Ασκήσεις

1) Να υπολογιστεί η ορίζουσα του ακόλουθου $n\times n$ πίνακα A, όπου $x\in\mathbb{R}$:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Λύση Αν αναπτύξουμε την ορίζουσα $|A_n|$ ως προς την πρώτη γραμμή, τότε έχουμε:

$$|A_n| = (1+x^2)\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Η παραπάνω ορίζουσα είναι $(n-1)\times(n-1)$. Παρατηρούμε ότι η πρώτη ορίζουσα είναι η αρχική που ξεκινήσαμε αλλά διάστασης $(n-1)\times(n-1)$ και αν αναπτύξουμε τη δεύτερη ορίζουσα ως προς την πρώτη στήλη, τότε έχουμε:

$$|A_n| = (1+x^2)\,|A_{n-1}| - x^2\,|A_{n-2}| \qquad (1)$$

Για να καταλάβουμε ποια είναι η τιμή της ορίζουσας $|A_n|$, ξεκινάμε πρώτα υπολογίζοντας τις παρακάτω ορίζουσες:

$|A_1| = 1+x^2$

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^2 - x^2 = 1+2x^2+x^4-x^2 = 1+x^2+x^4.$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)\begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} x & 0 \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (1+x^2)(1+x^2+x^4) - x^2(1+x^2) = 1+x^2+x^4+\cancel{x^2}+\cancel{x^4}+x^6-\cancel{x^2}-\cancel{x^4} =$$

$$= 1+x^2+x^4+x^6.$$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς θα δείξουμε με Μαθηματική Επαγωγή ότι:

$$|A_n| = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}, \quad n \geq 1. \quad (*)$$

1. Για $n=1$, η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει αφού $|A_1| = 1+x^2$
2. <u>Υπόθεση Επαγωγής</u>: Έστω ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιο $k \leq n$, δηλαδή δεχόμαστε ότι:

$$|A_k| = 1+x^2+\dots+x^{2k}.$$

3. Θα δείξουμε ότι η ζητούμενη σχέση $(*)$ ισχύει για $k=n+1$. Έχουμε:

$$|A_{n+1}| \overset{(1)}{=} (1+x^2)\cdot|A_n| - x^2|A_{n-1}| = (1+x^2)(1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}) -$$

$$- x^2(1+x^2+\dots+x^{2(n-1)}) = 1+\cancel{x^2}+\cancel{x^4}+\dots+\cancel{x^{2n}}+x^2+x^4+\dots+x^{2n+2}-x^2-x^4-\dots-x^{2n}$$

$$= 1+x^2+\dots+x^{2n+2}.$$

Επομένως, έχουμε $|A_n| = 1+x^2+x^4+\dots+x^{2n}, \ \forall n \geq 1.$

2] Έστω A και B $n\times n$ πίνακες τέτοιοι ώστε ο πίνακας $I_n-(AB)^2$ να είναι αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι ο πίνακας $\left(I_n-(BA)^2\right)$ είναι αντιστρέψιμος και

$$\left(I_n-(BA)^2\right)^{-1} = I_n + B\left(I_n-(AB)^2\right)^{-1}ABA.$$

<u>Λύση</u> Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\left(I_n-(BA)^2\right)\cdot\left[I_n + B\left(I_n-(AB)^2\right)^{-1}ABA\right] = I_n$$

ή

$$\left[I_n + B\left(I_n-(AB)^2\right)^{-1}ABA\right]\cdot\left(I_n-(BA)^2\right) = I_n.$$

Θα έχουμε:

$$\left(I_n-(BA)^2\right)\cdot\left[I_n + B\left(I_n-(AB)^2\right)^{-1}\cdot ABA\right] =$$

$$= I_n + B\left(I_n-(AB)^2\right)^{-1}ABA - (BA)^2 - (BA)^2 B\cdot\left(I_n-(AB)^2\right)^{-1}ABA =$$

$$= \underline{I_n} + B\left(I_n-(AB)^2\right)^{-1}ABA \underline{-(BA)^2} - BA\cdot BA\cdot B\left(I_n-(AB)^2\right)^{-1}ABA =$$

$$= I_n-(BA)^2 + \underline{B}\left(I_n-(AB)^2\right)^{-1}\underline{ABA} - \underline{B}(AB)^2\left(I_n-(AB)^2\right)^{-1}\underline{ABA} =$$

$$= I_n-(BA)^2 + B\left[\underline{\left(I_n-(AB)^2\right)^{-1}} - (AB)^2\underline{\left(I_n-(AB)^2\right)^{-1}}\right]ABA =$$

$$= I_n-(BA)^2 + B\underbrace{\left(I_n-(AB)^2\right)\left(I_n-(AB)^2\right)^{-1}}_{=\,I_n}\cdot ABA =$$

(αφού ο $I_n-(AB)^2$ είναι αντιστρέψιμος)

$$= I_n-(BA)^2 + B\,I_n\,ABA =$$

$$= I_n-(BA)^2 + (BA)^2 =$$

$$= I_n.$$

3] Να υπολογίσετε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & 1+a_1b_3 \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & 1+a_2b_3 \\ 1+a_3b_1 & 1+a_3b_2 & 1+a_3b_3 \end{vmatrix}$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & 1+a_1b_3 \\ 1+a_2b_1 & 1+a_2b_2 & 1+a_2b_3 \\ 1+a_3b_1 & 1+a_3b_2 & 1+a_3b_3 \end{vmatrix} \xrightarrow[\gamma_3 \to \gamma_3 - \gamma_1]{\gamma_2 \to \gamma_2 - \gamma_1} \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_1b_2 & 1+a_1b_3 \\ (a_2-a_1)b_1 & (a_2-a_1)b_2 & (a_2-a_1)b_3 \\ (a_3-a_1)b_1 & (a_3-a_1)b_2 & (a_3-a_1)b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2-a_1)\cdot(a_3-a_1)\cdot \begin{vmatrix} 1+a_1b_1 & 1+a_2b_2 & 1+a_1b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

4] Αν ένας από τους πίνακες $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ είναι αντιστρέψιμος, τότε να δειχθεί ότι:

$$|A\cdot B + I_n| = |B\cdot A + I_n|.$$

Λύση. Έστω ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε έχουμε:

$$|AB+I_n| = |AB + AA^{-1}| = |A(B+A^{-1})| = |A|\cdot|B+A^{-1}| =$$

$$= |B+A^{-1}|\cdot|A| = |(B+A^{-1})\cdot A| = |BA + A^{-1}A| = |BA+I_n|.$$

Όμοια δείχνουμε το ζητούμενο αν ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος:

$$|AB+I_n| = |AB + B^{-1}B| = |(A+B^{-1})B| = |A+B^{-1}|\cdot|B| = |B|\cdot|A+B^{-1}| =$$

$$= |B\cdot(A+B^{-1})| = |BA + B\cdot B^{-1}| = |BA+I_n|.$$

5) Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Να δειχθεί ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και στη συνέχεια να υπολογισθεί ο A^{-1}.

(1) με χρήση του συμπληρωματικού $\operatorname{adj} A$ του A.

(2) με τη μέθοδο στοιχειωδών μετασχηματισμών επί των γραμμών του πίνακα $(A | I_3)$.

Λύση. Καταρχήν, αφού $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

έπεται ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς υπάρχει πίνακας A^{-1} έτσι ώστε $A^{-1} \cdot A = I_n = AA^{-1}$, τον οποίο βρίσκουμε παρακάτω με δύο τρόπους:

1] $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj}(A)$, όπου $\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}$

και $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, $i,j = 1,2,3$. Θα έχουμε:

$C_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $C_{12} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$,

$C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$, $C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$,

$C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$, $C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$, $C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$

Επομένως $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2] Έχουμε:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[r_1 \to r_1 - 2r_2]{r_3 \to r_3 + 2r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{2} r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \to r_2 - r_3]{r_1 \to r_1 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$ και άρα έπεται ότι:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$