Ασκήσεις

1] Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n > 1$, να βρείτε τη n-οστή δύναμη του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Λύση Για να καταλάβουμε την περιγραφή του A^n, ξεκινούμε πρώτα κάνοντας τους παρακάτω πολλαπλασιασμούς:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1+2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1+2+3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1+2+3+4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Στον Απειροστικό Λογισμό Ι μάθατε ότι $1+2+3+\dots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς πινάκων, ισχυριζόμαστε ότι

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

και θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας με Μαθηματική Επαγωγή:

- Για $n=1$, και λαμβάνοντας υπόψη ότι $A^1 = A$, έχουμε ότι η $(*)$ προφανώς ισχύει.
- Υποθέτουμε ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και θα αποδείξουμε ότι η $(*)$ ισχύει και για τον $n+1$.

Έχουμε:

$$A^{n+1}=A^n\cdot A=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n\cdot(n+1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & n+1 & \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}\\ 0 & 1 & n+1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=1+n+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{2(n+1)+n\cdot(n+1)}{2}=\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}.$$

Το επαγωγικό βήμα ολοκληρώθηκε. Από την αρχή της επαγωγής η $(*)$ ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Άρα, για κάθε $n\in\mathbb{N}$ με $n>1$, η n-οστή δύναμη του A είναι ο πίνακας $A^n=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n+1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2] Έστω $A\in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A^4-A^3+A^2-A+I_n=O_{n\times n}$

Να αποδείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=-A^4$.

Λύση. Έχουμε: $A^4-A^3+A^2-A+I_n=O_{n\times n}\Rightarrow$

$$\Rightarrow -A^4+A^3-A^2+A=I_n \quad (1)$$

$(1)\Rightarrow A(-A^3+A^2-A+I_n)=I_n$ και

$(1)\Rightarrow (-A^3+A^2-A+I_n)\cdot A=I_n$

Άρα, ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = -A^3 + A^2 - A + I_n$.

Από τη δοθείσα σχέση $A^4 - A^3 + A^2 - A + I_n = 0_{n \times n}$

έχουμε $-A^3 + A^2 - A + I_n = -A^4$.

Άρα, $A^{-1} = -A^4$.

3] Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τον 3×3 πίνακα

$$V(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

α) Να αποδείξετε ότι: $V(x) \cdot V(y) = V(x+y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογισθεί ο πίνακας $V(x)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι: $\forall x \in \mathbb{R}$, ο πίνακας $V(x)$ είναι αντιστρέψιμος.

δ) Να υπολογισθεί ο $V(x)^{-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

<u>Λύση</u> Έστω $x, y \in \mathbb{R}$.

$$V(x) \cdot V(y) = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^x\cdot e^y+0\cdot 0+0\cdot 0 & e^x\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0 & e^x\cdot 0+0\cdot y+0\cdot 1 \\ 0\cdot e^y+1\cdot 0+x\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 1+x\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot y+x\cdot 1 \\ 0\cdot e^y+0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot y+1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = V(x+y)$$

β). Από το ερώτημα (α) βλέπουμε ότι αν $x\in\mathbb{R}$, τότε

$$(V(x))^2 = V(x)\cdot V(x) = V(x+x) = V(2x)$$

$$(V(x))^3 = (V(x))^2\cdot V(x) = V(2x)\cdot V(x) = V(2x+x) = V(3x).$$

$$(V(x))^4 = (V(x))^3\cdot V(x) = \dots = V(4x).$$

κ.λ.π.

Ισχυριζόμαστε λοιπόν ότι για $x\in\mathbb{R}$,

$$(*) \quad (V(x))^n = V(nx) \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

και αποδεικνύουμε τον ισχυρισμό μας με επαγωγή.

• Για $n=1$, $V(x)^1 = V(x)$ προφανώς ισχύει (και όπως είδαμε παραπάνω η $(*)$ ισχύει και για $n=2,3,4$. Τα τεσταρίσματα με τα $n=2,3,4$ τα κάναμε για να δούμε αν μπορούμε να βγάλουμε έναν τύπο για το $V(x)^n$, τον οποίο αποδεικνύουμε με επαγωγή).

• Υποθέτουμε ότι η $(*)$ ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή υποθέτουμε ότι $(V(x))^n = V(nx)$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και αποδεικνύουμε ότι η $(*)$ ισχύει για τον $n+1$, δηλαδή αποδεικνύουμε ότι

$$(V(x))^{n+1} = V((n+1)\cdot x).$$

Έχουμε:

$$(V(x))^{n+1} = \underbrace{(V(x))^n \cdot V(x) = V(nx)}_{\text{Υπόθεση επαγωγής}} \cdot V(x) \overset{\text{μέρος (α)}}{=}$$

$$V(nx+x) = V((n+1)\cdot x).$$

Το επαγωγικό βήμα ολοκληρώθηκε. Από την αρχή της επαγωγής η $(*)$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η n-οστή δύναμη του $V(x)$ είναι ο πίνακας $V(x)^n = V(nx) = \begin{pmatrix} e^{nx} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & nx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

γ) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Από το μέρος (α) έχουμε:

$$V(x)\cdot V(-x) = V(x+(-x)) = V(0) = \begin{pmatrix} e^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= I_3.$$

και $V(-x)\cdot V(x) = V((-x)+x) = V(0) = I_3$.

Άρα, $V(x)\cdot V(-x) = V(-x)\cdot V(x) = I_3$ (1)

και συνεπώς ο πίνακας $V(x)$ είναι αντιστρέψιμος.

(δ) Από τη σχέση (1) του ερωτήματος (γ), έχουμε αμέσως ότι $V(x)^{-1} = V(-x)$.

4] Αν ο $n\times n$ πίνακας επαληθεύει την ισότητα $A^2+A+I_n = O_{n\times n}$ να αποδείξετε ότι:

i) ο A είναι αντιστρέψιμος.

ii) $A^{41} + A^{22} + I_n = O_{n\times n}$.

iii) $(I_n + A)^{11} = I_n + A^{53}$.

Λύση

i) $A^2 + A + I_n = O_{n\times n} \Rightarrow -A^2 - A = I_n$ (1)

$(1) \Rightarrow A(-A-I_n) = I_n$.

$(1) \Rightarrow (-A-I_n)\cdot A = I_n$.

Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = -A - I_n$.

ii) Αφού $A^{-1} = -A - I_n$ και $A^2 = -A - I_n$ (από τη δοθείσα σχέση $A^2 + A + I_n = O_{n\times n}$) έχουμε ότι $A^2 = A^{-1}$. Οπότε $A^3 = A^2\cdot A = A^{-1}\cdot A = I_n$.

Έτσι θα έχουμε: $A^{41} + A^{22} + I_n = A^{39}\cdot A^2 + A^{21}\cdot A + I_n =$

$$=(A^3)^{13}\cdot A^2+(A^3)^7\cdot A+I_n=I_n^{13}\cdot A^2+I_n^7\cdot A+I_n=$$

$$=A^2+A+I_n=O_{n\times n}.$$

iii) $$(I_n+A)^{11}\ \underset{\overline{}}{\overset{A^2+A+I_n=O_{n\times n}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}}\ (-A^2)^{11}=-A^{22}=-A^{21}\cdot A=$$

$$=-(A^3)^7\cdot A=-I_n^7\cdot A=-A.\quad (\alpha)$$

$$I_n+A^{53}=I_n+A^{51}\cdot A^2=I_n+(A^3)^{17}\cdot A^2=$$

$$=I_n+I_n^{17}\cdot A^2=I_n+A^2=-A\quad (\beta).$$

Από (α) και (β) προκύπτει η ζητούμενη ισότητα:

$$(I_n+A)^{11}=I_n+A^{53}$$

5] Έστω J_n ο $n\times n$ πίνακας κάθε στοιχείο του οποίου ισούται με 1. Να αποδείξετε ότι αν $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ τότε

$$(I_n-J_n)^{-1}=I_n-\frac{1}{n-1}J_n\ ,\ \text{όπου}$$

I_n είναι ο $n\times n$ ταυτοτικός πίνακας.

Λύση Αν αποδείξουμε ότι $(I_n-J_n)\cdot\left(I_n-\frac{1}{n-1}J_n\right)=$

$=\left(I_n-\frac{1}{n-1}J_n\right)\cdot(I_n-J_n)=I_n$, τότε το πρόβλημα λύθηκε. Ας αποδείξουμε την πρώτη ισότητα.

Έχουμε: $(I_n - J_n)\cdot\left(I_n - \frac{1}{n-1}J_n\right) \underset{\substack{\text{επιμεριστική} \\ \text{ιδιότητα}}}{=\!=\!=} I_n^2 - \frac{1}{n-1} I_n J_n -$

$- J_n \cdot I_n + \frac{1}{n-1} J_n^2 = I_n - \frac{1}{n-1} J_n - J_n + \frac{1}{n-1} J_n^2 =$

$= I_n - \frac{n}{n-1} J_n + \frac{1}{n-1} J_n^2 \quad (*)$.

Όμως,

$$J_n^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{1+1+\cdots+1}^{n \text{ προσθεταίοι}} & 1+1+\cdots+1 & \cdots & 1+1+\cdots 1 \\ 1+1+\cdots+1 & 1+1+\cdots+1 & \cdots & 1+1+\cdots 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+1+\cdots 1 & 1+1+\cdots+1 & \cdots & 1+1+\cdots 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix} =$$

$= n \cdot J_n$

Επομένως, από την $(*)$,

$$(I_n - J_n)\cdot\left(I_n - \frac{1}{n-1}J_n\right) = I_n - \frac{n}{n-1} J_n + \frac{n}{n-1} J_n = I_n.$$

Ομοίως αποδεικνύεται (αφήνεται σαν άσκηση για το σπίτι) ότι

$\left(I_n - \frac{1}{n-1} J_n\right)\cdot(I_n - J_n) = I_n$.

Επομένως, αποδείχθηκε ότι ο αντίστροφος του $I_n - J_n$ είναι ο $I_n - \frac{1}{n-1} J_n$, δηλαδή ότι

$$(I_n - J_n)^{-1} = I_n - \frac{1}{n-1} J_n .$$