

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

#1. Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Να αποδείξετε ότι οι πίνακες AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές. (Έστω λ ιδιοτιμή του AB και $\theta \neq 0$ λ ιδιοτιμή του BA . Διακρίνω δύο περιπτώσεις:

(α) $\lambda = 0$

(β) $\lambda \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή εργαζόμαστε με τον αριθμό.

Παρόμοια, λ ιδιοτιμή $BA \Rightarrow \lambda$ ιδιοτιμή AB).

#2. Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & \alpha & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ και έστω $u = (1, 1, 0)$.

Να βρεθούν οι τιμές του α για τις οποίες το διάνυσμα u είναι ιδιοδιάνυσμα του A .

#3. Να αποδείξετε ότι οι ιδιοτιμές ενός άνω (ή κάτω) τριγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι τα διαγώνια στοιχεία του A .

#4. Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ όπου $a_{ij} = 1$ για όλα τα $i=1, \dots, n$ και όλα τα $j=1, \dots, n$. Επίσης, βρείτε το ελάχιστο πολυώνυμο.

#5. Έστω οι πίνακες

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

και έστω τα διανύσματα

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ποιά είναι ιδιοδιανύσματα του A_1 και ποιά του A_2 ; Σε κάθε περίπτωση βρείτε την ιδιοτιμή.

#6. Υψαιε. κω ιωοαιμεο, ιωοιαιανυθρακα, ιωοιαιωθροοο
εω παρακάτω ηινάκων:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -5 \\ 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & -2 \\ -7 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

#7. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ και έστω $P \in M_n(\mathbb{R})$ ένας αναιερεθριμοο
πινάκαο. Δείξεε όα οι ηινάκεο A και $P^{-1}AP$ έχουν εοο
ίδιοο ιωοαιμέο.

#8. Με κατάλληλο αναπαράδειγμα βρείτε ιωοιαιάνυθρα
ενόο ηινάκα $A \in M_n(\mathbb{R})$ που δεν είναι ιωοιαιάνυθρα του A^t .

#9 Σωοτό ή λάθοο;

- (1) Κάθε $n \times n$ πινάκαο έχει παραγμαοαικέο ιωοαιμέο
- (2) Κάθε $n \times n$ πινάκαο έχει n διακεκριμένεο (πιδανόν
μιαθικέο) ιωοαιμέο
- (3) Κάθε $n \times n$ πινάκαο έχει n όχι αναπαράιαικα διακεκριμένεο
και ηιδανόν μιαθικέο ιωοαιμέο.
- (4) Αν u είναι ιωοιαιάνυθρα του A , τότε u είναι
ιωοιαιάνυθρα του $A + c \cdot I_n$, για όλα τα $c \in \mathbb{R}$.
- (5) Αν λ είναι ιωοιαιμή του A , τότε λ είναι ιωοιαιμή
του $A + c \cdot I_n$, για όλα τα $c \in \mathbb{R}$.
- (6) Αν u είναι ιωοιαιάνυθρα ενόο αναερεθριμοο πινάκα A ,
τότε $c \cdot u$ είναι ιωοιαιάνυθρα του A^{-1} για όλα τα $c \neq 0$.

(7) Αν ένας 3×3 πίνακας έχει ιδιοτιμές $1, 1, 2$, τότε ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

(8) Αν οι ιδιοτιμές ενός πίνακα A είναι $-1, 1, 2$, τότε $\det(A^{-1})^t = -\frac{1}{2}$.

#10. Να υπολογίσετε τα $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ω τα διανύσματα $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ είναι ιδιοδιανύσματα του A . Να βρείτε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του A . Ποιές είναι οι ιδιοτιμές του A^4 ;

#11 Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$.

Να εκφράσετε τους πίνακες A^{-2} και A^5 ως συναρτήσεις των A και I_2 .

#12. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και το ελάχιστο πολυώνυμο του A .

(ii) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές του B^{-1} , όπου $B = A^3 + 4A^2 - 5I_5$.

#13 Να βρεις έναν πίνακα A με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 7\lambda - 4$$

Αντιγράφεται ο A ; Αν ναι, ποιά είναι ο A^{-1} ;

#14. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Να βρεις τον πίνακα $B = 3 \cdot A^{2005} - 6A + I_3$.

#15. Να γίνουν όλες οι "Ασκήσεις για τον αναχνώστη" που διατυπώθηκαν στις Διαλέξεις γι' αυτό το κεφάλαιο.