$$

$\alpha_{j-1} \det(c_1\ c_2 \dots c_{j-1}\ c_{j-1}\ c_{j+1} \dots c_n) +$

$\alpha_{j+1} \det(c_1\ c_2 \dots c_{j-1}\ c_{j+1}\ c_{j+1} \dots c_n) +$

$\dots + \alpha_n \det(c_1\ c_2 \dots c_n \dots c_n)$

$\overset{(**)}{=} \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_{j-1} \cdot 0 + \alpha_{j+1} \cdot 0 + \dots + \alpha_n \cdot 0$

$= 0$

Άρα, $\det(A) = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

(*) Για αυτή την ισότητα, χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της γραμμικότητας της ορίζουσας ως προς τις στήλες ενός πίνακα.

(**) Κάθε μια από αυτές τις ορίζουσες είναι ίση με 0 διότι κάθε ένας από τους αντίστοιχους πίνακες έχει δύο ίσες στήλες. $\square$

11. Έστω $A \in M_2(K)$. Να αποδείξετε ότι

$$\chi_A(x) = x^2 - tr(A)x + \det(A).$$

<u>ΛΥΣΗ</u> Έστω

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha_{11} - x)(\alpha_{22} - x) - \alpha_{21}\alpha_{12}$$

$$= x^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})x + (\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})$$

$$= x^2 - tr(A)x + \det(A). \qquad \square$$

\# 12. Ισχύει το εξής αποτέλεσμα: Έστω $A \in M_n(K)$ και $\chi_A(x) = (-1)^n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_0$.
Τότε $\alpha_0 = \det(A)$ και $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1} tr(A)$.

(Τη πρώτη ισότητα την αποδείξαμε στο μάθημα 8/12/2020, σελίδα 8.)

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα, να αποδείξετε ότι αν $A \in M_n(\mathbb{C})$ και $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A, τότε $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$.

ΛΥΣΗ Έχουμε

$$\chi_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n)$$
$$= (-1)^n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές του x^{n-1} έχουμε $(-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n) = \alpha_{n-1}$. Από το παραπάνω αποτέλεσμα έχουμε ότι $a_{n-1} = (-1)^{n-1} tr(A)$.

Άρα, $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$. $\square$

#13. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$, όπου ο n είναι περιττός. Δείξτε ότι ο A έχει τουλάχιστον μια πραγματική ιδιοτιμή.

<u>ΛΥΣΗ</u>. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$ του A είναι περιττού βαθμού (αφού ο βαθμός του είναι n και ο n είναι περιττός) και έχει συντελεστές από το $\mathbb{R}$. Άρα, το $\chi_A(x)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\mathbb{R}$ (βλ. Απειροστικό Λογισμό 1). $\square$

#14. Γνωρίζουμε ότι αν $A \in M_n(K)$, τότε οι A, A^t έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. Να δώσετε ένα παράδειγμα ενός A που έχει ένα ιδιοδιάνυσμα το οποίο δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του A^t.

<u>ΛΥΣΗ</u> Θεωρούμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Το διάνυσμα $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A, ενώ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα του $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\square$

#15 Έστω $\alpha, b \in K$. Βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τους ιδιοχώρους του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & b & b & \cdots & b \\ b & \alpha & b & \cdots & b \\ b & b & \alpha & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & \alpha \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

#16. Έστω $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(K)$ τέτοιος ώστε για κάθε $j = 1, \ldots, n$, ισχύει $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} = 1$.

Να αποδείξετε τα ακόλουθα:

(α) Υπάρχει μη μηδενικό $u \in M_{n\times 1}(K)$ τέτοιο ώστε

$Au = u$

(β) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = (b_{ij})$, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$, ισχύει $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 1$

<u>ΛΥΣΗ</u> Το 1 είναι ιδιοτιμή του A^t διότι

$$A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Αφού οι A, A^t έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές, έπεται ότι το 1 είναι ιδιοτιμή του A. Άρα, υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα $u \in M_{n\times 1}(K)$ τέτοιο ώστε $Au = u$.

(β) Έχουμε:

$$A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left[A^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right]^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}^t$$

$$\Rightarrow (1\ 1 \ldots 1) A = (1\ 1 \ldots 1)$$

$$\Rightarrow (1\ 1 \ldots 1) A^{-1} = (1\ 1 \ldots 1) \quad (*)$$

Αν $A^{-1} = (b_{ij})$, τότε από την $(*)$ παίρνουμε ότι $\sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 1$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$. $\square$

#17. Ισχύει ότι αν λ είναι ιδιοτιμή του $A \in M_n(K)$ και το μ είναι ιδιοτιμή του $B \in M_n(K)$, τότε το $\lambda\mu$ είναι ιδιοτιμή του AB;

<u>ΛΥΣΗ</u> Όχι. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Έχουμε $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Το 1 είναι ιδιοτιμή των A και B. Όμως, το $1 = 1 \cdot 1$ δεν είναι ιδιοτιμή του AB. □

#18. Έστω $A \in M_n(K)$. Να αποδείξετε ότι $m_A(x) = m_{A^t}(x)$.

<u>ΛΥΣΗ</u> Έστω $q(x) = \alpha_m x^m + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$.

Έχουμε:

$$\begin{aligned} q(A^t) &= \alpha_m (A^t)^m + \ldots + \alpha_1 A^t + \alpha_0 I_n \\ &= \alpha_m (A^m)^t + \ldots + \alpha_1 A^t + \alpha_0 I_n^t \\ &= (\alpha_m A^m + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n)^t \\ &= (q(A))^t \end{aligned}$$

Επομένως,

$$q(A^t) = (q(A))^t \qquad (1)$$

Παρόμοια,

$$q(A) = \left(q(A^t)\right)^t \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε ότι

$$q(A) = O_n \text{ αν και μόνο αν } q(A^t) = O_n \qquad (3)$$

Από την (3) και το αποτέλεσμα της θεωρίας:

" Το ελάχιστο πολυώνυμο $m_X(x)$ ενός $X \in M_n(K)$ διαιρεί κάθε πολυώνυμο $p(x)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη $p(X) = O_n$" έπεται ότι το $m_A(x)$ διαιρεί το $m_{A^t}(x)$ και το $m_{A^t}(x)$ διαιρεί το $m_A(x)$. Άρα, $m_A(x) = m_{A^t}(x)$. □