ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Έστω πίνακας επιβίωσης – θανάτου

Χρόνος Επιβίωσης h_i	Αριθμός ασθενών που επιζούν στην αρχή του διαστήματος n_i	Αριθμός θανάτων d_i	Εκτιμηθείσα Συνάρτηση Επιβίωσης S(t)	
0-1	256	167	1=256/256	S(0)
1-2	89	48	0.347=89/256	S(1)
2-3	41	23	0.16=41/256	S(2)
3-4	18	6	0.07=18/256	S(3)
4-5	12	3	0.047=12/256	S(4)
5-6	9	6	0.035=9/256	S(5)
6-7	3	1	0.012=3/256	S(6)
7-8	2	1	0.008=2/256	S(7)
8-9	1	1	0.004=1/256	S(8)
9+	0	0	0=0/256	S(9)

Είναι φανερό ότι S(0)=1, για t=0 αφού όλοι οι ασθενείς είναι ζωντανοί. Μετά ένα χρόνο ασθένειας βρίσκονται στην ζωή 89 και συνεπώς S(1)=89/256=0.347. Μετά 2 χρόνια ασθένειας 41 ασθενείς βρίσκονται στην ζωή και S(2)=0.16. Έτσι η εκτιμηθείσα πιθανότητα ένας ασθενής να ζήσει τουλάχιστον 2 χρόνια είναι 0.16. Προκύπτει ότι S(0)=1, S(t) είναι φθίνουσα και S(∞)=0.

Για να εκτιμήσουμε την h(t) χρησιμοποιούμε τον εμπειρικό εκτιμητή σύμφωνα με τον οποίο ο αριθμός των θανάτων ανά μονάδα χρόνου μέσα σε κάποιο διάστημα διαιρείται με τον μέσο αριθμό επιζώντων στο μέσο σημείο του διαστήματος

$$\widehat{h}\left(t_{m_i}\right)=\frac{d_i}{h_i\left(n_i-{d_i}/{2}\right)}$$

όπου t_{mi} το μέσο των κλάσεων $[t_i , t_{i+1}]$, d_i αριθμός θανάτων, n_i αριθμός ζώντων, στο διάστημα $[t_i , t_{i+1}]$, h_i το εύρος.

Η εκτιμηθείσα συνάρτηση κινδύνου κατά την διάρκεια του πρώτου χρόνου είναι:

$$\widehat{h}(0.5)=\frac{167}{\left(256-{167}/{2}\right)}=0.968$$

Κατά την διάρκεια του δευτέρου έτους

$$\hat{h}(1.5) = \frac{48}{\left(89 - 48/2\right)} = 0.738$$

Ο συνήθης εκτιμητής του h(t) είναι ο αριθμός των θανάτων ανά μονάδα χρόνου στο διάστημα, διαιρούμενος δια του αριθμού των επιζώντων στην αρχή του διαστήματος, δηλ

$$\hat{h}(1) = \frac{167}{256} = 0.652$$

είναι η εκτιμηθείσα h(t) στο τέλος του πρώτου χρόνου.

2. Η συνάρτηση κινδύνου h(t) του χρόνου ζωής t ενός οργανισμού δίνεται από τον τύπο

$$h(t) = \frac{\lambda}{t}, \lambda > 0$$

Να υπολογισθεί η S(t), f(t). Να μελετηθεί η S(t) ως προς την μονοτονία και να βρεθεί με την βοήθεια λ, m, n η πιθανότητα p(T≥λ/m)

Η S(t) είναι πάντα φθίνουσα.

$$H(t) = \int_m^t h(x)dx = \int_m^t \frac{\lambda}{x}dx = \lambda\int_m^t \frac{1}{x}dx = \lambda \ln x\Big|_m^t = \lambda \ln t - \lambda \ln m = \ln\left(\frac{t}{m}\right)^{\lambda}$$

$$S(t) = e^{-H(t)} = e^{-\ln\left(\frac{t}{m}\right)^{\lambda}} = e^{\ln\left(\frac{m}{t}\right)^{\lambda}} = \left(\frac{m}{t}\right)^{\lambda}$$

$$S(t) = p(T \geq t) = p\left(T \geq \frac{\lambda}{m}\right) = S\left(\frac{\lambda}{m}\right) = \left(\frac{m}{\frac{\lambda}{m}}\right)^{\lambda} = \left(\frac{m^2}{\lambda}\right)^{\lambda}$$

3. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα ενός ατόμου να ζήσει περισσότερο από $t_1 + t_2$ έτη δεδομένου ότι έχει ζήσει περισσότερο από t έτη είναι ίση με την πιθανότητα να ζήσει περισσότερο από t_2 έτη. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση επιβίωσης είναι $S(t) = e^{-\lambda t}$ και βρείτε την συνάρτηση κινδύνου h(t)

Ισχύει

$$p(T > t_1 + t_2 \mid T > t_1) = p(T > t_2) \Rightarrow \frac{p(T > t_1 + t_2) \cap p(T > t_1)}{p(T > t_1)} = p(T > t_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p(T > t_1 + t_2)}{p(T > t_1)} = p(T > t_2) \Rightarrow \frac{S(t_1 + t_2)}{S(t_1)} = S(t_2) \Rightarrow S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2)$$

Θα βρούμε την

$$h(t)=\frac{f(t)}{S(t)}=\frac{-S'(t)}{S(t)}$$

Αλλά

$$S(t)=e^{-\lambda t}=S'(t)=\left(e^{-\lambda t}\right)'=-\lambda e^{-\lambda t}\Rightarrow -S'(t)=\lambda e^{-\lambda t}$$

Επομένως

$$h(t)=\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}}\Rightarrow h(t)=\lambda$$

Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι από $S(t_1+t_2)=S(t_1)S(t_2)$ βγάζουμε $S(t)=e^{-\lambda t}$
Αν $S(t)=a^{\lambda t}$ τότε $S(t_1+t_2)=a^{\lambda(t_1+t_2)}$ με $S(t_1)=a^{\lambda t_1}$ και $S(t_2)=a^{\lambda t_2}$
Επειδή η S(t) είναι συνάρτηση επιβίωσης η

$$f(t)=-S'(t)=\left(a^{\lambda t}\right)'=-\lambda a^{\lambda t}\ln a$$

Άρα έχουμε

$$F(t)=\int_0^{+\infty} f(t)dt=1\Rightarrow\int_0^{+\infty}\left(-\lambda a^{\lambda t}\ln a\right)dt=1\Rightarrow\lambda\ln a\int_0^{+\infty}\left(a^{\lambda t}\right)dt=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\lambda}{\lambda}\ln a\int_0^{+\infty}\left(a^{\lambda t}\right)(d\lambda t)=-1\Rightarrow\ln a\frac{\left(a^{\lambda t}\right)}{\ln a}\Big|_0^{+\infty}=-1\Rightarrow\lim_{t\to+\infty}a^{\lambda t}-a^0=-1\Rightarrow-1=-1$$

Άρα το λ=-1 θα πρέπει να είναι αρνητικό.