

ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

1) Να βρεθούν οι ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες των παρακάτω πινάκων:

$$(α) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & -8 & 11 & 12 \end{pmatrix},$$

$$(β) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 3 & -4 \\ 4 & -8 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(γ) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & -4 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$(δ) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

2) Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν οι πίνακες A και B είναι γραμμοίσοδύναμοι. Αν είναι, τότε να δείξετε αναλυτικά πώς προκύπτει ο ένας από αυτούς από τον άλλον εφαρμόζοντας μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

$$(α) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 & 10 \\ 2 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(β) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3) Να εξετάσετε αν τα παρακάτω δύο συστήματα είναι ισοδύναμα.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases} .$$

4) Έστω

$$A(k) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

Για ποιές τιμές του $k \in \mathbb{R}$ ισχύει $R_{A(k)} = I_3$;

5) Να λύσετε το παρακάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z + 2w = 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6w = 5 \\ 3x + 4y - 5z + 2w = 4 \end{cases}$$

6) Να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες το παρακάτω σύστημα με αγνώστους x, y και z έχει:

(α) μοναδική λύση (β) καμία λύση (γ) άπειρο πλήθος λύσεων.

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$$