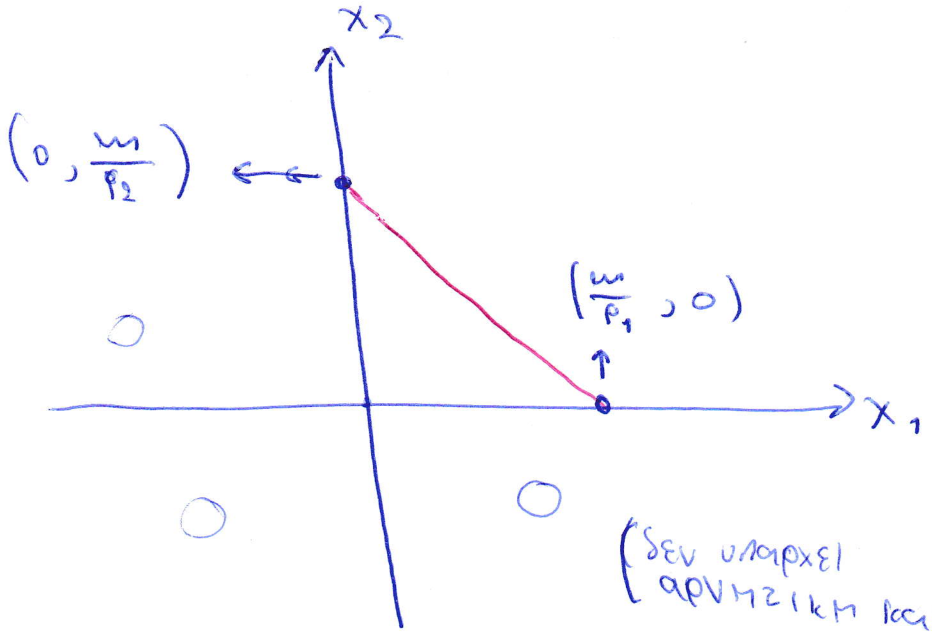


x_1, x_2 δυο αγαθα υπο κατανάλωση

(δεν υπαρχει αρνητικη κατανάλωση)

με p_1, p_2 οι τιμες ανα μοναδα κατανάλωσης των αγαθων x_1, x_2 αντιστοιχα

$p = (p_1, p_2)$

$X = (x_1, x_2)$ (κατανάλωση)

ενα εσ. γινομενο

$\underbrace{p \cdot X}_{\text{το κοστος κατανάλωσης}} = p \cdot w$

$w = (w_1, w_2)$

w: πλουτος του ατομου

(w_1, w_2): πως μοιραζει τον πλουτο στα δυο αγαθα

$m = p \cdot w$ (χρημ. μον.)

συν. προυπολογισμου $\rightarrow B(p, w) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_+ \mid px = pw \right\}$

②

$U: \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$

Κάθε διανομή κατανάλωσης: $(x_1, x_2) \to \underbrace{U(x_1, x_2)}$ αντιστοιχεί συν. σε κάποια ωφελιμότητας

Μεγιστοποιούμε την $U(x_1, x_2)$ αν $(x_1, x_2) \in \underbrace{B(p, \omega)}_{\text{σύνολο προϋπολογισμού}}$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B(p, \omega)$ ~~η σειρά~~ τω. $x_n \to x$ τότε το $x \in B(p, \omega)$

Το φράγμα προϋπολογισμού: $\left[0, \frac{m}{p_1}\right] \times \left[0, \frac{m}{p_2}\right]$

$x_1 \in$ $x_2 \in$

Συναρτήσεις Ωφελιμότητας

1η) γραμμική συνάρτηση ωφελιμότητας)

- $U(x_1, x_2) = a x_1 + b x_2$ με $a > 0, b > 0$

Αντιστοιχεί σε υποκατάστατα αγαθά. (πχ βενζίνη BP με shell)

2η) Cobb - Douglas

- $U(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$ (*) όπου $a > 0, b > 0$

Αντιστοιχεί πάλι σε υποκατάστατα

(*) $x_1^a = e^{a \log x_1}$

Γιατί η Cobb-Douglas αντιστοιχεί σε υποκατάσταση?

Διότι Αν

$g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ είναι 1-1

U: συν. ωφελιμότητας

$U \circ g = V$ άρα γραμμικοποιείται με $V(x) = \log x$

(V μια άλλη συν. ωφελ. Cobb-Douglas)

3η περίπτωση (Leontieff)

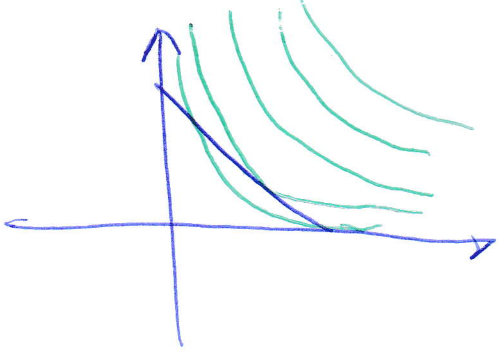
Κάθε συνάρτηση τις μορφής

$$U(x_1, x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\} \quad \text{με } \alpha, \beta > 0$$

εκφράζει συμπληρωματικά αγαθά (τσιγάρο - αναπτήρας του καρατζά)

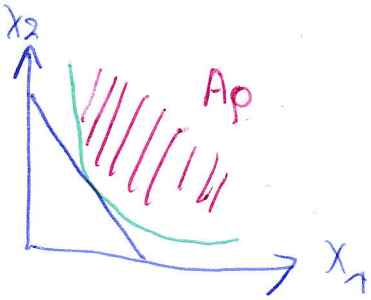
Καμπύλη αδιαφορίας

$$I_p = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid U(x_1, x_2) = p\}$$



δηλαδή όπου p είναι ένα συγκεκριμένο επίπεδο ωφελιμότητας. Πάνω στην ίδια καμπύλη, έχω την ίδια ωφελιμότητα.

Μας ενδιαφέρουν οι ιδιότητες του συνόλου των καμπυλών αδιαφορίας:



Με ενδιαφέρει π.χ. αν είναι κυρτή ή παραγωγίσιμη κ.τ.λ. . Μας ενδιαφέρει για να βρούμε την μορφή που έχει το διάνυσμα καταναλώσεως που μεγιστοποιεί την ωφελιμότητα.

Το πρόβλημα του καταναλωτή:

$$\max\{\underbrace{x_1^a\, x_2^b}_{\text{Cobb-Douglas}} \mid p_1x_1 + p_2x_2 = m\}$$

$$U(x_1, x_2) = \rho = x_1^a x_2^b \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x_2^b = \frac{\rho}{x_1^a} \Rightarrow x_2 = \sqrt[b]{\frac{\rho}{x_1^a}} = f(x_1)$$

$f'(x_1) > 0$ (αύξουσα) $\quad f''(x_1) < 0$ (κοίλη)

Όταν οι καμπύλες αδιαφορίας είναι κοίλες τότε οι συν. ...

$$\boxed{\rho = \frac{m - p_1x_1}{p_2}}$$

ευθείες

$$x(p_1, p_2) = (x_1(p_1,p_2), x_2(p_1,p_2)) =$$

$$= \left(\frac{am}{p_1}, \frac{bm}{p_2}\right)$$ (↑ μεγ. την ωφελιμότητα Cobb-Douglas)

Μια τέτοια συνάρτηση (που μεγ. την ωφελ.) καλείται <u>συνάρτηση ζήτησης</u>.

Έστω οι καταναλωτές $\{1,2,\dots,I\}$ θέλουν να μεγ. την συν. ωφελιμότητας τους.

$$m_i = p_1 w_1^i + p_2 w_2^i \quad \text{για } i=1,2,\dots,I$$

με $w^i=(w_1^i, w_2^i)$

<u>Συνάρτηση ζήτησης</u>

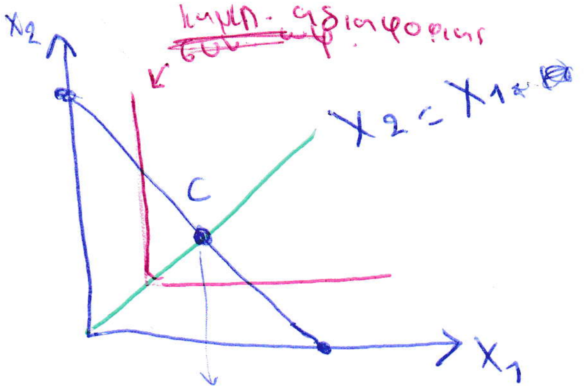
$$\sum_{i=1}^{I} x^i(p_1,p_2) - \underbrace{\sum_{i=1}^{I} w^i}_{\text{ο συνολικός πλούτος}} = \underbrace{z(p_1,p_2)}_{\text{συνάρτηση υπερ. ζήτησης}}$$

z : συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης.

Αν $z(p_1,p_2)=(0,0)$ κάθε τέτοιο διάνυσμα καλείται διάνυσμα ισορροπίας. (συμβολίζω αυτές τις τιμές με p_1^*, p_2^*)

4) Τέλεια συμπληρωματικά αγαθά (συν. ωφελ.)

$$U(x_1,x_2)=\min\{x_1,x_2\}$$



$$C = \left(\frac{m}{p_1+p_2}, \frac{m}{p_1+p_2}\right)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(C,C) όπου $\underbrace{p_1 \cdot C}_{x_1} + \underbrace{p_2 C}_{x_2} = m$ άρα το

$$C = \frac{m}{p_1+p_2}$$

$$U(x_1,x_2) = \min\{x_1, x_2\} = \rho$$

Ισχύει

$$\min\{x_1,x_2\} = \frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|\right) = \rho$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $x_1 \geq x_2$ □

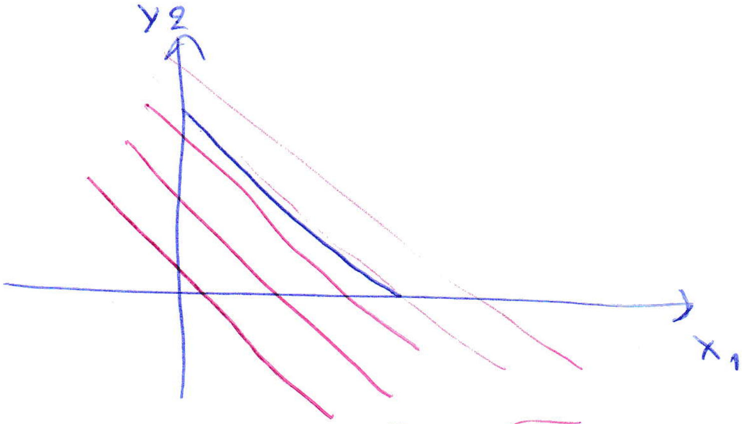
ε) $U(x_1,x_2) = \min\{\alpha x_1, \beta x_2\}$ $\alpha, \beta > 0$

(αλλά συμπληρωματικά)

θέτω

y_1, y_2

$y_1 = \alpha x_1$ $\quad y_2 = \beta x_2$ (πάλι (L) οι καμπύλες αδιαφορίας)



συν. ωφελ. της μορφης:

$$U(x_1, x_2) = \underbrace{a}_{p_1} x_1 + \underbrace{\beta}_{p_2} x_2 =$$ (γραμμικη συν. ωφελ για γενικευμενα συμπληρ.)

$= m = p$

~~$(w_1, w_2, \dots, w_I)$~~ (οι πλουτοι I ατομων)

$$(w^1, w^2, \dots, w^I)$$

$(x^1, x^2, \dots, x^I)$ ← διανυσματα καταναλωσης

$$\cancel{\sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} w^i}$$

① $A_w: \left\{ x = (x^1, x^2, \dots, x^I) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{I} x^i = \sum_{i=1}^{I} w^i \right\}$ $x^i \in R^2_+$ για καθε $i = 1, 2, \dots, I$

οταν $x^i = x^i(p_1^*, p_2^*)$ τοτε η οικονομια βρισκεται σε ισορροπια

② $A_w = \left\{ x = (x^1, \dots, x^I) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{I} x^i = \sum_{i=1}^{I} w^i \right\}$

$w = (w^1, w^2, \ldots, w^I)$

Ορισμος 1: Μια κατανομη $y \in A_w$ βελτιωνει την $x \in A_w$ αν $U^i(y^i) \geq U^i(x^i)$ για καθε $i = 1, 2, \ldots, I$

ii) βελτιωνει γνησια αν ισχυει ο ορισμος 1 και επιπλεον $U^j(y^j) > U^j(x^j)$ για καποιον καταναλωτη J

$x \in A_w$

- Αυτες οι κατανομες που δεν βελτιωνουν ολες ονομαζονται ασθενως βελτιστες κατανομες κατα Pareto.

- Αυτες που δεν βελτιωνουν γνησια καλουνται βελτιστες κατα Pareto

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ 20/10/2021

2ο ΜΑΘΗΜΑ (1)

Μαθηματικα Οικονομικα: 138306
Στοχ Μοντελ. : 718901

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκηση 1) Εστω Δυο αγοραι
$$U_1(x,y) = x^2 y$$
$$U_2(x,y) = x y^2$$
μορφη ~~Cobb~~ Cobb-Douglas

Ο αρχικος πλουτος του 1: $w_1 = (1,1)$
2: $w_2 = (1,1)$

Η συναρτηση ζητησεως των 1 και 2 και η ισορροπια αν ειχαμε $a+b=1$ θα ηταν

$$X_1(p_1,p_2) = \left(\frac{2(p_1+p_2)}{p_1}, \frac{1\cdot(p_1+p_2)}{p_2}\right)$$ ← συν. ζητησης του καταναλωτη 1

$$X_2(p_1,p_2) = \left(\frac{p_1+p_2}{p_1}, \frac{2(p_1+p_2)}{p_2}\right)$$ ← συν. ζητησης του κατ. 2

Συναρτηση υπερβαλουσας ζητησης:

$$Z(p_1,p_2) = \left(\frac{3(p_1+p_2)}{p_1}, \frac{3(p_1+p_2)}{p_2}\right) - \underbrace{(2,2)}_{\text{συν. πλουτος}} =$$

Όταν έχω Cobb-Douglas

$x^a y^b$ τότε $\left(\frac{am}{p_1}, \frac{bm}{p_2}\right)$ όταν δεν

έχω $a+b=1$ τότε διαιρώ μετά $a+b$ δύναμη

$(x^a y^b)^{1/a+b}$

Άρα $U_1(x,y) = x^{2/3} y^{1/3}$ (αόριστοι λόγοι υποκατάστασης) και

$U_2(x,y) = x^{1/3} y^{2/3}$

Επομένως $\xrightarrow{\text{η ζήτηση}} x_1(p_1,p_2) = \left(\frac{2(p_1+p_2)}{3p_1}, \frac{(p_1+p_2)}{3p_2}\right)$

και $x_2(p_1,p_2) = \left(\frac{p_1+p_2}{3p_1}, \frac{2(p_1+p_2)}{3p_2}\right)$

Η συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης:

$$z(p_1,p_2) = \left(\frac{3(p_1+p_2)}{3p_1}, \frac{3(p_1+p_2)}{3p_1}\right) - \left(\frac{6p_1}{3p_1}, \frac{6p_2}{3p_2}\right)$$

συν. ποσότητες $(2,2)$

$$= \left(\frac{3p_2-3p_1}{3p_1}, \frac{3p_1-3p_2}{3p_2}\right)$$

(όταν $p_1 = p_2$ έχουμε ισορροπία)

(*) Διότι $z(p_1^*, p_2^*) = (0,0)$

Για κάθε p της μορφής $p=(t,t)$, $t>0$ έχουμε ισορροπία. ∎

Άσκηση 2 Έστω 2 καταναλωτές με συν. ζήτησης Leontief:

$$U_1(x,y)=\min\{x,y\}, \quad w_1=(1,1)$$

$$U_2(x,y)=\min\{x,y\}, \quad w_2=(2,1)$$

Λύση

Η συν. ζήτησης του $1^{ου}$ καταναλωτή

$$X_1(p_1,p_2,w_1)=\left(\frac{p_1\cancel{w_1}+p_2\cancel{w_2}}{p_1+p_2}, \frac{p_1\cancel{w_1}+p_2\cancel{w_2}}{p_1+p_2}\right)=$$

$$=(1,1)=w_1$$

$$X_2(p_1,p_2,w_2)=\left(\frac{2p_1+p_2}{p_1+p_2}, \frac{2p_1+p_2}{p_1+p_2}\right)$$

Η συνάρτηση υπερβάλλουσας ζήτησης:

$$z(p_1,p_2)=\cancel{\left(\frac{3p_1+2p_2}{p_1+p_2}, \frac{}{p_1+p_2}\right)}$$

$$=\cancel{X^1(p_1,p_2,w_1)}+X_2(p_1,p_2,w_2)-\cancel{(w_1},w_2)=$$

$$=X_2(p_1,p_2,w_2)-w_2=$$

$$=\left(\frac{2p_1+p_2}{p_1+p_2}, \frac{2p_1+p_2}{p_1+p_2}\right)-(2,1)=$$

$$=\left(\frac{2p_1+p_2}{p_1+p_2}, \frac{2p_1+p_2}{p_1+p_2}\right)-\left(\frac{2(p_1+p_2)}{p_1+p_2}, \frac{p_1+p_2}{p_1+p_2}\right)=$$

$$= \left(-\frac{p_2}{p_1+p_2} \, , \, \frac{p_1}{p_1+p_2} \right) = (0,0)$$

$$p \cdot z(p) = (p_1, p_2) \cdot \left(\frac{-p_2}{p_1+p_2} \, , \, \frac{p_1}{p_1+p_2} \right) =$$

$$= \left(\frac{-p_1 p_2 + p_1 p_2}{p_1+p_2} \right) = 0$$

$$\boxed{p \cdot z(p) = 0 \text{ (Νομος Walras)}}$$

Να βρεθουν οι τιμες (p) για τις οποιες

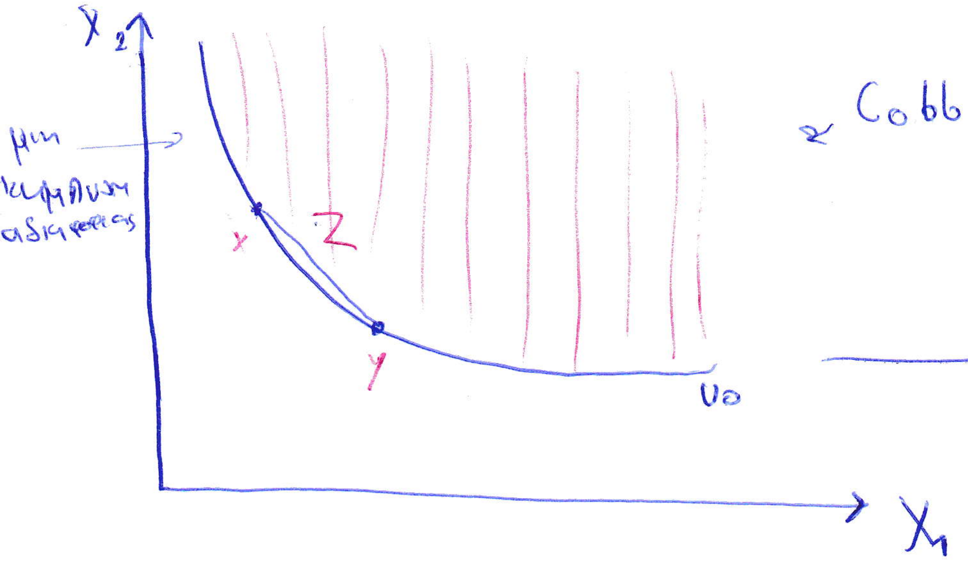
$$p^* \cdot z(p^*) = 0 \iff p^* \Big(\sum_{i=1}^{I} x_i(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{διανυσμα} \\ \text{τιμων}}}{p^*}) - \sum_{p=1}^{I} w_i \Big) = 0$$

Με p^* ειναι η τιμη ισορροπιας

1ο Θεωρημα Ευημεριας

Καθε κατανομη ισορροπιας ειναι αριστη κατα Pareto αν οι συν. ωφελιμοτητας των καταναλωτων $u^i : R^2_+ \to R$ ειναι συνεχεις και αυστηρα κοιλες

5



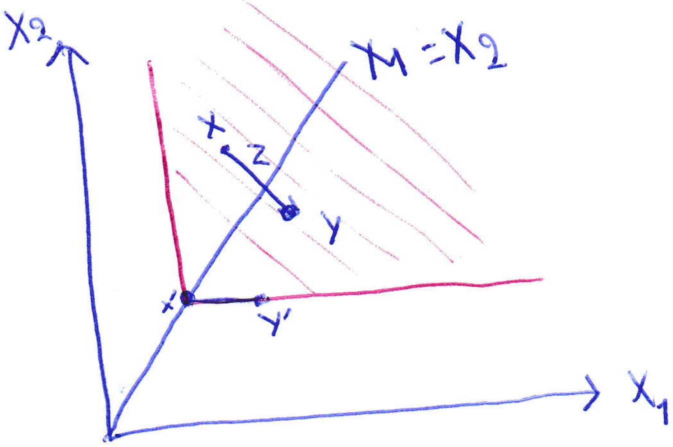
← Cobb - Douglas

$$\{x \in \mathbb{R}^2_+ \mid U(x) = U(x_1, x_2) \geq U_0\}$$

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y \, , \quad \lambda \in [0,1]$$

Ορισμός Κοιλότητας:

$$U(z) \geq \lambda U(x) + (1-\lambda) U(y) \quad \text{για } \lambda \in [0,1]$$



$U(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$

Είναι κοίλοι πάντα η z στην συν. ωφελ. Leontieff? ~~Όχ~~

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Όχι πάντα

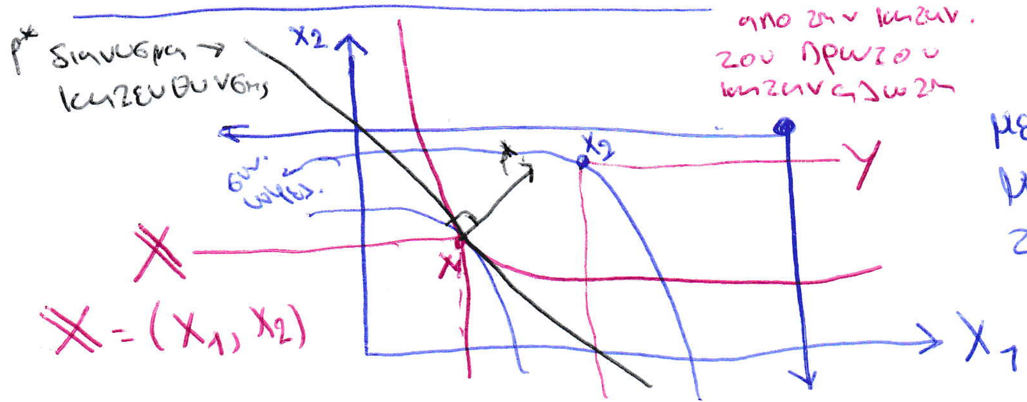
πχ $x' - y'$

Κουτί το Edgeworth

ένα σύνολο μεγαλύτερης ωφ. από την καμπ. του πρώτου καταναλωτή

$\omega = \omega_1 + \omega_2$

με το που βάζω μια επιλογή για τον ένα βάζω και για τον άλλο



$X = (x_1, x_2) = (x_1, \omega - x_1)$

$Y = (\omega - x_2, x_2)$

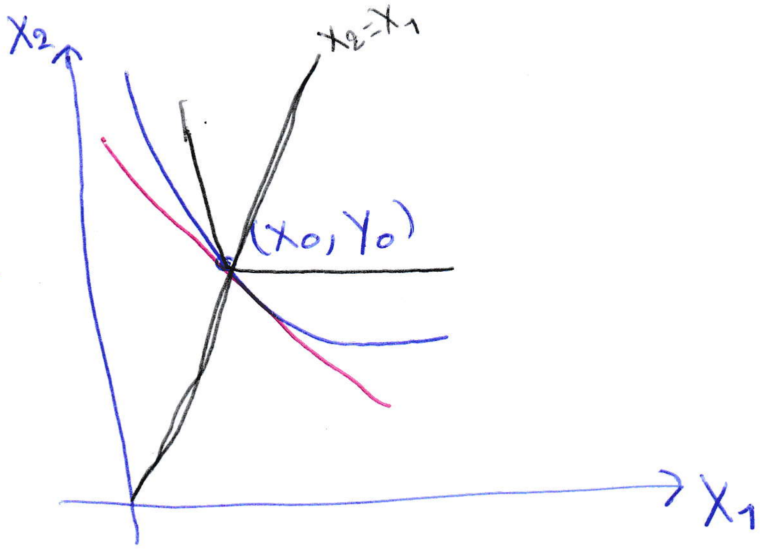
Στο τελευταίο σχήμα έχουμε ότι εκεί που τέμνονται η κόκκινη και η μπλε (συν. ωφελ.) είναι άριστη κατά Pareto επιλογή

$$\boxed{p^* = \nabla U^1(x_1) = \nabla U^2(\omega - x_1)}$$

(x, y) $\quad \nabla U^1(x, y) = \nabla U^2(\omega_1 - x, \omega_2 - y)$

Contract Curve (καμπύλη συμφωνίας)

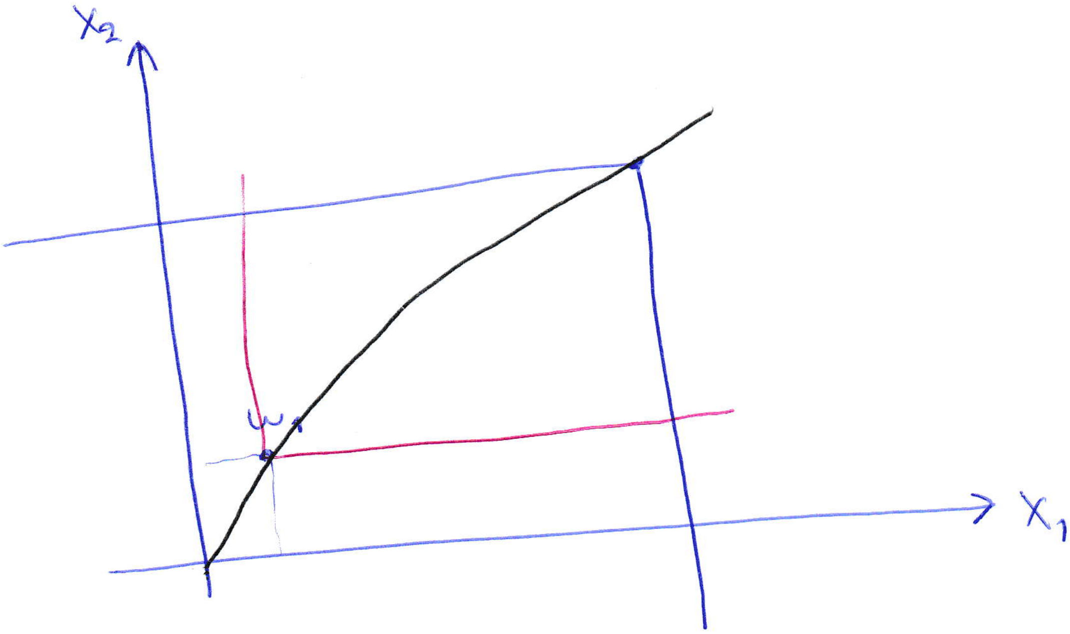
Το $\quad \nabla U(x_0, Y_0) := \left(\frac{\partial}{\partial x} U(x_0, Y_0), \frac{\partial}{\partial y} U(x_0, Y_0)\right)$



$U(x, y) = x^a y^b$, $x, y > 0$ και $a, b > 0$ με $a + b = 1$

$U_1^a(x, y) = U_2^a(x, y) = \min\{x, y\}$

ω_1, ω_2 ο πλούτος του 1 και 2 αντίστοιχα.



Αν $w_1 = w_2$ – τέλεια συμπληρωματικά Leontiff

Η συν. ωφελιμότητας $U : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ ονομάζεται αυστηρά κοίλη αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^2_+$ και $\lambda \in (0,1)$ ισχύει:

$$U(\lambda x + (1-\lambda) y) > \lambda U(x) + (1-\lambda) U(y)$$

Πρόταση

Η $U : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \to \underbrace{x_1^a x_2^b}_{\text{Cobb-Douglas}}$ με $a, b \in \mathbb{N}$

είναι αυστηρή κοίλη.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Έστω $(\underbrace{x_1, x_2}_{x}), (\underbrace{y_1, y_2}_{y}) \in \mathbb{R}^2_+$ δύο διανύσματα κατανάλωσης.

$\lambda x + (1-\lambda) y = \cancel{(\lambda x_1, \lambda x_2}$

$= (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1, \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow U(\lambda x + (1-\lambda) y) = (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1)^a (\lambda x_2 + (1-\lambda) y_2)^b >$$

$$> \cancel{\lambda x_1^a x_1^b}\ \lambda^a x_1^a \lambda^b x_2^b + (1-\lambda)^a y_1^a (1-\lambda)^b y_2^b \quad (*)$$

δηλαδή εφαρμόσατε $\begin{matrix} a > b \\ \gamma > \delta \end{matrix} \Rightarrow a\gamma > b\delta$ (για $a, b, \gamma, \delta > 0$)

Έχουμε ότι $\lambda^a x_1^a \lambda^b x_2^b = \lambda^{a+b} x_1^a x_2^b = U(x)$

και $(1-\lambda)^a y_1^a (1-\lambda)^b y_2^b = (1-\lambda)^{a+b} y_1^a y_2^b = U(y)$

Αρα από *, θέτω $g(x) = x^{1/(a+b)}$, όπου $x \in R_+$. (2)

Αφού η $g'(x) = \frac{1}{a+b} x^{\frac{1}{a+b}-1} > 0$

Αρα

~~U(λx + 1 − λ~~

$$\boxed{g(\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1)^a (\lambda x_2 + (1-\lambda) y_2)^b > \cancel{\lambda^a x_1^a \lambda^b x_2^b} > g(\lambda^{a+b} x_1^a x_2^b + (1-\lambda)^{a+b} y_1^a y_2^b)}$$

(1)

(2)

Δηλαδή

$g(1) > g(2)$

Αρα $g(1)^{1/(a+b)} > g(2)^{1/(a+b)}$

Όσο.

$$\lambda^{a+b} x_1^a x_2^b + (1-\lambda)^{a+b} y_1^a y_2^b > \lambda x_1^{a/(a+b)} x_2^{b/(a+b)} + (1-\lambda) y_2^{b/(a+b)}$$

αφού $z > w \Rightarrow g(z) > g(w)$ (αφού $g \uparrow$)

Διωνυμικό ανάπτυγμα $t+s$

όπου $t = \lambda^{a+b} x_1^a x_2^b$, $s = (1-\lambda)^{a+b} y_1^a y_2^b$

Τότε

$$\boxed{(t+s)^{\frac{1}{a+b}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} t^n \cdot s^{a-n}} > t+s$$

ανν $1 > t, s > 0$ και

$(\lambda)_n \longrightarrow \binom{\lambda}{n}$ (ανα)

~~$\binom{\lambda}{n} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-(n-1))($~~

$\binom{\lambda}{n} = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-(n-1)) = \lambda(\lambda-1)\ldots(w+1-n) = (\lambda)_n$

Παρατηρηση: Απο τον ορισμο της αυστηρα κοιλης συναρτησης u, αν $\lambda \in (0,1)$ και $x \neq y$ τοτε το $\boxed{u(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y)}$

(Η Cobb – Douglas ειναι μια αυστηρα κοιλη συναρτηση)

1ο Θεωρημα Ευημεριας: Αν σε μια οικονομια ανταλλαγης (πεπ. αρ. καταναλωτων ο καθενας εχει μια συν. ωφελ. U_i και εναν αρχικο πλουτο w_i) οι συναρτησεις ωφελιμοτητας των καταναλωτων ειναι αυστηρα κοιλες (και συνεχης) τοτε καθε κατανομη ισορροπιας ~~προσφορας~~ $\{x^* = (x^1, x^2, \ldots, x^I)\}$ με $x^i = x^i(p^*)$ οπου p^* η τιμη ισορροπιας ειναι ~~αρεσ~~ αριστη κατα ~~Παρετο~~ Pareto.

Ορισμος: Μια κατανομη ισορροπιας x καλειται κατανομη ~~ισορ~~ ισορροπιας κατα Walras ανν:

$\forall\ y = (y_1, \dots, y_I)$ κατανομη με

$U_i(y_i) > U_i(x_i)$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel$
$\quad\quad\quad\quad x_i(\overset{*}{p})$ (αφου εχουμε κατ. ισορροπιας)

τοτε $\overset{*}{p} y_i > p^* \omega_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, I$

οπου p η αντιστοιχη τιμη ισορροπιας.

Λημμα: καθε κατανομη ισορροπιας οικονομια ανταλλαγης στην οποια οι συναρτησεις ωφελιμοτητας των καταναλωτων $U_i : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ ειναι συνεχεις και αυστηρα κοιλες τοτε ειναι κατανομη ισορροπιας κατα Walras.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (ΛΗΜΜΑΤΟΣ): Εστω x κατανομη ισορροπιας. Αρκει να δειξουμε οτι αν η y ειναι κατανομη με $U_i(y_i) > U_i(x_i) \Rightarrow \overset{*}{p} y_i > p^* \omega_i$ για καθε $i = 1, 2, \dots, I$ και p^* τιμη ισορροπιας, δηλαδη $x_i = x_i(p^*)$ για καθε $i = 1, \dots, I$.

Προς υπο πρ

Εστω οτι υπαρχει καποιος καταναλωτης i_0, για τον οποιο ισχυει $U_{i_0}(y_{i_0}) > U_{i_0}(x_{i_0})$ τ.ω. (5)

$p \cdot y_{i_0} \leq p \cdot w_{i_0}$

Ομως $p \cdot w_{i_0} = p \cdot x_{i_0}$ (λογω ισορροπιας)

Ισχυει οτι $y_{i_0} \neq x_{i_0}$ και επομενως

$U_{i_0}\left(\frac{1}{2}(y_{i_0} + x_{i_0})\right) > \frac{1}{2} U_{i_0}(y_{i_0}) + \frac{1}{2} U_{i_0}(x_{i_0})$ (*)

γιατι η U_{i_0} ειναι αυστηρα κοιλη

Ομως απο την υποθεση η ~~x~~ x ειναι κατανομη ισορροπιας $p\left(\frac{1}{2}(y_{i_0} + x_{i_0})\right) > p x_{i_0} \Rightarrow$

$\frac{1}{2} p y_{i_0} > \frac{1}{2} p x_{i_0} \Rightarrow p \cdot y_{i_0} > p \cdot x_{i_0}$

~~ομως~~ ~~$\Rightarrow p \cdot y_{i_0} > p \cdot w_{i_0}$~~

~~Ατοπο αφου υποθεσαμε οτι $p \cdot y_{i_0} \leq p \cdot w_{i_0}$~~

$\frac{1}{2} U_{i_0}(y_{i_0}) + \frac{1}{2} U_{i_0}(x_{i_0}) > \frac{1}{2} U_{i_0}(x_{i_0}) + \frac{1}{2} U_{i_0}(x_{i_0}) =$

$= U_{i_0}(x_{i_0})$ και $p \cdot y_{i_0}$

+++

την επομενη φορα η αποδειξη

Ορισμος 1): κατανομη ισορροπιας κατα Walras ειναι μια κατανομη ισορροπιας $\mathbb{X}$ για την οποια ισχυει για καθε $i = 1, 2, \dots, I$ αν $U^i(y_i) > U^i(x_i) \Rightarrow$ $\Rightarrow p^* \cdot y_i > p^* \cdot w_i$ οπου $\mathbb{X} = (x_1, x_2, \dots, x_I)$ και p^* τιμη ισορροπιας (δηλαδη $x_i = x_i(p)$) για καθε $i = 1, 2, \dots, I$

Ισχυει: οτι καθε κατανομη ισορροπιας ειναι κατανομη ισορροπιας κατα Walras?

Ναι αν:

Προταση 1: Αν οι συν. ωφελ. των καταναλωτων $U^i: R^2_+ \to R$ για $i = 1, 2, \dots, I$ ειναι συνεχεις, αυστηρα κοιλες και γνησιως μονοτονες, τοτε καθε κατανομη ισορροπιας ειναι κατανομη ισορροπιας κατα Walras.

Ορισμος 2): Η $u: R^2 \to R$ ειναι γνησιως μονοτονη αν για καθε $x \in R^2_+$ και καθε $y \in R^2_{++}$ τοτε

δεικν. καταν. και οι δυο συντ. θετικες

$U(x+y) > U(x)$

Απόδειξη Πρότασης 1 Έστω * κατανομή ισορροπίας που δεν είναι κατανομή ισορροπίας κατά Walras

Δηλ. για έναν τουλάχιστον καταναλωτή $k = 1, 2, \dots, I$

τ.ω. $U_k(Y_k) > U_k(X^k)$

η κατ. του k στην τιμή ισορροπίας

τότε δεν ισχύει ότι

$p^* Y_k > p^* \omega_k$. Άρα ισχύει $\boxed{p \cdot Y_k \leq p X_k}$

Αυτό δεν ισχύει γιατί το X_k μεγιστοποιεί την συνάρτηση ωφελιμότητας U_k στο σύνολο προϋπολογισμού $B(p, \omega_k) = \left\{ Y_k \in R^2_+ \mid p Y_k \leq p \cdot \omega_k \right\}$

όμως για το συν. προϋπολ. ισχύει

$p \cdot Y_k = p \cdot \omega_k$. ■

ΛΗΜΜΑ 1 Κάθε $U(x_1, x_2) = x_1^{a} x_2^{\beta}$ με $a, \beta > 0$ και $a + \beta = 1$, $x_1, x_2 > 0$. Η u είναι συνεχής για κάθε (x_1, x_2) με $x_1 \neq 0$ ή $x_2 \neq 0$

διότι $x^a = e^{a \log x}$.

Είναι γνησίως μονότονη.

Πράγματι έστω $X \in R^2_+$, $Y \in R^2_{++}$. Τότε

$(x_1 + y_1)^a > x_1^a$ και $(x_2 + y_2)^{\beta} > x_2^{\beta}$

a, β ονομάζονται οριακοί λόγοι υποκατάστασης.

Λήμμα 2

Παρόμοια κάθε $U(x_1, x_2) = \min\{a x_1, \beta x_2\}$ με $a, \beta > 0$ και $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Είναι γνησίως μονότονη.

Έστω $x \in R^2_+$, $y \in R^2_{++}$ τότε:

$$a(x_1 + y_1) > a x_1 \quad \text{και} \quad \beta(x_2 + y_2) > \beta x_2$$

Πρόταση 2: Αν η $u : R^2_+ \to R$ είναι συνεχής και γνησίως μονότονη, τότε το μέγιστο της u στο $B(p, w)$ λαμβάνεται στον εισοδηματικό περιορισμό, δηλαδή είναι κάποιο $x \in R^2$ τ.ω. $p \cdot x = p \cdot w$.

Απόδειξη (Πρότασης 2) Έστω ότι η u λαμβάνει μέγιστη τιμή σε κάποιο $y \in R^2_+$ τ.ω. $py < p \cdot w$. Θέτω $\delta = p \cdot w - py > 0$. Τότε,

$\cancel{p\left(y + \frac{\delta}{4}\right)}$

$$\overset{(p_1, p_2)}{p}\left(y + \frac{\delta}{4m}\underset{(1,1)}{\mathbb{1}}\right) = py + \frac{\delta p_1}{4\max\{p_1, p_2\}} + \frac{\delta p_2}{4\max\{p_1, p_2\}} < (*)$$

$(*)\ 4m \to 4 \cdot \max\{p_1, p_2\}$

$$= py + \frac{\delta p_1}{4\max\{p_1,p_2\}} + \frac{\delta p_2}{4\max\{p_1,p_2\}} \overset{(*)}{<} \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} + p\cdot y =$$

$$= py + \frac{\delta}{2} \quad (**)$$

Ομοίως $\boxed{\delta = pw - py}$

Επομένως $(**)$ $\dfrac{2py+\delta}{2} = \dfrac{2py + (pw - p\cdot y)}{2} =$

$$= \frac{p\cdot w - py}{2} < p\cdot w \leq p\cdot w$$

συν. προυπολ.

■

Λημμα 3) Αν η $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και και αυστηρά κοιλη τοτε η u : λαμβάνει μεγιστη τιμη σε σε μοναδικο $y \in B(p,w)$ αξιοδ. προυπ.

Αποδειξη (Λημμα 3) Εστω $x \neq y$ με $x, y \in B(p,w)$ τ.ω. η u να λαμβανει μεγιστη τιμη στο $B(p,w)$. Τοτε ~~$\frac{1}{2}(x+y) \in B(p,w)$~~

$$\frac{1}{2}(x+y) \in B(p,w)$$

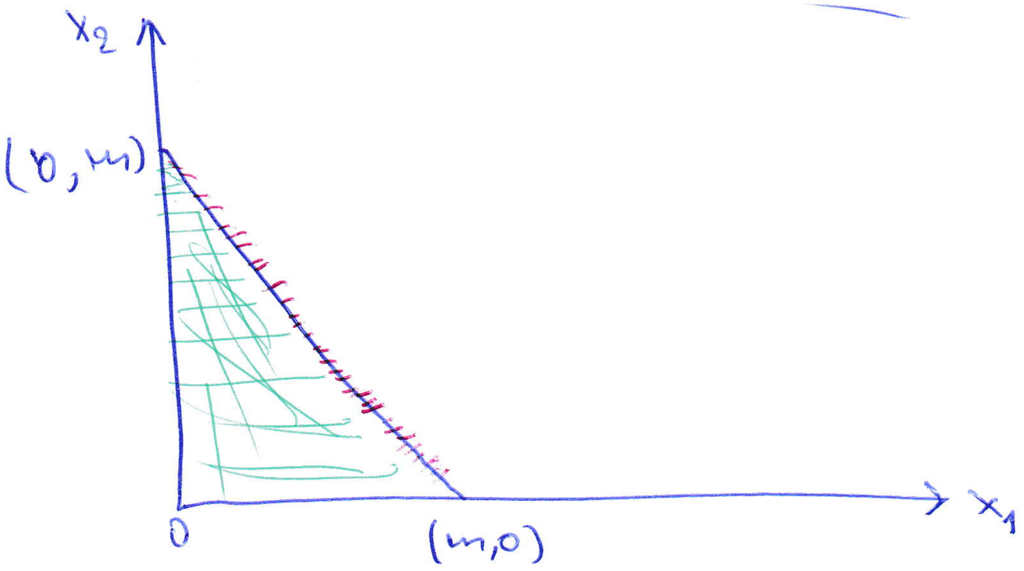
$$p\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{2}\underbrace{p\cdot x}_{\leq pw} + \frac{1}{2}\cdot \underbrace{p\cdot y}_{\leq pw} \leq p\cdot w.$$

Όμως αφού η u είναι αυστηρά κοίλη

$$u\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y\right) > \underbrace{\tfrac{1}{2}u(x)}_{u_0} + \underbrace{\tfrac{1}{2}u(y)}_{u_0} = u_0$$

(= η μεγ. τιμή της ωφέλ. στο $B(p,\omega)$)

Άτοπο!



$p \cdot \omega = m$

1ο Θεώρημα Ευημερίας: Αν σε μια οικονομία ανταλλαγής ~~οι καταναλωτές~~ οι $u_i: R^2 \to R$ είναι συνεχείς, γνησίως μονότονες και αυστηρά κοίλες για κάθε $i=1,2,\dots,I$ τότε κάθε κατανομή ισορροπίας είναι άριστη κατά Pareto.

Απόδειξη: Έστω x κατανομή ισορροπίας υπό την τιμή p, η οποία δεν είναι άριστη κατά Pareto. Τότε υπάρχει κατανομή y τ.ω.:

$u_i(y_i) \ge u_i(x_i)$ για κάθε $i=1,2,\dots,I$ και

$u_j(y_j) \geq u^j(x_j)$ για κάποιον καταναλωτή $j=1,2,\dots,I$.

Αφου $$\sum_{i=1}^{I} x_i = \sum_{i=1}^{I} y_i = \sum_{i=1}^{I} \omega_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^* \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} x_i\right) = p^* \cdot \left(\sum_{i=1}^{I} y_i\right) = p^* \left(\sum_{i=1}^{I} \omega_i\right)$$

οπου p^*: τιμη ισορροπιας

$$\sum_{i=1}^{I} p^* x_i = \sum_{i=1}^{I} p^* \omega_i = \sum_{i=1}^{I} p^* \cdot y_i$$

$$p^* \cdot z(p^*) = p^* \left(\sum_{i=1}^{I} p x_i - \sum_{i=1}^{I} \omega_i\right) = 0$$

Ισχυριζομαστε οτι $\cancel{\sum p^* x_i = p\left(\sum_{i=1}^{I} x_i\right) = p\left(\sum y_i\right)}$

$p \cdot y_i = p \cdot x_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, I$. Εαν αυτο δεν ισχυει τοτε αφου καθε κατανομη ισορροπιας ειναι κατανομη ισορροπιας κατα Walras και εχουμε υποθεσει οτι υπαρχει καποιος καταναλωτης k:

$$U_k(y_k) > U_k(x_k) \Leftrightarrow p \cdot y_k > p \cdot \omega_k = p \cdot x_k .$$

Τοτε υπαρχει καποιος καταναλωτης $J \neq k$ τ.ω. να ισχυει $p \cdot y_J < p \cdot x_J \Rightarrow x_J \neq y_J$

αφού $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ $\Rightarrow$ (η U^J ειναι αυστηρα κοιλη)

⊛ $\Rightarrow U_J\left(\frac{1}{2} y_J + \frac{1}{2} x_J\right) > U_J(x_J) \xrightarrow[\text{κατά Walras}]{x:\ \text{ισορροπία}}$

$\Rightarrow \quad p\left(\frac{1}{2}(x_J + y_J)\right) > p \cdot \omega_J = p \cdot x_J)$

$$\Downarrow$$

$$p\, y_J > p \cdot x_J$$

Όμως $p y_J < p \cdot x_J$ άτοπο

Άρα $\quad U_k'(y_k) \not> U_k(x_k)$

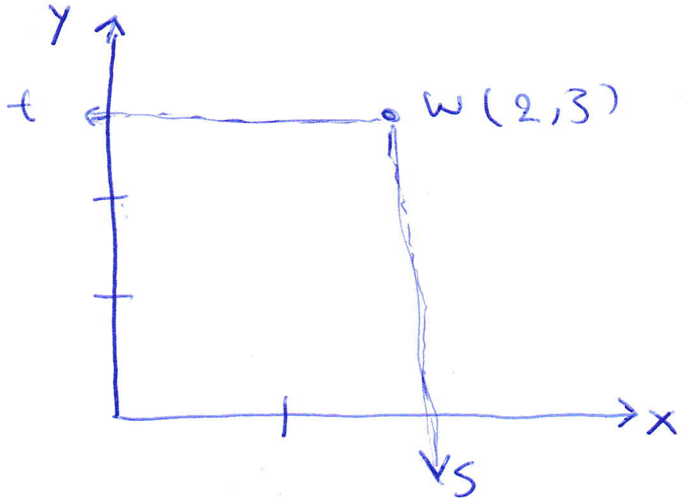
Εύρεση αρίστων κατά Pareto κατανομών

Μέσω του κουτιού του Edgeworth

Θ Έστω δύο καταναλωτές με $U_1(x,y)=xy$, $w_1=(1,1)$

$U_2(x,y)=x^2 y$, $w_2=(1,2)$ } Το συνολικό αγαθό $w=(2,3)$

↑ Άσκηση



Όπου $t=2-x$ και $s=3-y$

Άρα $U_2(x,y)=(2-x)^2(3-y)$

$$\nabla U_1(x,y)=(y,x)$$

$$\nabla U_2(x,y)=\left(-(3-y)(2-x)\ ,\ -(2-x)^2\right)$$

μερική παράγωγος ως προς x

$\| \ (y-3)(2-x)$

Ψάχνουμε την καμπύλη συμφωνίας

(x, y) ανήκει στην "καμπύλη συμφωνίας"

Πρέπει: $\nabla U_1(x,y) = \lambda \nabla U_2(x,y)$ όπου $\lambda > 0$.

Άρα $(y, x) = \lambda\left((y-3)(2-x), -(2-x)^2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{(y,x)} = \dfrac{(y-3)(2-x)}{y} = -\dfrac{(2-x)^2}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{y-3}{y} = \dfrac{-(2-x)}{x} \Leftrightarrow (y-3)x = -y(2-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xy - 3x = -2y + xy \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x = 2y \Leftrightarrow \boxed{y = \dfrac{3x}{2}}$ για $0 < x < 2$

καμπύλη συμφωνίας

$U_1(x,y) = U_2(x,y) = \min\{x, y\}$ και

$\omega_1 = \omega_2 = (1,1)$ είχαμε δείξει ότι η

ω_1, ω_2 είναι άριστη κατά Pareto

Αντίστοιχα όταν έχουμε γενικευμένα συμπληρωματική ζήτηση $u_1(x,y)=u_2(x,y)=\min\{ax,by\}$ όπου $a,b>0$,

τότε θέτω $z=ax$, $q=by$

άρα $U_1(z,q)=U_2(z,q)=\min\{z,q\}$

Τότε η αρχική κατανομή ως προς q είναι η μοναδική άριστη κατά Pareto.

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ τότε κάθε $x^*\in\mathbb{R}^n$ τ.ω. $f(x^*)=x^*$ ονομάζεται σταθερό σημείο της f. Η απόδειξη ύπαρξης τιμών ισορροπίας σε οικονομίες ανταλλαγής στις οποίες οι συναρτήσεις ωφελιμότητας είναι οι $u_i:\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς και γνησίως μονότονες(*) για κάθε καταναλωτή $i=1,2,\dots,I$

(*) αν $x\in\mathbb{R}^n_+$ και $y\in\mathbb{R}^n_+$, όπου τουλάχιστον ένα $y_i>0$ $(y>0)$ ~~$y\geq 0, y\neq 0$~~) τότε $u_i(x+y)>u_i(x)$

Η αποδειξη βασιζεται στο Θεωρημα σταθερου σημειου του Brawer.

"Καθε $f: K \to K$ οπου K καποι συμπαγες υποσυνολο του R^n και η f ειναι συνεχης εχει τουλαχιστον ενα σταθερο σημειο.

(συμπαγες $\to$ κλειστο και φραγμενο)

Ορισμος (Συμπαγες): Εστω x^* σταθερο σημειο της f, δηλαδη $f(x^*) = x^* \Leftrightarrow f(x^*) - x^* = \underset{\sim}{0}$ και $x^* - f(x^*) = \underset{\sim}{0}$.

Συμπαγες συνολο σε Ευκλειδειους χώρους R^n ειναι καθε κλειστο και φραγμενο συνολο K. ~~σε Ευκλειδειους~~

Ενα $A \subseteq R^n$ ονομαζεται φραγμένο για καθε $x \in A$, υπαρχει $M_i > 0$ τ.ω. $|x_i| \leq M_i$ για καθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Κλειστο συνολο του R^n, ονομαζεται καθε υποσυνολο B του R^n τ.ω.: αν η $(a_k)_{k \in N}$ ειναι μια ακολουθια στοιχειων του B με $a_k \to a$, τοτε $a \in B$.

Δευτερο Μερος Μαθηματος

Πληρεις και μη αγορες σε δυο χρονικες περιοδους

$t=0$, $t=1$

$\underline{\Omega} = \{1, 2, \ldots, S\}$ με ενα πεπερασμενο

συνολο καταναλωτων , $I = \{1, 2, \ldots, I\}$ και

το πληθος των χρηματοοικονομικων συμβολαιων

που ειναι διαθεσιμα στην αγορα

$J = \{1, 2, \ldots, J\}$. Η τιμη των συμβολαιων

$q = (q_1, \ldots, q_J)$, $V^J \in \mathbb{R}^S$ (← για καθε συμβολαιο)

πινακας $\underset{(S+1)\times J}{W} = \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q_J \\ V^J \end{bmatrix}$ για $J = 1, 2, \ldots,$

$V^J(s)$

$s = 1, 2, \ldots, n$

$V^J \to$ κερδος (σε καθε μοναδα)

$q_J \to$ ποσο πληρωνω (σε καθε μοναδα)

0 W : $(S+1)\times J$ διαστασης , V $S\times J$ ⑥

Πληρης αν $\text{rank}(V) = S$ και ονομαζεται

βαθμος πινακα

Μη Πληρης αν $\text{rank}(V) < S$

$$Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_J \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^J$$

← χαρτοφυλακιο μοναδες

$Vz \in \mathbb{R}^J$ $\quad Vz = z_1 V_1 + z_2 V_2 + \dots z_J V_J$

$z_J \geq 0$ (← επενδυω z_J μοναδες στην J-μετοχη)

Καθε $c \in \mathbb{R}^S$ (contingent claim) → επιθυμητη εισπραξη καποιου ποσου.

Αν υπαρχει καποιο χαρτοφυλακιο τ.ω.

$Vz = c$ (δηλαδη η εισπραξη του επιθ. χρημ. ποσου απο το χαρτοφυλακιο Z ...

Τωρα το c αντισταθμιζεται απο το χαρτοφυλακιο z.

$$e(s) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \rightarrow s\text{-}0624 \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

No-Arbitrage

Μη ύπαρξη κερδοσκοπίας

$$\begin{bmatrix} -1 & -S_0 \\ 1+r & S_0 u \\ 1+r & S_0 d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1+r & S_0 u \\ 1+r & S_0 d \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} 1+r & S_0 u \\ 1+r & S_0 d \end{pmatrix} = (1+r)S_0 \begin{vmatrix} 1 & u \\ 1 & d \end{vmatrix} = S_0(1+r)(d-u) \overset{\text{πρέπει}}{\neq} 0$$

$$\Leftrightarrow u > d$$

Έστω ότι $\overbrace{1+r \geq u}^{(α)}$ ή $\overbrace{1+r \leq d}^{(β)}$ $\Leftrightarrow$

Για την (α), έστω $Z_α = \begin{bmatrix} S_0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & -S_0 \\ 1+r & S_0 u \\ 1+r & S_0 d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_0[(1+r)-u] \\ S_0[(1+r)-d] \end{bmatrix} > 0$$

Χαρτοφυλάκιο με ύπαρξη κερδοσκοπίας.

(β) Έστω $Z_B = \begin{bmatrix} -S_0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & S_0 \\ 1+r & S_0 u \\ 1+r & S_0 d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -S_0 \\ -1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ S_0[u-(1+r)] \\ S_0[d-(1+r)] \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ >0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

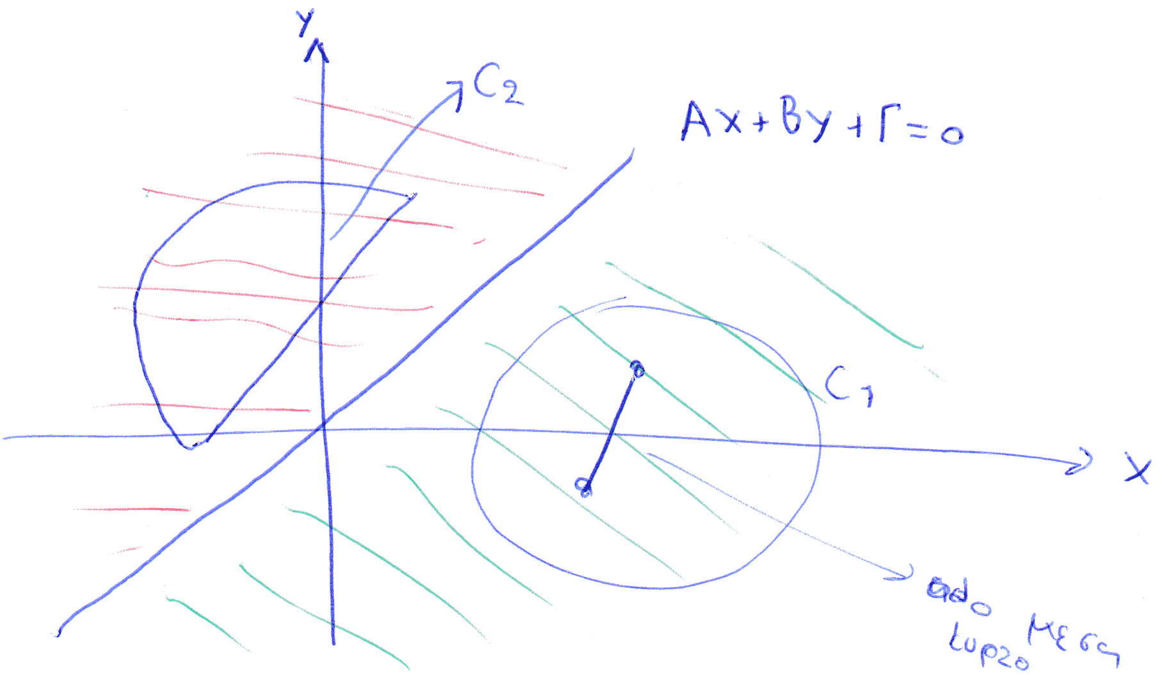
$W_Z \in R_+^{S+1}$ (← S+1 αβέβαιες καταστάσεις)

Αν υπάρχει τέτοιο χαρτοφυλάκιο τότε:

$\langle W \rangle \cap R_+^{S+1} = \{0\}$ ← No arbitrage χαρτοφυλάκιο

Δηλαδή,

~~Δεν υπάρχει arbitrage χαρτοφυλάκιο~~



Όταν $Ax+By+\Gamma \geq 0$, $Ax+By+\Gamma \leq 0$ } ανάλογα με τα A, B, Γ

1ο ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΚΥΡΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

Έστω C_1, C_2 μη-κενά κυρτά υποσύνολα του R^n, τότε υπάρχει $f \in R^n$, $f \neq 0$, τ.ω.

$$\underbrace{f \cdot C_1}_{\text{εσ. γινόμενο}} \leq a \leq \underbrace{f \cdot C_2}_{\text{εσ. γινόμενο}}, \text{ για κάθε } C_1 \in C_1, C_2 \in C_2$$

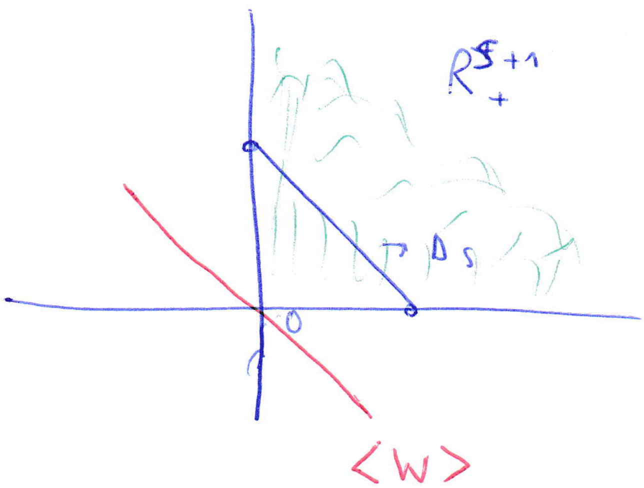
και κάποιο $a \in R$

$f \cdot x = a$ όπου $f = (A, B)$, $x = (x, y)$ και

$a = -\Gamma$ $(C_1 \cap C_2 = \emptyset)$ (τα C_1, C_2 συμπαγές)

2ο ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΙΑΧΩΡΙΣΜΟΥ ΚΥΡΤΩΝ συνόλων

Παρόμοια και ή $a \geq f \cdot C_1$ ή $a \leq f \cdot C_2$



Για να μην υπάρχει arbitrage $\langle W \rangle \cap R^{S+1}_+ = \{0\}$

$$\Delta_S = \{x \in R^{S+1}_+ \mid \sum_{i=1}^{S+1} x_i = 1\}$$

$\langle W \rangle \cap \Delta_S = \emptyset$

Δ_S είναι κυρτό και συμπαγές (κλειστό και φραγμένο).

Απο το 2ο Θ.Δ.Κ.Σ. υπαρχει $\pi \in \mathbb{R}^{s+1} \neq 0$ και, α, δ με δ>ο τ.ω. $\boxed{\pi \cdot w < a \leq a+\delta \leq \pi \cdot y}$ ~~οπου~~ $\forall w \in \langle W \rangle$ και $y \in \Delta_S$ ⊗

Θ.δ.ο. $\boxed{\pi \cdot w = 0}$ ⊗ για καθε $w \in \langle W \rangle$. Για να δειξουμε οτι ισχυει το ⊗ εστω οτι $a<0$. Τοτε

$-a>0$ και $\delta = -a$ αρα $\pi \cdot y \geq 0 > \pi w$ (1)

Ο ισχυρισμος (1) δεν ειναι αληθής γιατι εαν ητων αληθης, τοτε για καποιο $w_0 \in \langle W \rangle$, απο την (1) $\pi \cdot w_0 \cancel{<} 0$ $\frac{\pi w_0}{s+1} < 0 \Rightarrow -\frac{w_0}{(s+1)(\pi \cdot w_0)} \in \Delta_S$

Επομένως $\pi \cdot w = 0$, για καθε $w \in \langle W \rangle$, αρα $\pi \in \langle W \rangle^{\perp}$ (ορθογώνιο συμπληρωμα του W)

$\Downarrow$ Γρ. 2

$$\langle W \rangle \oplus \langle W \rangle^{\perp} = \mathbb{R}^{s+1}$$

$W = \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix}$, αρα αν N_0-arbitrage (NA) και $rank(V) = S$ (η αγορά είναι πλήρης)

$S+1$ μοναδικο ~~ορθογωνιο~~ διανυσμα. ..

$$3\begin{bmatrix}-1 & -S_0\\ 1+r & S_0 u\\ 1+r & S_0 d\end{bmatrix}$$

$$(1,\eta_u,\eta_d)\begin{bmatrix}-1 & -S_0\\ 1+r & S_0 u\\ 1+r & S_0 d\end{bmatrix} = 0_q$$

(αφου $(1\times 3)(3\times q) = 1\times q$)

Ισο με το πληθος το συμβολαιων (στηλες) (J τα συμβολαια)

Απο (D) εχουμε

$$\eta_u(1+r)+\eta_d(1+r)=1$$

$$\eta_u \cancel{S_0} u + \eta_d \cancel{S_0} d = \cancel{S_0} \Leftrightarrow \eta_u\cdot u+\eta_d\cdot d = 0 \Rightarrow$$

πολλ. με $1+r$

$$\Rightarrow \eta_u = \frac{\begin{vmatrix}1 & 1+r\\ 1 & d\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+r & 1+r\\ u & d\end{vmatrix}} \Rightarrow p_u = \frac{d-(1+r)}{(1+r)(d-u)}$$ και

$$\eta_d = \frac{\begin{vmatrix}1+r & 1\\ u & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1+r & 1+r\\ u & d\end{vmatrix}} \Rightarrow p_d = \frac{(1+r)-u}{(1+r)(d-u)}$$

$p_u, p_d \to$ risk neutral

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\left(p_u S_0 u + p_d S_0 d\right)$$

$\{u,d\} = \Omega$ συν. των καταστασεων

$\{u\},\{d\}$

σ-αλγεβρα

$\sigma(F_0) = \{\emptyset, \Omega\}$

$\sigma(F_1) = \{\emptyset, \{u\}, \{d\}, \Omega\}$

Πολλαπλασιάζοντας με $1+r$

risk neutral $\rightarrow$ $p_u = \dfrac{d-(1+r)}{d-u}$

$\rightarrow$ $p_d = \dfrac{(1+r)-u}{d-u}$

$$S_0 = \frac{1}{1+r}\left(p_u S_0 u + p_d S_0 d\right)$$

$$S_0 = \frac{1}{1+r} E_p(S_0 \mid F_0)$$

$\{u, d\} = \Omega$ $\qquad$ $\sigma(F_0) = \{\emptyset, \Omega\}$

$\sigma(F_1) = \{\emptyset, \{u\}, \{d\}, \Omega\}$

$\langle W \rangle \cap D = \emptyset \iff$ No-arbitrage

Υπάρχει $\pi \in \mathbb{R}^{S+1}$, $\pi \neq 0$, τ.ω. $\boxed{\pi w \leq a < a+\delta \leq \pi k}$

για κάθε $w \in \langle W \rangle$ και $k \in D$, για κάποιο $\delta > 0$

από το Θ.Δ.Κ.Σ. (2) γιατί $\langle W \rangle$: κυρτό

σύνολο και D: κυρτό και συμπαγές.

Αποδειξη

Έστω $w_0 \in \langle W \rangle$ τ.ω. $\pi w_0 < 0$. Τότε $-\pi w_0 > 0$

και $\dfrac{w_0}{-\pi w_0} \in \langle W \rangle$. Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$

άρα $\dfrac{n w_0}{-\pi w_0} \in \langle W \rangle$ αν το $n \to +\infty$ τότε

παραβιάζεται, η ανισότητα $\pi k > a$

διότι το $\pi \cdot \dfrac{n w_0}{-(\pi \cdot w_0)} = n \dfrac{\pi \cdot w_0}{-\pi w_0} = n \cdot 1 = n \geq (a+\delta)_n$

άρα $\pi w_0 > 0$.

Άρα, για κάθε $w \in \langle W \rangle$ $\pi w = 0$, δηλαδή

$\pi \in \langle W \rangle^{\perp}$, $\pi w \leq a < a+\delta \leq \pi k$, με $w \in \langle W \rangle$

$k \in D$
simplex

και $n W = 0$, τοτε $q = 0$. Αρα για καθε τετοιο

$n \cdot k \geq \delta > 0 \quad \forall k \in \Delta$

Επειδη $\Delta = \left\{ k \in R_+^{S+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{S+1} k_i = 1 \right\}$ αρα αν

simplex
το συνολο των κυρτων συνδυασμών ενος πεπερασμένου πλήθους διανυσμάτων

θεσω $k_i = 1$, για καθε i και $k_j = 0 \quad \forall j \neq 1$ και αρα $n \cdot k \geq \delta$ για

καθε $k = e_i \quad i = 1, 2, \ldots, S+1$

(διάνυσμα)

Αν $n = (\overset{n_0}{1}, n_1)$, δηλαδη $n_i = 1$ αν $i = 1$

$$B(n, w, V) = \left\{ X = (x_0, x_1) \text{ οπου } x_0 \geq 0 \text{ και } x_1(s) \geq 0 \text{ για } s = 1, 2, \ldots, S \right\}$$

(δηλαδη $X \in R_+^{S+1} \mid (X - w) \in \langle W \rangle$ δηλαδη

$x_0 - w_0 = -q \cdot z, \quad z \in R^{J}$)

επιλογες

~~κοστος~~

$x_1(s) - w(s) = (V \cdot z)(s), \quad \forall s = 1, 2, \ldots, S$

$w = (w_0, w_1)$

αρχικο (διαν. κατανάλωσης ή επένδυσης)

$w_0, w_1 \in R_+^{S}$

$0 \leq w_0, w_1$

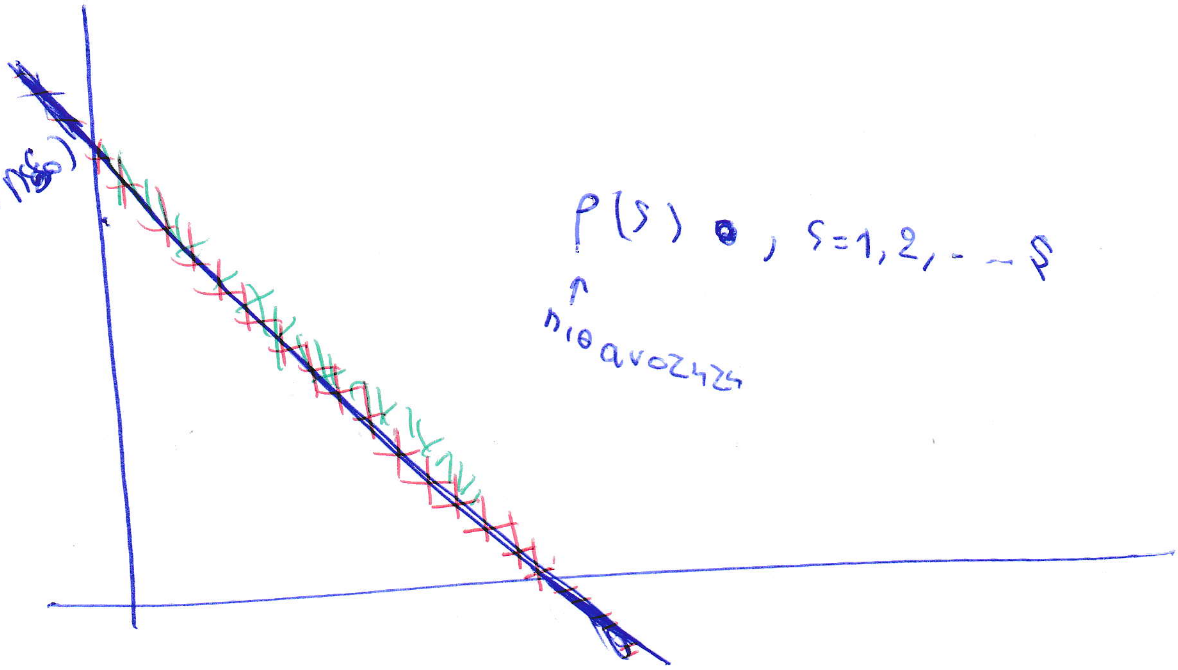
9

$B(n,w,V) := \left\{ x \in R_+^{S+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} nx = nw \\ x - w \in \langle W \rangle \end{array} \right\}$

"είδος. περιορισμός" σε αβεβαιότητα (πόσα θέλω να επενδύσω)

$1^o \rightarrow 4(S+1)$ - μόριο

(υπερεπίπεδο)



$\rho(s)$, $s = 1, 2, \dots S$

πιθανότητα

$\cancel{\rho(s) \in (0,1)}$

$w + \langle W \rangle$ όταν $w \notin \langle W \rangle$

$\updownarrow$

w - συμπλήρωμα το υποχώρου

$\rho(s) \in (0,1)$ για $s = 1, 2, \dots, S$

$\sum_{s=1}^{S} \rho(s) = 1$

Καθε καταναλωτής εχει ενα διάνυσμα καταναλωσης

$U^i : R_+^{S+1} \to R$, συνεχής για κάθε $i=1,2,\ldots,I$

← (καταναλωτης)

ΘΕΩΡΗΜΑ Τ.Ε.Ε.Ι.

i) Το πρόβλημα του καταναλωτη:

$$\max\{U^i(x^i) \mid x^i \in B(n,w^i,V)\}$$ (να εχει λυση

ii) Το συνολο $B(n,w^i,V)$ ειναι συμπαγές

iii) Εδω $n=(1,n_1)$, με ~~...~~ $n \cdot W = 0$ για κάθε $W \in \langle W \rangle$

δηλαδή δεν υπαρχει arbitrage

~~$\Leftarrow \Rightarrow$ (i)~~

Για να ισχύει το Θεωρημα ΤΕΕΙ αρκει ~~...~~ ν.δ.ο.

το $B(n,w^i,V)$ ειναι συμπαγές εƆ κλειστό και φραγμενα

για καθε $n \in \langle W \rangle^\perp$ (και $n=(1,n_1)$ ισχυει $n_1(s)>0$, $s=1,2,\ldots,S$) ειναι φραγμένο

$n x^i = n \cdot w^i$ ειναι ~~...~~

$$\delta = \min\{1, n_1(s), s=1,2,\ldots,S\} > 0$$

Κατάσταση μηδενική (5)

$$\delta\left(\sum_{s=0}^{\hat{S}} x(s)\right) \leq n \cdot w > 0 \iff$$

$$\iff \quad 0 \leq X(s) \leq \frac{n w^i}{\delta}, \quad s = 0, 1, \ldots, \hat{S}$$

Έστω $(X_n^i)_{n \in N} : X_n^i \xrightarrow{@} X^i$ και $X_n^i \in \underbrace{B(n, w, V)}_{\text{σύνολο προϋπολογισμού}}$

Για ν.δ.ο. το $B(n, w, V)$ είναι κλειστό πρέπει νδο $x \in B(n, w^i, V)$

x ($X_n(s) \longrightarrow X(s)$, $\underbrace{s = 0, 1, \ldots, \hat{S}}$)

χρονικές περίοδοι

Επίσης από την συνέχεια του εσωτερικού γινομένου

$n \cdot X_n^i \longrightarrow n X \iff n \cdot w \longrightarrow n X$

Ισχύει ότι $X_n^i \to w^i \in \langle W \rangle$

$X_n^i - w^i \in \langle W \rangle$

$X_n^i - w^i = W z_n^i$, άρα πρέπει νδ.ο

(επιλέγει κάποιο χαρτοφυλάκιο i)

αφού $X_n^i \to X^i$ τότε $x + w^i \in \langle W \rangle$

$X_n^i - w^i = W z_n^i$ και $X_n^i \to X$, αρκεί ν.δ.ο

$z_n^i \to z$

$$W z_n^i = \begin{bmatrix} -q \cdot z_n^i \\ V \cdot z_n^i \end{bmatrix}$$ και $X_n^i \to X$,

δηλαδή $X_n^i - w^i \to x - w^i$, και ισχύει ότι τα $[V_1^1, V^2, \dots, V^J]$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

$$V z_n^i = \sum_{j=1}^{J} V^j z_n^i(j) \iff$$

$\iff z_n^i(j) \to z(j)$

Αφού τα V^j είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και

$$X_n^i \to X \iff \underset{\displaystyle W^i z_n^i}{\underset{\|}{X_n^i - w^i}} \to \underset{\displaystyle W z}{x - w^i} \iff$$

$$\iff W z_n^i - W z \to \underbrace{0}_{\text{μηδενικό διάνυσμα}} \in R^{s+1} \quad (1)$$

Έστω ότι ο ισχυρισμός (1) δεν ισχύει δηλαδή,

$\cancel{W z_n^i (s)}$ $X_n^i - w^i$

$||X_n - X|| \leq ||W|| \, ||z_n - z||$ (συνεχίζεται την άλλη φορά)

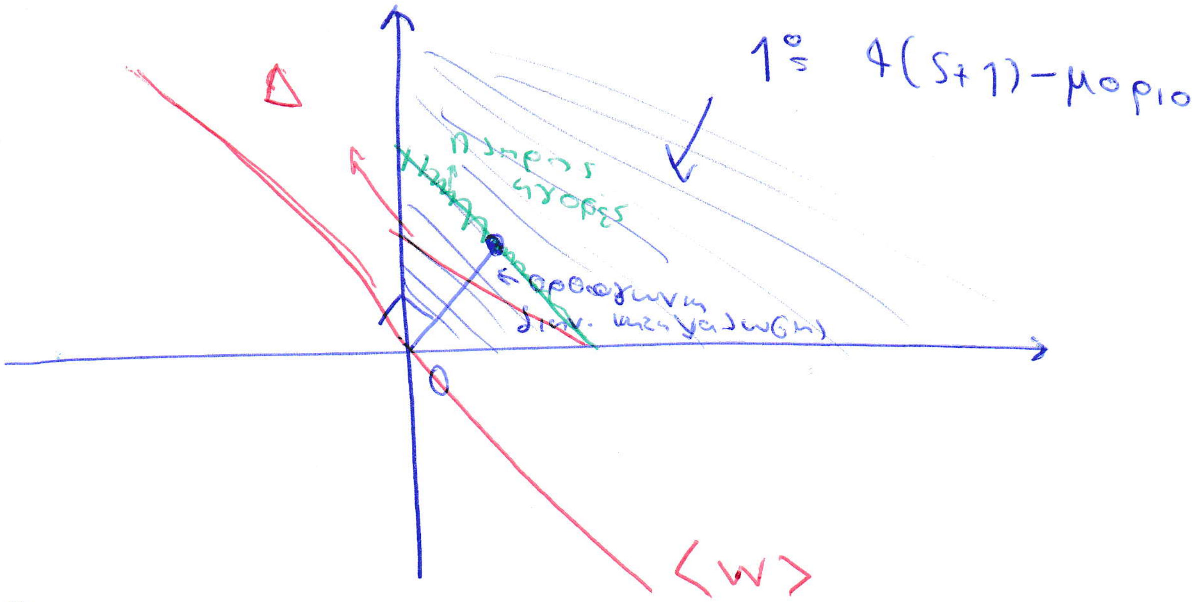
Σύνολα προϋπολογισμού σε πλήρεις αγορές

$$B(\pi, w, V) = \{ x \in \mathbb{R}^{S+1}_{+} \mid x - w \in \langle W \rangle, \pi \in W^{\perp} \},$$

$$W = \begin{bmatrix} -q \\ V \end{bmatrix} \rightarrow \text{διάσταση } (S+1) \times J$$

$\pi = (1, \pi_1)$, $\pi_1 \in \mathbb{R}^{S}_{++}$

$\Rightarrow q = \pi_1 V$



(S+1) - διάστατα ~~διάσταση~~ διανύσματα με θετικές συντεταγμένες,

$0 = 0_{(S+1)}$

(*) $\pi \cdot x - \pi w = 0$ (← εισοδηματικός περιορισμός)

$\Rightarrow \pi x = \pi w$

και $x - w \in \langle W \rangle$

$$\Delta = \left\{ y \in \mathbb{R}^{S+1}_+ \;\middle|\; \sum_{s=0}^{S} y(s) = 1 \right\}$$

$U : \mathbb{R}^{S+1}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

θέλω

$\max : U(x)$, τ.ω. $\left\{ \pi x = \pi \omega \right.$ και

$\left. x = \omega + \langle W \rangle \;,\; x \in \mathbb{R}^{S+1}_+ \right\} \to B(\pi, \omega, V)$

με $B(\pi, \omega, V)$ κλειστό και φραγμένο.

<u>Συνθήκες</u> (1) $\min\{\pi(s),\ s = 0, 1, \dots, S\} = \delta(\pi) > 0$

$$\delta(\pi) \cdot \sum_{s=0}^{S} x(s) = \delta(\pi) = \delta(\pi) \sum_{i=1}^{S} |x(s)| \leq \pi \cdot x = \pi\omega > 0$$

$$\Rightarrow |x(s)| \leq \sum_{s=0}^{S} |x(s)| \leq \frac{\pi\omega}{\delta(\pi)}$$ για κάθε $s = 0, 1, \dots, S$ και $\pi \in \langle W \rangle^{\perp}$

Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B(\pi, \omega, V)$ και $x_n \to x$,

αρκεί ν.δ.ο. $x \in B(\pi, \omega, V)$,

όμως $B(\pi, \omega, V) = \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^{S+1} \\ \pi x = \pi \omega \\ x \in \omega + \langle W \rangle \end{array} \right.$

(3)

Έστω $s_1 = 1, 2, \dots, \delta$ ή $s_1 = 0$ τ.ω.

$X(s_1) \notin \underbrace{w + \langle W \rangle}_{\text{συμπλοκο}} \iff X(s_1) \iff$

$\iff X(s_1) \neq w(s_1) + (Wz)(s_1) \iff$

$\iff |X(s_1) - (w(s_1) + (Wz)(s_1))| = \varepsilon(s_1) > 0$ (*)

Όμως $X_n \to X$ άρα $X_n(s_1) = X(s_1) \iff$

$\iff |X_n(s_1) - X(s_1)| < \frac{\varepsilon(s_1)}{2}$, $n \geq n_0(\varepsilon(s_1))$

αφού $|X_n(s_1) - w(s_1) - (W \cdot z)(s_1)| = 0$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα αφού $0 < \frac{\varepsilon(s_1)}{2}$,

άρα από την τριγωνική ανισότητα:

$|X_n(s_1) - (w(s_1) + (W \cdot z)(s_1))| < \frac{\varepsilon(s_1)}{2}$

Επομένως $|X_n(s_1) - X(s_1)| \leq \frac{\varepsilon(s_1)}{2} + \frac{\varepsilon(s_1)}{2} = \varepsilon(s_1)$

και $|X_n(s_1) - X(s_1)| < \varepsilon(s_1)$ και

$|X_n(s_1) - X(s_1)| < \varepsilon(s_1)$

Άτοπο!!! Άρα $X(s_1) = w(s_1) + (Wz)(s_1)$, για

κάθε $s = 0, 1, \dots, \delta$ και για κάποιο $z \in \mathbb{R}^{?}$

άρα $X(p)$ είναι η λύση στο πρόβλημα μεγιστοποίησης

είναι
$$\begin{cases} \max(U(x)) \\ \text{με} \\ x \in B(p, w, V) \end{cases}$$

διάνυσμα ζήτησης

υπερβάλλουσα ζήτηση

$$\boxed{\zeta(p) = \sum_{i=1}^{I} X_i(p) - \sum_{i=1}^{I} w^i}$$

αν

$$\boxed{\zeta(p^*) = \sum_{i=1}^{I} x_i(p^*) - \sum_{i=1}^{I} w^i = 0}$$

τότε p^* είναι ~~διάνυσμα~~ η τιμή ισορροπίας ,

ισχύει $\boxed{p \cdot \zeta(p) = 0}$ (νόμος Walras)

για κάθε $p \in \langle W \rangle^{\perp}$

~~για γνησίως~~

μονότονη συν. ωφελ. : $x \geq y \Rightarrow U(x) \geq U(y)$

γνησίως μονότονη συν. ωφελ. $x \geq y$ και για τουλάχιστον μία συνιστώσα $x > y \Rightarrow U(x) \geq U(y)$

Bolzano: $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ και η g συνεχής $\Leftarrow$ υπάρχει $x\in(a,b)$ τ.ω. $g(x)=0$.

$1-f=g \Rightarrow$ υπάρχει $x\in(a,b)$, τ.ω. $x=f(x)$

ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΤΟΥ BROWER

Αν $f:K\to K$ και f συνεχής, και $K\subseteq\mathbb{R}^{S+1}$ και K: συμπαγές τότε υπάρχει $x\in K$ τ.ω. $f(x)=x$ δηλαδή υπάρχει σταθερό σημείο της f στο K.

$$K=\underset{\text{simplex}}{\Delta}=\left\{y\in\mathbb{R}^{S+1}\ \middle|\ \sum_{s=0}^{S}y(s)=1\right\}$$

$\zeta(p),\ p\in\mathbb{R}^n_{++}$

Αν έχουμε μη πλήρεις αγορές $\zeta(\pi),\ \pi\in\langle W\rangle^{\perp}\cap\Delta$

Να βρεθούν τα διανύσματα τιμών στο τριωνυμικό μοντέλο

Άσκηση 1 Για δύο συμβόλαια (και τρεις καταστάσεις)

τραπ. λογαριασμός

$$\cancel{V=\begin{bmatrix}1+r\\1+r\\1+r\end{bmatrix}}$$

τριωνυμικό μοντέλο

$$V=\begin{bmatrix}1+r & 3\\ 1+r & 2\\ 1+r & 1\end{bmatrix}$$

Είναι μια μη-πλήρης αγορά αφού ο βαθμός του πίνακα $\text{rank}(V)=2<3$

θελω να βρω q για το οποιο δεν υπαρχει arbitrage.

$$q = (\overset{\text{τρ. λογαρ.}}{1}, q^2) \quad \text{τ.ω.} \quad W = \begin{bmatrix} -1 & -q^2 \\ 1+r & 3 \\ 1+r & 2 \\ 1+r & 1 \end{bmatrix},$$

$$\pi = (1, \pi_1) \in \langle W \rangle^{\perp}$$

Δηλαδη αν $\pi_1 = (\pi_1(1), \pi_1(2), \pi_1(3))$

$$\begin{cases} 1 = \pi_1(1)(1+r) + \pi_1(2)(1+r) + \pi_1(3)(1+r) \\ q^2 = \pi_1(1)\cdot 3 + \pi_1(2)\cdot 2 + \pi_1(3)\cdot 1 \end{cases}$$

Δηλαδη $q^2 = \pi_1 V^2$

$$\langle W \rangle \oplus \langle W \rangle^{\perp} = R^{S+1}, \quad S+1 = 4$$

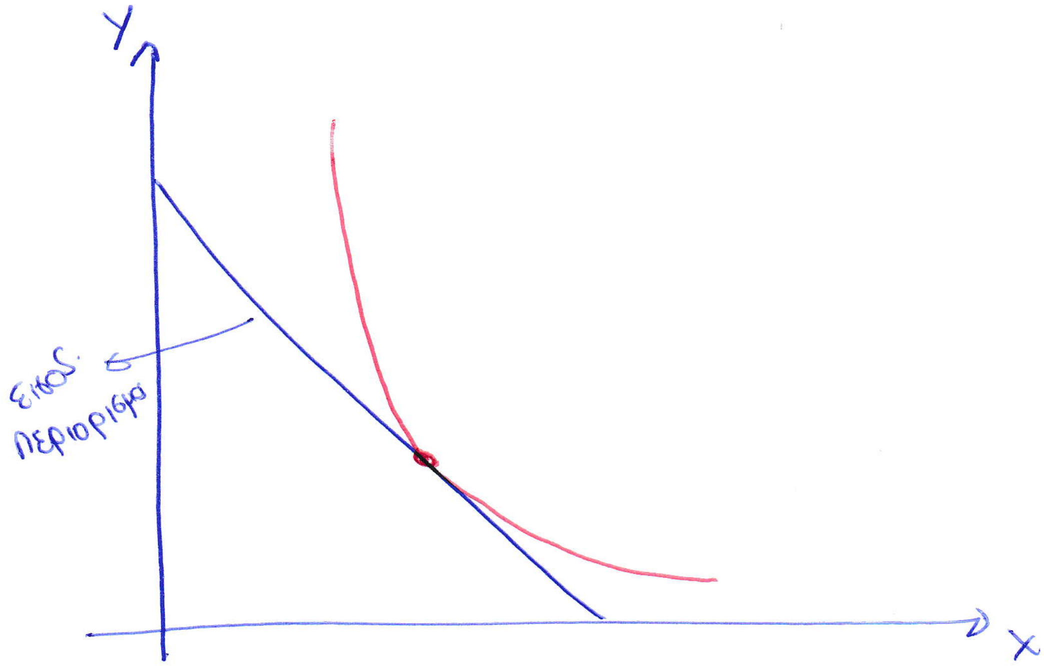
διασταση 2 αρα $\dim \langle W \rangle^{\perp} = 2$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ 8/12/2021 9ο ΜΑΘΗΜΑ (1)

(*) Διόρθωση (στην απόδειξη) συνήθους Cobb-Douglas

$U(x,y) = p \Leftrightarrow x^{a} y^{b} = p$ με $x>0, y>0$

$a, b > 0$ τ.ω. $a+b=1$



(1) $y^{b} = p x^{-a}$

$$y(x) = \underbrace{p^{a-1}}_{\theta} x^{-\frac{a}{1-a}}$$

Άρα $y'(x) = \theta \left(-\frac{a}{1-a}\right) x^{\left(-\frac{a}{1-a}-1\right)}$ <0

$\left(\begin{array}{l} \text{αφού } x^{a} = e^{a \log x} \\ (x^{a})' = x^{a}(a\log x)' = \\ = a x^{a} \cdot \frac{1}{x} = a x^{a-1} \end{array} \right)$

Επομένως

$y'(x) < 0$

No - Information arbitrage

Εστω πινας

$$W = \begin{array}{c} \\ \\ \text{καταστασεις του κοσμου} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{τιμές} & \text{συμβολαια} & \end{array} \\ \begin{bmatrix} -\frac{1}{1+r} & -q_1 & -q_2 \\ 1 & \phi & 1 \\ 1 & \phi & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\sigma \neq \phi \qquad \sigma \subseteq \{1, 2, \dots, S$

Ποιο απο τα q_1, q_2 συμβόλαια δειναι περισσοτερη πληροφορια?

$q_1 = q_2$? ΟΧΙ ~~ΧΑΧΑΧΑ~~ ~~ΕΙΜΑΙ Η ΚΥΡΙΑ ΜΑΛΛΙΑΣΜΕΝΗ~~

Διοτι

Αν $q_1 = q_2$ εστω το $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

τοτε $W z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (δηλ. εδω υπαρχει arbitrage)

(No Statistical arbitrage).

Εστω τωρα παλι

$$W = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1+r} & -q_1 & -q_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και ο αρχικος πλουτος του επενδυτη: $\omega = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

αν το διανυσμα καταναλωσης ειναι

$$W = \begin{bmatrix} -\frac{1}{1+r} & -q_1 & -q_2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega \notin \langle W \rangle \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

($Wz + \omega = x$ για να ειναι διανυσμα καταναλωσης)

$q_1 - q_2 + 4 \geq 0$

Capital Asset Pricing Model (CAMP)

Μια από της υποθέσεις του (CAMP) είναι ότι μια από τις καταναλώσεις του είναι:

$$x_1 \in \langle V \rangle \iff w_1 \in \langle V \rangle,$$

$$x_1 - w_1 \in \langle V \rangle$$

Όμως $w \notin \langle W \rangle$ (← Εδώ ανήκουν τα διανύσματα κατανάλωσης)

Το 1944 J von-Neumann
O. Morgenstern

Έστω $p(1), p(2), \dots, p(S)$ (iid και ποσοστιαία κατανομή) ένα διάνυσμα πιθανοτήτων για τις καταστάσεις $1, 2, \dots, S$.

Η αντίστοιχη συν. ωφελιμότητας είναι:

$$U(x_0, x_1) = U(x_0) + \underbrace{\sum_{s=1}^{S} p(s) U(x_1(s))}_{E_p[U(x_1)]}$$

time-separable →

↓ αναμενόμενη ωφελιμότητα

Εκτίμηση με Bayes (ex-ante) → posterior (ex-post → prior)

Κατανομές σε μη-πλήρεις αγορές

Έστω $\{1,2,\dots,I\}$, $\{1,2,\dots,S\}$, $(w_1, w_2, \dots, w_I)$

καταναλωτές? επενδύσεις? οι αρχικοί πλούτοι των επενδυτών

$(U^1, U^2, \dots, U^I)$ $\{1,2,\dots,J\}$, $\langle W \rangle)$

$$CA = \left\{ (x^1, x^2, \dots, x^I) \;\middle|\; x^i = w^i + \langle W \rangle, \; x^i \in R^{S+1}, \; \sum_{i=1}^{I} x^i = \sum_{i=1}^{I} w_i \right\}$$

Constrained Allocations

Effectively Complete είναι οι μη πλήρεις αγορές στις οποίες οι CPOA = POA

1ο ΘΕΩΡΗΜΑ Ευημερίας

$$R(Z) = \frac{V_Z - q_Z \mathbf{1}}{q_Z} \quad (\text{z.μ.})$$

$R(Z_m)$, $Z_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ χαρακτηριστικό αγοράς

$$\boxed{R(Z) = b_0 + b_1 R(Z_m) + e(Z,Z)} \rightarrow \text{γραμμ. παλινδρόμηση}$$

(CAMP)

↓

Μοντέλο τιμολόγησης ~~CAMP~~ περιουσιακών στοιχείων (ΜΤΚΕ) (beta) $$\boxed{\hat{\beta}_1 = \frac{\widehat{Cov}(R(Z), R(Z_m))}{Var(\widehat{R(Z_m)})}}$$

αν $\beta_1 > 0$ τοτε θετική συσχετιση Z, Z_m

αν $\beta_1 < 0$ τοτε αρνητική συσχετιση

$$\hat{\rho} = (\hat{\rho}(1), \hat{\rho}(2), \ldots, \hat{\rho}(s))$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{R(Z)} - \hat{\beta}_1 \overline{R(Z_m)}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ν η αγορά χρηματοοικονομικών συμβολαίων

με
$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad q = (4,7)$$

i) υπάρχει arbitrage στην αγορά αυτή?

Απάντηση: όχι γιατί όπου $n = (1,1,1,1)$

$q = n_1 V$,

ii) Έστω το $Z = (1,2)'$ (πινακας στήλη), $Z_m = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)' = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ αφού 2 συμβόλαια

Να προσδιοριστεί το CAPM ως προς το χαρτοφυλάκιο αυτό, αν οι πιθανότητες για τις 4 καταστάσεις του κόσμου είναι:

$P = \left(1/4, 1/4, 1/4, 1/4\right)$

$qZ = 18$, $q \cdot Z_m = 2 + \frac{7}{2} = \frac{11}{2}$

$R(Z) = V \cdot Z + (qZ)\mathbb{1}$ (μοναδιαίο διάνυσμα στις 4 διαστάσεις)

$\Leftrightarrow R(Z) = \frac{1}{qZ}\left(VZ - (qZ)\mathbb{1}\right)$

$$VZ = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

απόδοση χαρτοφυλακίου Z

άρα $R(Z) = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} -16/18 \\ -16/18 \\ -13/18 \\ -11/18 \end{bmatrix}$$

$$VZ_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$2 Z_m = 4 \frac{1}{2} + 7 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

απ. χαρτ. αγοράς

Άρα $R(Z_m) = \frac{2}{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3/2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$

$$R(R_m) = \begin{bmatrix} -9/11 \\ -9/11 \\ \cancel{31/33} \\ -8/11 \\ -10/11 \end{bmatrix} \qquad R(Z) = \begin{bmatrix} -16/18 \\ -16/18 \\ -13/18 \\ -11/18 \end{bmatrix}$$

③

$$R(Z) = \beta_0 + \beta_1 R(Zm) + \epsilon(Z, Zm)$$

$$\beta_1 = \frac{S_{Z,Zm}}{S_{Zm,Zm}} , \quad \beta_0 = \overline{R(Z)} - \beta_1 \overline{R(Zm)} + \epsilon(Z_1, Zm)$$

ως προς το διάνυσμα των πιθανοτήτων

$$p = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Αρα $\overline{R(Z)} = \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{16}{18}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{16}{18}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{13}{11}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{11}{18}\right)$

$$\Leftrightarrow \overline{R(Z)} = -\frac{2}{9}$$

παρόμοια

$$\overline{R(Zm)} = -\frac{9}{11}$$

$$S_{Zm,Zm} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{18^2} \left[(16)^2 + (16)^2 + (13)^2 + (11)^2\right]$$

$$S_{Z,Zm} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{11} \left(9 \cdot 16 + 9 \cdot 16 + 8 \cdot 13 + 10 \cdot 11\right)$$

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ 7/1/2021 14ο ΜΑΘΗΜΑ (1)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΥΠΑΡΞΗΣ ΤΙΜΩΝ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

Σε ~~[illegible]~~ οικονομίες ανταλλαγής στις οποίες

οι $u^i: \mathbb{R}_+^{S+1} \to \mathbb{R}$, $i=1,2,\dots,I$, συνεχείς και αυστηρά μονότονες. Θεώρημα σταθερού σημείου του Brouwer:

(g: συνεχής)

$g: K \to K$, με $K \subseteq \mathbb{R}^m$ (= S+1 στις m πληρείς ισχύει το πλήθος των αγαθών)

~~[illegible]~~ συμπαγές (δηλ. κλειστό και φραγμένο). Τότε

~~υπάρχει $x_0 \in K$~~ η g έχει σταθερό σημείο

(υπάρχει $x_0 \in K$: $g(x_0) = x_0$)

Στην περίπτωση μας πως ορίζεται η g?

Πρέπει να δείξω ότι: υπάρχε π^* (διάνυσμα αποτίμησης)

τ.ω. $z(\pi^*) = 0$
ισορροπία

$$g: \Delta_{m-1} \longrightarrow \Delta_{m-1}$$

$$\left(\Delta_{m-1} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^m \;\middle|\; \sum_{i=1}^m x_i = 1 \right\} \right)$$

$$g_i(\pi) = \frac{\pi_i + \max\{z_i(\pi), 0\}}{1 + \sum_{i=1}^m \max\{z_i(\pi), 0\}}$$
$\in \mathbb{R}$

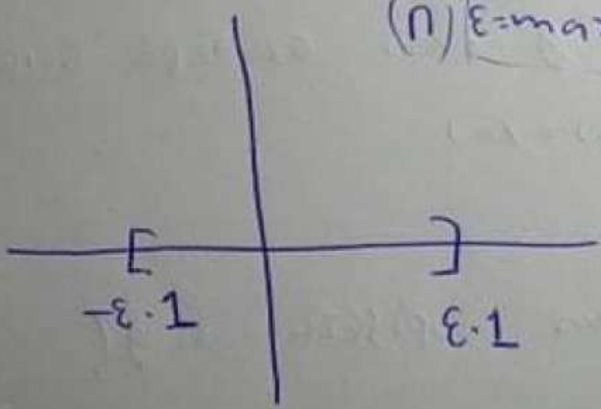
$g_\theta : \Theta \to \Theta$ όπου $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$

① $\boxed{\zeta(\pi^*) = 0 \iff g(\pi^*) = \pi^*}$

Αρκεί ν.δ.ο. η ζ : συνεχής $\iff$

Είναι συνεχής σε κάθε "γειτονιά" - "περιοχή" το Θ_R^m

(π) $\boxed{\varepsilon = \max\{\pi(i),\ i = 1,2,\dots,m\}}$



$\forall\ \varepsilon > 0$

(*) Αν έχουμε σύνολο $A_1^{(\varepsilon)} \times \dots \times A_m^{(\varepsilon)}$ όπου

$A_1^{(\varepsilon)} = [-\varepsilon, \varepsilon]$

($A_1^{(\varepsilon)}$ εξαρτάται από το ε.)

(**) $(x, g(x)) \iff (\pi, g(\pi)))$

1) CAPM

2) Παρ μη-πλήρους αγοράς με arbitrage

3)

12-01-22

Μαθηματικά Οικονομικά

Μάθημα 12ο

$\Omega = \{1, 2, \dots, S'\}$

$P = (P(1), P(2), \dots, P(S'))$, τ.ω $P(s) > 0$, $\sum_{s=1}^{S'} P(s) = 1$

$x, y \in \mathbb{R}^{S'}$ $\langle x, y \rangle_p = \sum_{s=1}^{S'} x(s) y(s) P(s)$

$y \in \mathbb{R}^{S'}$, $y = a + \beta$

$a \in \langle \mathbb{1}, x \rangle$, $\beta \in \langle \mathbb{1}, x \rangle^{\perp}$

Arbitrage Pricing Theory (S. Ross (1976))

$y = a_1 \mathbb{1} + a_2 x + \beta$

$\beta \in \langle \mathbb{1}, x \rangle^{\perp}$

$\dim \langle \mathbb{1}, x \rangle^{\perp} = S' - 2$

$$\underbrace{\langle y, \mathbb{1} \rangle_p}_{E(y)} = a_1 \underbrace{\langle \mathbb{1}, \mathbb{1} \rangle_p}_{1} + a_2 \underbrace{\langle x, \mathbb{1} \rangle_p}_{E(x)}$$

$$\langle y, x \rangle_p = a_1 \underbrace{\langle \mathbb{1}, x \rangle_p}_{E(x)} + a_2 \underbrace{\langle x, x \rangle_p}_{E[x^2]}$$

Σηλαση

$$D = \begin{vmatrix} 1 & E(X) \\ E(X) & E(X^2) \end{vmatrix} = E(X^2) - (E(X))^2 = V(X) > 0$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} E(y) & E(x) \\ E(xy) & E(x^2) \end{vmatrix}}{V(X)}$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & E(y) \\ E(x) & E(xy) \end{vmatrix}}{V(X)}$$

1 CAPM. 2 υποθέσεις αγοράς με και χωρίς arbitrage, 3 edworth κουτί συναρτήσεις ζήτησης 4 και τιμή ισορροπίας,