Ασκήσεις

1] Να βρεθούν οι ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες των παρακάτω πινάκων.

α) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, β) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

γ) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, δ) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Λύσεις (Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο απαλοιφής των Gauss-Jordan)

α) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{3} r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 + r_2]{r_1 \to r_1 + r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & -8/3 & -1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \frac{-3}{8} r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -5/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 \to r_1 - \frac{1}{3} r_3]{r_2 \to r_2 + \frac{5}{3} r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 15/24 \\ 0 & 1 & 0 & -1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/8 \end{pmatrix} = \ell_A .$$

---

b)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{2} r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5/2 & 3/2 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3 \to r_3 - 4r_1 \\ r_4 \to r_4 - 2r_1}]{r_2 \to r_2 - 6r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \left(-\frac{1}{5}\right) r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -10 & -5 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 \to r_3 + 5r_2 \\ r_4 \to r_4 + 2r_2}]{r_1 \to r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ell_B$$

γ)

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 4 & 7 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{4} r_1} \begin{pmatrix} 1 & 7/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7/4 & -1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - \frac{7}{4} r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -23/8 & -35/8 & -3/8 \\ 0 & 1 & 3/2 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \to r_1 + \frac{23}{8} r_3]{r_2 \to r_2 - \frac{3}{2} r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -58/8 & -89/8 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -11/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = R_r$$

δ)

$$\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{3} r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_5 \to r_5 - 5r_1]{r_3 \to r_3 - 4r_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1/3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -8/3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 \to r_3 + \frac{1}{3} r_2 \\ r_5 \to r_5 + \frac{8}{3} r_2}]{r_1 \to r_1 - \frac{1}{3} r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{E}_\Delta$$

2] Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετασθεί αν ο πίνακας B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον πίνακα A. Για κάθε περίπτωση, αν ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A, να δείξετε πώς προκύπτει από τον A.

α)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

β)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

γ)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Λύσεις

Θα βασιστούμε στην <u>πρόταση</u>: Έστω $A, B \in M_{m \times n}(K)$. Τότε ο B είναι γραμμοϊσοδύναμος με τον A αν και μόνο αν $R_A = R_B$, όπου R_A και R_B είναι οι ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες, οι οποίοι είναι γραμμοϊσοδύναμοι με τους A και B, αντίστοιχα.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{4} r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 - 2r_3]{r_1 \to r_1 + r_3}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_A$

$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{3} r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_1}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 + \frac{2}{3} r_2]{r_1 \to r_1 + \frac{1}{3} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 - \frac{1}{2} r_3]{r_1 \to r_1 - \frac{1}{2} r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho_B .$$

Επειδή $\rho_A = \rho_B$ ο $B \overset{\text{γραμ.}}{\sim} A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \rho_A = \rho_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 + \frac{1}{2} r_3]{r_1 \to r_1 + \frac{1}{2} r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - \frac{2}{3} r_2]{r_1 \to r_1 - \frac{1}{3} r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to 2 r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \to 3r_1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = B$$

β)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_2]{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \left(-\frac{1}{4}\right) r_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1 \to r_1 - 3r_3]{r_2 \to r_2 - 2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = K_A.$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 + 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to (-1)r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 + r_2]{r_1 \to r_1 - 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ell_B.$$

$$\ell_B \neq \ell_A \Rightarrow B \overset{\text{γραμ.}}{\not\sim} A$$

γ) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{3} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_2]{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ell_A$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ell_B$$

$$\ell_A = \ell_B \Rightarrow B \overset{\text{γραμ.}}{\sim} A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & -2 & 7 \end{pmatrix} \to \cdots \to \ell_A = \ell_B \xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_2} B$$

3] Να αποδείξετε ότι αν $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, τότε ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ είναι ο I_2, δηλαδή ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Απόδειξη. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις: είτε $\alpha = 0$, είτε $\alpha \neq 0$.

Στην πρώτη περίπτωση, δηλαδή $\alpha = 0$, έχουμε αναγκαστικά ότι $\beta \neq 0$ και $\gamma \neq 0$ (αφού από την υπόθεση $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ και $\alpha = 0$, έπεται ότι $-\beta\gamma \neq 0$, άρα $\beta \neq 0$ και $\gamma \neq 0$).

Ο αρχικός πίνακας είναι λοιπόν ο πίνακας $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ και έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{\gamma} r_1} \begin{pmatrix} 1 & \delta/\gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{\beta} r_2} \begin{pmatrix} 1 & \delta/\gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - \frac{\delta}{\gamma} r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Στη δεύτερη περίπτωση, δηλαδή $\alpha \neq 0$, έχουμε:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to \frac{1}{\alpha} r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha} \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - \gamma r_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\beta}{\alpha} \\ 0 & \underbrace{\delta - \frac{\beta\gamma}{\alpha}}_{= \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha}} \end{pmatrix}.$$

Επειδή $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ (υπόθεση) συνεχίζουμε από τον τελευταίο πίνακα και έχουμε:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha} \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\alpha}} r_2} \begin{pmatrix} 1 & \beta/\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - \frac{\beta}{\alpha} r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα σε κάθε περίπτωση ο ανηγμένος κλιμακωτός είναι ο $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.