

Β. Μ. ΡΟΘΟΣ & ΧΡ. Α. ΣΦΥΡΑΚΗΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

HEALLINK
Σύνδεσμος Ελληνικών Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
ΠΡΟΤΑΣΗ ΚΑΙ ΠΡΟΤΥΠΟ
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ Μ. ΡΟΘΟΣ

Αναπλ. Καθηγητής ΑΠΘ

ΧΡΥΣΟΒΑΛΑΝΤΗΣ Α. ΣΦΥΡΑΚΗΣ

Διδάκτωρ Μαθηματικός

Διαφορικές Εξισώσεις



Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά
Συγγράμματα και Βοηθήματα
www.kallipos.gr

Διαφορικές Εξισώσεις

Συγγραφή

Βασίλειος Μ. Ρόθος & Χρυσοβαλάντης Α. Σφυράκης

Κριτικός αναγνώστης

Βασίλειος Παπαγεωργίου

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική Επιμέλεια: Αναστασία Τσιαδήμου

Τεχνική Επεξεργασία: Δρ. Χρυσοβαλάντης Σφυράκης

ISBN: 978-960-603-293-6

Copyright © ΣΕΑΒ, 2015



Το παρόν έργο αδειοδοτείται υπό τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Όχι Παράγωγα Έργα 3.0. Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/gr/>

ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΩΝ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΩΝ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, 15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	ii
Πρόλογος των συγγραφέων	iv
1 Εισαγωγικά	1
1.1 Βασικές Έννοιες των Διαφορικών Εξισώσεων	1
1.2 Ολοκληρωτικές καμπύλες και Πεδίο διευθύνσεων	6
2 Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης	15
2.1 Γραμμικές Διαφορικές Πρώτης Τάξης	15
2.2 ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών	27
2.3 Μη Γραμμικές ΔΕ Πρώτης Τάξης	33
2.4 Ακριβείς ΔΕ και Ολοκληρωτικός Παράγοντας	40
2.4.1 Ακριβείς ΔΕ	40
2.4.2 Ολοκληρωτικός Παράγοντας (Πολλαπλασιαστής Euler)	44
2.5 Ορθογώνιες Οικογένειες Καμπυλών	52
2.6 Φυσικές Εφαρμογές των ΔΕ πρώτης τάξης	60
3 Ύπαρξη και Μοναδικότητα Λύσης Μη γραμμικών ΔΕ	69
3.1 Προσεγγιστική Μέθοδος Cauchy-Euler	69
3.2 Επαναληπτική Μέθοδος Picard	72
4 Αριθμητικές Μέθοδοι για την επίλυση ΠΑΤ Δ.Ε.	81
4.1 Προβλήματα αρχικών τιμών	81
4.2 Η Μέθοδος του Euler	81
4.2.1 Η μέθοδος του Euler	82
4.2.2 Εισαγωγή στις έννοιες του σφάλματος και της ακρίβειας για τη μέθοδο του Euler	84
4.3 Μέθοδοι υψηλότερης τάξης ακρίβειας	94
4.3.1 Η Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler	94
4.3.2 Η Βελτιωμένη μέθοδος του Euler	95
4.3.3 Αναζητώντας μεθόδους με σφάλμα αποκοπής $O(h^3)$	100
4.4 Η μέθοδος Runge-Kutta	106
4.5 Σύγκριση Μεθόδων Αριθμητικών Μεθόδων	114

5	Γραμμικές Βαθμωτές ΔΕ	117
5.1	Ομογενείς Γραμμικές ΔΕ	118
5.1.1	Ομογενείς Γραμμικές ΔΕ 2ης-τάξης	118
5.1.2	Ομογενείς Γραμμικές ΔΕ n -οστής τάξης	127
5.2	Ομογενείς ΔΕ με Σταθερούς Συντελεστές	132
5.2.1	Ομογενείς ΔΕ 2ης τάξης με Σταθερούς Συντελεστές	132
5.2.2	Ομογενείς Γραμμικές ΔΕ n -οστής τάξης με σταθερούς συντελεστές	137
5.3	Μη Ομογενείς Γραμμικές Βαθμωτές ΔΕ	148
5.3.1	Μη Ομογενείς ΔΕ 2ης-τάξης	148
5.3.2	Μέθοδος Προσδιορισμού των Συντελεστών	153
5.4	Υποβιβασμός της τάξης	166
5.5	Μεταβολή των Παραμέτρων	170
5.6	Εφαρμογές των Γραμμικών ΔΕ	180
5.6.1	Μηχανικές ταλαντώσεις	180
5.6.2	Ηλεκτρικές ταλαντώσεις	184
6	Επίλυση με Σειρές Γραμμικών ΔΕ 2ης τάξης	191
6.1	Δυναμικές Σειρές	193
6.2	Σειρές Taylor	195
6.3	Ιδιότητες Δυναμικών Σειρών	195
6.3.1	Παραγωγή Δυναμικών Σειρών	196
6.3.2	Μοναδικότητα Δυναμικών Σειρών	197
6.3.3	Πολυώνυμα Taylor	198
6.3.4	Μετατόπιση του Δείκτη μιας Δυναμικής Σειράς	198
6.3.5	Γραμμικές Πράξης με Δυναμικές Σειρές	201
6.4	Επίλυση με τη μέθοδο των Σειρών σε ομαλό σημείο I	209
7	Μετασχηματισμός Laplace	229
7.1	Εισαγωγή στον μετασχηματισμό Laplace	229
7.2	Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace	240
7.3	Επίλυση Προβλημάτων Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ)	245
7.4	Συνάρτηση μοναδιαίου βήματος (Heaviside)	251
7.4.1	ΔΕ με σταθερούς συντελεστές και με ασυνεχή μη ομογενή όρο	259
7.5	Συνέλιξη	263
7.6	ΠΑΤ με Συναρτήσεις Dirac	269
8	Γραμμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων	279
8.1	Εισαγωγή στα γραμμικά συστήματα ΔΕ	279
8.2	Γραμμικά συστήματα ΔΕ 1ης τάξης	285
8.3	Βασική Θεωρία Ομογενών Γραμμικών Συστημάτων	290
8.4	Ομογενή Συστήματα ΔΕ με σταθερούς συντελεστές	296
8.4.1	Περίπτωση Πίνακα με πραγματικές ιδιοτιμές που διαγωνοποιείται	297
8.4.2	Πολλαπλές Πραγματικές ιδιοτιμές	306
8.4.3	Μιγαδικές Ιδιοτιμές	315

8.5	Εκθετικός Πίνακας και Γραμμικά Συστήματα ΔΕ	325
8.5.1	Εκθετικός πίνακας	325
8.5.2	Επίλυση Ομογενών Συστημάτων ΔΕ με Εκθετικό Πίνακα	329
8.6	Μεταβολή των Παραμέτρων για μη Ομογενή Γραμμικά Συστήματα ΔΕ	336
8.7	Μετασχηματισμός Laplace και Συστήματα ΔΕ	341
9	Σειρές Fourier και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών	345
9.1	Σειρές Fourier	345
9.1.1	Ορισμός και βασικές ιδιότητες	345
9.1.2	Ανισότητα Bessel και η ταυτότητα Parseval	369
9.1.3	Παραγωγή και Ολοκλήρωση σειρών Fourier	371
9.2	Προβλήματα Συνοριακών Τιμών για ΔΕ 2ης τάξης	381
9.2.1	Προβλήματα Συνοριακών Τιμών δύο σημείων	381
9.2.2	ΠΣΤ Sturm-Liouville.	389
A´	Τυπολόγιο Μετασχηματισμού Laplace	411
B´	Τυπολόγιο Ολοκληρωμάτων	413
Γ´	Πίνακας Συντομεύσεων και Ακρωνυμίων	423
	Κατάλογος Πινάκων	i
	Κατάλογος Σχημάτων	i
	Ευρετήριο	iii

Πρόλογος των συγγραφέων

Το παρόν σύγγραμμα πραγματεύεται τις Διαφορικές Εξισώσεις με συνήθεις παραγώγους. Οι Διαφορικές Εξισώσεις αποτελούν τον ακρογωνιαίο λίθο των εφαρμοσμένων μαθηματικών. Από την εποχή της διαμόρφωσης και αναλυτικής μελέτης των πρώτων διαφορικών εξισώσεων πριν 300 χρόνια από τους Newton και Leibnitz, μέχρι τις αρχές του 1800 που ο Cauchy απέδειξε, ότι οι Διαφορικές Εξισώσεις πράγματι ορίζουν συναρτήσεις, οι ερευνητές ασχολούντο με την εύρεση συγκεκριμένων λύσεων αυτών. Οι λύσεις που δόθηκαν, είχαν σημαντική συνεισφορά στην ανάπτυξη της Μηχανικής και γενικότερα των Φυσικών Επιστημών.

Στις μέρες μας, οι Διαφορικές Εξισώσεις εμφανίζονται και αποτελούν την βάση σύγχρονων μαθηματικών αντικειμένων της επιστήμης της πολυπλοκότητας και των μη γραμμικών φαινομένων. Το παρόν βιβλίο καλύπτει σε μεγάλο βαθμό την βασική θεωρία για γραμμικές ΔΕ και αποτελεί βάση για την βαθύτερη μελέτη των φυσικών εφαρμογών. Στόχος του είναι η αναλυτική παρουσίαση των εννοιών, θεωρημάτων και προτάσεων καθώς και των τεχνικών επίλυσης προβλημάτων που σχετίζονται με τους τομείς των μαθηματικών επιστημών.

Το βιβλίο απευθύνεται κατά κύριο λόγο σε φοιτητές Πολυτεχνικών σχολών και των τμημάτων Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πληροφορικής, Φυσικής, Χημείας, Βιολογίας, των σχολών Οικονομίας και Διοίκησης επιχειρήσεων. Για τον λόγο αυτό η έμφαση δίδεται όχι τόσο στην απόδειξη της θεωρίας, αλλά στην παρουσίασή της με τέτοιο τρόπο ώστε να γίνει εύκολα κατανοητή η εφαρμογή της σε διάφορα πεδία επιστημών. Οι εικόνες που περιγράφουν τις λύσεις ΔΕ δημιουργήθηκαν με την χρήση του ειδικού πακέτου *pplane8* το οποίο λειτουργεί σε περιβάλλον MATLAB.

Το βιβλίο αποτελείται από 9 κεφάλαια που καλύπτουν το ευρύ φάσμα των Διαφορικών Εξισώσεων, του μετασχηματισμού Laplace. Πιο συγκεκριμένα:

- ▷ Στο κεφάλαιο 1, παρουσιάζουμε τις βασικές έννοιες και ορισμούς των Διαφορικών Εξισώσεων. Επίσης, δίνεται με κατανοητό τρόπο η γεωμετρική θεώρηση των λύσεων ΔΕ, το πεδίο διευθύνσεων και τις ολοκληρωτικές καμπύλες. Στο κεφάλαιο 2 μελετούμε τις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και διατυπώνουμε χωρίς απόδειξη βασικά θεωρήματα αυτών. Αναπτύσσουμε μεθόδους επίλυσης γραμμικών και μη γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων πρώτης τάξης. Επίσης, παρουσιάζονται ορισμένες φυσικές εφαρμογές των ΔΕ πρώτης τάξης.
- ▷ Στο κεφάλαιο 3, αναφέρουμε τις συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας Προβλημάτων Αρχικών Τιμών μη γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων και εστιάζουμε σε προσεγγιστικές μεθόδους επίλυσης αυτών, όπως η προσεγγιστική μέθοδο Cauchy-Euler, η επαναληπτική μέθοδο Picard. Το κεφάλαιο 4, πραγματεύεται τις αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση μη γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων πρώτης τάξης.
- ▷ Στο κεφάλαιο 5, θα ασχοληθούμε με τη θεωρία όσο και με τη μεθοδολογία επίλυσης βαθμωτών γραμμικών ΔΕ και τις εφαρμογές τους στην μοντελοποίηση συστημάτων.
- ▷ Το κεφάλαιο 6, φέρνει σε επαφή τον αναγνώστη με Διαφορικές Εξισώσεις των οποίων η λύση δίνεται με δυναμικές σειρές.
- ▷ Το κεφάλαιο 7, εισάγει στον αναγνώστη τον μετασχηματισμό Laplace και εμπλουτίζει έτσι τις μεθόδους επίλυσης Διαφορικών Εξισώσεων.

- ▷ Στο κεφάλαιο 8, θα μελετήσουμε συστήματα διαφορικών εξισώσεων με περισσότερες από μία άγνωστες συναρτήσεις. Τέτοια συστήματα εμφανίζονται σε πολλά φυσικά προβλήματα.
- ▷ Το κεφάλαιο 9, ασχολείται με τις σειρές Fourier και την μελέτη προβλημάτων συνοριακών τιμών, που αποτελεί την βάση για την λύση πολλών φυσικών προβλημάτων.

Σε κάθε ενότητα παρατίθενται τα βασικά θεωρήματα και προτάσεις που σχετίζονται με αυτή και ακολουθούν υποδειγματικά λυμένα παραδείγματα, έτσι ώστε ο αναγνώστης να καταλάβει άμεσα τον τρόπο εφαρμογής της θεωρίας και τα συμπεράσματα που προκύπτουν από αυτή. Σε κάθε κεφάλαιο υπάρχουν αντιπροσωπευτικές ασκήσεις προς λύση κλιμακούμενης δυσκολίας που δίνουν την ευκαιρία στον αναγνώστη να κατανοήσει την θεωρία.

Η δομή και το περιεχόμενο του παρόντος συγγράμματος αποτελούν το απόσταγμα μιας διδακτικής εμπειρίας αρκετών ετών και αποτελεί ελπίδα όλων η ουσιαστική συνεισφορά του στην απόκτηση γνώσεων και εμπειριών από τους αναγνώστες του, αναφορικά με το γνωστικό αντικείμενο που προσπαθεί να καλύψει.

Βασίλειος Μ. Ρόθος, Αναπλ. Καθ. ΑΠΘ
Χρυσοβαλάντης Α. Σφυράκης, Διδάκτωρ Μαθηματικών

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τις βασικές έννοιες και ορισμούς των Διαφορικών Εξισώσεων.

Στο εδάφιο 1.1 παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες και ορισμοί των διαφορικών εξισώσεων (ΔΕ)

Στο εδάφιο 1.2 παρουσιάζουμε τη γεωμετρική θεώρηση των λύσεων ΔΕ, το πεδίο διευθύνσεων και τις ολοκληρωτικές καμπύλες.

1.1 Βασικές Έννοιες των Διαφορικών Εξισώσεων

Το αντικείμενο του παρόντος βιβλίου είναι οι Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΔΕ) (Ordinary Differential Equations). Στο εξής με τη συντομογραφία ΔΕ θα εννοούμε Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις.

Εξισώσεις: Υπάρχει κάποιο ζητούμενο.

Διαφορικές: Το ζητούμενο είναι συνάρτηση που εμφανίζεται στην εξίσωση με τις παραγώγους της.

Συνήθεις: Προσδιορισμός σε αντιδιαστολή προς τις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ) όπου στην εξίσωση εμφανίζονται οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης ως προς περισσότερες μεταβλητές. Στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ) οι ζητούμενες συναρτήσεις, είναι συναρτήσεις μιας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής πραγματικής.

Οι ΔΕ χρησιμοποιούνται, για να περιγράψουν πολλά προβλήματα της φυσικής, της γεωμετρίας, της χημείας, της βιολογίας, της ιατρικής, της τεχνολογίας και των κοινωνικών επιστημών. Η περιγραφή κάθε διαδικασίας π.χ. στη φύση, γίνεται μέσω μεταβλητών, που συνδέονται με τον ρυθμό μεταβολής τους, μέσω των φυσικών νόμων, που διέπουν τη διαδικασία και η σχέση αυτή εκφράζεται με συναρτήσεις και τις παραγώγους αυτών.

Το βασικό πρόβλημα

Η γενικότερη μορφή την οποία μπορεί να λάβει μια ΔΕ είναι:

$$F(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad \text{όπου} \quad y^{(k)} = d^k y / dx^k, \quad n \geq 1 \quad (1.1)$$

όπου η συνάρτηση F είναι δοσμένη, η συνάρτηση y άγνωστη με ανεξάρτητη μεταβλητή x , η $y(x)$ ενδέχεται να είναι βαθμωτή ή διανυσματική συνάρτηση.

Το βασικό πρόβλημα στις ΔΕ, είναι η εύρεση μιας λύσης, η οποία στην περίπτωση της (1.1), αποτελεί μια n φορές συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση ϕ , ορισμένη σε κάποιο διάστημα I , η οποία ικανοποιεί την

$$F(x, \phi^{(0)}, \phi^{(1)}, \dots, \phi^{(n)}) = 0.$$

Εξισώσεις άμεσης ή λυμένης μορφής είναι οι ΔΕ στις οποίες η παράγωγος της υψηλότερης τάξης της ζητούμενης συνάρτησης η οποία εμφανίζεται στην εξίσωση, δίδεται συναρτήσει των παραγώγων χαμηλότερης τάξης και, ενδεχομένως, της μεταβλητής x . Για παράδειγμα, οι ΔΕ

$$y' = f(x, y), y'' = g(x, y, y'), \quad \text{γενικότερα} \quad y^{(n)}(x) = h(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}).$$

Βασικές Έννοιες

Έστω η ΔΕ

$$y' = f(x, y),$$

η μεταβλητή x είναι πραγματική και συχνά καλείται χρόνος συμβολίζεται με t , y συμβολίζεται η ζητούμενη συνάρτηση που ικανοποιεί τη ΔΕ, η οποία μπορεί να είναι βαθμωτή ή διανυσματική, αποτελεί συνάρτηση του x , f η ροή της ΔΕ ή συνάρτηση ροής η οποία επίσης μπορεί να είναι βαθμωτή ή διανυσματική. Η ΔΕ καλείται βαθμωτή, όταν η ζητούμενη συνάρτηση y καθώς και η συνάρτηση ροής f , λαμβάνουν πραγματικές τιμές.

Τάξη μιας ΔΕ λέγεται η μεγαλύτερη τάξη παραγωγίσιμης της άγνωστης συνάρτησης, που εμπειριέχεται στη ΔΕ. Για παράδειγμα η ΔΕ $y''(x) = 2xy^2(x)$ είναι δεύτερης τάξης και η ΔΕ $dy = e^{x+y}dx$ είναι πρώτης τάξης.

Η δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η $y^{(n)}(x)$ λέγεται *βαθμός* της ΔΕ.

Αν η F στον (1.1) είναι γραμμική συνάρτηση ως προς την $y(x)$ και τις παραγώγους της, τότε η (1.1) λέγεται *γραμμική* ΔΕ. Η μορφή της γραμμικής ΔΕ n -οστής τάξης είναι :

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y^{(1)}(x) + a_0(x)y(x) = g(x) \quad (1.2)$$

όπου οι $a_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $I \subset \mathbb{R}$ $a_n(x) \neq 0$ και λέγονται *συντελεστές* της γραμμικής ΔΕ (1.2). Αν όλοι οι συντελεστές είναι σταθεροί αριθμοί, τότε η (1.2) λέγεται *γραμμική ΔΕ με σταθερούς συντελεστές*, ενώ αν και ένας τουλάχιστον είναι συνάρτηση του x , τότε η (1.2) λέγεται *γραμμική ΔΕ με μη σταθερούς συντελεστές*. Αν $g(x) = 0$, τότε η (1.2) λέγεται *ομογενής* γραμμική ΔΕ, ενώ αν $g(x) \neq 0$, τότε η (1.2) λέγεται *μη ομογενής* γραμμική ΔΕ.

Η ΔΕ $y'(x) + xy''(x) - 2y^{(4)}(x) = 0$ είναι γραμμική, 4ης τάξης, με μη σταθερούς συντελεστές, ομογενής, ενώ η ΔΕ $y''(x) - y'(x) + 2y(x) = 0$ είναι γραμμική, 2ης τάξης, με σταθερούς συντελεστές, ομογενής.

Μια ΔΕ ονομάζεται *αυτόνομη*, αν η συνάρτηση ροής δεν εξαρτάται από την μεταβλητή

x . Για παράδειγμα οι ΔΕ

$$y' = f(y), \quad y'' = g(y, y'), \quad y''' = h(y, y', y'')$$

είναι αυτόνομες, ενώ οι εξισώσεις

$$y' = f(x), \quad ay'' + by' + cy = \sin x,$$

δεν είναι. Χαρακτηριστική ιδιότητα των αυτόνομων ΔΕ είναι η εξής: Αν η συνάρτηση $\phi = \phi(x)$ ικανοποιεί την $y' = f(y)$, τότε το ίδιο ισχύει και για την $\psi(x) = \phi(x + \chi)$, $\forall \chi \in \mathbb{R}$.

Γενική Λύση

Μια ΔΕ έχει, εν γένει, άπειρες το πλήθος λύσεις. Για παράδειγμα η ΔΕ

$$y' = y,$$

έχει ως λύσεις όλες τις συναρτήσεις $y(x) = ce^x$, όπου $c \in \mathbb{R}$, ενώ η εξίσωση

$$y'' = y,$$

έχει ως λύσεις όλες τις συναρτήσεις $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x}$, όπου $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Οι λύσεις μερικές φορές δίνονται εμμέσως όπως για παράδειγμα στην περίπτωση της ΔΕ

$$y' = \frac{1 + x^2}{1 + y^2},$$

της οποίας οι λύσεις δίνονται εμμέσως από την σχέση

$$y + \frac{1}{3}y^3 = x + \frac{1}{3}x^3 + c.$$

Στα προηγθέντα παραδείγματα ΔΕ, είχαμε παραστάσεις στις οποίες περιλαμβάνονταν όλες οι λύσεις αυτών με την βοήθεια παραμέτρων. Είχαμε τις γενικές τους λύσεις. Θεωρούμε τη ΔΕ

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.3)$$

Μια παράσταση της μορφής $y = \phi(x, \mathbf{c})$ καλείται *γενική λύση ή γενικό ολοκλήρωμα* της ΔΕ (1.3) ή ακόμα στην γενικότερη μορφή $\Phi(x, y, \mathbf{c}) = 0$, όπου $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, η οποία περιλαμβάνει όλες τις λύσεις της ΔΕ για διάφορες τιμές του $c \in \Omega \subset \mathbb{R}$, αν η y είναι n -φορές διαφορίσιμη και

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$$

για όλα x σε ένα ανοικτό διάστημα (a, b) . Σε αντιδιαστολή προς τη γενική λύση, η ειδική λύση ή ειδικό ολοκλήρωμα αποτελεί λύση που προκύπτει από συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου \mathbf{c} .

Το γράφημα της λύσης μιας ΔΕ λέγεται *καμπύλη λύσης*. Γενικότερα, η καμπύλη C καλεί-

ται *ολοκληρωτική καμπύλη* της ΔΕ, αν κάθε συνάρτηση $y = y(x)$ της οποίας το γράφημα είναι τμήμα της C είναι λύση της ΔΕ.

Παράδειγμα 1.1.1 Δείξτε ότι αν c_1 και c_2 είναι σταθερές, τότε

$$y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + 2x - 4 \quad (1.4)$$

είναι λύση της ΔΕ

$$y'' + 2y' + y = 2x \quad (1.5)$$

στο $(-\infty, \infty)$.

Λύση Παραγωγίζοντας την (1.4) δύο φορές

$$y' = -(c_1 + c_2x)e^{-x} + c_2e^{-x} + 2 \quad \text{και} \quad y'' = (c_1 + c_2x)e^{-x} - 2c_2e^{-x},$$

και αντικαθιστώντας στην (1.5), αποδεικνύουμε ότι είναι λύση για όλες τις τιμές του x .

Παράδειγμα 1.1.2 Βρείτε όλες τις λύσεις της ΔΕ

$$y^{(n)} = e^{2x}. \quad (1.6)$$

Λύση Ολοκληρώνοντας την (1.6), έχουμε

$$y^{(n-1)} = \frac{e^{2x}}{2} + k_1,$$

όπου k_1 είναι μια σταθερά. Αν $n \geq 2$, ολοκληρώνοντας έχουμε

$$y^{(n-2)} = \frac{e^{2x}}{4} + k_1x + k_2.$$

Αν $n \geq 3$, ομοίως καταλήγουμε

$$y = \frac{e^{2x}}{2^n} + k_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + k_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + k_n, \quad (1.7)$$

όπου k_1, k_2, \dots, k_n είναι σταθερές, όπως, επίσης, οι

$$\frac{k_1}{(n-1)!}, \frac{k_2}{(n-2)!}, \dots, k_n.$$

Το Παράδειγμα 1.1.2 μας λέει ότι η λύση της (1.6) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$y = \frac{e^{2x}}{2^n} + c_1 + c_2x + \cdots + c_nx^{n-1},$$

όπου έχουμε μετονομάσει τις σταθερές του (1.7) για να προκύψει απλούστερος τύπος, μια πρακτική που θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά στο βιβλίο.

Παράδειγμα 1.1.3 Δείξτε ότι η

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x} \quad (1.8)$$

είναι λύση της ΔΕ

$$xy' + y = x^2 \quad (1.9)$$

στο $(0, \infty)$ και $(-\infty, 0)$.

Λύση Αντικαθιστώντας την (1.22) και

$$y' = \frac{2x}{3} - \frac{1}{x^2}$$

στην (1.23) έχουμε

$$xy'(x) + y(x) = x \left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{x^2} \right) + \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1}{x} \right) = x^2$$

$\forall x \neq 0$. Οπότε y είναι λύση της (1.23) στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$. Όμως, η y δεν είναι λύση της ΔΕ σε ανοικτό διάστημα που περιέχει το $x = 0$, αφού η y δεν ορίζεται στο $x = 0$.

Αρχικές συνθήκες

Σε όλα τα παραδείγματα, είδαμε ότι οι ΔΕ έχουν άπειρο το πλήθος λύσεις. Η μοναδικότητα των λύσεων εξασφαλίζεται με την προσθήκη κάποιων επιπλέον συνθηκών. Μια κατηγορία τέτοιων συνθηκών είναι οι αρχικές συνθήκες, οι οποίες έχουν τη μορφή:

$$y(x_0) = y_0 \quad (1.10)$$

αν η ΔΕ είναι βαθμωτή πρώτης τάξης, ή την μορφή

$$y^{(0)}(x_0) = y_1, y^{(1)}(x_0) = y_2, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n, \quad (1.11)$$

αν έχουμε n -οστής τάξης βαθμωτή ΔΕ.

Η σύζευξη ΔΕ και αρχικής συνθήκης (ή αρχικών συνθηκών), ονομάζεται πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ). Έχει, συνήθως, μια από τις παρακάτω μορφές:

(i) Βαθμωτή πρώτης τάξης:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (1.12)$$

(ii) Βαθμωτή n -τάξης:

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y^{(0)}, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y^{(1)}(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_n. \end{cases} \quad (1.13)$$

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε για τα στοιχεία των αρχικών συνθηκών την ακόλουθη περιγραφή:

x_0 αρχικός χρόνος

y_0 ή (y_1, y_2, \dots, y_n) αρχική τιμή (ή αρχικές τιμές),
 (x_0, y_0) ή $(x_0, (y_1, y_2, \dots, y_n))$ αρχική συνθήκη (ή αρχικές συνθήκες).

Ορισμός 1.1.1 Έστω $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, όπου D ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 και $(x_0, y_0) \in D$. Η συνάρτηση ϕ ονομάζεται λύση του ΠΑΤ (1.12), αν ορίζεται επί του ανοικτού διαστήματος I , επί του οποίου είναι συνεχώς διαφορίσιμη και εντός του οποίου βρίσκεται ο αρχικός χρόνος x_0 και ικανοποιούνται ταυτόχρονα τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $\forall x \in I$ ισχύει ότι $(x, \phi(x)) \in D$,

(ii) $\phi'(x) = f(x, \phi(x))$ για $\forall x \in I$ και

(iii) $\phi(x_0) = y_0$.

Δηλ. ϕ είναι λύση της ΔΕ και ικανοποιεί την αρχική συνθήκη.

1.2 Ολοκληρωτικές καμπύλες και Πεδίο διευθύνσεων

Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιάσουμε ορισμένα γεωμετρικά στοιχεία των λύσεων μιας ΔΕ. Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα που θα μας εισάγει τις έννοιες.

Παράδειγμα 1.2.1 Αν a είναι θετική σταθερά, ο κύκλος

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (1.14)$$

είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη για την ΔΕ

$$y' = -\frac{x}{y}. \quad (1.15)$$

Λύση Για να το διαπιστώσουμε αυτό, παρατηρούμε ότι όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$y_1 = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{and} \quad y_2 = -\sqrt{a^2 - x^2}.$$

είναι λύσεις της ΔΕ (1.14), στο $(-a, a)$. Το γράφημα καθεμιάς από της ανωτέρω κείται επί της περιφέρειας κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων. Όμως, η (1.14) δεν είναι καμπύλη λύση της (1.15), διότι καμία καμπύλη της οικογένειας (1.14), δεν αποτελεί συνάρτηση.

Όπως φαίνεται από το Παράδειγμα 1.2.1, οι καμπύλες αυτές, τις οποίες θα καλούμε ολοκληρωτικές καμπύλες και προσεκτικός ορισμός τους θα δοθεί στη συνέχεια, αποτελούν γενίκευση των λύσεων ΔΕ, δεδομένου ότι οι λύσεις είναι υποχρεωτικά συναρτήσεις. Οι ολοκληρωτικές καμπύλες δεν μπορούν να εκφραστούν παραμετρικά με παράμετρο το x ή το y πάντοτε. Θα ήταν όμως δυνατόν να εκφραστούν παραμετρικά από μια τρίτη μεταβλητή, ώστε να αποτελούν κανονικές καμπύλες.

Υπενθυμίζουμε από την Αναλυτική Γεωμετρία, ότι μια καμπύλη $r : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ όπου I ανοικτό διάστημα, θα ονομάζεται κανονική, αν ισχύουν: Η r είναι διαφορίσιμη σ' όλο το I και $\dot{r}(s) \neq 0 \forall s \in I$, $\cdot = \frac{d}{ds}$. Αν λοιπόν θεωρήσουμε τη ΔΕ $yy' + x = 0$ και εκφράσουμε

παραμετρικά τις ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ με την παράμετρο s :

$$x = x(s), \quad y = y(s)$$

θα έχουμε

$$0 = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (x^2 + y^2) = x\dot{x} + y\dot{y}.$$

Δηλαδή, η καμπύλη που έχει εκφρασθεί παραμετρικά από το s , έχει την ιδιότητα ότι, σε κάθε της σημείο (x^*, y^*) , το εφαπτόμενό της διάνυσμα στο σημείο αυτό είναι κάθετο στο (x^*, y^*) . Σημειωτέον ότι, αν η $y = y(x)$ αποτελεί λύση της ΔΕ

$$y' = f(x, y), \tag{1.16}$$

τότε δεδομένου ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $(x^*, y(x^*))$ του γραφήματος της είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $(1, y'(x^*))$, είναι δυνατό να γραφεί η σχέση (1.16) ως σχέση καθετότητας διανυσμάτων

$$0 = y' - f(x, y) = (1, y') \cdot (-f(x, y), 1),$$

το οποίο γεωμετρικά περιγράφεται ως εξής:

Λύση της (1.16) είναι κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση της οποίας το γράφημα είναι κάθετο στο διάνυσμα $(-f(x, y), 1)$ ή ισοδύναμα, εφαπτόμενο διάνυσμα $(1, f(x, y))$, σε κάθε σημείο (x, y) από το οποίο διέρχεται. Η εξίσωση $yy' + x = 0$ εμφανίζεται εναλλακτικά στη βιβλιογραφία και ως

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0, \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad xdx + ydy = 0. \tag{1.17}$$

Οι ανωτέρω μορφές επιτρέπουν ικανοποίηση τους, όχι μόνο από λύσεις της $yy' + x = 0$, οι οποίες είναι συναρτήσεις, αλλά και από καμπύλες, οι οποίες δεν αποτελούν γραφήματα συναρτήσεων, όπως για παράδειγμα από τον κύκλο. Πράγματι, η καμπύλη

$$x = r\cos s, \quad y = r\sin s, \quad s \in \mathbb{R},$$

ικανοποιεί την (1.17) χωρίς να αποτελεί γράφημα συνάρτησης. Αν όμως η καμπύλη

$$x = X(s), \quad y = Y(s), \quad s \in I,$$

ικανοποιεί την εξίσωση

$$M(x, y)\dot{x} + N(x, y)\dot{y} = 0$$

και $\dot{X}(s) \neq 0$ για όλα $s \in K \subset I$, τότε η καμπύλη $(X(s), Y(s))$, $s \in K$ μπορεί να εκφρασθεί παραμετρικά από το x .

Γενικότερα, θεωρούμε τη ΔΕ

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0, \tag{1.18}$$

όπου M, N , συνεχείς συναρτήσεις σε ανοικτό χωρίο $D \subset \mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι:

$$(M(x, y) \cdot N(x, y)) \neq 0, \quad \forall (x, y) \in D.$$

Μια κανονική καμπύλη $\zeta(s) = (X(s), Y(s))$ με $s \in I \subset \mathbb{R}$, ονομάζεται ολοκληρωτική καμπύλη της εξίσωσης (1.18), αν για κάθε $s \in I$,

$$(M(\zeta(s)), N(\zeta(s))) \cdot \dot{\zeta}(s) = 0, \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad M(\zeta(s)) \frac{dX}{ds} + N(\zeta(s)) \frac{dY}{ds} = 0.$$

Δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{V}(\zeta(s)) = (M(\zeta(s)), N(\zeta(s)))$, είναι κάθετο στην καμπύλη στο σημείο $\zeta(s) = (X(s), Y(s))$.

Στο εδάφιο 2.4.1 θα παρουσιάσουμε αναλυτικά και με λεπτομερή τρόπο μεθόδους επίλυσης ΔΕ της μορφής (1.18).

Θα ήταν δυνατόν να θεωρήσουμε μια βαθμωτή ΔΕ πρώτης τάξης ως μια συνάρτηση που απεικονίζει τα σημεία (x, y) του επιπέδου σε διανύσματα $(1, f(x, y))$. Αποτελεί ένα *πεδίο διευθύνσεων ή διανυσματικό πεδίο* στον \mathbb{R}^2 . Το δε ζητούμενο, ή λύση, θα είναι υπό αυτή την έννοια, μια καμπύλη, η οποία σε κάθε σημείο από το οποίο διέρχεται, εφάπτεται του διανύσματος στο σημείο εκείνο.

Ο σχεδιασμός των πεδίων διευθύνσεων μιας ΔΕ μας βοηθά στη διαμόρφωση αντίληψης, όσον αφορά την ασυμπτωτική συμπεριφορά των λύσεων αυτής, καθώς $x \rightarrow \infty$. Έτσι μπορούμε να βρούμε προσεγγιστικά τις διαδρομές μιας ΔΕ της μορφής (1.16), χωρίς να γίνει επίλυση αυτής. Αυτό γίνεται με τον σχεδιασμό μικρών ευθυγράμμων τμημάτων με κλίση $f(x, y)$, σε διάφορα σημεία του πεδίου D όπου ορίζεται η f , τα οποία ονομάζονται *γραμμικά στοιχεία*. Στη συνέχεια, σχεδιάζοντας τις καμπύλες που ακολουθούν τα γραμμικά στοιχεία, μπορούμε να αποκτήσουμε κάποια αντίληψη, καθώς το x μεταβάλλεται. Επιλέγουμε τόσα σημεία στο πεδίο D , όσα απαιτούνται για να αποκτήσουμε μια σαφή αντίληψη της εικόνας, όταν αυτό είναι δυνατόν, καθόσον υπάρχουν περιπτώσεις που η απάντηση δεν είναι σαφής, ακόμα και με τη χρήση υπολογιστικών μεθόδων, ειδικά όταν υπάρχουν ανώμαλα σημεία, όπου εκτός των άλλων, συχνά δεν υπάρχει μοναδικότητα λύσης.

Παράδειγμα 1.2.2 Στο Παράδειγμα 1.2.3 δείξαμε ότι η

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x} \tag{1.19}$$

είναι λύση της ΔΕ $xy' + y = x^2$ στο $(0, \infty)$ και $(-\infty, 0)$. Με αντικατάσταση στην (1.19) $x = \pm 1$, μπορεί κάποιος να δει ότι η (1.19) είναι λύση των ΠΑΤ

$$xy' + y = x^2, \quad y(1) = \frac{4}{3} \tag{1.20}$$

και

$$xy' + y = x^2, \quad y(-1) = -\frac{2}{3}. \tag{1.21}$$

Το διάστημα που ισχύει η (1.19) ως λύση του (1.20) είναι $(0, \infty)$, αφού είναι το μεγαλύτερο διάστημα που περιέχει το $x_0 = 1$ στο οποίο η (1.19) ορίζεται. Ομοίως, το διάστημα ισχύος

της (1.19) ως λύση του (1.21) είναι $(-\infty, 0)$, αφού είναι το μεγαλύτερο διάστημα που περιέχει το $x_0 = -1$ στο οποίο η (1.19) ορίζεται.

Παράδειγμα 1.2.3 Δείξτε ότι η

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{1}{x} \quad (1.22)$$

είναι λύση της ΔΕ

$$xy' + y = x^2 \quad (1.23)$$

στο $(0, \infty)$ και $(-\infty, 0)$.

Λύση Αντικαθιστώντας την (1.22) και

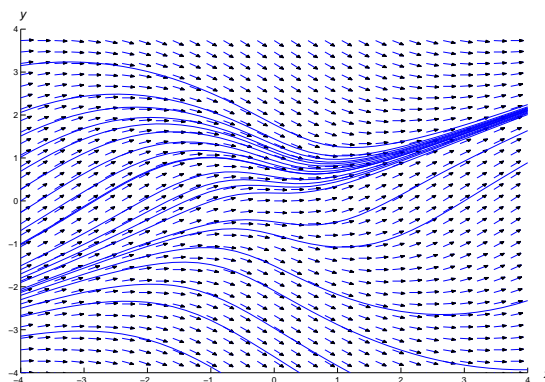
$$y' = \frac{2x}{3} - \frac{1}{x^2}$$

στην (1.23) έχουμε

$$xy'(x) + y(x) = x \left(\frac{2x}{3} - \frac{1}{x^2} \right) + \left(\frac{x^2}{3} + \frac{1}{x} \right) = x^2$$

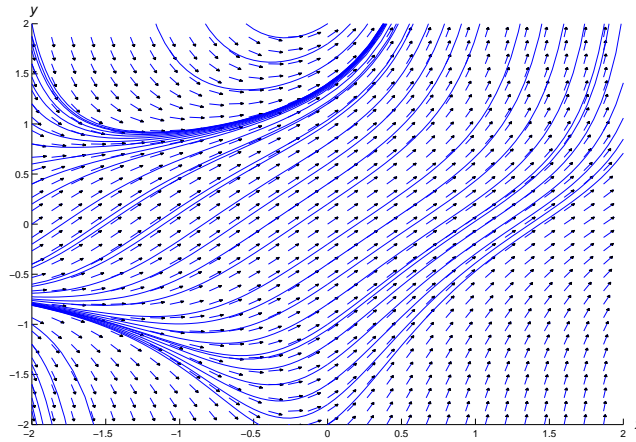
$\forall x \neq 0$. Οπότε y είναι λύση της (1.23) στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$. Όμως, η y δεν είναι λύση της ΔΕ σε κάθε ανοικτό διάστημα που περιέχει το $x = 0$, αφού η y δεν ορίζεται στο $x = 0$.

Στα επόμενα σχήματα δίνονται το πεδίο διεθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για συγκεκριμένες ΔΕ, τα σχήματα αυτά μπορούν να αναπαραχθούν με ειδικό πρόγραμμα *plane8* το οποίο λειτουργεί σε περιβάλλον MATLAB.

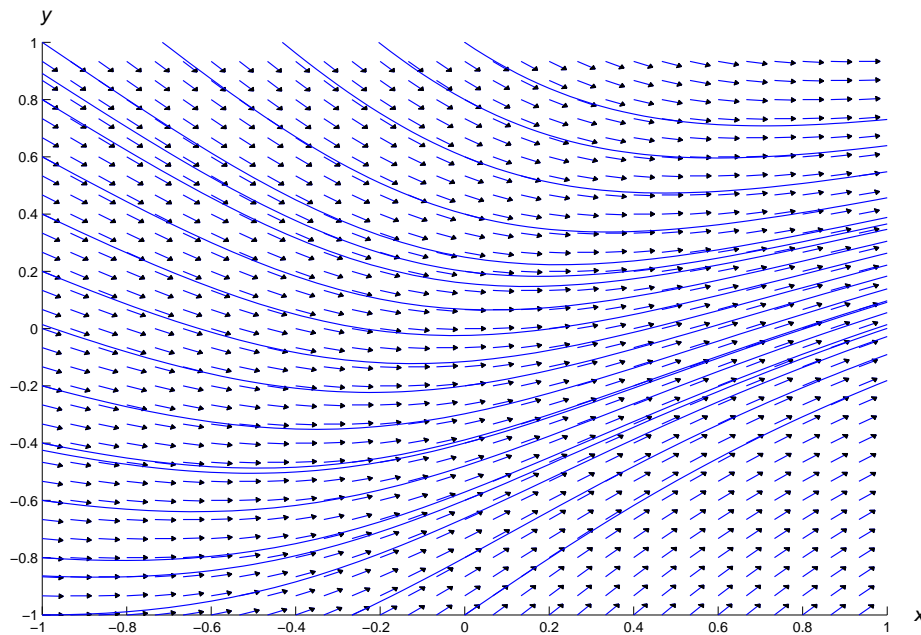


Σχήμα 1.1: Πεδίο διεθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για $y' = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$

1.2 Ασκήσεις προς επίλυση



Σχήμα 1.2: Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για $y' = 1 + xy^2$



Σχήμα 1.3: Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για $y' = \frac{x - y}{1 + x^2}$

1. Βρείτε την τάξη των ΔΕ

$$(a) \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} \frac{d^3y}{dx^3} + x = 0 \quad (b) y'' - 3y' + 2y = x^7$$

$$(c) y' - y^7 = 0 \quad (d) y''y - (y')^2 = 2$$

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση είναι λύση της αντίστοιχης ΔΕ για οποιαδήποτε τιμή της σταθεράς και προσδιορίστε το διάστημα που υπάρχει η λύση αυτή.

$$(a') y = ce^{2x}; \quad y' = 2y$$

$$(b') y = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}; \quad xy' + y = x^2$$

$$(c') y = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}; \quad y' + 2xy = x$$

$$(d') y = (1 + ce^{-x^2/2}); (1 - ce^{-x^2/2})^{-1} \quad 2y' + x(y^2 - 1) = 0$$

$$(e') y = (c_1 + c_2x)e^x + \sin x + x^2; \quad y'' - 2y' + y = -2\cos x + x^2 - 4x + 2$$

$$(z') y = c_1e^x + c_2x + \frac{2}{x}; \quad (1-x)y'' + xy' - y = 4(1-x-x^2)x^{-3}$$

$$(z') y = x^{-1/2}(c_1 \sin x + c_2 \cos x) + 4x + 8;$$

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 4x^3 + 8x^2 + 3x - 2$$

3. Βρείτε τις λύσεις των ΔΕ

$$(a) y' = -x$$

$$(b) y' = -x \sin x$$

$$(c) y' = x \ln x$$

$$(d) y'' = x \cos x$$

$$(e) y'' = 2xe^x$$

$$(f) y'' = 2x + \sin x + e^x$$

$$(g) y''' = -\cos x$$

$$(h) y''' = -x^2 + e^x$$

$$(i) y''' = 7e^{4x}$$

4. Να λυθεί το ΠΑΤ.

$$(a') y' = -xe^x, \quad y(0) = 1$$

$$(b') y' = x \sin x^2, \quad y\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1$$

$$(c') y' = \tan x, \quad y(\pi/4) = 3$$

$$(d') y'' = x^4, \quad y(2) = -1, \quad y'(2) = -1$$

$$(e') y'' = xe^{2x}, \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = 1$$

$$(z') y'' = -x \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3$$

$$(z') y''' = x^2e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2, \quad y''(0) = 3$$

$$(h') y''' = 2 + \sin 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6, \quad y''(0) = 3$$

$$(h') y''' = 2x + 1, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = -4, \quad y''(2) = 7$$

5. Δείξτε ότι η συνάρτηση είναι λύση του αντίστοιχου ΠΑΤ.

$$(a') y = x^2(1 + \ln x); \quad y'' = \frac{3xy' - 4y}{x^2}, \quad y(e) = 2e^2, \quad y'(e) = 5e$$

$$(b') y = \frac{x^2}{3} + x - 1; \quad y'' = \frac{x^2 - xy' + y + 1}{x^2}, \quad y(1) = \frac{1}{3}, \quad y'(1) = \frac{5}{3}$$

$$(\gamma') \quad y = (1 + x^2)^{-1/2}; \quad y'' = \frac{(x^2 - 1)y - x(x^2 + 1)y'}{(x^2 + 1)^2}, \quad y(0) = 1,$$

$$y'(0) = 0$$

$$(\delta') \quad y = \frac{x^2}{1 - x}; \quad y'' = \frac{2(x + y)(xy' - y)}{x^3}, \quad y(1/2) = 1/2, \quad y'(1/2) = 3$$

6. Έστω $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

(α') Δείξτε ότι αν c είναι αυθαίρετη σταθερά, τότε

$$y = (x - c)^a \tag{A}$$

είναι λύση της ΔΕ

$$y' = ay^{(a-1)/a} \tag{B}$$

στο (c, ∞) .

(β') Υποθέτουμε ότι $a < 0$ ή $a > 1$. Μπορείτε να σκεφτείτε μια λύση της (B) η οποία δεν είναι της μορφής (A)?

7. Δείξτε ότι

$$y = \begin{cases} e^x - 1, & x \geq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x < 0, \end{cases}$$

είναι λύση της ΔΕ

$$y' = |y| + 1$$

στο $(-\infty, \infty)$. Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τον ορισμό της παραγώγου στο $x = 0$.

8. (α') Δείξτε ότι αν c είναι πραγματικός αριθμός, τότε

$$y = c^2 + cx + 2c + 1 \tag{A}$$

ικανοποιεί

$$y' = \frac{-(x + 2) + \sqrt{x^2 + 4x + 4y}}{2} \tag{B}$$

σε κάποιο ανοικτό διάστημα, το οποίο να προσδιοριστεί.

(β') Δείξτε ότι

$$y_1 = \frac{-x(x + 4)}{4}$$

επίσης ικανοποιεί την (B) σε κάποιο ανοικτό διάστημα, το οποίο να προσδιοριστεί.

9. Έστω οι ολοκληρωτικές καμπύλες $\Phi_1(x, y) = c_1, \Phi_2(x, y) = c_2$, των διαφορικών εξισώσεων $x' = f_1(x, y), y' = f_2(x, y)$, αντιστοίχως. Αν ισχύει ότι

$$f_1(x, y)f_2(x, y) = -1,$$

για κάθε x, y , τότε δείξτε ότι σε κάθε σημείο στο οποίο τέμνονται οι ανωτέρω καμπύλες τέμνονται κάθετα. Τι θα έπρεπε να ισχύει, ώστε να τέμνονται υπό γωνία α ;

Βιβλιογραφία

- N. Αλικάκος, & Γ.Η. Καλογερόπουλος, 2003. *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα.
- N. Σταυρακάκης, 2011 *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις: γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή*, Παπασωτηρίου, Αθήνα.
- W.E Boyce, & R.C. DiPrima, 2001 *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th edn. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- W. F. Trenc, 2013 *Elementary Differential Equations*, Books and Monographs, Trinity University.

Κεφάλαιο 2

Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και θα διατυπώσουμε χωρίς απόδειξη βασικά θεωρήματα αυτών.

Το εδάφιο 2.1 ασχολείται με γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης και τρόπους επίλυσης αυτών.

Στο εδάφιο 2.2 μελετούμε ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών και παρουσιάζουμε τις διαφορές μεταξύ γραμμικών και μη γραμμικών πρώτης τάξης ΔΕ.

Στο εδάφιο 2.3 ασχολούμαστε με μη γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης που επιλύονται μέσω του μετασχηματισμού σε γραμμικές.

Στο εδάφιο 2.4 παρουσιάζουμε τις ακριβείς ΔΕ και εισάγουμε την έννοια του ολοκληρωτικού παράγοντα. Στο εδάφιο 2.5 μελετάμε πώς κατασκευάζουμε μια ΔΕ όταν γνωρίζουμε τη γενική λύση και παρουσιάζουμε τις ορθογώνιες οικογένειες καμπυλών.

Στο εδάφιο 2.6 παρουσιάζονται ορισμένες φυσικές εφαρμογές των ΔΕ πρώτης τάξης.

2.1 Γραμμικές Διαφορικές Πρώτης Τάξης

Μια διαφορική εξίσωση (ΔΕ) 1ης τάξης καλείται *γραμμική*, αν μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$y' + p(x)y = f(x). \quad (2.1)$$

Θα λέμε ότι η ΔΕ (2.1) είναι *ομογενής*, αν $f \equiv 0$; διαφορετικά θα καλείται *μη ομογενής*. Η $y \equiv 0$ είναι μια προφανής λύση της ομογενούς ΔΕ $y' + p(x)y = 0$, θα καλείται *τετριμμένη λύση*. Κάθε άλλη μη μηδενική λύση θα καλείται *μη τετριμμένη*.

Παράδειγμα 2.1.1 Οι ΔΕ πρώτης τάξης

$$\begin{aligned}x^2y' + 3y &= x^2, \\xy' - 8x^2y &= \sin x, \\xy' + (\ln x)y &= 0, \\y' &= x^2y - 2,\end{aligned}$$

δεν ανήκουν στη μορφή (2.1), αλλά είναι γραμμικές, διότι μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\begin{aligned}y' + \frac{3}{x^2}y &= 1, \\y' - 8xy &= \frac{\sin x}{x}, \\y' + \frac{\ln x}{x}y &= 0, \\y' - x^2y &= -2.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.1.2 Παραθέτουμε ορισμένες μη γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης :

$$\begin{aligned}xy' + 3y^2 &= 2x && (y^2), \\yy' &= 3 && (yy'), \\y' + xe^y &= 12 && (e^y).\end{aligned}$$

Γενική Λύση μιας Γραμμικής ΔΕ Πρώτης Τάξης

Για να κατανοήσουμε την μεθοδολογία επίλυσης μιας γραμμικής ΔΕ πρώτης τάξης παραθέτουμε ορισμένα παραδείγματα πριν την παρουσίαση του θεωρήματος.

$$y' = \frac{1}{x^2}. \quad (2.2)$$

Από τον λογισμό γνωρίζουμε ότι η y ικανοποιεί τη ΔΕ αν και μόνο αν

$$y = -\frac{1}{x} + c, \quad x \neq 0 \quad (2.3)$$

όπου c είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Θα καλούμε την c *παράμετρο* και ότι η (2.3) ορίζει μια *μονοπαραμετρική οικογένεια* συναρτήσεων. Για κάθε πραγματικό c , η συνάρτηση που ορίζεται από την (2.3) είναι μια λύση της (2.2) στο $(-\infty, 0)$ and $(0, \infty)$; επιπλέον, κάθε λύση της (2.2) στα διαστήματα που ορίζεται είναι της μορφής (2.3) για κάποια επιλογή της c . Η (2.3) καλείται *γενική λύση* της (2.2).

Όπως θα δούμε παρόμοια κατάσταση εμφανίζεται και στη μελέτη κάθε γραμμικής πρώτης τάξης ΔΕ της μορφής

$$y' + p(x)y = f(x); \quad (2.4)$$

εάν οι p και f είναι συνεχείς σε κάποιο ανοικτό διάστημα (a, b) , τότε υπάρχει ένας μοναδικός τύπος $y = y(x, c)$ αντίστοιχος με την (2.3) που περιέχει το x και μια παράμετρος c και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Για κάθε σταθερή τιμή της c , η συνάρτηση του x είναι μια λύση της (2.4) στο (a, b) .
- Αν y είναι μια λύση της (2.4) στο (a, b) , τότε η y μπορεί να προκύψει από τον τύπο με κατάλληλη επιλογή του c .

Η $y = y(x, c)$ καλείται *γενική λύση* της (2.4).

Η ΔΕ της μορφής

$$P_0(x)y' + P_1(x)y = F(x) \quad (2.5)$$

έχει μια γενική λύση στο (a, b) όπου οι P_0 , P_1 , και F είναι συνεχείς και P_0 δεν έχει ρίζες, διότι σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε την (2.5) στη μορφή (2.4) όπου $p = P_1/P_0$ και $f = F/P_0$, συνεχείς στο (a, b) . Στα παραδείγματα, συνήθως, δεν προσδιορίζουμε το διάστημα (a, b) όταν αναζητούμε γενική λύση μιας γραμμικής ΔΕ. Συμφωνούμε ότι πάντα αναζητούμε γενική λύση σε ένα ανοικτό διάστημα στο οποίο οι p και f είναι συνεχείς, αν έχουμε ΔΕ της μορφής (2.4) ή οι P_0 , P_1 , και F είναι συνεχείς και η P_0 δεν μηδενίζεται, αν η εξίσωση έχει την μορφή (2.5).

Ομογενείς Γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης

Ξεκινάμε με το πρόβλημα εύρεσης της γενικής λύσης μιας ομογενούς γραμμικής ΔΕ πρώτης τάξης

$$y' + p(x)y = f(x); \quad (2.6)$$

Παράδειγμα 2.1.3 Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$xy' + y = 0. \quad (2.7)$$

και να λυθεί το ΠΑΤ

$$xy' + y = 0, \quad y(1) = 3. \quad (2.8)$$

Λύση Γραφουμε την (2.7) ως

$$y' + \frac{1}{x}y = 0, \quad (2.9)$$

όπου x περιορίζεται στο $(-\infty, 0)$ ή $(0, \infty)$. Αν y είναι μια μη τετριμμένη λύση της (2.9), θα πρέπει να υπάρχει σε κάποιο ανοικτό διάστημα I στο οποίο y δεν μηδενίζεται. Μπορούμε να γράψουμε την (2.9) ως

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

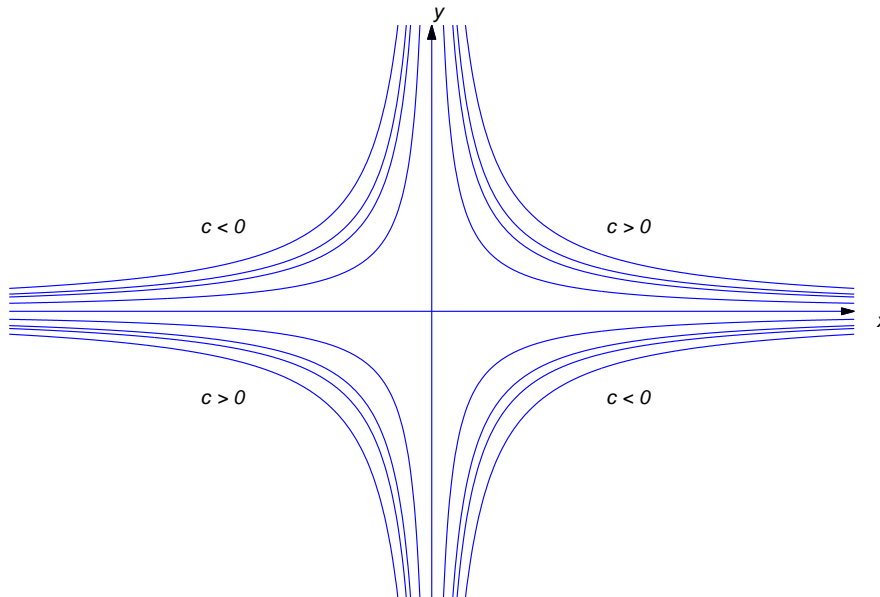
για $x \in I$. Ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\ln |y| = -\ln |x| + k, \quad \text{οπότε} \quad |y| = \frac{e^k}{|x|}.$$

Η συνάρτηση που ικανοποιεί την τελευταία εξίσωση δεν αλλάζει πρόσημο στο $(-\infty, 0)$ ή $(0, \infty)$, μπορούμε να γράψουμε το αποτέλεσμα ως

$$y = \frac{c}{x} \quad (\text{όπου}) \quad c = \begin{cases} e^k & \text{αν } y > 0, \\ -e^k & \text{αν } y < 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

Έχουμε δείξει ότι κάθε λύση του (2.9) δίνεται από (2.10) για κάποια επιλογή του c . Οι τιμές του c είναι ανεξάρτητες για τα δύο διαστήματα. (Ακόμα και αν υποθέσουμε ότι η y ήταν η μη τετριμμένη λύση για να παράγουμε την (2.10), μπορούμε να πάρουμε την τετριμμένη λύση θέτοντας $c = 0$ στην (2.10).) Κάθε συνάρτηση της μορφής (2.10) είναι λύση της (2.9), αφού ικανοποιεί την (2.9).



Σχήμα 2.1: Λύσεις της $xy' + y = 0$ στο $(0, \infty)$ και $(-\infty, 0)$.

Στο Σχήμα 2.1 δείχνουμε τα γραφήματα κάποιων λύσεων που αντιστοιχούν σε διάφορες τιμές της σταθεράς c .

Για να λύσουμε το ΠΑΤ, εφαρμόζουμε την αρχική συνθήκη $y(1) = 3$ στην (2.10) έχουμε $c = 3$. Οπότε, η λύση του (2.8) είναι

$$y = \frac{3}{x}.$$

Το διάστημα στο οποίο ορίζεται η λύση είναι το $(0, \infty)$.

Διατυπώνουμε το επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.1 *Αν p είναι πραγματική συνεχής συνάρτηση στο (a, b) , τότε η γενική λύση της ομογενούς ΔΕ*

$$y' + p(x)y = 0 \tag{2.11}$$

στο (a, b) είναι

$$y = ce^{-P(x)}, \quad \text{όπου} \quad P(x) = \int p(x) dx \tag{2.12}$$

$P(x)$ είναι η παράγουσα της p στο (a, b) ; δηλ.,

$$P'(x) = p(x), \quad a < x < b. \tag{2.13}$$

Απόδειξη Αν $y = ce^{-P(x)}$, παραγωγίζοντας y και με χρήση (2.13) έχουμε

$$y' = -P'(x)ce^{-P(x)} = -p(x)ce^{-P(x)} = -p(x)y,$$

οπότε $y' + p(x)y = 0$ δηλ. y είναι μια λύση της (2.11), για οποιαδήποτε επιλογή της c .

Θα δείξουμε ότι κάθε λύση της (2.11) μπορεί να γραφεί ως $y = ce^{-P(x)}$ για κάποια σταθερά c . Η τετριμμένη λύση μπορεί να γραφεί αν επιλέξουμε $c = 0$. Υποθέτουμε τώρα ότι η y είναι μη τετριμμένη λύση. Τότε θα υπάρχει, αν ανοικτό υποδιάστημα I του (a, b) στο οποίο η y δεν μηδενίζεται. Μπορούμε να γράψουμε την (2.11) ως

$$\frac{y'}{y} = -p(x) \quad (2.14)$$

για $x \in I$. Με ολοκλήρωση (2.14) και με χρήση της (2.12) έχουμε $\ln |y| = -P(x) + k$, όπου k είναι μια σταθερά. Αυτό συνεπάγεται ότι $|y| = e^k e^{-P(x)}$. Αφού P ορίζεται για όλα τα $x \in (a, b)$ και δεν μηδενίζεται ποτέ, μπορούμε να θεωρήσουμε $I = (a, b)$, μπορούμε να γράψουμε την τελευταία σχέση ως $y = ce^{-P(x)}$, όπου

$$c = \begin{cases} e^k & \text{αν } y > 0 \text{ στο } (a, b), \\ -e^k & \text{αν } y < 0 \text{ στο } (a, b). \end{cases}$$

Μη Ομογενείς Γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης

Θα επιλύσουμε την μη ομογενή ΔΕ

$$y' + p(x)y = f(x). \quad (2.15)$$

όπου η αντίστοιχη *ομογενής εξίσωση* είναι

$$y' + p(x)y = 0.$$

Θα βρούμε λύσεις της ΔΕ (2.15) στη μορφή $y = uy_1$, όπου y_1 είναι μια μη τετριμμένη λύση της ομογενούς και u πρέπει να προσδιοριστεί. Η μέθοδος αυτή που στηρίζεται σε μια λύση της ομογενούς είναι γνωστή και ως *μεταβολή των σταθερών*, και θα την συναντήσουμε αρκετά συχνά στη μελέτη ΔΕ. (Προφανώς, u δεν είναι σταθερά, διότι αν ήταν, το αριστερό μέλος της (2.15) θα ήταν μηδέν. Στην αρχή η u θεωρήθηκε ως "σταθερά" η οποία μεταβάλλεται με τον χρόνο; εξού και το όνομα "μεταβολή των σταθερών.")

Αν

$$y = uy_1, \quad \text{τότε} \quad y' = u'y_1 + uy_1'.$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για y και y' στην (2.15) έχουμε

$$u'y_1 + u(y_1' + p(x)y_1) = f(x),$$

η οποία ανάγεται σε

$$u'y_1 = f(x), \quad (2.16)$$

αφού y_1 είναι λύση της ομογενούς; δηλ., $y_1' + p(x)y_1 = 0$. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1 είδαμε ότι η y_1 δεν μηδενίζεται στο διάστημα όπου η p είναι συνεχής. Οπότε μπορούμε να διαιρέσουμε την (2.16) με y_1 οπότε $u' = f(x)/y_1(x)$. Μπορούμε να ολοκληρώσουμε (εισάγοντας μια σταθερά ολοκλήρωσης), και πολλαπλασιάζοντας το αποτέλεσμα

με y_1 , προκύπτει η γενική λύση της (2.15). Ας δούμε δυο παραδείγματα.

Παράδειγμα 2.1.4

(α') Να βρείτε τη γενική λύση της ΔΕ

$$y' + (\cot x)y = x \csc x. \quad (2.17)$$

(β') Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' + (\cot x)y = x \csc x, \quad y(\pi/2) = 1. \quad (2.18)$$

Λύση (α) Έχουμε $p(x) = \cot x$ και $f(x) = x \csc x$ συνεχείς συναρτήσεις εκτός των σημείων $x = r\pi$, όπου r είναι ακέραιος. Αναζητούμε λύσεις της ΔΕ (2.17) στα διαστήματα $(r\pi, (r+1)\pi)$. Μια μη τετρημμένη λύση y_1 της ομογενούς ΔΕ, πρέπει να ικανοποιεί την $y_1' + (\cot x)y_1 = 0$, η οποία γράφεται

$$\frac{y_1'}{y_1} = -\cot x = -\frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{τότε} \quad \ln |y_1| = -\ln |\sin x|, \quad (2.19)$$

όπου θεωρήσαμε ως σταθερά ολοκλήρωσης το μηδέν, διότι χρειαζόμαστε *μια* συνάρτηση που ικανοποιεί την (2.19), δηλαδή $y_1 = 1/\sin x$. Αναζητούμε λύσεις για την (2.17) της μορφής $y = \frac{u}{\sin x}$, Αντικαθιστώντας την y στην (2.17), έχουμε

$$u'/\sin x = x \csc x = x/\sin x \quad \text{ή ισοδύναμα,} \quad u' = x.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$u = \frac{x^2}{2} + c, \quad \text{και} \quad y = \frac{u}{\sin x} = \frac{x^2}{2 \sin x} + \frac{c}{\sin x}. \quad (2.20)$$

τη γενική λύση της ΔΕ (2.17) σε κάθε διάστημα της μορφής $(r\pi, (r+1)\pi)$ ($r = \text{ακέραιος}$).

(β) Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη $y(\pi/2) = 1$ στην (2.20) έχουμε $c = 1 - \frac{\pi^2}{8}$. Οπότε,

$$y = \frac{x^2}{2 \sin x} + \frac{(1 - \pi^2/8)}{\sin x}$$

είναι η λύση του ΠΑΤ (2.18), στο διάστημα $(0, \pi)$. Το Σχήμα 2.2 δείχνει το γράφημα της λύσης του ΠΑΤ

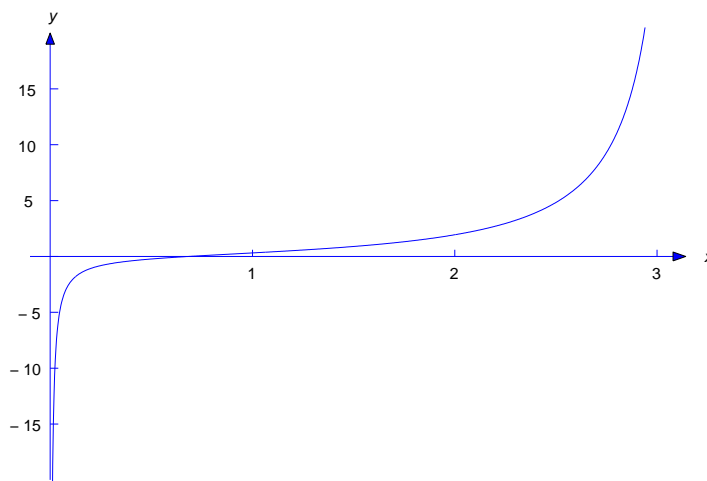
Συνοψίζοντας για τη λύση της ΔΕ

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (2.21)$$

εργαζόμαστε ως εξής:

(α') Βρίσκουμε την συνάρτηση y_1 , τέτοια ώστε

$$\frac{y_1'}{y_1} = -p(x).$$



Σχήμα 2.2: Λύση του ΠΑΤ $y' + (\cot x)y = x \csc x, y(\pi/2) = 1$.

Για ευκολία θεωρούμε την σταθερά ολοκλήρωσης μηδέν.

(β') Θεωρούμε

$$y = uy_1 \quad (2.22)$$

μια λύση της μη ομογενούς ΔΕ.

(γ') Αντικαθιστούμε την λύση και προσδιορίζουμε την u ; όπου, $u' = f/y_1$. Ολοκληρώνοντας με αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης.

(δ') Αντικαθιστούμε την u στην (2.22) και έχουμε τη λύση y .

Για να επιλύσουμε τη ΔΕ $P_0(x)y' + P_1(x)y = F(x)$, διαιρούμε με $P_0(x)$ για να προκύψει μια ΔΕ της μορφής (2.21) και ακολουθούμε τη μεθοδολογία.

Λύσεις σε Ολοκληρωτική μορφή

Μερικές φορές επιλύοντας μια ΔΕ πρώτης τάξης καταλήγουμε σε ένα αόριστο ολοκλήρωμα που δεν μπορεί να υπολογιστεί με τις συνήθεις μεθόδους. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1.5

(α') Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y' - 2xy = 1.$$

(β') Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' - 2xy = 1, \quad y(0) = y_0. \quad (2.23)$$

Λύση (α) Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο μεταβολής των σταθερών χρειαζόμαστε μια μη

τετριμμένη λύση y_1 της ομογενούς ΔΕ $y_1' - 2xy_1 = 0$, η οποία γράφεται $\frac{y_1'}{y_1} = 2x$, δηλ

$$\ln |y_1| = x^2, \quad \text{οπότε} \quad |y_1| = e^{x^2}.$$

Επιλέγουμε $y_1 = e^{x^2}$, αναζητούμε λύσεις της (2.23) της μορφής $y = ue^{x^2}$, όπου

$$u'e^{x^2} = 1, \quad \text{δηλ} \quad u' = e^{-x^2}.$$

Συνεπώς

$$u = c + \int e^{-x^2} dx,$$

Η γενική λύση της ΔΕ (2.23) γράφεται στην ολοκληρωτική μορφή χωρίς να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$y = ue^{x^2} = e^{x^2} \left(c + \int e^{-x^2} dx \right). \quad (2.24)$$

(β) Η αρχική συνθήκη στην (2.23) εφαρμόζεται για $x_0 = 0$, είναι βολικό να γράψουμε την (2.24) ως

$$y = e^{x^2} \left(c + \int_0^x e^{-t^2} dt \right),$$

Θέτοντας $x = 0$ και $y = y_0$, έχουμε $c = y_0$. Οπότε η λύση του ΠΑΤ είναι

$$y = e^{x^2} \left(y_0 + \int_0^x e^{-t^2} dt \right). \quad (2.25)$$

Για δοσμένη αρχική τιμή y_0 και κάθε σταθερό x , το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με αριθμητικές μεθόδους.

Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας

Η μέθοδος μεταβολής των σταθερών μας οδηγεί στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.2 *Υποθέτουμε ότι p και f είναι συνεχείς συναρτήσεις στο (a, b) , και έστω y_1 είναι μια οποιαδήποτε μη τετριμμένη λύση της ομογενούς ΔΕ $y' + p(x)y = 0$ στο (a, b) . Τότε :*

(α') *Η γενική λύση της μη ομογενούς ΔΕ*

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (2.26)$$

στο (a, b) δίνεται από τη σχέση

$$y = y_1(x) \left(c + \int f(x)/y_1(x) dx \right). \quad (2.27)$$

(β') *Αν x_0 είναι αυθαίρετο σημείο στο (a, b) και y_0 είναι αυθαίρετος πραγματικός αριθμός, τότε το ΠΑΤ*

$$y' + p(x)y = f(x), \quad y(x_0) = y_0$$

έχει μοναδική λύση την

$$y = y_1(x) \left(\frac{y_0}{y_1(x_0)} + \int_{x_0}^x \frac{f(t)}{y_1(t)} dt \right)$$

στο (a, b) .

Απόδειξη (α) Για να δείξουμε ότι (2.27) είναι η γενική λύση της (2.26) στο (a, b) , πρέπει να αποδείξουμε ότι:

- (i) Αν c είναι μια σταθερά, η συνάρτηση y στην (2.27) είναι λύση της (2.26) στο (a, b) .
- (ii) Αν y είναι μια λύση της (2.26) στο (a, b) τότε y είναι της μορφής (2.27) για κάποια σταθερά c .

Για να αποδείξουμε το (i), παρατηρούμε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής (2.27) ορίζεται στο (a, b) , διότι p και f είναι συνεχείς στο (a, b) . Παραγωγίζοντας την (2.27), έχουμε

$$y' = y_1'(x) \left(c + \int f(x)/y_1(x) dx \right) + f(x).$$

Αφού $y_1' = -p(x)y_1$, η προηγούμενη και η (2.27) συνεπάγονται ότι

$$\begin{aligned} y' &= -p(x)y_1(x) \left(c + \int f(x)/y_1(x) dx \right) + f(x) \\ &= -p(x)y(x) + f(x), \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι η y είναι μια λύση της (2.26).

Για την απόδειξη του (ii), υποθέτουμε ότι y είναι μια λύση της (2.26) στο (a, b) . Γνωρίζουμε ότι y_1 δεν έχει ρίζες στο (a, b) , οπότε η συνάρτηση $u = y/y_1$ ορίζεται στο (a, b) . Επιπλέον,

$$y' = -py + f \quad \text{και} \quad y_1' = -py_1,$$

$$\begin{aligned} u' &= \frac{y_1 y' - y_1' y}{y_1^2} \\ &= \frac{y_1(-py + f) - (-py_1)y}{y_1^2} = \frac{f}{y_1}. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας $u' = f/y_1$ έχουμε

$$u = \left(c + \int f(x)/y_1(x) dx \right),$$

το οποίο συνεπάγεται την (2.27), αφού $y = uy_1$.

(β) Έχουμε αποδείξει στο (α), όπου $\int f(x)/y_1(x) dx$ στην (2.27) είναι μια αυθαίρετη παράγουσα της f/y_1 . Τώρα είναι βολικό να επιλέξουμε ως παράγουσα ίση με μηδέν όταν

$x = x_0$, και γράφουμε τη γενική λύση της (2.26) ως

$$y = y_1(x) \left(c + \int_{x_0}^x \frac{f(t)}{y_1(t)} dt \right).$$

Αφού

$$y(x_0) = y_1(x_0) \left(c + \int_{x_0}^{x_0} \frac{f(t)}{y_1(t)} dt \right) = cy_1(x_0),$$

βλέπουμε ότι $y(x_0) = y_0$, αν και μόνο αν $c = y_0/y_1(x_0)$.

2.1 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-14 να βρεθεί η γενική λύση των ΔΕ.

1. $y' + ay = 0$ (a =σταθερά)

2. $y' + 3x^2y = 0$

3. $xy' + (\ln x)y = 0$

4. $xy' + 3y = 0$

5. $x^2y' + y = 0$

6. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{7}{x^2} + 3$

7. $y' + \frac{4}{x-1}y = \frac{1}{(x-1)^5} + \frac{\sin x}{(x-1)^4}$

8. $xy' + (1 + 2x^2)y = x^3e^{-x^2}$

9. $xy' + 2y = \frac{2}{x^2} + 1$

10. $y' + (\tan x)y = \cos x$

11. $(1+x)y' + 2y = \frac{\sin x}{1+x}$

12. $(x-2)(x-1)y' - (4x-3)y = (x-2)^3$

13. $y' + (2 \sin x \cos x)y = e^{-\sin^2 x}$

14. $x^2y' + 3xy = e^x$

Στις Ασκήσεις 15-20 να λυθεί το ΠΑΤ.

15. $y' + \left(\frac{1+x}{x} \right) y = 0, \quad y(1) = 1$

16. $xy' + \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right) y = 0, \quad y(e) = 1$

17. $xy' + (1 + x \cot x)y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

18. $y' - \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) y = 0, \quad y(0) = 2$

19. $y' + \frac{k}{x}y = 0, \quad y(1) = 3 \quad (k=\text{σταθερά})$

20. $y' + (\tan kx)y = 0, \quad y(0) = 2 \quad (k = \text{σταθερά})$

Στις Ασκήσεις 21–25 να λυθεί το ΠΑΤ και να σχεδιάσετε το γράφημα της λύσης.

21. $y' + 7y = e^{3x}, \quad y(0) = 0$

22. $(1 + x^2)y' + 4xy = \frac{2}{1 + x^2}, \quad y(0) = 1$

23. $xy' + 3y = \frac{2}{x(1 + x^2)}, \quad y(-1) = 0$

24. $y' + (\cot x)y = \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

25. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{2}{x^2} + 1, \quad y(-1) = 0$

Στις Ασκήσεις 26–38 να λυθεί το ΠΑΤ.

26. $(x - 1)y' + 3y = \frac{1}{(x - 1)^3} + \frac{\sin x}{(x - 1)^2}, \quad y(0) = 1$

27. $xy' + 2y = 8x^2, \quad y(1) = 3$

28. $xy' - 2y = -x^2, \quad y(1) = 1$

29. $y' + 2xy = x, \quad y(0) = 3$

30. $(x - 1)y' + 3y = \frac{1 + (x - 1)\sec^2 x}{(x - 1)^3}, \quad y(0) = -1$

31. $(x + 2)y' + 4y = \frac{1 + 2x^2}{x(x + 2)^3}, \quad y(-1) = 2$

32. $(x^2 - 1)y' - 2xy = x(x^2 - 1), \quad y(0) = 4$

33. $(x^2 - 5)y' - 2xy = -2x(x^2 - 5), \quad y(2) = 7$

34. $y' + 2xy = x^2, \quad y(0) = 3$

35. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x^2}, \quad y(1) = 2$

36. $y' + y = \frac{e^{-x} \tan x}{x}, \quad y(1) = 0$

37. $y' + \frac{2x}{1 + x^2}y = \frac{e^x}{(1 + x^2)^2}, \quad y(0) = 1$

38. $xy' + (x + 1)y = e^{x^2}, \quad y(1) = 2$

39. (α') Σχεδιάστε το πεδίο διευθύνσεων και κάποιες ολοκληρωτικές καμπύλες για τη ΔΕ

$$xy' - 2y = -1 \quad (\text{A})$$

στην τετραγωνική περιοχή $\{-1 \leq x \leq 1, -0.5 \leq y \leq 1.5\}$. Ποιο κοινό χαρακτηριστικό έχουν οι καμπύλες;

(β') Δείξτε ότι η γενική λύση της (A) στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$ είναι $y = \frac{1}{2} + cx^2$.

(γ') Δείξτε ότι η y είναι λύση του (A) στο $(-\infty, \infty)$ αν και μόνο αν

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2} + c_1 x^2, & x \geq 0, \\ \frac{1}{2} + c_2 x^2, & x < 0, \end{cases}$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

(δ') Από το (γ) συμπεραίνετε ότι όλες οι λύσεις της (A) στο $(-\infty, \infty)$ είναι λύσεις του ΠΑΤ

$$xy' - 2y = -1, \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

(ε') Με χρήση του (β) να δείξετε ότι, αν $x_0 \neq 0$ και y_0 είναι αυθαίρετο, τότε το ΠΑΤ

$$xy' - 2y = -1, \quad y(x_0) = y_0$$

έχει άπειρες λύσεις στο $(-\infty, \infty)$.

40. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο (a, b) και α μια σταθερά.

(α') Να διατυπώσετε τον τύπο για τη λύση του ΠΑΤ

$$y' + \alpha y = f(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad (\text{A})$$

όπου $x_0 \in (a, b)$ και y_0 είναι αυθαίρετος πραγματικός αριθμός.

(β') Υποθέτουμε $(a, b) = (a, \infty)$, $\alpha > 0$ και $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$. Δείξτε ότι αν y είναι λύση του (A), τότε $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = L/\alpha$.

41. Μερικές μη γραμμικές ΔΕ μπορούν να μετασχηματιστούν σε γραμμικές ΔΕ με την κατάλληλη αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής. Δείξτε ότι αν

$$g'(y)y' + p(x)g(y) = f(x)$$

όπου y είναι συνάρτηση του x και g είναι συνάρτηση του y , τότε η νέα εξαρτημένη μεταβλητή $z = g(y)$ ικανοποιεί τη γραμμική ΔΕ

$$z' + p(x)z = f(x).$$

42. Να λυθούν οι ΔΕ με τη μέθοδο της Άσκησης 41.

$$(a) (\sec^2 y)y' - 3 \tan y = -1 \quad (b) e^{y^2} \left(2yy' + \frac{2}{x} \right) = \frac{1}{x^2}$$

$$(c) \frac{xy'}{y} + 2 \ln y = 4x^2 \quad (d) \frac{y'}{(1+y)^2} - \frac{1}{x(1+y)} = -\frac{3}{x^2}$$

2.2 ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών

Μια ΔΕ πρώτης τάξης καλείται *διαχωρίσιμη* ή *χωριζομένων μεταβλητών* αν μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$h(y)y' = g(x), \quad (2.28)$$

όπου το αριστερό μέρος είναι γινόμενο του y' και συνάρτηση του y και το δεξί μέρος είναι μόνο συνάρτηση του x . Μια διαχωρίσιμη ΔΕ αυτής της μορφής καλείται *χωριζομένων μεταβλητών*. Στο εδάφιο 2.1 χρησιμοποιήσαμε τον διαχωρισμό μεταβλητών για την επίλυση γραμμικών ομογενών ΔΕ πρώτης τάξης. Εδώ θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή για την επίλυση μη γραμμικών ΔΕ.

Για την επίλυση της (2.28), θεωρούμε ότι y είναι μια λύση. Έστω $G(x)$ και $H(y)$ είναι οι παράγουσες των $g(x)$ και $h(y)$;

$$H'(y) = h(y) \quad \text{and} \quad G'(x) = g(x). \quad (2.29)$$

Τότε, από τον κανόνα της αλυσίδας η (2.28) ισοδύναμα γράφεται

$$\frac{d}{dx}H(y(x)) = \frac{d}{dx}G(x).$$

δηλ.

$$H(y(x)) = G(x) + c. \quad (2.30)$$

Παράδειγμα 2.2.1 Να λυθεί η ΔΕ

$$y' = x(1 + y^2).$$

Λύση Χωρίζοντας τις μεταβλητές, έχουμε

$$\frac{y'}{1 + y^2} = x.$$

Με ολοκλήρωση,

$$\tan^{-1} y = \frac{x^2}{2} + c, \quad \delta \quad y = \tan \left(\frac{x^2}{2} + c \right).$$

Πεπλεγμένες Λύσεις Διαχωρίσιμων ΔΕ

Στο παράδειγμα 2.2.1 ήμασταν σε θέση να λύσουμε την εξίσωση $H(y) = G(x) + c$ για να προκύψει η λύση της ΔΕ. Αυτό βέβαια δεν συμβαίνει πάντα. Το επόμενο θεώρημα μας δίνει τη δυνατότητα να έχουμε τη λύση μιας ΔΕ σε πεπλεγμένη μορφή.

Θεώρημα 2.2.1 Υποθέτουμε ότι $g = g(x)$ είναι συνεχής στο (a, b) και $h = h(y)$ είναι συνεχής στο (c, d) . Έστω G είναι η παράγουσα της g στο (a, b) και H η παράγουσα της h στο (c, d) . Έστω x_0 αυθαίρετο σημείο του (a, b) και y_0 σημείο στο (c, d) , τέτοιο ώστε

$h(y_0) \neq 0$, ορίζουμε

$$c = H(y_0) - G(x_0). \quad (2.31)$$

Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $y = y(x)$ ορισμένη σε κάποιο διάστημα (a_1, b_1) , όπου $a \leq a_1 < x_0 < b_1 \leq b$, τέτοια ώστε $y(x_0) = y_0$ και

$$H(y) = G(x) + c \quad (2.32)$$

για $a_1 < x < b_1$. Συνεπώς, y είναι μια λύση του ΠΑΤ

$$h(y)y' = g(x), \quad y(x_0) = y_0. \quad (2.33)$$

Η (2.32) με c αυθαίρετη καλείται *πεπλεγμένη λύση* της $h(y)y' = g(x)$. Οι καμπύλες που ορίζονται από (2.32) είναι ολοκληρωτικές καμπύλες της $h(y)y' = g(x)$. Αν c ικανοποιεί την (2.31), θα λέμε ότι η (2.32) είναι *πεπλεγμένη λύση του ΠΑΤ* (2.33). Πρέπει να επισημάνουμε τα εξής:

- Για κάποιες επιλογές του c μπορεί να μην υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις y που ικανοποιούν την (2.32).
- Η συνάρτηση y στην (2.32) είναι μια λύση της $h(y)y' = g(x)$.

Παράδειγμα 2.2.2

Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' = \frac{2x + 1}{5y^4 + 1}, \quad y(2) = 1. \quad (2.34)$$

Λύση Διαχωρίζουμε μεταβλητές

$$(5y^4 + 1)y' = 2x + 1.$$

με ολοκλήρωση έχουμε την πεπλεγμένη συνάρτηση

$$y^5 + y = x^2 + x + c. \quad (2.35)$$

ως λύση της ΔΕ.

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη $y(2) = 1$ στην (2.35) έχουμε $c = -4$. Συνεπώς, η $y^5 + y = x^2 + x - 4$ είναι μια πεπλεγμένη λύση του ΠΑΤ (2.34). Μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση που ικανοποιεί την $y(1) = 2$.

Στο Σχήμα 2.3 δείχνουμε το πεδίο διευθύνσεων και κάποιες ολοκληρωτικές καμπύλες για τη ΔΕ $y' = \frac{2x+1}{5y^4+1}$.

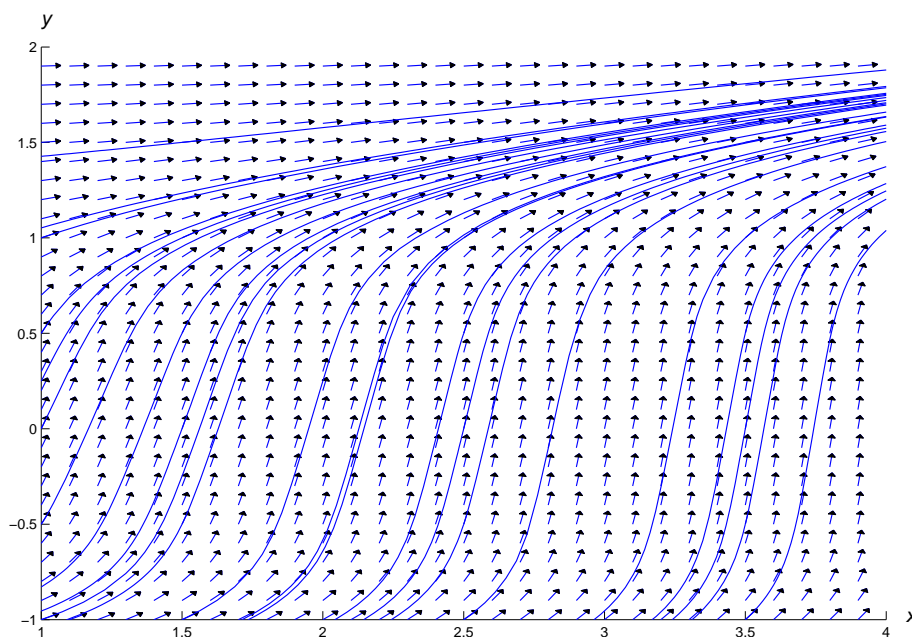
Σταθερές Λύσεις για ΔΕ Χωριζομένων Μεταβλητών

Μια ΔΕ της μορφής

$$y' = g(x)p(y)$$

είναι χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{1}{p(y)}y' = g(x).$$



Σχήμα 2.3: Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για τη ΔΕ $y' = \frac{2x+1}{5y^4+1}$

Όμως η διαίρεση με $p(y)$ δεν επιτρέπεται, αν $p(y) = 0$ για κάποια y . Ας δούμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 2.2.3 Βρείτε όλες τις λύσεις της ΔΕ

$$y' = 2xy^2. \quad (2.36)$$

Λύση Υποθέτουμε ότι y είναι μια λύση της (2.36) διάφορη του μηδενός. Αφού y είναι συνεχής, θα υπάρχει ένα διάστημα στο οποίο το y είναι διάφορο του μηδενός. Οπότε η (2.36) γράφεται

$$\frac{y'}{y^2} = 2x.$$

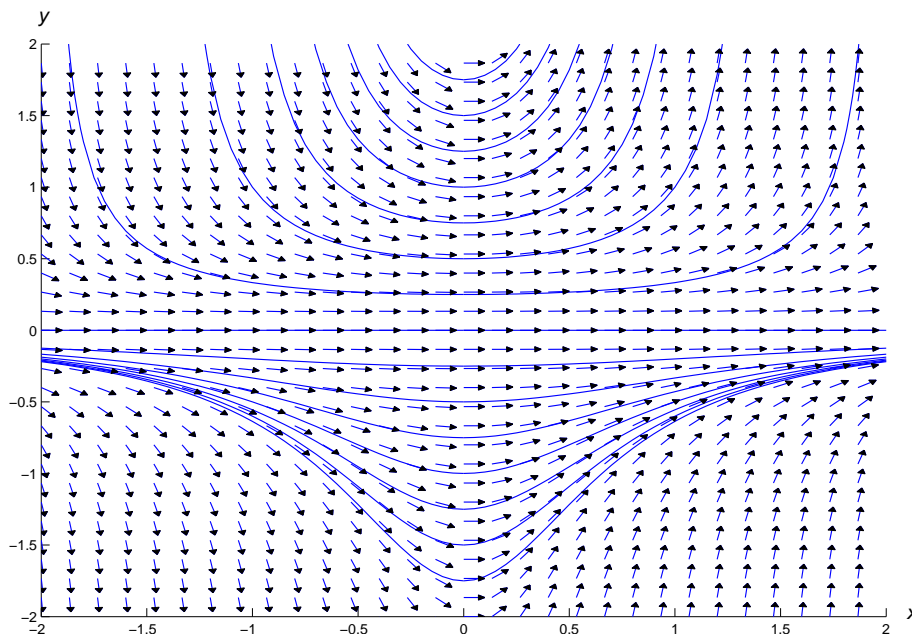
ισοδύναμα

$$-\frac{1}{y} = x^2 + c, \quad \text{δηλαδή} \quad y = -\frac{1}{x^2 + c}. \quad (2.37)$$

Στο Σχήμα 2.4 δείχνουμε το πεδίο διευθύνσεων και κάποιες ολοκληρωτικές καμπύλες για τη ΔΕ (2.36)

Παράδειγμα 2.2.4 Βρείτε όλες τις λύσεις της ΔΕ

$$y' = \frac{1}{2}x(1 - y^2). \quad (2.38)$$



Σχήμα 2.4: Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για τη ΔΕ $y' = 2xy^2$.

Λύση Εδώ πρέπει να διαιρέσουμε με $p(y) = 1 - y^2$ για να διαχωρίσουμε τις μεταβλητές. Αυτό δεν επιτρέπεται όταν $y = \pm 1$ όπου αποτελούν λύσεις της (2.38) για κάποια τιμή του x . Υποθέτουμε ότι y είναι μια λύση της ΔΕ (2.38), τέτοια ώστε $1 - y^2 \neq 0$. Η συνάρτηση $1 - y^2$ είναι συνεχής και υπάρχει ένα διάστημα στο οποίο η $1 - y^2$ δεν μηδενίζεται. Η διαίρεση με $1 - y^2$ επιτρέπεται για x σε αυτό το διάστημα, μπορούμε να διαχωρίσουμε τις μεταβλητές στην (2.38) και έχουμε

$$\frac{2y'}{y^2 - 1} = -x.$$

Με ολοκλήρωση

$$\left[\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \right] y' = -x, \quad \Leftrightarrow \quad \ln \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = -\frac{x^2}{2} + k;$$

δηλ.

$$\left| \frac{y-1}{y+1} \right| = e^k e^{-x^2/2}.$$

Αφού $y(x) \neq \pm 1$ για x στο διάστημα που αναφερόμαστε, η ποσότητα $(y-1)/(y+1)$ δεν αλλάζει πρόσημο στο διάστημα. Οπότε,

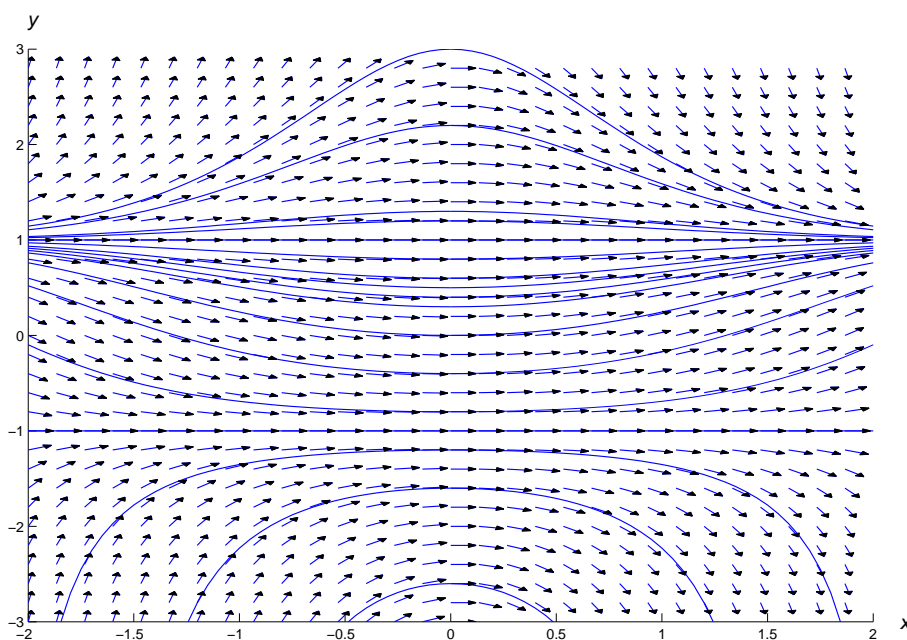
$$\frac{y-1}{y+1} = ce^{-x^2/2},$$

όπου $c = \pm e^k$, εξαρτάται από το πρόσημο του $(y-1)/(y+1)$ στο διάστημα. Επιλύοντας ως προς y , έχουμε

$$y = \frac{1 + ce^{-x^2/2}}{1 - ce^{-x^2/2}}. \quad (2.39)$$

Παρατηρούμε ότι η λύση $y \equiv 1$ της ΔΕ (2.38) μπορεί να προκύψει θέτοντας $c = 0$ στην (2.39). Όμως η άλλη σταθερή λύση $y \equiv -1$, δεν προκύπτει με αυτό τον τρόπο.

Στο Σχήμα 2.5 δείχνουμε το πεδίο διευθύνσεων και τις ολοκληρωτικές καμπύλες για την (2.38), παρατηρείστε τη συμπεριφορά του πεδίου διευθύνσεων κοντά στις ειδικές λύσεις $y \equiv \pm 1$.



Σχήμα 2.5: Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για την $y' = \frac{x(1-y^2)}{2}$

Παράδειγμα 2.2.5 Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' = 2xy^2, \quad y(0) = y_0.$$

Λύση Υποθέτουμε ότι $y_0 \neq 0$. Με απλές πράξεις έχουμε ότι η y δίνεται από

$$y = -\frac{1}{x^2 + c}. \quad (2.40)$$

Εφαρμόζοντας την αρχική συνθήκη, έχουμε $c = -1/y_0$. Αντικαθιστώντας στην (2.40) έχουμε

$$y = \frac{y_0}{1 - y_0 x^2}.$$

Αυτή είναι, επίσης, λύση αν $y_0 = 0$. Αν $y_0 < 0$, ο παρανομαστής δεν είναι μηδεν για όλες τις τιμές του x , οπότε η λύση ισχύει στο $(-\infty, \infty)$. Αν $y_0 > 0$, η λύση ισχύει στο $(-1/\sqrt{y_0}, 1/\sqrt{y_0})$.

2.2 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1–6 να βρείτε όλες τις λύσεις.

1. $y' = \frac{3x^2 + 2x + 1}{y - 2}$
2. $(\sin x)(\sin y) + (\cos y)y' = 0$
3. $xy' + y^2 + y = 0$
4. $y' \ln |y| + x^2y = 0$
5. $(3y^3 + 3y \cos y + 1)y' + \frac{(2x + 1)y}{1 + x^2} = 0$
6. $x^2yy' = (y^2 - 1)^{3/2}$

Στις Ασκήσεις 7–15 να λυθεί το ΠΑΤ και να βρείτε το διάστημα που ισχύει η αντίστοιχη λύση.

7. $y' = \frac{x^2 + 3x + 2}{y - 2}$, $y(1) = 4$
8. $y' + x(y^2 + y) = 0$, $y(2) = 1$
9. $y'(x^2 + 2) + 4x(y^2 + 2y + 1) = 0$, $y(1) = -1$
10. $y' = -2x(y^2 - 3y + 2)$, $y(0) = 3$
11. $y' = \frac{2x}{1 + 2y}$, $y(2) = 0$
12. $y' = 2y - y^2$, $y(0) = 1$
13. $x + yy' = 0$, $y(3) = -4$
14. $y' + x^2(y + 1)(y - 2)^2 = 0$, $y(4) = 2$
15. $(x + 1)(x - 2)y' + y = 0$, $y(1) = -3$
16. Να λυθεί $y' = \frac{(1 + y^2)}{(1 + x^2)}$ πλήρως. Υπόδειξη: Με χρήση της ταυτότητας

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$
17. Να λυθεί $y'\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = 0$ πλήρως. Υπόδειξη: Με χρήση της ταυτότητας

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B.$$
18. Να λυθεί $y' = \frac{\cos x}{\sin y}$, $y(\pi) = \frac{\pi}{2}$ πλήρως.
19. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' = ay - by^2, \quad y(0) = y_0.$$

Μελετήστε τη συμπεριφορά της λύσης για **(a)** $y_0 \geq 0$; **(b)** $y_0 < 0$.

2.3 Μη Γραμμικές ΔΕ Πρώτης Τάξης

Στο εδάφιο 2.1 είδαμε ότι οι λύσεις μιας γραμμικής μη ομογενούς ΔΕ $y' + p(x)y = f(x)$ είναι της μορφής $y = uy_1$, όπου y_1 είναι μια μη τετριμμένη λύση της ομογενούς ΔΕ

$$y' + p(x)y = 0 \quad (2.41)$$

και u είναι λύση της ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών $u'y_1(x) = f(x)$. Σε αυτό το εδάφιο θα μελετήσουμε ειδικές κατηγορίες μη γραμμικών ΔΕ πρώτης τάξης που με κατάλληλο μετασχηματισμό ανάγονται σε γραμμικές και μπορούν να επιλυθούν με τις τεχνικές που παρουσιάσαμε στα προηγούμενα εδάφια.

ΔΕ Bernoulli

Η ΔΕ Bernoulli έχει τη μορφή

$$y' + p(x)y = f(x)y^r, \quad r \in \mathbb{R}, r \neq 0, 1 \quad (2.42)$$

Αν y_1 είναι μη τετριμμένη λύση της (2.41), αντικαθιστώντας $y = uy_1$ στην (2.42), η ΔΕ Bernoulli μετασχηματίζεται σε μια χωριζομένων μεταβλητών

$$u'y_1(x) = f(x)(y_1(x))^r u^r \quad \text{ή} \quad \frac{u'}{u^r} = f(x)(y_1(x))^{r-1},$$

όπου $y_1' + p(x)y_1 = 0$.

Παράδειγμα 2.3.1 Να λυθεί η ΔΕ Bernoulli

$$y' - y = xy^2. \quad (2.43)$$

Λύση Αφού η $y_1 = e^x$ είναι μια λύση της ομογενούς ΔΕ $y' - y = 0$, αναζητούμε λύσεις της ΔΕ (2.43) στη μορφή $y = ue^x$, και καταλήγουμε στη ΔΕ

$$\frac{u'}{u^2} = xe^x,$$

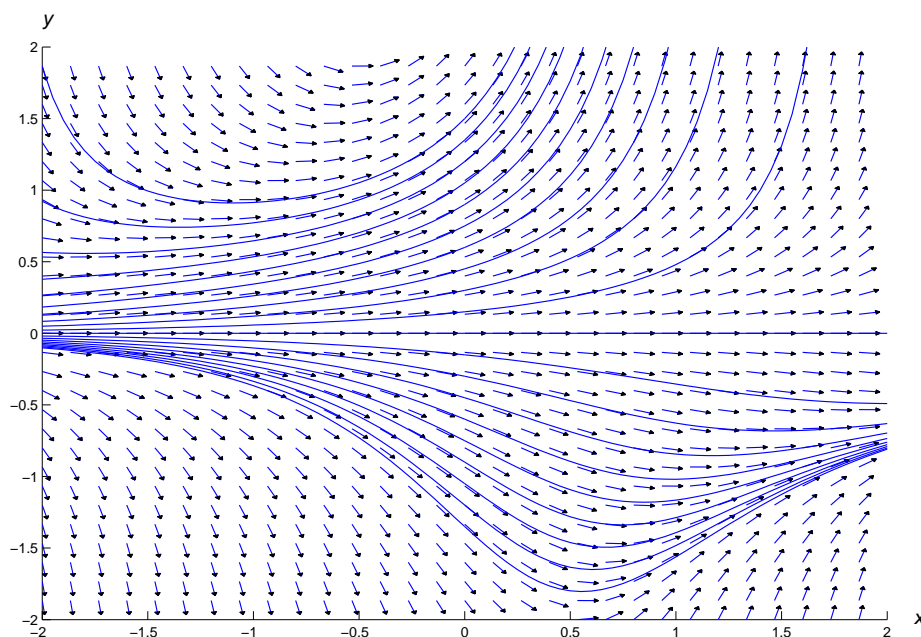
η οποία μετά από απλές πράξεις δίνει

$$u = -\frac{1}{(x-1)e^x + c} \quad \text{και} \quad y = -\frac{1}{x-1 + ce^{-x}}.$$

Το Σχήμα 2.41 περιγράφει το πεδίο διευθύνσεων και τις ολοκληρωτικές καμπύλες της (2.43).

Άλλες Μη Γραμμικές ΔΕ που μετασχηματίζονται σε Χωριζομένων Μεταβλητών

Όπως είδαμε μια ΔΕ Bernoulli μπορεί να μετασχηματιστεί σε χωριζομένων μεταβλητών με την αντικατάσταση $y = uy_1$, αν y_1 επιλεγεί κατάλληλα. Θα δώσουμε μια ικανή συνθήκη



Σχήμα 2.6: Το πεδίο διευθύνσεων και οι ολοκληρωτικές καμπύλες της $y' - y = xy^2$.

με την οποία μια μη γραμμική ΔΕ πρώτης τάξης

$$y' = f(x, y) \quad (2.44)$$

μετασχηματίζεται σε χωριζομένων μεταβλητών. Αντικαθιστώντας $y = uy_1$ στην (2.44) έχουμε

$$u'y_1(x) = f(x, uy_1(x)) - uy_1'(x). \quad (2.45)$$

Αν $f(x, uy_1(x)) = q(u)y_1'(x)$ για κάποια συνάρτηση q , τότε η (2.45) γίνεται

$$u'y_1(x) = (q(u) - u)y_1'(x), \quad (2.46)$$

η οποία είναι διαχωρίσιμη.

ΔΕ Riccati

Η γενικευμένη ΔΕ Riccati έχει τη μορφή

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2. \quad (2.47)$$

(Αν $R \equiv -1$, η (2.47) είναι ΔΕ Riccati.) Έστω y_1 είναι μια γνωστή λύση και y μια αυθαίρετη λύση της (2.47). Προφανώς, αν $R(x) = 0$, η ΔΕ (2.47) γίνεται γραμμική, ενώ αν $P(x) = 0$, γίνεται Bernoulli. Θα θεωρούμε τις συναρτήσεις P, Q, R συνεχείς σε κάποιο ανοικτό διάστημα.

Έστω $z = y - y_1$, τότε η z ικανοποιεί μια ΔΕ Bernoulli με $n = 2$. Για τον εντοπισμό μιας

ειδικής λύσης y_1 κάνουμε δοκιμαστικές αντικαταστάσεις συναρτήσεων της μορφής $y(x) = ax^b$ ή $y(x) = ax + b$ όπου τα a, b αποτελούν σταθερές που υπολογίζουμε κατάλληλα. Συνήθως, όμως, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε μια ειδική λύση αμέσως και τότε πρέπει να καταφύγουμε στον μετασχηματισμό

$$y(x) = -\frac{z(x)}{R(x)}$$

ο οποίος μετασχηματίζει την (2.47) στην εξίσωση Riccati

$$z'' + z^2 - \left(Q(x) + \frac{R'(x)}{R(x)} \right) z + P(x)R(x) = 0 \quad (2.48)$$

Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού (2.48) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε εξίσωση Riccati παίρνει τη μορφή

$$p_2(x)[z'' + z^2] + p_1(x)z + p_0(x) = 0 \quad (2.49)$$

όπου p_2, p_1, p_0 συνεχείς σε κάποιο ανοικτό διάστημα. Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση Riccati (2.49) και η γραμμική ομογενής εξίσωση δεύτερης τάξης

$$p_2 u'' + p_1 u + p_0 = 0 \quad (2.50)$$

έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων. Αν z είναι μια λύση της (2.49) και u μία λύση της (2.50), τότε

$$z(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}. \quad (2.51)$$

Σε επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε αναλυτικά τις λύσεις της ΔΕ (2.50).

Ομογενείς Μη Γραμμικές ΔΕ

Η ΔΕ (2.44) καλείται *ομογενής* αν x και y εμφανίζονται στην f με τέτοιο τρόπο, ώστε η $f(x, y)$ να εξαρτάται μόνο από τον λόγο y/x . Έτσι η (2.44) μπορεί να γραφεί

$$y' = q(y/x), \quad (2.52)$$

όπου $q = q(u)$ είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής.

Παράδειγμα 2.3.2 Να λυθεί

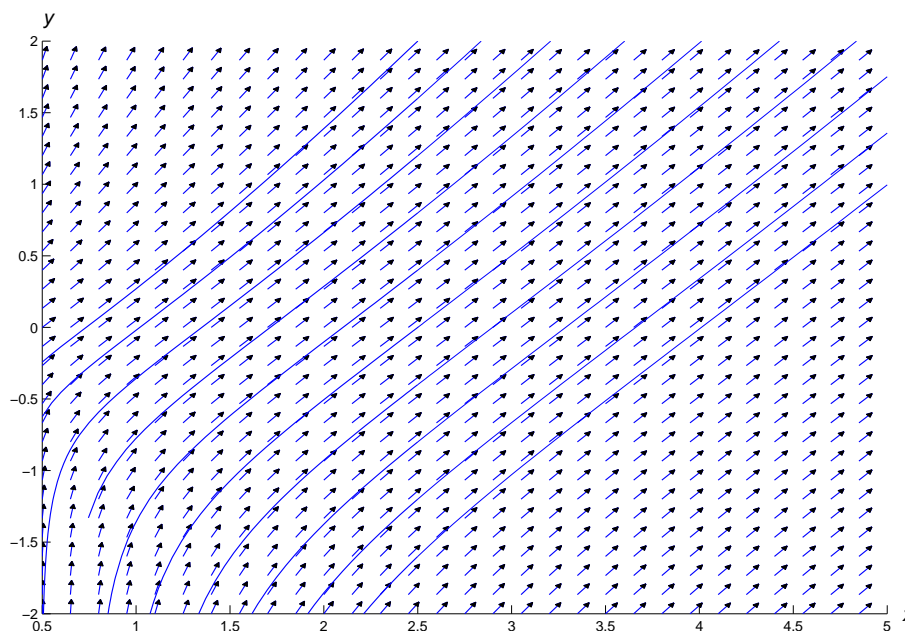
$$y' = \frac{y + xe^{-y/x}}{x}. \quad (2.53)$$

Λύση Με αντικατάσταση $y = ux$ στην (2.53) έχουμε

$$e^u u' = \frac{1}{x} \quad \text{δηλ.} \quad e^u = \ln|x| + c.$$

Οπότε $u = \ln(\ln|x| + c)$ και $y = ux = x \ln(\ln|x| + c)$.

Στο Σχήμα 2.7 φαίνεται το πεδίο διευθύνσεων και κάποιες ολοκληρωτικές καμπύλες για την (2.53).



Σχήμα 2.7: Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για την $y' = \frac{y + xe^{-y/x}}{x}$.

Παράδειγμα 2.3.3

(α') Να λυθεί η ΔΕ

$$x^2 y' = y^2 + xy - x^2. \quad (2.54)$$

(β') Να λυθεί το ΠΑΤ

$$x^2 y' = y^2 + xy - x^2, \quad y(1) = 2. \quad (2.55)$$

Λύση (α) Βρίσκουμε τις λύσεις για τη ΔΕ (2.54) σε ανοικτά διαστήματα που δεν περιέχουν την λύση $x = 0$. Γράφουμε τη ΔΕ (2.54) ως

$$y' = \frac{y^2 + xy - x^2}{x^2}$$

για x σε κάθε τέτοιο διάστημα. Η αντικατάσταση $y = ux$ δίνει

$$u'x = u^2 - 1. \quad (2.56)$$

Η ΔΕ έχει σταθερές λύσεις $u \equiv 1$ και $u \equiv -1$. Οπότε $y = x$ και $y = -x$ είναι λύσεις της (2.54). Αν u είναι λύση της (2.56) και δεν θεωρούμε τις τιμές ± 1 σε κάποιο διάστημα,

χωρίζοντας μεταβλητές έχουμε

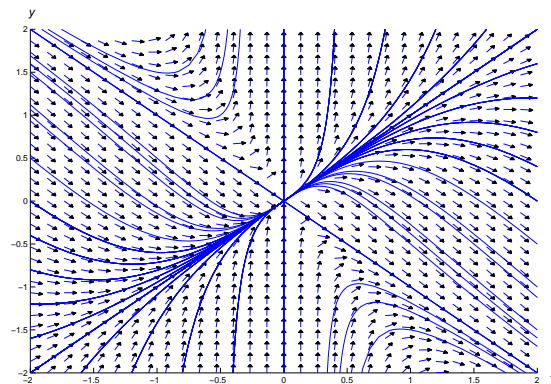
$$\frac{u'}{u^2 - 1} = \frac{1}{x},$$

μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε στην

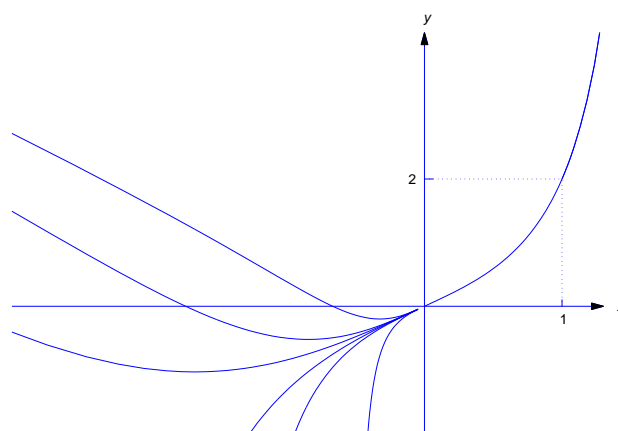
$$\frac{u - 1}{u + 1} = cx^2 \quad (2.57)$$

όπου c είναι αυθαίρετη σταθερά. Επιλύοντας προς u έχουμε

$$u = \frac{1 + cx^2}{1 - cx^2}.$$



Σχήμα 2.8: Το πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για την $x^2 y' = y^2 + xy - x^2$.



Σχήμα 2.9: Λύσεις για την $x^2 y' = y^2 + xy - x^2$, $y(1) = 2$.

Οπότε

$$y = ux = \frac{x(1 + cx^2)}{1 - cx^2} \quad (2.58)$$

είναι μια λύση της (2.55) για οποιαδήποτε επιλογή της σταθεράς c . Θέτοντας $c = 0$ στην (2.58) έχουμε τη λύση $y = x$. Όμως η λύση $y = -x$ δεν προκύπτει από την (2.58). Έτσι οι λύσεις της (2.54) σε διάστημα που δεν περιέχει το $x = 0$ είναι $y = -x$ και οι συναρτήσεις της μορφής (2.58).

Αν το $x = 0$ είναι σε ανοικτό διάστημα, η κατάσταση είναι πιο δύσκολη. Παρατηρούμε ότι $y = -x$ ικανοποιεί την (2.54) στο $(-\infty, \infty)$. Αν c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές, η συνάρτηση

$$y = \begin{cases} \frac{x(1 + c_1x^2)}{1 - c_1x^2}, & a < x < 0, \\ \frac{x(1 + c_2x^2)}{1 - c_2x^2}, & 0 \leq x < b, \end{cases} \quad (2.59)$$

είναι η λύση της (2.54) στο (a, b) , όπου

$$a = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{c_1}} & \text{αν } c_1 > 0, \\ -\infty & \text{αν } c_1 \leq 0, \end{cases} \quad \text{και} \quad b = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c_2}} & \text{αν } c_2 > 0, \\ \infty & \text{αν } c_2 \leq 0. \end{cases}$$

Αφήνουμε στον αναγνώστη να επιβεβαιώσει τον ισχυρισμό αν y είναι οποιαδήποτε συνάρτηση της μορφής (2.58), τότε $y(0) = 0$ και $y'(0) = 1$.

(β) Χρησιμοποιώντας την (2.57) και $u = y/x$, η αρχική συνθήκη $y(1) = 2$ δίνει $u(1) = 2$. Με αντικατάσταση στην (2.57) έχουμε $c = 1/3$. Η λύση του (2.55) είναι

$$y = \frac{x(1 + x^2/3)}{1 - x^2/3}.$$

Το διάστημα που ισχύει η λύση είναι $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Το μεγαλύτερο διάστημα στο οποίο η (2.55) έχει μοναδική λύση είναι το $(0, \sqrt{3})$. Από την (2.59) έχουμε ότι κάθε συνάρτηση

$$y = \begin{cases} \frac{x(1 + cx^2)}{1 - cx^2}, & a < x \leq 0, \\ \frac{x(1 + x^2/3)}{1 - x^2/3}, & 0 \leq x < \sqrt{3}, \end{cases} \quad (2.60)$$

είναι μια λύση της (2.55) στο $(a, \sqrt{3})$, όπου $a = -1/\sqrt{c}$ αν $c > 0$ ή $a = -\infty$ αν $c \leq 0$.

Από τα δύο τελευταία παραδείγματα φαίνεται ότι ήμασταν σε θέση να λύσουμε τις δοσμένες εξισώσεις αναλυτικά.

2.3 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-4 να λυθούν οι ΔΕ Bernoulli

1. $y' + y = y^2$
2. $7xy' - 2y = -\frac{x^2}{y^6}$
3. $x^2y' + 2y = 2e^{1/x}y^{1/2}$
4. $(1 + x^2)y' + 2xy = \frac{1}{(1 + x^2)y}$

Στις Ασκήσεις 5-9 να λυθεί το ΠΑΤ

5. $y' - 2y = xy^3, \quad y(0) = 2\sqrt{2}$
6. $y' - xy = xy^{3/2}, \quad y(1) = 4$
7. $xy' + y = x^4y^4, \quad y(1) = 1/2$
8. $y' - 2y = 2y^{1/2}, \quad y(0) = 1$
9. $y' - 4y = \frac{48x}{y^2}, \quad y(0) = 1$

Στις Ασκήσεις 10-16 να λυθούν πλήρως οι ΔΕ και να σχεδιάσετε το πεδίο διευθύνσεων και τις ολοκληρωτικές καμπύλες για κάθε μια από αυτές.

10. $y' = \frac{y + x}{x}$
11. $y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$
12. $xy^3y' = y^4 + x^4$
13. $y' = \frac{y}{x} + \sec \frac{y}{x}$
14. $x^2y' = xy + x^2 + y^2; \quad \{-8 \leq x \leq 8, -8 \leq y \leq 8\}$
15. $xyy' = x^2 + 2y^2; \quad \{-4 \leq x \leq 4, -4 \leq y \leq 4\}$
16. $y' = \frac{2y^2 + x^2e^{-(y/x)^2}}{2xy}; \quad \{-8 \leq x \leq 8, -8 \leq y \leq 8\}$

Στις Ασκήσεις 17-22 να λυθεί το ΠΑΤ.

17. $y' = \frac{xy + y^2}{x^2}, \quad y(-1) = 2$
18. $y' = \frac{x^3 + y^3}{xy^2}, \quad y(1) = 3$
19. $xyy' + x^2 + y^2 = 0, \quad y(1) = 2$
20. $y' = \frac{y^2 - 3xy - 5x^2}{x^2}, \quad y(1) = -1$
21. $x^2y' = 2x^2 + y^2 + 4xy, \quad y(1) = 1$
22. $xyy' = 3x^2 + 4y^2, \quad y(1) = \sqrt{3}$

Στις Ασκήσεις 23-29 να λυθεί η ομογενής ΔΕ.

$$23. \quad y' = \frac{x+y}{x-y} \qquad 24. \quad (y'x - y)(\ln|y| - \ln|x|) = x$$

$$25. \quad y' = \frac{y^3 + 2xy^2 + x^2y + x^3}{x(y+x)^2} \qquad 26. \quad y' = \frac{x+2y}{2x+y}$$

$$27. \quad y' = \frac{y}{y-2x} \qquad 28. \quad y' = \frac{xy^2 + 2y^3}{x^3 + x^2y + xy^2}$$

$$29. \quad y' = \frac{x^3 + x^2y + 3y^3}{x^3 + 3xy^2}$$

Στις Ασκήσεις 30-37 βρείτε μια λύση y_1 , έτσι ώστε με την αντικατάσταση $y = uy_1$ να μετασχηματιστούν σε χωριζόμενων μεταβλητών (2.46) και να λυθούν.

$$30. \quad 3xy^2y' = y^3 + x \qquad 31. \quad xy y' = 3x^6 + 6y^2$$

$$32. \quad x^3y' = 2(y^2 + x^2y - x^4) \qquad 33. \quad y' = y^2e^{-x} + 4y + 2e^x$$

$$34. \quad y' = \frac{y^2 + y \tan x + \tan^2 x}{\sin^2 x} \qquad 35. \quad x(\ln x)^2 y' = -4(\ln x)^2 + y \ln x + y^2$$

$$36. \quad 2x(y + 2\sqrt{x})y' = (y + \sqrt{x})^2 \qquad 37. \quad (y + e^{x^2})y' = 2x(y^2 + ye^{x^2} + e^{2x^2})$$

Στις Ασκήσεις 38-41, δοθείσης μιας λύσης y_1 της ΔΕ, να βρεθεί μια άλλη λύση της αντίστοιχης ΔΕ Riccati.

$$38. \quad y' = 1 + x - (1 + 2x)y + xy^2; \quad y_1 = 1$$

$$39. \quad y' = e^{2x} + (1 - 2e^x)y + y^2; \quad y_1 = e^x$$

$$40. \quad xy' = 2 - x + (2x - 2)y - xy^2; \quad y_1 = 1$$

$$41. \quad xy' = x^3 + (1 - 2x^2)y + xy^2; \quad y_1 = x$$

2.4 Ακριβείς ΔΕ και Ολοκληρωτικός Παράγοντας

2.4.1 Ακριβείς ΔΕ

Είναι προτιμότερο να γράψουμε τη ΔΕ πρώτης τάξης στη μορφή

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0. \qquad (2.61)$$

Όταν η x είναι ανεξάρτητη μεταβλητή, η εξίσωση γράφεται

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0, \quad (2.62)$$

ενώ όταν y είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, έχουμε

$$M(x, y) \frac{dx}{dy} + N(x, y) = 0, \quad (2.63)$$

Οι λύσεις των εξισώσεων (2.62) και (2.63) συχνά εμφανίζονται σε πεπλεγμένη μορφή $F(x, y) = c$ εάν κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $y = y(x)$ ικανοποιεί την $F(x, y) = c$ είναι λύση της (2.62) και αντίστοιχα κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $x = x(y)$ που ικανοποιεί την $F(x, y) = c$ είναι λύση της ΔΕ (2.63).

Σημειώνουμε ότι κάθε ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών γράφεται στη μορφή (2.61) ως εξής: $M(x) dx + N(y) dy = 0$.

Θα αναπτύξουμε μεθόδους επίλυσης της ΔΕ (2.61) κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις για τις M και N . Ας δούμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 2.4.1 Δείξτε ότι

$$x^4 y^3 + x^2 y^5 + 2xy = c \quad (2.64)$$

είναι πεπλεγμένη λύση της ΔΕ

$$(4x^3 y^3 + 2xy^5 + 2y) dx + (3x^4 y^2 + 5x^2 y^4 + 2x) dy = 0. \quad (2.65)$$

Λύση Θεωρούμε y ως συνάρτηση του x και παραγωγίζοντας την (2.64) ως προς x έχουμε

$$(4x^3 y^3 + 2xy^5 + 2y) + (3x^4 y^2 + 5x^2 y^4 + 2x) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Ομοίως, θεωρώντας x ως συνάρτηση του y και παραγωγίζοντας την (2.64) ως προς y , έχουμε

$$(4x^3 y^3 + 2xy^5 + 2y) \frac{dx}{dy} + (3x^4 y^2 + 5x^2 y^4 + 2x) = 0.$$

Συνεπώς, η (2.64) είναι πεπλεγμένη λύση της ΔΕ (2.65) με τις δυο πιθανές εκφράσεις. ■

Θεώρημα 2.4.1 Αν $F = F(x, y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους F_x και F_y , τότε

$$F(x, y) = c \quad (c=\text{σταθερά}), \quad (2.66)$$

είναι μια πεπλεγμένη λύση της ΔΕ

$$F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy = 0. \quad (2.67)$$

Η απόδειξη του θεωρήματος στηρίζεται στο Παράδειγμα 2.4.1.

Θα λέμε ότι η ΔΕ

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (2.68)$$

είναι *ακριβής (ή πλήρης)* σε ένα ανοικτό τετράγωνο χωρίο R , εαν υπάρχει συνάρτηση $F = F(x, y)$ έτσι ώστε F_x και F_y είναι συνεχείς και

$$F_x(x, y) = M(x, y) \quad \text{and} \quad F_y(x, y) = N(x, y) \quad (2.69)$$

για όλα (x, y) στο R . Η χρήση του "ακριβής" συνδέεται με το εάν η έκφραση $F_x(x, y) dx + F_y(x, y) dy$ είναι το *τέλειο διαφορικό* της F .

Θεώρημα 2.4.2 [*Ακριβής Συνθήκη*] *Υποθέτουμε ότι M και N είναι συνεχείς και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους M_y και N_x σε ένα ανοικτό τετράγωνο χωρίο R . Τότε*

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

είναι ακριβής στο R , αν και μόνο αν

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad (2.70)$$

για όλα $(x, y) \in R$.

Παράδειγμα 2.4.2 Δείξτε ότι η εξίσωση

$$3x^2y dx + 4x^3 dy = 0$$

δεν είναι ακριβής σε ένα ανοικτό τετράγωνο.

Λύση Έχουμε

$$M(x, y) = 3x^2y \quad \text{και} \quad N(x, y) = 4x^3$$

οπότε

$$M_y(x, y) = 3x^2 \quad \text{και} \quad N_x(x, y) = 12x^2.$$

Συνεπώς, $M_y = N_x$ στην ευθεία $x = 0$, αλλά όχι σε ένα ανοικτό χωρίο, δεν υπάρχει συνάρτηση F τέτοια ώστε, $F_x(x, y) = M(x, y)$ και $F_y(x, y) = N(x, y)$ για όλους (x, y) σε κάθε ανοικτό χωρίο. ■

Στο επόμενο παράδειγμα περιγράφουμε τη μέθοδο για την εύρεση μια συνάρτησης F τέτοια, ώστε $F_x = M$ και $F_y = N$ αν $M dx + N dy = 0$ είναι ακριβής.

Παράδειγμα 2.4.3 Να λυθεί η ΔΕ

$$(4x^3y^3 + 3x^2) dx + (3x^4y^2 + 6y^2) dy = 0. \quad (2.71)$$

Λύση (Μέθοδος 1) Έχουμε

$$M(x, y) = 4x^3y^3 + 3x^2, \quad N(x, y) = 3x^4y^2 + 6y^2,$$

και

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) = 12x^3y^2$$

για όλα (x, y) . Από το Θεώρημα 2.4.2 έπεται ότι υπάρχει συνάρτηση F τέτοια ώστε

$$F_x(x, y) = M(x, y) = 4x^3y^3 + 3x^2 \quad (2.72)$$

και

$$F_y(x, y) = N(x, y) = 3x^4y^2 + 6y^2 \quad (2.73)$$

για όλα (x, y) . Για να προσδιορίσουμε την F , ολοκληρώνουμε την (2.72) ως προς x και έχουμε

$$F(x, y) = x^4y^3 + x^3 + \phi(y), \quad (2.74)$$

όπου $\phi(y)$ είναι η “σταθερά” της ολοκλήρωσης. (ανεξάρτητη του x .) Αν ϕ είναι οποιαδήποτε διαφορίσιμη συνάρτηση του y τότε η F ικανοποιεί την (2.72). Για να προσδιορίσουμε τη ϕ έτσι ώστε η F ικανοποιεί επίσης την (2.73), υποθέτουμε ότι η ϕ είναι διαφορίσιμη και παραγωγίζοντας την F ως προς y έχουμε

$$F_y(x, y) = 3x^4y^2 + \phi'(y).$$

Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με την (2.73) έχουμε ότι $\phi'(y) = 6y^2$. Οπότε, με ολοκλήρωση και θεωρώντας τη σταθερά ολοκλήρωσης μηδέν, έχουμε $\phi(y) = 2y^3$. Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (2.74) έχουμε

$$F(x, y) = x^4y^3 + x^3 + 2y^3. \quad (2.75)$$

Το Θεώρημα 2.4.1 συνεπάγεται ότι

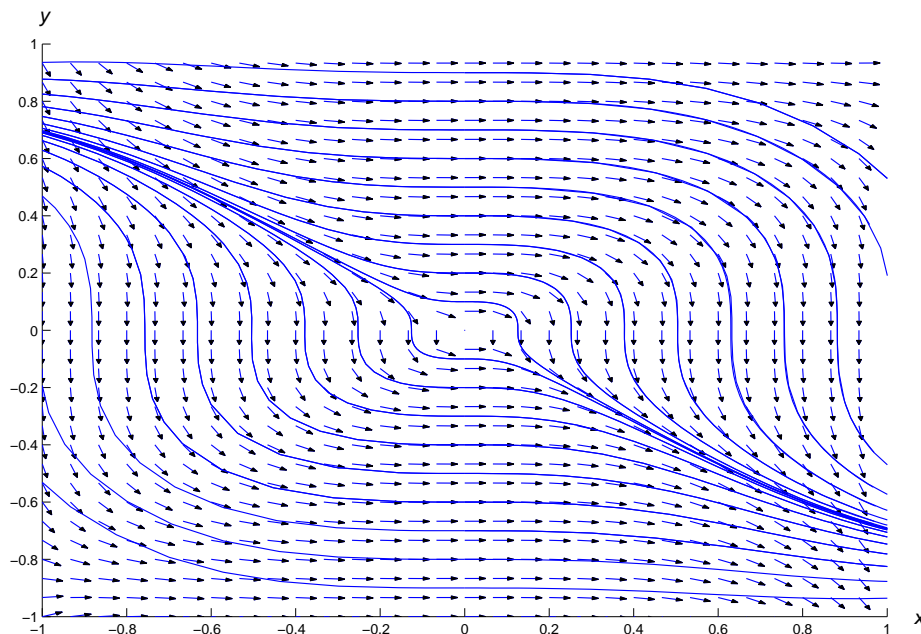
$$x^4y^3 + x^3 + 2y^3 = c$$

είναι μια πεπλεγμένη λύση της ΔΕ (2.71). Επιλύοντας τη σχέση ως προς y έχουμε την λύση

$$y = \left(\frac{c - x^3}{2 + x^4} \right)^{1/3}.$$

Λύση (Μέθοδος 2) Αντί να ολοκληρώσουμε την (2.72) ως προς x , θα μπορούσαμε να ολοκληρώσουμε την (2.73) ως προς y . Αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη να δείξει ότι θα καταλήξουμε στην ίδια λύση.

Στο Σχήμα 2.10 δείχνουμε το πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για τη ΔΕ (2.71).



Σχήμα 2.10: Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για $(4x^3y^3 + 3x^2) dx + (3x^4y^2 + 6y^2) dy = 0$.

2.4.2 Ολοκληρωτικός Παράγοντας (Πολλαπλασιαστής Euler)

Στο εδάφιο 2.4.1 είδαμε ότι αν M , N , M_y και N_x είναι συνεχείς και $M_y = N_x$ σε ένα ανοικτό χωρίο R , τότε

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (2.76)$$

είναι ακριβής στο R . Μερικές φορές μια ΔΕ δεν είναι ακριβής και πολλαπλασιάζοντάς την με μια κατάλληλη συνάρτηση γίνεται ακριβής. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τη ΔΕ

$$(3x + 2y^2) dx + 2xy dy = 0 \quad (2.77)$$

η οποία δεν είναι ακριβής διότι $M_y(x, y) = 4y \neq N_x(x, y) = 2y$ στην (2.77). Όμως, πολλαπλασιάζοντάς την (2.77) με x δίνει

$$(3x^2 + 2xy^2) dx + 2x^2y dy = 0, \quad (2.78)$$

η οποία είναι ακριβής $M_y(x, y) = N_x(x, y) = 4xy$ στην (2.95). Επιλύοντας την (2.95) με την μεθοδολογία που αναπτύξαμε στο εδάφιο 2.4.1, έχουμε την πεπλεγμένη λύση $x^3 + x^2y^2 = c$.

Μια συνάρτηση $\mu = \mu(x, y)$ είναι ένας *ολοκληρωτικός παράγοντας* (ή *πολλαπλασιαστής Euler*) για τη ΔΕ (2.76), εάν

$$\mu(x, y)M(x, y) dx + \mu(x, y)N(x, y) dy = 0 \quad (2.79)$$

είναι ακριβής. Αν γνωρίζουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα μ για (2.76), μπορούμε να λύσουμε τη ΔΕ (2.79) με τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε στο εδάφιο 2.4.1.

Εύρεση Ολοκληρωτικού Παράγοντα

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.4.2 (M και N αντικαταστάθηκαν από μM και μN), λέμε ότι (2.79) είναι ακριβής σε ένα ανοικτό χωρίο R , αν μM , μN , $(\mu M)_y$, και $(\mu N)_x$ είναι συνεχείς και

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N) \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad \mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$

στο R . Είναι καλύτερο να γράψουμε την τελευταία εξίσωση

$$\mu(M_y - N_x) = \mu_x N - \mu_y M, \quad (2.80)$$

η οποία μας παραπέμπει σε γνωστό αποτέλεσμα για τις ακριβείς ΔΕ, αν $M_y = N_x$, τότε η (2.80) ισχύει με $\mu = 1$, οπότε (2.76) είναι ακριβής.

Αν $\mu(x, y) = P(x)Q(y)$, τότε $\mu_x(x, y) = P'(x)Q(y)$ και $\mu_y(x, y) = P(x)Q'(y)$, η (2.80) γίνεται

$$P(x)Q(y)(M_y - N_x) = P'(x)Q(y)N - P(x)Q'(y)M, \quad (2.81)$$

η μετά από διαίρεση με $P(x)Q(y)$,

$$M_y - N_x = \frac{P'(x)}{P(x)}N - \frac{Q'(y)}{Q(y)}M. \quad (2.82)$$

Τώρα, θεωρώντας

$$p(x) = \frac{P'(x)}{P(x)} \quad \text{και} \quad q(y) = \frac{Q'(y)}{Q(y)},$$

η (2.82) γίνεται

$$M_y - N_x = p(x)N - q(y)M. \quad (2.83)$$

Η σχέση (2.83) προέκυψε *υποθέτοντας* ότι η ΔΕ $M dx + N dy = 0$ έχει έναν ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(x, y) = P(x)Q(y)$. Παρόλα αυτά μπορούμε να δούμε τη σχέση (2.82) διαφορετικά: Αν υπάρχουν συναρτήσεις $p = p(x)$ και $q = q(y)$ που ικανοποιούν την (2.83) και ορίζουμε

$$P(x) = \pm e^{\int p(x) dx} \quad \text{και} \quad Q(y) = \pm e^{\int q(y) dy}, \quad (2.84)$$

τότε αντιστρέφοντας τα βήματα που μας οδήγησαν από την (2.81) στην (2.83) δείχνουμε ότι $\mu(x, y) = P(x)Q(y)$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την $M dx + N dy = 0$. Θεωρούμε τις σταθερές ολοκλήρωσης στην (2.84) να είναι μηδέν και επιλέγουμε τα πρόσημα, ώστε ο ολοκληρωτικός παράγοντας να έχει την πιο απλή μορφή.

Θεώρημα 2.4.3 *Εστω M , N , M_y , και N_x είναι συνεχείς σε ένα ανοικτό χωρίο R . Τότε :*
(α') *Αν $(M_y - N_x)/N$ είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή y στο R και ορίζουμε*

$$p(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$$

τότε

$$\mu(x) = \pm e^{\int p(x) dx} \quad (2.85)$$

είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (2.86)$$

στο χωρίο R .

(β') Αν $(N_x - M_y)/M$ είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή x στο R και ορίζουμε

$$q(y) = \frac{N_x - M_y}{M},$$

τότε

$$\mu(y) = \pm e^{\int q(y) dy} \quad (2.87)$$

είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την (2.86) στο R .

Απόδειξη (α) Αν $(M_y - N_x)/N$ είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή y , τότε η (2.83) ισχύει με $p = (M_y - N_x)/N$ και $q \equiv 0$. Οπότε

$$P(x) = \pm e^{\int p(x) dx} \quad \text{και} \quad Q(y) = \pm e^{\int q(y) dy} = \pm e^0 = \pm 1,$$

συνεπώς η (2.85) είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την (2.86) στο R .

(β) Αν $(N_x - M_y)/M$ είναι ανεξάρτητη από την μεταβλητή x τότε η (2.83) ισχύει με $p \equiv 0$ και $q = (N_x - M_y)/M$, και ομοίως δείχνουμε ότι η (2.87) είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την (2.86) στο R . ■

Ας εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.4.3 σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.4.4 Να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για τη ΔΕ

$$(2xy^3 - 2x^3y^3 - 4xy^2 + 2x) dx + (3x^2y^2 + 4y) dy = 0 \quad (2.88)$$

και εν συνεχεία να λυθεί.

Λύση Αν (2.88)

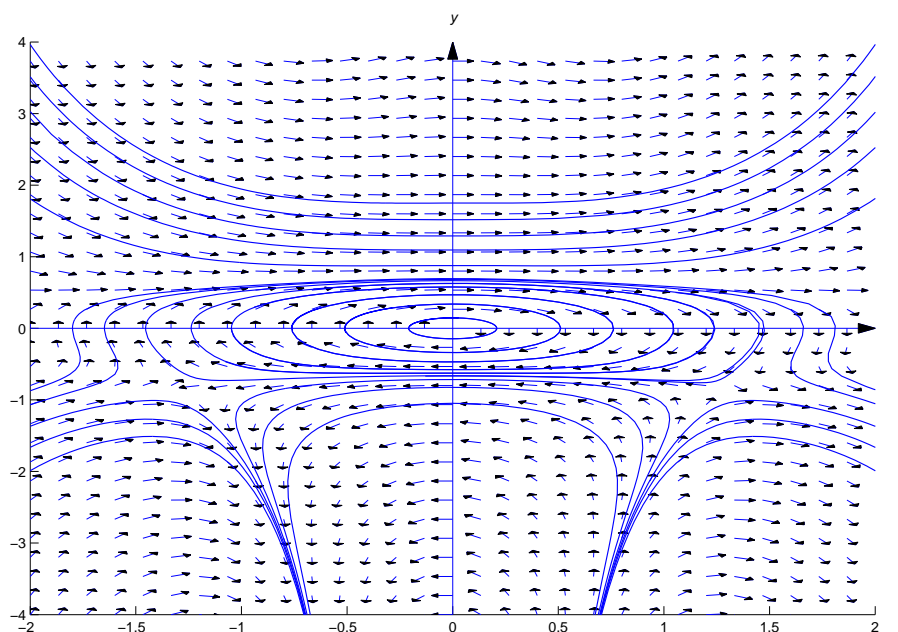
$$M = 2xy^3 - 2x^3y^3 - 4xy^2 + 2x, \quad N = 3x^2y^2 + 4y,$$

και

$$M_y - N_x = (6xy^2 - 6x^3y^2 - 8xy) - 6xy^2 = -6x^3y^2 - 8xy,$$

η (2.88) δεν είναι ακριβής. Όμως

$$\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{6x^3y^2 + 8xy}{3x^2y^2 + 4y} = -2x$$



Σχήμα 2.11: Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για τη ΔΕ $(2xy^3 - 2x^3y^3 - 4xy^2 + 2x) dx + (3x^2y^2 + 4y) dy = 0$.

είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή y , το Θεώρημα 2.4.3(a) εφαρμόζεται με $p(x) = -2x$. Αφού $\int p(x) dx = -x^2$, $\mu(x) = e^{-x^2}$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για τη ΔΕ. Πολλαπλασιάζοντας την (2.88) με μ προκύπτει μια ακριβής ΔΕ

$$e^{-x^2}(2xy^3 - 2x^3y^3 - 4xy^2 + 2x) dx + e^{-x^2}(3x^2y^2 + 4y) dy = 0. \quad (2.89)$$

Για να λύσουμε την ακριβή ΔΕ, αναζητούμε μια πεπλεγμένη συνάρτηση F και ακολουθώντας τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε στο εδάφιο 2.4.1 καταλήγουμε

$$e^{-x^2}(y^2(x^2y + 2) - 1) = c$$

είναι μια πεπλεγμένη λύση της (2.89) η οποία είναι, επίσης, πεπλεγμένη λύση της ΔΕ (2.88).

Σχήμα 2.11 δείχνει πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για τη ΔΕ (2.88)

Το Θεώρημα 2.4.3 δεν εφαρμόζεται στο επόμενο παράδειγμα και θα δούμε ένα πιο γενικό τρόπο προσδιορισμού του ολοκληρωτικού παράγοντα.

Παράδειγμα 2.4.5 Βρείτε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα για τη ΔΕ

$$(3xy + 6y^2) dx + (2x^2 + 9xy) dy = 0 \quad (2.90)$$

και να επιλυθεί.

Λύση Στην (2.90)

$$M = 3xy + 6y^2, \quad N = 2x^2 + 9xy, \quad \text{και} \quad M_y - N_x = (3x + 12y) - (4x + 9y) = -x + 3y.$$

Οπότε

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{-x + 3y}{3xy + 6y^2} \quad \text{and} \quad \frac{N_x - M_y}{N} = \frac{x - 3y}{2x^2 + 9xy},$$

το Θεώρημα 2.4.3 δεν εφαρμόζεται. Αναζητούμε συναρτήσεις $p = p(x)$ και $q = q(y)$ τέτοιες ώστε

$$M_y - N_x = p(x)N - q(y)M;$$

δηλ.

$$-x + 3y = p(x)(2x^2 + 9xy) - q(y)(3xy + 6y^2).$$

Το αριστερό μέρος περιέχει μόνο γραμμικούς όρους ως προς x και y , γράφουμε την εξίσωση ως

$$xp(x)(2x + 9y) - yq(y)(3x + 6y) = -x + 3y.$$

Οπότε

$$xp(x) = A \quad \text{και} \quad yq(y) = B, \quad (2.91)$$

όπου A και B είναι σταθερές τέτοιες, ώστε,

$$-x + 3y = (2A - 3B)x + (9A - 6B)y.$$

δηλαδή $A = 1, B = 1$. Οπότε η (2.91) συνεπάγεται ότι

$$p(x) = \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad q(y) = \frac{1}{y}.$$

Αφού

$$\int p(x) dx = \ln|x| \quad \text{και} \quad \int q(y) dy = \ln|y|,$$

μπορούμε να θεωρήσουμε $P(x) = x$ και $Q(y) = y$; $\mu(x, y) = xy$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας. Πολλαπλασιάζοντας την (2.90) με μ προκύπτει μια ακριβής ΔΕ

$$(3x^2y^2 + 6xy^3) dx + (2x^3y + 9x^2y^2) dy = 0.$$

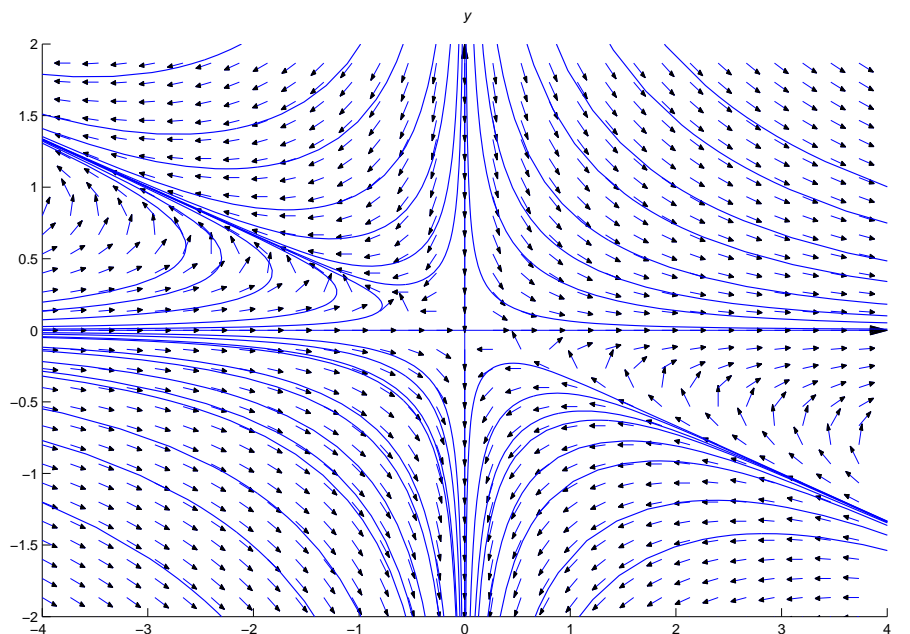
Εφαρμόζοντας την τεχνική επίλυσης ακριβών ΔΕ που παρουσιάσαμε στο εδάφιο 2.4.1 προκύπτει

$$x^3y^2 + 3x^2y^3 = c. \quad (2.92)$$

Αυτή είναι, επίσης, λύση και για τη ΔΕ (2.90). Επίσης, $x \equiv 0$ και $y \equiv 0$ ικανοποιούν την (2.92), οπότε οι $x \equiv 0, y \equiv 0$ είναι, επίσης, λύσεις της ΔΕ (2.90).

Στο Σχήμα 2.12 δείχνουμε το πεδίο διευθύνσεων και τις ολοκληρωτικές καμπύλες για την (2.90).

2.4 Ασκήσεις προς επίλυση



Σχήμα 2.12: Πεδίο διευθύνσεων και τις ολοκληρωτικές καμπύλες για την $(3xy + 6y^2) dx + (2x^2 + 9xy) dy = 0$.

Στις Ασκήσεις 1-5 να επιλυθούν τα αντίστοιχα ΠΑΤ.

1. $(4x^3y^2 - 6x^2y - 2x - 3) dx + (2x^4y - 2x^3) dy = 0, \quad y(1) = 3$
2. $(-4y \cos x + 4 \sin x \cos x + \sec^2 x) dx + (4y - 4 \sin x) dy = 0, \quad y(\pi/4) = 0$
3. $(y^3 - 1)e^x dx + 3y^2(e^x + 1) dy = 0, \quad y(0) = 0$
4. $(\sin x - y \sin x - 2 \cos x) dx + \cos x dy = 0, \quad y(0) = 1$
5. $(2x - 1)(y - 1) dx + (x + 2)(x - 3) dy = 0, \quad y(1) = -1$
6. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις M , έτσι ώστε η ΔΕ να είναι ακριβής.
 - (α') $M(x, y) dx + (x^2 - y^2) dy = 0$
 - (β') $M(x, y) dx + 2xy \sin x \cos y dy = 0$
 - (γ') $M(x, y) dx + (e^x - e^y \sin x) dy = 0$
7. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις N έτσι ώστε η ΔΕ να είναι ακριβής.
 - (α') $(x^3y^2 + 2xy + 3y^2) dx + N(x, y) dy = 0$
 - (β') $(\ln xy + 2y \sin x) dx + N(x, y) dy = 0$
 - (γ') $(x \sin x + y \sin y) dx + N(x, y) dy = 0$
8. Βρείτε τις συνθήκες για τις σταθερές A, B, C , και D , έτσι ώστε η ΔΕ $(Ax + By) dx + (Cx + Dy) dy = 0$ να είναι ακριβής.

9. Βρείτε τις συνθήκες για τις σταθερές A, B, C, D, E και F έτσι ώστε η ΔΕ

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2) dx + (Dx^2 + Exy + Fy^2) dy = 0$$

να είναι ακριβής.

10. Υποθέτουμε ότι M και N είναι συνεχής και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους M_y και N_x που ικανοποιούν τη συνθήκη $M_y = N_x$ σε ένα ανοικτό χωρίο R . Δείξτε ότι αν $(x, y) \in R$ και

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y N(x, t) dt,$$

τότε $F_x = M$ και $F_y = N$.

11. Υπό τις συνθήκες της Άσκησης 10, δείξτε ότι

$$F(x, y) = \int_{y_0}^y N(x_0, s) ds + \int_{x_0}^x M(t, y) dt.$$

12. Με χρήση της μεθόδου που παρουσιάζεται στην Άσκηση 10, με $(x_0, y_0) = (0, 0)$, να λυθούν οι ακριβείς ΔΕ:

(α') $(x^3y^4 + x) dx + (x^4y^3 + y) dy = 0$

(β') $(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0$

(γ') $(3x^2 + 2y) dx + (2y + 2x) dy = 0$

13. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' + \frac{2}{x}y = -\frac{2xy}{x^2 + 2x^2y + 1}, \quad y(1) = -2.$$

14. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' - \frac{3}{x}y = \frac{2x^4(4x^3 - 3y)}{3x^5 + 3x^3 + 2y}, \quad y(1) = 1.$$

15. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y' + 2xy = -e^{-x^2} \left(\frac{3x + 2ye^{x^2}}{2x + 3ye^{x^2}} \right), \quad y(0) = -1.$$

16. (α') Επιβεβαιώστε ότι η $\mu(x, y) = y$ είναι ολοκληρωτικός παράγοντας για τη ΔΕ

$$y dx + \left(2x + \frac{1}{y} \right) dy = 0 \quad (\text{A})$$

σε κάθε ανοικτό τετράγωνο χωρίο που δέν τέμνει το x -άξονα ή ισοδύναμα ότι η

ΔΕ

$$y^2 dx + (2xy + 1) dy = 0 \quad (\text{B})$$

είναι ακριβής σε κάθε τέτοιο τετράγωνο χωρίο.

(β') Δείξτε ότι η $y \equiv 0$ είναι λύση για την (B), αλλά όχι για την (A).**(γ')** Δείξτε ότι

$$y(xy + 1) = c \quad (\text{C})$$

είναι μια πεπλεγμένη λύση για την (B), και εξηγήστε γιατί κάθε διαφορίσιμη μη μηδενική συνάρτηση $y = y(x)$ η οποία ικανοποιεί την (C) είναι επίσης λύση για την (A).

17. **(α')** Δείξτε ότι η συνάρτηση $\mu(x, y) = 1/(x - y)^2$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την

$$-y^2 dx + x^2 dy = 0 \quad (\text{A})$$

σε κάθε ανοιχτό τετράγωνο χωρίο που δεν τέμνει την ευθεία $y = x$ ή ισοδύναμα ότι η ΔΕ

$$-\frac{y^2}{(x - y)^2} dx + \frac{x^2}{(x - y)^2} dy = 0 \quad (\text{B})$$

είναι ακριβής σε κάθε τέτοιο τετράγωνο χωρίο.

(β') Με εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2.1 δείξτε ότι

$$\frac{xy}{(x - y)} = c \quad (\text{C})$$

είναι μια πεπλεγμένη λύση για την (B) και εξηγήστε γιατί είναι, επίσης, λύση και για τη ΔΕ (A)

(γ') Δείξτε ότι η $y = x$ είναι λύση της (A), αν και δεν προκύπτει από την (C).

Στις Ασκήσεις 18–28 βρείτε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα ο οποίος είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής και λύστε την αντίστοιχη ΔΕ.

18. $y dx - x dy = 0$

19. $3x^2y dx + 2x^3 dy = 0$

20. $2y^3 dx + 3y^2 dy = 0$

21. $(5xy + 2y + 5) dx + 2x dy = 0$

22. $(xy + x + 2y + 1) dx + (x + 1) dy = 0$

23. $(27xy^2 + 8y^3) dx + (18x^2y + 12xy^2) dy = 0$

24. $(6xy^2 + 2y) dx + (12x^2y + 6x + 3) dy = 0$

25. $-y dx + (x^4 - x) dy = 0$

26. $\cos x \cos y dx + (\sin x \cos y - \sin x \sin y + y) dy = 0$

27. $(2xy + y^2) dx + (2xy + x^2 - 2x^2y^2 - 2xy^3) dy = 0$

28. $y \sin y dx + x(\sin y - y \cos y) dy = 0$

Στις Ασκήσεις 29–33 βρείτε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(x, y) = P(x)Q(y)$ και λύστε την αντίστοιχη ΔΕ.

29. $y(1 + 5 \ln |x|) dx + 4x \ln |x| dy = 0$
 30. $(\alpha y + \gamma xy) dx + (\beta x + \delta xy) dy = 0$
 31. $(3x^2y^3 - y^2 + y) dx + (-xy + 2x) dy = 0$
 32. $(a \cos xy - y \sin xy) dx + (b \cos xy - x \sin xy) dy = 0$
 33. $y(x \cos x + 2 \sin x) dx + x(y + 1) \sin x dy = 0$

Στις Ασκήσεις 34–37 βρείτε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα και λύστε την αντίστοιχη ΔΕ. Σχεδιάστε το πεδίο διευθύνσεων και τις ολοκληρωτικές καμπύλες για τη ΔΕ στο αντίστοιχο τετραγωνικό χωρίο.

34. $(x^4y^3 + y) dx + (x^5y^2 - x) dy = 0; \quad \{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$
 35. $(3xy + 2y^2 + y) dx + (x^2 + 2xy + x + 2y) dy = 0; \quad \{-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$
 36. $(12xy + 6y^3) dx + (9x^2 + 10xy^2) dy = 0; \quad \{-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$
 37. $(3x^2y^2 + 2y) dx + 2x dy = 0; \quad \{-4 \leq x \leq 4, -4 \leq y \leq 4\}$
 38. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1.2, η γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής ΔΕ

$$y' + p(x)y = f(x) \quad (\text{A})$$

είναι

$$y = y_1(x) \left(c + \int f(x)/y_1(x) dx \right), \quad (\text{B})$$

όπου y_1 είναι μη τετρημμένη λύση της ομογενούς ΔΕ $y' + p(x)y = 0$. Δείξτε ότι $\mu = \pm e^{\int p(x) dx}$ είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας για την (A). Η γενική λύση της (A) δίνεται από την ισοδύναμη σχέση με την (B):

$$y = \frac{1}{\mu(x)} \left(c + \int f(x)\mu(x) dx \right).$$

2.5 Ορθογώνιες Οικογένειες Καμπυλών

Γένεση των ΔΕ από γεωμετρικά προβλήματα

Η μέχρι τώρα εμπειρία μας, μας επιτρέπει να εικάσουμε ότι οι λύσεις μιας ΔΕ της μορφής

$$y' = f(x, y),$$

αποτελούν μια οικογένεια καμπυλών του επιπέδου xy , περιγραφόμενων από μια σχέση της μορφής

$$\Phi(x, y, c) = 0.$$

Για παράδειγμα η ΔΕ $y' = y$, έχει ως λύσεις όλες τις συναρτήσεις των οποίων το γράφημα περιγράφεται από την μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών $y = ce^x$, ενώ στη ΔΕ $y' = 1 + y^2$, αντιστοιχεί η οικογένεια των ολοκληρωτικών καμπυλών

$$y = \tan(x + c).$$

Το φυσιολογικό ερώτημα το οποίο προκύπτει είναι κατά πόσον ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή:

Δοθείσης οικογένειας καμπυλών (επαρκώς ομαλών),

$$\Phi(x, y, c) = 0. \quad (2.93)$$

υπάρχει ΔΕ $y' = f(x, y)$ της οποίας οι ολοκληρωτικές καμπύλες περιγράφονται από την (2.76);

Αυτό πράγματι ισχύει, εφόσον η σχέση (2.93) μπορεί να επιλυθεί ως προς c . Αν δηλαδή η (2.93) έχει τη μορφή

$$\Psi(x, y) = c,$$

τότε υποθέτοντας ότι $y = y(x)$ και παραγωγίζοντας ως προς x , λαμβάνουμε

$$\Psi_x(x, y) + \Psi_y(x, y)y' = 0, \quad \text{ή} \quad y' = -\frac{\Psi_x(x, y)}{\Psi_y(x, y)},$$

η οποία έχει έννοια εκεί που δεν μηδενίζεται ο παρανομαστής. Η ΔΕ προκύπτει ακόμη και χωρίς να λύσουμε την (2.93) ως προς c . Αν παραγωγίσουμε την (2.93) ως προς x , έχουμε

$$\Phi_x(x, y, c) + \Phi_y(x, y, c)y' = 0. \quad (2.94)$$

Επομένως, οι (2.93) και (2.94) μας επιτρέπουν να απαλείψουμε το c και να καταλήξουμε σε μια εξίσωση της μορφής $F(x, y, y') = 0$. Για παράδειγμα, η οικογένεια

$$y = ce^{cx},$$

δύσκολα επιλύεται ως προς c . Αν παραγωγίσουμε ως προς x , λαμβάνουμε

$$y' = c^2 e^{cx},$$

άρα διαιρώντας τες με την προϋπόθεση ότι $yy' \neq 0$, λαμβάνουμε $\frac{y'}{y} = c$ και τελικά η ΔΕ την οποία λαμβάνουμε θα είναι η

$$y = \frac{y'}{y} e^{x \frac{y'}{y}},$$

η οποία δεν γράφεται εύκολα σε άμεση μορφή.

Γενικότερα στην περίπτωση διπαραμετρικών (αντιστοίχως n -παραμετρικών) οικογενειών

καμπυλών, με διαδοχική απαλοιφή των παραμέτρων καταλήγουμε σε μια ΔΕ δεύτερης (αντίστοιχα n -οστής) τάξης.

Παράδειγμα 2.5.1 Αν c_1, c_2 είναι σταθερές να δείξετε ότι η ΔΕ

$$y''y = (y')^2 \quad (2.95)$$

παράγεται από τη διπαραμετρική οικογένεια καμπυλών $y = c_1 e^{c_2 x}$.

Λύση Πράγματι ξεκινώντας από την διπαραμετρική οικογένεια και παραγωγίζοντας δύο φορές ως προς x έχουμε

$$\begin{aligned} y = c_1 e^{c_2 x} &\iff \log y = \log c_1 + c_2 x \\ &\iff (\log y)'' = 0 \\ &\iff y''y = (y')^2 \end{aligned} \quad (2.96)$$

Ορθογώνιες οικογένειες καμπυλών

Ερώτημα: Δίδεται η οικογένεια καμπυλών $\{\Gamma_C\}_{c \in I}$ όπου

$$\Gamma_C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x, y, c) = 0 \right\}$$

και I ανοικτό διάστημα. Υπάρχει οικογένεια καμπυλών $\{\Delta_d\}_{d \in J}$ όπου J επίσης ανοικτό διάστημα, ώστε οποτεδήποτε δύο καμπύλες, μία από κάθε οικογένεια, τέμνονται, να τέμνονται κάθετα;

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η απάντηση στο ερώτημα είναι θετική, αν υποθέσουμε ότι η Φ είναι αρκετά ομαλή.

Ας θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Έστω

$$\Gamma_C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = c \right\}$$

Η $\{\Gamma_C\}_{c \in \mathbb{R}}$ αποτελεί οικογένεια υπερβολών. Κάθε καμπύλη της οικογένειας μπορεί να περιγραφεί παραμετρικά από το x . Πράγματι:

$$\Gamma_C = \left\{ \left(x, \frac{c}{x}\right) : x \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

δηλαδή Γ_C αποτελεί γράφημα της συναρτήσης

$$y(x) = \frac{c}{x}, \quad x \neq 0.$$

Μπορούμε να απαλείψουμε το c , αφού αρχικά το απομονώσουμε και παραγωγίσουμε ως προς x . Δηλαδή

$$xy = c \iff y + xy' = 0 \iff y' = -\frac{y}{x}.$$

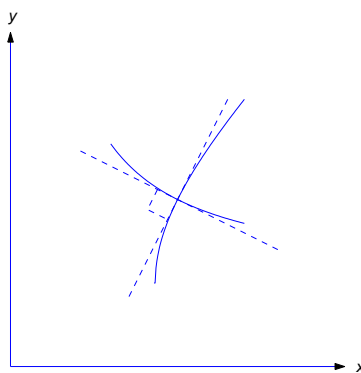
Η οικογένεια των υπερβολών $\{ \Gamma_C \}_{c \in \mathbb{R}}$, αποτελεί τις λύσεις της ΔΕ:

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Η ανωτέρω ΔΕ γράφεται ισοδύναμα ως:

$$(1, y') \cdot \left(\frac{y}{x}, 1 \right) = 0$$

το οποίο μας λέει ότι το γράφημα Γ_C στο σημείο (x_0, y_0) είναι κάθετο στο διάνυσμα $(y_0/x_0, 1)$ ή ισοδύναμα παράλληλο προς το διάνυσμα $(-x_0/y_0, 1)$. (Σχήμα 2.13). Για παράδειγμα, κάθε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι ορθογώνια τροχιά της οικογένειας κύκλων με κέντρο την αρχή. Κάθε κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων είναι ορθογώνια τροχιά της οικογένειας των ευθειών που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. (Σχήμα 2.14).



Σχήμα 2.13: Ορθογώνιες Καμπύλες τέμνονται σε σημείο.

Η ζητούμενη ορθογώνια αυτής οικογένεια περιγράφεται από την ιδιότητα:

Για κάθε σημείο (x_0, y_0) από το οποίο κάποια καμπύλη αυτής της οικογένειας διέρχεται ή καμπύλη αυτής είναι κάθετη στο διάνυσμα $(x_0/y_0, 1)$. Ισοδύναμα αυτό σημαίνει ότι:

$$(1, y') \cdot \left(\frac{x}{y}, 1 \right) = 0$$

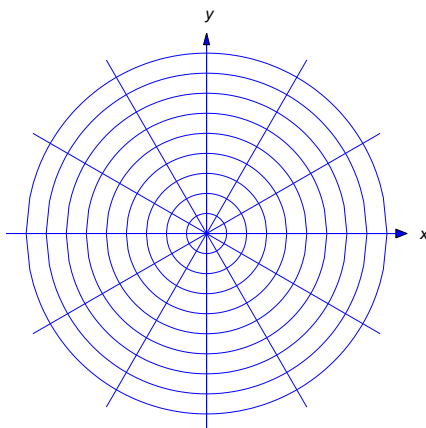
επομένως

$$y' = \frac{x}{y} \quad \text{ή} \quad yy' - x = 0$$

και μετά την ολοκλήρωση καθίσταται ισοδύναμη με

$$y^2 - x^2 = d,$$

για κατάλληλο μη μηδενικό d , η οποία, για $d \neq 0$ αποτελεί, επίσης, οικογένεια υπερβολών.



Σχήμα 2.14: Ορθογώνιες Οικογένειες Κύκλων και ευθειών.

Έστω τώρα ότι μας δίδεται η οικογένεια καμπυλών $\{ \Gamma_C \}_{c \in I}$. Τότε από το προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει η εξής διαδικασία:

Βρίσκουμε την πρώτης τάξης ΔΕ με την οποία η οικογένεια είναι ισοδύναμη, αφού προηγουμένως λύσουμε ως προς c :

$$\Phi(x, y, c) = 0 \iff y' = f(x, y).$$

Αυτή γράφεται ως:

$$(1, y') \cdot (-f(x, y), 1) = 0$$

Η ορθογώνια οικογένεια της $\{ \Gamma_C \}_{c \in I}$ θα ικανοποιεί, σε κάθε σημείο από το οποίο διέρχεται, την σχέση:

$$(1, y') \cdot \left(\frac{1}{f(x, y)}, 1 \right) = 0$$

Δηλαδή, θα αποτελείται από τις ολοκληρωτικές καμπύλες της

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}.$$

Η νέα οικογένεια καμπυλών αποτελεί τις λεγόμενες *ορθογώνιες τροχιές* ως προς την αρχική οικογένεια.

Παράδειγμα 2.5.2 Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές στην οικογένεια των κύκλων

$$(x - c)^2 + y^2 = c^2 \quad (c \neq 0). \quad (2.97)$$

Οι κύκλοι έχουν το κέντρο στον x -άξονα και είναι εφαπτόμενοι στον y -άξονα (Σχήμα 2.15(a)).

Λύση Η σχέση (2.97) δύναται να γραφεί στη μορφή

$$x^2 - 2cx + y^2 = 0, \quad (2.98)$$

και με παραγώγιση ως προς x έχουμε

$$2(x - c) + 2yy' = 0. \quad (2.99)$$

Από την (2.98),

$$c = \frac{x^2 + y^2}{2x}, \quad (\text{οπότε}) \quad x - c = x - \frac{x^2 + y^2}{2x} = \frac{x^2 - y^2}{2x}.$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία σχέση στην (2.99) και λύνοντας ως προς y' έχουμε

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}. \quad (2.100)$$

Οι καμπύλες που ορίζονται στην (2.97) είναι ολοκληρωτικές καμπύλες για την (2.100) και οι ολοκληρωτικές καμπύλες της

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

είναι ορθογώνιες τροχιές στην (2.97). Έχουμε να λύσουμε μια ομογενή μη γραμμική ΔΕ. Θέτοντας $y = ux$ και ακολουθώντας τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε σε προγενέστερο εδάφιο (αφήνουμε τις πράξεις στον αναγνώστη για άσκηση) καταλήγουμε σε μια πεπλεγμένη λύση

$$|y| = e^k(x^2 + y^2).$$

Η οποία μπορεί να τεθεί στη μορφή $x^2 + |y|^2 - e^{-k}|y| = 0$ και με συμπλήρωση τετραγώνου $x^2 + (|y| - e^{-k}/2)^2 = (e^{-k}/2)^2$. Η τελευταία ισοδύναμα γράφεται

$$x^2 + (y - h)^2 = h^2,$$

όπου

$$h = \begin{cases} \frac{e^{-k}}{2} & \text{αν } y \geq 0, \\ -\frac{e^{-k}}{2} & \text{αν } y \leq 0. \end{cases}$$

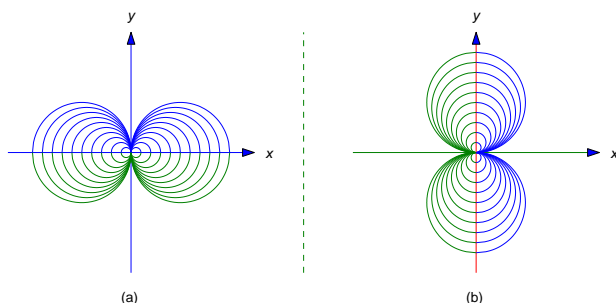
Έτσι, οι ορθογώνιες τροχιές είναι κύκλοι με κέντρο στον y -άξονα και εφάπτονται στον x -άξονα (Σχήμα 2.15(b)). Οι κύκλοι είναι πάνω από τον x -άξονα για $h > 0$, και για $h < 0$ είναι κάτω.

Πλαγίως τεμνόμενες οικογένειες καμπυλών

Στο σημείο αυτό θα γενικεύσουμε το προηγούμενο ερώτημα.

Ερώτημα. Δίδεται οικογένεια καμπυλών $\{\Gamma_C\}_{C \in I}$. Είναι άραγε δυνατόν να κατασκευασθεί οικογένεια $\{\Delta_d\}_{d \in J}$, ώστε σε κάθε σημείο όπου τέμνονται, μια καμπύλη της πρώτης οικογένειας με μια καμπύλη της δεύτερης, να τέμνονται υπο γωνία ω ;

Απάντηση. Τα προηγθέντα μας δίνουν καταφατική απάντηση στην περίπτωση κατά την



Σχήμα 2.15: **(a)** Οι κύκλοι $(x - c)^2 + y^2 = c^2$ **(b)** Οι κύκλοι $x^2 + (y - h)^2 = h^2$

οποία $\omega = \pi/2$. Εν συνεχεία, θα δούμε πώς αντιμετωπίζεται η περίπτωση $\omega \neq \pi/2$. Καταρχάς υπενθυμίζουμε από την Αναλυτική Γεωμετρία ότι τα μη μηδενικά διανύσματα

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2)$$

σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\omega \neq \pi/2$, αν

$$\tan \omega = \frac{\frac{b_2}{b_1} - \frac{a_2}{a_1}}{1 + \frac{a_2 b_2}{a_1 b_1}} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_1 + a_2 b_2}.$$

Κατ'αυτό τον τρόπο το ανωτέρω πρόβλημα ανάγεται στο εξής:

Δίνεται οικογένεια καμπυλών $\{\Gamma_C\}_{C \in I}$ η οποία αποτελεί τις ολοκληρωτικές καμπύλες της συνήθους $\Delta_E \ y' = f(x, y)$. Να βρεθεί η $\Delta_E \ y' = g(x, y)$, με ολοκληρωτικές καμπύλες τέμνουσες τις καμπύλες $\{\Gamma_C\}_{C \in I}$ υπό γωνία ω .

Όμως στο τυχαίο σημείο (x_0, y_0) έχουμε ότι:

$$(-f(x_0, y_0), 1) \perp \Gamma_C, \quad (-g(x_0, y_0), 1) \perp \Delta_d$$

και επειδή Γ_C και Δ_d τέμνονται κατά γωνία ω

$$\tan \omega = \frac{-f(x_0, y_0) + g(x_0, y_0)}{1 + f(x_0, y_0)g(x_0, y_0)}.$$

Ισοδύναμα

$$g(x_0, y_0) = \frac{f(x_0, y_0) + \tan \omega}{1 - (\tan \omega)f(x_0, y_0)}.$$

Παράδειγμα 2.5.3 Να βρεθεί η οικογένεια καμπυλών, η οποία σχηματίζει γωνία $\pi/6$ με την οικογένεια ελλείψεων $y^2 + \sqrt{3}x^2 = c, c > 0$.

Λύση Η οικογένεια ελλείψεων $y^2 + \sqrt{3}x^2 = c$, αποτελεί τις ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ

$$2yy' + 2\sqrt{3}x = 0, \quad \text{ή} \quad y' = -\frac{\sqrt{3}x}{y}.$$

Επειδή $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$, η ζητούμενη οικογένεια αποτελεί τις ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ

$$y' = \sqrt{3} \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1},$$

η οποία λύνεται ως ομογενής ΔΕ (βλ. εδάφιο 2.3).

2.5 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Αφού απαλείψετε το c να βρείτε τις ΔΕ πρώτης τάξης, οι οποίες έχουν ως λύσεις τις παρακάτω μονοπαραμετρικές οικογένειες:
 - (α') $y = c \sin cx$.
 - (β') $y^2 = cx$.
 - (γ') $e^{cx} = x$.
 - (δ') $y = \varphi_1(x) + c\varphi_2(x)$.
2. Αφού απαλείψετε τα c_1, c_2 , να βρείτε τις ΔΕ δεύτερης τάξης, οι οποίες έχουν ως λύσεις τις παρακάτω διπαραμετρικές οικογένειες:
 - (α') $y = c_1 e^{c_2 \varphi_1(x)}$.
 - (β') $y = e^{c_1 x} + e^{c_2 x}$.
 - (γ') $y^2 + c_1 x^2 = c_2$.
 - (δ') $y = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)$.
3. Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές των παρακάτω οικογενειών καμπύλων:
 - (α') $y = cx^2$.
 - (β') $y^2 + x^2 = c$.
 - (γ') $y = ce^x$.
 - (δ') $y^2 + 2x^2 = c$.
 - (ε') $y = cx$.
 - (ζ') $y^2 + x^2 = cx$.
4. Να βρεθούν οι οικογένειες καμπυλών οι οποίες σχηματίζουν γωνία $\pi/4$ με τις παρακάτω διπαραμετρικές οικογένειες:
 - (α') $y = cx$
 - (β') $y^2 + x^2 = c$.
 - (γ') $x^2 - y^2 = c$.
 - (δ') $yx = c$.
 - (ε') $x^2 - 2yx - y^2 = c$.

2.6 Φυσικές Εφαρμογές των ΔΕ πρώτης τάξης

Οι ΔΕ αποτελού ίσως τον κατεξοχήν εφαρμοσμένο κλάδο των Μαθηματικών. Οι περισσότερες από τις ΔΕ που μελετάμε, προέρχονται από προβλήματα της Φυσικής, της Χημείας, της Βιολογίας, των Οικοκομικών αλλά και άλλων κλάδων των Μαθηματικών, όπως για παράδειγμα της Διαφορικής Γεωμετρίας. Στο εδάφιο αυτό θα δούμε μερικά τέτοια παραδείγματα.

Πληθυσμιακές δυναμικές

Έστω ότι ο πληθυσμός N_0 βακτηριδίων τοποθετείται σε καλλιέργεια τη χρονική στιγμή $t = 0$. Έστω $N(t)$ ο πληθυσμός σε μετέπειτα χρονική στιγμή t . Υποθέτουμε ότι τόσο η τροφή όσο και ο χώρος είναι απεριόριστοι και δεχόμαστε ότι ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού είναι ανάλογος του εκάστοτε πληθυσμού. Να βρεθεί το N συναρτήσει του χρόνου. Έχουμε βεβαίως και εδώ περίπτωση σταθερού σχετικού ρυθμού μεταβολής του πληθυσμού ο οποίος περιγράφεται από την εξίσωση

$$\frac{dN(t)}{dt} = \kappa N(t). \quad (2.101)$$

Η λύση της οποίας, αφού ενσωματωθούν οι αρχικές συνθήκες, θα είναι

$$N(t) = N(0)e^{\kappa t}. \quad (2.102)$$

Η ανωτέρω αποτελεί ακόμη μια περίπτωση εκθετικής αύξησης.

Ανατοκισμός

Η αύξηση τοκίζομενου κεφαλαίου λαμβάνει χώρα με σταθερό ρυθμό. Ισχύει η ΔΕ:

$$S' = aS, \quad (2.103)$$

όπου S το τοκίζόμενο ποσό, και a θετική σταθερά. Κατά παρόμοιο τρόπο εξελίσσεται και το ποσό χρέους L $L' = \beta L$, όπου β επίσης θετική σταθερά.

Διάσπαση Ραδιενεργών Ισοτόπων

Οι πυρήνες των ραδιενεργών ισοτόπων διασπώνται ή υφίστανται σχίση, και η μάζα τους μειώνεται με σταθερό σχετικό λόγο. Αν λοιπόν $m = m(t)$ είναι η μάζα την χρονική στιγμή t , τότε μετά από χρονικό διάστημα Δt , η μάζα θα μεταβληθεί κατά τον ακόλουθο τύπο:

$$m(t + \Delta t) \approx m(t) - \alpha m(t)\Delta t, \quad (2.104)$$

όπου α θετική σταθερά. Άρα

$$\frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t} \approx -\alpha m(t), \quad (2.105)$$

και, τελικά, όταν $\Delta t \rightarrow 0$, λαμβάνουμε τη ΔΕ

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m. \quad (2.106)$$

Η ανωτέρω εξίσωση μας λέει, ότι ο ρυθμός μείωσης της μάζας του ραδιενεργού ισότοπου είναι ανάλογος της εκάστοτε μάζας του. Διαφορετικά: ο σχετικός ρυθμός μεταβολής, ο οποίος αποτελεί τον λόγο m'/m , είναι σταθερός. Η σταθερά α προσδιορίζεται από μια άλλη πληροφορία, το χρόνο υποδιπλασιασμού, δηλαδή, το χρόνο ο οποίος απαιτείται για να απομείνει το μισό της αρχικής μάζας.

Η μάζα $m = m(t)$ του ραδιενεργού ισότοπου ισούται με $m(0)e^{-\alpha t}$. Αν είναι γνωστός ο χρόνος υποδιπλασιασμού T_h , τότε

$$m(T_h) = m(0)e^{-\alpha T_h} = \frac{1}{2}m(0),$$

και άρα $T_h = \frac{1}{\alpha} \log 2$. Άρα, η μάζα του σώματος μπορεί να γραφεί και ως

$$m(t) = m(0)e^{-\frac{\log 2}{T_h} t} = m(0)2^{-t/T_h}.$$

Επίσης, η (2.106) μπορεί να γραφεί ως

$$m' = -\frac{\log 2}{T_h} m,$$

όταν είναι γνωστός ο χρόνος υποδιπλασιασμού.

Νόμος ψύξης του Νεύτωνα

Σύμφωνα με τον νόμο ψύξης του Νεύτωνα, αν ένα ομοιογενές σώμα θερμοκρασίας T εκτεθεί σε περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας T_π , τότε η θερμοκρασία του σώματος μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου, ολοένα πλησιάζουσα τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος με ρυθμό ανάλογο της εκάστοτε διαφοράς των δυο θερμοκρασιών. Συνεπώς, θα ικανοποιεί τη ΔΕ:

$$T' = -\kappa(T - T_\pi)$$

όπου κ θετική σταθερά, η οποία ονομάζεται σταθερά θερμικής αγωγιμότητας. Η λύση της ανωτέρω ΔΕ είναι:

$$T(t) = T_\pi + (T_0 - T_\pi)e^{-\kappa t},$$

η οποία τείνει εκθετικά προς τη θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

Οριακή Ταχύτητα

Το φυσικό πρόβλημα εδώ περιγράφει την κίνηση σώματος που πέφτει από μεγάλο ύψος προς τη Γη, επιταχυνόμενο από την επίδραση της βαρύτητας και επιβραδυνόμενο υπό την επίδραση της ατμοσφαιρικής τριβής. Οι δυνάμεις αυτές εξισορροπούνται και το σώμα λαμβάνει οριακή ταχύτητα, γρήγορα, όπως θα μελετήσουμε. Θεωρούμε ότι η δύναμη

της τριβής είναι ανάλογη του τετραγώνου της ταχύτητας. Αν λοιπόν v είναι η ταχύτητα, η εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξή της θα δίνεται από

$$v' = g - \kappa v^2, \quad (2.107)$$

όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας της Γης, $g = 9.81m/sec^2$ και κ θετική σταθερά. Μπορούμε να θέσουμε ως αρχική συνθήκη $v(0) = 0$, αυτό σημαίνει ότι αφήνουμε το σώμα να πέσει χωρίς ώθηση. Η γενική λύση της ΔΕ (2.107), η οποία λύνεται ως εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, είναι η

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \tanh(\sqrt{\kappa g}(t + c)).$$

Με ενσωμάτωση της αρχικής συνθήκης προσδιορίζουμε την σταθερά και λαμβάνουμε την λύση του ΠΑΤ

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\kappa}} \tanh(\sqrt{\kappa g}t).$$

Υπενθυμίζουμε ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tanh t = 1,$$

άρα η οριακή ταχύτητα του σώματος που πέφτει v_∞ θα ισούται με

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \sqrt{\frac{g}{\kappa}}.$$

Η τιμή αυτή μηδενίζει τη συνάρτηση ροής.

Η οριακή ταχύτητα μπορεί να υπολογιστεί σε πολυπλοκότερες μορφές δυνάμεων τριβής, ακόμα και όταν δεν είναι δυνατόν να βρούμε τη λύση της ΔΕ σε κλειστή μορφή. Μπορούμε να την υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας την ιδιότητά της να μηδενίζει την συνάρτηση ροής της ΔΕ μας. Σε παραλλαγή του ανωτέρου προβλήματος, όπου η δύναμη τριβής είναι ανάλογη της κυβικής δύναμης της ταχύτητας, η ΔΕ θα έχει τη μορφή

$$v' = g - \kappa v^3, \quad (2.108)$$

Η ανωτέρω λύνεται ως ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών:

$$\frac{v'}{g - \kappa v^3} = 1$$

και ολοκληρώνοντας, λαμβάνουμε ως λύση την

$$\frac{\alpha}{g} \left(\frac{1}{6} \log \left(\frac{1 - \alpha^3 v^3}{(1 - \alpha v)^3} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2\alpha v + 1}{\sqrt{3}} \right) \right) = t + c \quad (2.109)$$

όπου $\alpha = (g/\kappa)^{1/3}$. Λαμβάνοντας την αρχική συνθήκη, έχουμε

$$c = \frac{\pi}{6\sqrt{3}\kappa^{1/3}g^{2/3}}.$$

Η ανωτέρω λύση αποτελεί έμμεσα οριζόμενη ή πεπλεγμένη λύση. Συνεπώς, η εύρεση της οριακής ταχύτητας δεν είναι άμεσα εφικτή μέσω της (2.109). Όμως παρατηρώντας προσεκτικότερα την (2.108) βλέπουμε ότι η ταχύτητα του σώματος που πέφτει συνεχώς αυξάνεται δηλαδή $v' > 0$, ενώ ο ρυθμός αύξησης της ταχύτητας (η επιτάχυνση) μειώνεται, λόγω της αύξησης της ταχύτητας. Η οριακή ταχύτητα $v = v_\infty$ αντιπροσωπεύει την τιμή εκείνη, όπου η ταχύτητα παύει πλέον να αυξάνεται, δηλαδή $v'_\infty = 0$, δηλαδή

$$g - \kappa v^3 = 0 \iff v_\infty = \left(\frac{g}{\kappa}\right)^{1/3}.$$

Ταχύτητα Διαφυγής

Έστω ότι ένα σώμα εκτινάσσεται κατακόρυφα προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα v_0 . Αν υποθεθεί ότι η τριβή την οποία συναντά είναι αμελητέα, τότε το σώμα θα φθάσει σε μέγιστο ύψος $h_{max} = v_0^2/2g$ με την επιπλέον προϋπόθεση ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας g παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της ανόδου. Αυτό αποτελεί εύλογη προσέγγιση, όταν το ανώτατο ύψος είναι μερικά χιλιόμετρα. Για μεγαλύτερες, όμως, απομακρύνσεις πρέπει να λαμβάνεται υπόψη η μεταβολή του g . Ο νόμος της Παγκόσμιας Έλξης έχει ως συνέπεια ότι:

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

όπου G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, M η μάζα της Γης και R η ακτίνα της Γης. Ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση της βαρύτητας οποιουδήποτε ουράνιου σώματος μάζας M σε απόσταση R από το κέντρο μάζας αυτού. Άρα λοιπόν η εξίσωση κίνησης του σώματος το οποίο και εκτινάσσεται κατακόρυφα προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα v_0 θα είναι:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^2}, \quad (2.110)$$

όπου r η εκάστοτε απόσταση του σώματος από το κέντρο της Γης. Επειδή όμως $v = \frac{dr}{dt}$, η σχέση (2.110) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2},$$

η οποία είναι μεν ΔΕ δεύτερης τάξης, αλλά καθίσταται ΔΕ πρώτης τάξης αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη επί $\frac{dr}{dt}$:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \frac{dr}{dt},$$

και στη συνέχεια την ολοκληρώσουμε, οπότε τελικά καταλήγουμε στην

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} = c.$$

Αν πολλαπλασιάσουμε την ανωτέρω εξίσωση επί τη μάζα m του εκτινασσόμενου σώματος λαμβάνουμε τον *Νόμο Διατήρησης της Ενέργειας*. Η σταθερά c προσδιορίζεται από τα αρχικά δεδομένα. Δηλαδή:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη την αρχική θέση R και ταχύτητα v_0 , λαμβάνουμε τη ΔΕ πεπλεγμένης μορφής:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R},$$

η οποία είναι ισοδύναμη με

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{v_0^2 + \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{R}}.$$

Λόγω του ότι η εξίσωση η οποία μας ενδιαφέρει περιγράφει την κίνηση του σώματος προς τα πάνω, επιλέγουμε το θετικό πρόσημο. Αντικαθιστώντας

$$\alpha = 2GM > 0 \quad \text{και} \quad \beta = v_0^2 - \frac{2GM}{R},$$

λαμβάνουμε τη ΔΕ

$$r' = \sqrt{\beta + \frac{\alpha}{r}}, \quad (2.111)$$

με αρχική συνθήκη $r(0) = R$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(α') $\beta < 0$: Τότε το σώμα θα φτάσει σε απόσταση

$$r_{max} = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2GM}{\frac{2GM}{R} - v_0^2},$$

από το κέντρο της Γης, το δεξιό μέλος της (2.111) μηδενίζεται και ακολούθως το σώμα αρχίζει να πέφτει ελεύθερα. Σ' αυτήν λοιπόν την περίπτωση το σώμα δεν κατορθώνει να διαφύγει από το βαρυντικό πεδίο. Στη θέση $r = r_{max}$ η κινητική ενέργεια του σώματος έχει μετατραπεί σε δυναμική.

(β') $\beta = 0$: Τότε η (2.111) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{\alpha}{r}} \quad \text{ή} \quad r^{1/2} \frac{dr}{dt} = \sqrt{\alpha},$$

από την οποία έπεται ότι:

$$\frac{2}{3}r^{3/2} = \sqrt{\alpha}t + c.$$

Με ενσωμάτωση των αρχικών συνθηκών καταλήγουμε στην έκφραση

$$r(t) = \left(\frac{3}{2} \left(\sqrt{\alpha t} + \frac{2}{3} R^{3/2} \right) \right)^{2/3},$$

η οποία αποτελεί λύση οριζόμενη για κάθε $t > 0$ και επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = +\infty,$$

δηλαδή το σώμα κατορθώνει να διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο.

(γ') $\beta > 0$: Τότε από την (2.111) έχουμε

$$r' = \sqrt{\frac{\beta + \alpha}{r}} \geq \sqrt{\beta}$$

και ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα στο $[0, t]$, λαμβάνουμε

$$r(t) \geq \sqrt{\beta}t + R,$$

από όπου συνεπάγεται ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty.$$

Άρα και σε αυτή την περίπτωση το σώμα διαφεύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης.

Το σώμα, λοιπόν, διαφεύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης (ή οποιουδήποτε άλλου ουράνιου σώματος), αν και μόνο αν $\beta \geq 0$ ή ισοδύναμα

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Η ποσότητα $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ ονομάζεται *ταχύτητα διαφυγής*.

Παρατήρηση: Η μέθοδος με την οποία αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα ευρέσεως της ταχύτητας διαφυγής, μας επιτρέπει να λύσουμε την εξίσωση δεύτερης τάξης

$$x'' = f(x), \tag{2.112}$$

όπου, αν η F αποτελεί αόριστο ολοκλήρωμα της f , τότε η (2.112) θα έχει ως συνέπεια

$$\frac{1}{2}(x')^2 - F(x) = E,$$

με E σταθερά. Η E στην συγκεκριμένη περίπτωση ονομάζεται *ενέργεια*. Η ανωτέρω εξίσωση αποτελεί επίσης νόμο διατήρησης της ενέργειας. Εκτενής αναφορά σε μη γραμμικές επιλύσιμες ΔΕ δεύτερης τάξης θα γίνει στο επόμενο κεφάλαιο.

2.6 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Έστω ότι το ραδιενεργό ισότοπο A υφίσταται σχάση με χρόνο ημίσειας ζωής T_A , μετατρέπόμενο εξολοκλήρου σε ραδιενεργό ισότοπο B άλλου στοιχείου. με χρόνο ημίσειας ζωής T_B , το οποίο με την σειρά του υφίσταται διαχωρισμό, μετατρέπόμενο εξολοκλήρου σε μη ραδιενεργό στοιχείο C . Υποθέτουμε ότι κατά τις προαναφερθείσες διαχωρίσεις δεν υπάρχει απώλεια μάζας. Αν κατά την χρονική στιγμή $\tau = 0$ υπάρχει ποσότητα m_A του ισότοπου A και μόνο αυτού, να βρεθούν οι εξισώσεις που περιγράφουν την εξέλιξη των μαζών των τριών στοιχείων. Πότε μεγιστοποιείται η μάζα του B ; Πότε μεγιστοποιείται ο ρυθμός αύξησης του C ; Να γενικευθεί το πρόβλημα στην περίπτωση $n(n \geq 2)$ ραδιενεργών ισωτόπων και ενός μη ραδιενεργού.
2. Έστω ότι σφαιρική σταγόνα νερού ενώ πέφτει προς τη Γη υπό την επίδραση της βαρύτητας g διασχίζει ομοιογενές νέφος και απορροφά όσους υδρατμούς βρίσκει στη διαδρομή της. Υποθέτουμε ότι οι απορροφώμενοι υδρατμοί βρίσκονται σε ηρεμία. Αν η αρχική της ακτίνα ήταν ίση με μηδέν, δείξτε ότι η σταγόνα πέφτει με σταθερή επιτάχυνση $g/7$.
3. Έστω το δυναμικό πεδίο, στο οποίο η ελκτική δύναμη δίνεται από τον τύπο

$$F(x) = -me^{-|x|},$$

όπου m η μάζα του ελκόμενου σώματος και x η απόσταση από το κέντρο του δυναμικού πεδίου. Ποια η ταχύτητα διαφυγής από το σημείο x_0 ;

4. Σώμα εκτινάσσεται κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα v_0 και κινείται υπό την επίδραση της βαρύτητας και της ατμοσφαιρικής τριβής η οποία είναι ανάλογη του τετραγώνου της εκάστοτε ταχύτητας, δηλαδή $\gamma = \kappa v^2$.
 - (α') Να υπολογιστεί το ανώτατο ύψος στο οποίο θα φθάσει το σώμα και ο χρόνος ο οποίος απαιτείται για να φθάσει στο ύψος αυτό.
 - (β') Αν $h(\kappa)$ το ανώτατο ύψος και $\tau(\kappa)$ ο χρόνος ο οποίος απαιτείται για να φθάσει εκεί το σώμα, δείξτε ότι:

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} h(\kappa) = \frac{v_0^2}{2g} \quad \text{και} \quad \lim_{\kappa \rightarrow 0} \tau(\kappa) = \frac{v_0}{g}. \quad (\text{A})$$

- (γ') Να διαπιστωθεί ότι οι σχέσεις (A) ικανοποιούνται ακόμα και στην περίπτωση κατά την οποία η δύναμη τριβής είναι ανάλογη της εκάστοτε ταχύτητας, δηλαδή $\gamma = \kappa v$.

Βιβλιογραφία

- N. Αλικάκος, & Γ.Η.Καλογερόπουλος, 2003. *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα.
- N. Σταυρακάκης, 2011 *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις: γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή*, Παπασωτηρίου, Αθήνα.
- L. Brand, 1984 *Μαθηματική Ανάλυση*, Ε.Μ.Ε.
- W.E Boyce, & R.C. DiPrima, 2001 *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th edn. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.

J. E. Marsden & M. J. Hoffman, 1993 *Elementary Classical Analysis*, 2nd Ed., W. H. Freeman, New York.

W. F. Trenc, 2013 *Elementary Differential Equations*, Books and Monographs, Trinity University.

P. Waltman, 1986, *A second Course in Elementary Differential Equations*, Academic Press, Inc. NY.

Κεφάλαιο 3

Ύπαρξη και Μοναδικότητα Λύσης Μη γραμμικών ΔΕ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφέρουμε τις συνθήκες ύπαρξης και μοναδικότητας ΠΑΤ μη γραμμικών ΔΕ. Στο εδάφιο 3.1, θα παρουσιάσουμε την προσεγγιστική μέθοδο Cauchy-Euler. Στο εδάφιο 3.2, θα αναπτύξουμε την επαναληπτική μέθοδο Picard και θα διατυπώσουμε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης ενός ΠΑΤ.

3.1 Προσεγγιστική Μέθοδος Cauchy-Euler

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε το ΠΑΤ πρώτης τάξης

$$y' = f(x, y), \quad (3.1)$$

με αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = y_0 \quad (3.2)$$

προσεγγιστικά σε μια περιοχή του $x = x_0$, $[x_0 - a, x_0 + a]$, $a > 0$. Ακολουθώντας την κλασική θεωρία των Cauchy και Euler θα αναπτύξουμε μια μέθοδο *αλγοριθμική* που θα φανεί πολύ χρήσιμη σε όσους θα ασχοληθούν με την αριθμητική επίλυση ΔΕ. Ορίζοντας το παραλληλόγραμμο

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, a, b > 0 \right\} \quad (3.3)$$

και υποθέτοντας ότι η $f(x, y)$ είναι συνεχής στο D , ονομάζουμε μια συνάρτηση $y(x)$ *προσεγγιστική λύση* του ΠΑΤ (3.1) και (3.2) όταν

(α') $(x, y(x)) \in D$

(β') $y(x)$ είναι συνεχής στο $|x - x_0| \leq a$,

(γ') $y'(x)$ είναι κατά τμήματα συνεχής στο $|x - x_0| \leq a$,

(δ') $\exists \epsilon > 0$

$$|y'(x) - f(x, y(x))| < \epsilon, \quad \forall x \quad (3.4)$$

εκτός από έναν πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών στα $x = x_i, i = 1, 2, \dots, n$ $|x_i - x_0| \leq 0$.

Ισχύει τότε το Θεώρημα:

Θεώρημα 3.1.1

Αν $|f(x, y)| \leq M$ για $(x, y) \in D$, και $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μια ϵ -προσεγγιστική λύση $y(x)$ του ΠΑΤ (3.1)-(3.2), για $|x - x_0| \leq h$ η οποία ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $y_0 = y(x_0)$.

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι $a < \frac{b}{M}$, οπότε $h = a$ και θεωρούμε το παραλληλόγραμμο:

$$R = \left\{ (x, y) \in D : |x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq Mh \right\}$$

το οποίο εμπεριέχεται στο D . Λόγω συνέχειας της $f(x, y)$ στο R , για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$|f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x, y)| < \epsilon, \quad \forall (\bar{x}, \bar{y}), (x, y) \in \mathbb{R} \quad (3.5)$$

με $|\bar{x} - x| < \delta, |\bar{y} - y| < \delta$. Διαμερήστε το τμήμα $[x_0, x_0 + h]$ σε τμήματα $x_0 < x_1 < \dots < x_n = x_0 + h$ με

$$|x_i - x_{i-1}| < \min\left(\delta, \frac{\delta}{M}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.6)$$

και θεωρήστε την ευθεία γραμμή που διέρχεται από το (x_0, y_0) με κλίση $f(x_0, y_0)$ μέχρις ότου τμήσει τη γραμμή $x = x_i$. Αυτό μας δίνει τη λύση της (3.2) στο διάστημα (x_0, x_1) . Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να πάρουμε τη λύση στα διαστήματα $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$ κλπ. με κλίσεις $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)$ κλπ. Είναι προφανές ότι αφού η $|f(x, y)|$ είναι φραγμένη στο R , με $|f(x, y)| \leq M$, όλα τα ως άνω ευθύγραμμα τμήματα θα βρίσκονται εντός ενός τριγώνου OPQ του Σχήματος 3.1.

Ορίζουμε τώρα την ϵ -προσεγγιστική λύση

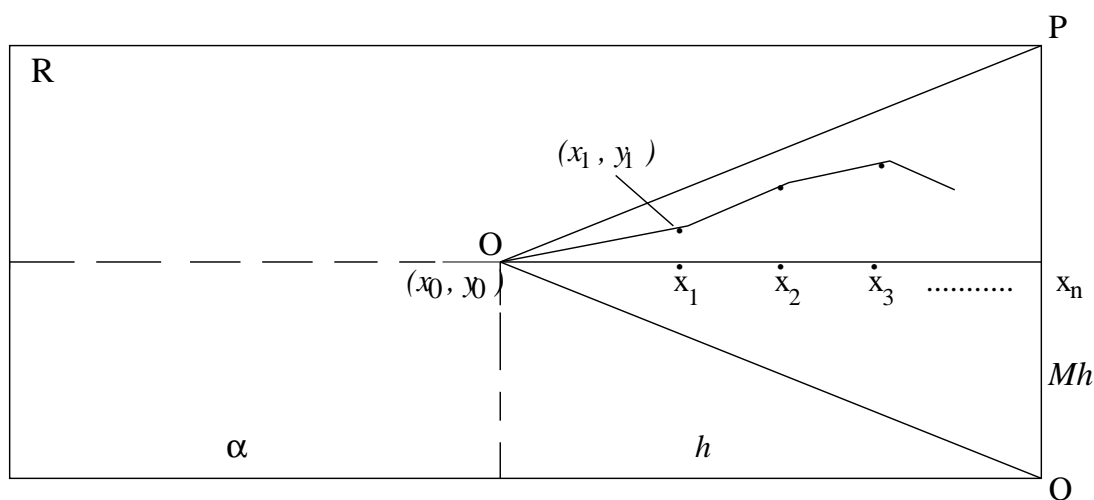
$$y(x) = y_{i-1} + (x - x_{i-1})f(x_{i-1}, y_{i-1}) \quad (3.7)$$

όπου $y(x_{i-1}) = y_{i-1}$, στο διάστημα $x_{i-1} \leq x \leq x_i, i = 1, 2, \dots, n$. Η συνάρτηση (3.7) ικανοποιεί, προφανώς τις συνθήκες (α) - (γ) του ορισμού της ϵ -προσεγγιστικής λύσης που δώσαμε παραπάνω. Για να δείξουμε ότι ικανοποιεί την (3.4) εργαζόμαστε ως εξής: Για $x_{i-1} \leq x \leq x_i$, υπολογίζουμε

$$|y'(x) - f(x, y(x))| = |f(x_{i-1}, y_{i-1}) - f(x, y(x))| \quad (3.8)$$

ενώ ισχύει

$$|y - y_{i-1}| = |x - x_{i-1}| |f(x_{i-1}, y_{i-1})|, \quad (3.9)$$



Σχήμα 3.1: Σχηματική παράσταση της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1.1.

λόγω της (3.7). Από την (3.9) τώρα, κάνοντας χρήση της (3.6) και του φραγμένου της f προκύπτει $|y - y_{i-1}| < \delta$ αφού $|x - x_{i-1}| < \delta$, οπότε, λόγω συνέχειας της $f(x, y)$, έχουμε

$$|f(x_{i-1}, y_{i-1}) - f(x, y)| < \epsilon \quad (3.10)$$

άρα για $x \neq x_i$, προκύπτει από την (3.8) ότι

$$|y'(x) - f(x, y(x))| < \epsilon$$

που είναι και η ζητούμενη σχέση που θέλαμε να δείξουμε.

Παρατήρηση: Για την κατασκευή της ως άνω ϵ -προσεγγιστικής λύσης, η μόνη ιδιότητα της $f(x, y)$ που χρειάστηκε ήταν η συνέχεια της συνάρτησης αυτής στο παραλληλόγραμμο R του επιπέδου x, y . Ουσιαστικά αυτό που κάναμε ήταν να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσεων της εξίσωσης (3.1) κοντά στο σημείο (x_0, y_0) αφού η τεθλασμένη γραμμή που κατασκευάσαμε στο όριο $\epsilon \rightarrow 0$, προσεγγίζει όλο και περισσότερο την ακριβή λύση.

Το Θεώρημα 3.1.1, όμως, δεν μας λέει τίποτα για τη μοναδικότητα των λύσεων της (3.1) που κατασκευάσαμε. Όπως θα δούμε πιο κάτω, η μοναδικότητα αυτή εξασφαλίζεται αν υποθέσουμε ότι, εκτός από συνεχής, η $f(x, y)$ ικανοποιεί και μια ακόμα συνθήκη που λέγεται *συνθήκη Lipschitz*.

Παρατήρηση: Η λύση (3.7) που βρήκαμε παραπάνω μπορεί φυσικά, να επεκταθεί με τον ίδιο τρόπο και αριστερά του (x_0, y_0) στο παραλληλόγραμμο R . Ακολουθώντας, αν θέλαμε να την κατασκευάσουμε και σε μεγαλύτερα διαστήματα του άξονα των x , θα χρειαζόταν να θεωρήσουμε το σημείο (x_n, y_n) από το οποίο διέρχεται (στη δεξιά πλευρά του R) ως το νέο (x_0, y_0) , συνεχίζοντας την κατασκευή της καμπύλης προς τα δεξιά του. Παρατηρείστε όμως ότι επειδή το (x_n, y_n) γενικά δεν ανήκει στην ακριβή λύση του προβλήματος που διέρχεται από το (x_0, y_0) , η επέκταση αυτή της ϵ -προσεγγιστικής μας λύσης εκτός του R , θα γίνεται όλο και περισσότερο ανακριβής.

3.2 Επαναληπτική Μέθοδος Picard

Εκτός από την ϵ -προσεγγιστική μέθοδο Cauchy–Euler που αναπτύξαμε παραπάνω, υπάρχει και μια ακόμα μέθοδος που χρησιμοποιείται ευρύτατα για την προσεγγιστική επίλυση ΔΕ που λέγεται μέθοδος Picard. Η μέθοδος Picard, γνωστή και ως μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων, μας εξασφαλίζει τόσο την ύπαρξη μιας λύσης ΠΑΤ (3.1)–(3.2), όσο και τη μοναδικότητα αυτής, καθώς επίσης, μας δίνει και μια μέθοδο εύρεσης της μοναδικής αυτής λύσης. Το μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι είναι τοπικού χαρακτήρα, δηλαδή τα συμπεράσματα ισχύουν μόνο σε μια περιοχή του σημείου (x_0, y_0) . Πριν τη διατύπωση του θεωρήματος, θα δώσουμε κάποιες προτάσεις και ορισμούς, οι οποίοι είναι απαραίτητοι.

Πρόταση 3.2.1

Έστω $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, συνεχής συνάρτηση. Κάθε λύση του ΠΑΤ (3.1)–(3.2), είναι, επίσης, λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (3.11)$$

Απόδειξη Αν η $y(x)$ είναι λύση του ΠΑΤ (3.1)–(3.2), τότε ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της ΔΕ ως προς x , από x_0 έως x και λαμβάνοντας υπόψη μας την αρχική συνθήκη, παίρνουμε την (3.11), οπότε η λύση του Π.Α.Τ. ΠΑΤ (3.1)–(3.2) είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.11). Αν η $y(x)$ είναι λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.11), τότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (3.11) ως προς x , παίρνουμε την ΔΕ και αν στην (3.11) πάρουμε όπου x το x_0 , παίρνουμε και την αρχική συνθήκη, οπότε η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.11) είναι και λύση του ΠΑΤ (3.1)–(3.2). \square

Έστω $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, συνεχής συνάρτηση, ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y , με σταθερά $k > 0$, αν ισχύει η σχέση :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|, \quad \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D. \quad (3.12)$$

Παρατήρηση: Αν μια συνάρτηση $f(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και k είναι ένα φράγμα της f_y στο D , τότε η συνάρτηση ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz με σταθερά k . (Αποδεικνύεται αν εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για $y_1 < y_0 < y_2$ και $(x, y_0) \in D$.) Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα.

Επιλέγουμε μια αρχική συνάρτηση $y_0(x)$ και οι διαδοχικές προσεγγίσεις ορίζονται από την λύση των προβλημάτων

$$y'_{n+1}(x) = f(x, y_n(x)), \quad y_n(x_0) = y_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε την ακολουθία των προσεγγίσεων

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

η οποία δημιουργεί την ακολουθία των συναρτήσεων :

$$y_0(x), y_1(x), \dots, y_n(x), \dots$$

Το θεώρημα 3.2.1 (Θεώρημα του Picard) μας δίνει συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $f(x, y)$ έτσι ώστε να υπάρχει το όριο της ακολουθίας προσεγγίσεων $y_n(x)$ και αυτό να είναι η μοναδική λύση του ΠΑΤ (3.1)-(3.2).

Θεώρημα 3.2.1

Έστω D το κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 :

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, a, b > 0 \right\}$$

και μια συνάρτηση $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

(i) είναι συνεχής στο D και M είναι το φράγμα της, δηλαδή

$$|f(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in D \quad (3.13)$$

(ii) και ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς y , με σταθερά k .

Τότε το ΠΑΤ (3.1)-(3.2) έχει μοναδική λύση, που είναι το όριο της ακολουθίας προσεγγίσεων

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

δηλαδή $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$, με $y_0(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, που ικανοποιεί τη συνθήκη $y_0(x_0) = y_0$. Η οριακή συνάρτηση $y(x)$ είναι συνεχής για κάθε $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, όπου $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Απόδειξη Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στην απόδειξη των παρακάτω 4 προτάσεων. Οι αποδείξεις των προτάσεων θα γίνουν για $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, όπου $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$. Για ευκολία, θα περιοριστούμε στο διάστημα $x \in [x_0, x_0 + h]$, αλλά τα ίδια ακριβώς μπορούν να αποδειχθούν και για το διάστημα $x \in [x_0 - h, x_0]$. \square

Πρόταση 3.2.2

Η ακολουθία των συναρτήσεων $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, όπως ορίζονται από την (3.14), είναι ορισμένη και συνεχής για $x \in [x_0, x_0 + h]$ και μάλιστα :

$$|y_n(x) - y_0| \leq b, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Απόδειξη Η απόδειξη θα γίνει με τη μέθοδο της επαγωγής. Για $n = 1$, η (3.15), γίνεται :

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x f(t, y_0) dt \quad (3.16)$$

Επειδή η συνάρτηση $f(x, y_0)$ έχει έννοια και είναι συνεχής για $x \in [x_0, x_0 + h]$ από την (3.16) έπεται ότι η συνάρτηση $y_1(x)$ έχει έννοια, είναι συνεχής συνάρτηση και ισχύει :

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b.$$

Έστω ότι η συνάρτηση $y_k(x)$ έχει έννοια και είναι συνεχής συνάρτηση. Τότε και η συνάρτηση $f(x, y_k(x))$ είναι συνεχής, έχει έννοια το ολοκλήρωμα $\int_{x_0}^x f(t, y_k(t))dt$ άρα και η συνάρτηση $y_{k+1}(x)$, όπως προκύπτει από την (3.15) για $n = k$, έχει έννοια, είναι συνεχής συνάρτηση και ισχύει :

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_k) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_k)| dt \leq M(x - x_0) \leq Mh \leq b.$$

□

Πρόταση 3.2.3

Η ακολουθία των συναρτήσεων $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, όπως ορίζονται από την (3.14), συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $y(x)$, για $x \in [x_0, x_0 + h]$.

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι

$$y_n(x) = y_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)]$$

Θα δείξουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} [y_{n+1}(x) - y_n(x)]$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $x \in [x_0, x_0 + h]$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Weierstrass. Πράγματι, έστω $\phi_n(x) = |y_n(x) - y_{n-1}(x)|$, $x \in [x_0, x_0 + h]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ οπότε λόγω της (3.14), έχουμε

$$\phi_n(x) = \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-2}(t))] dt \right| \leq k \int_{x_0}^x |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| dt = k \int_{x_0}^x \phi_{n-1}(t) dt$$

δηλαδή

$$\phi_n(x) \leq k \int_{x_0}^x \phi_{n-1}(t) dt \tag{3.17}$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας την πρόταση 3.2.2 και τη σχέση (3.15) έχουμε :

$$\phi_0(x) = |y_1(x) - y_0(x)| \leq M|x - x_0| \leq Mh$$

και από την (3.17) με διαδοχική εφαρμογή έχουμε :

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &\leq k \int_{x_0}^x M|t - x_0| dt \leq kM \frac{(x - x_0)^2}{2} \\ \phi_2(x) &\leq k^2 \int_{x_0}^x M \frac{(t - x_0)^2}{2} dt \leq k^2 M \frac{(x - x_0)^3}{3!} \end{aligned}$$

και επαγωγικά δείχνουμε ότι :

$$\phi_n(x) \leq k^n M \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!} \leq \frac{M (kh)^{n+1}}{k (n + 1)!}$$

Επειδή η σειρά $e^{kh} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kh)^n}{n!}$ συγκλίνει, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $x \in [x_0, x_0 + h]$, οπότε και η ακολουθία συναρτήσεων $y_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $y(x)$, που είναι συνεχής, αφού η $y_n(x)$ είναι ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. \square

Πρόταση 3.2.4

Η οριακή συνάρτηση $y(x)$ είναι λύση του ΠΑΤ (3.1)-(3.2).

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f(x, y(x))$ είναι καλά ορισμένη για κάθε $x \in [x_0, x_0 + h]$. Πράγματι :

$$|y(x) - y_0| \leq |y(x) - y_n(x)| + |y_n(x) - y_0| \leq |y(x) - y_n(x)| + M|x - x_0|$$

και παίρνοντας το όριο $n \rightarrow \infty$, από την προηγούμενη ανισότητα προκύπτει:

$$|y(x) - y_0| \leq M|x - x_0|.$$

Επειδή η συνάρτηση $f(x, y(x))$ πληροί τη συνθήκη του Lipschitz, ως προς y , έχουμε :

$$|f(x, y_n(x)) - f(x, y(x))| \leq k|y_n(x) - y(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

δηλαδή η συνάρτηση $f(x, y_n(x))$ συγκλίνει ομαλά στη συνάρτηση $f(x, y(x))$, οπότε προκύπτει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt = \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, y_n(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Χρησιμοποιώντας την (3.14), παίρνουμε:

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

και από την Πρόταση 3.2.1, προκύπτει ότι η $y(x)$ είναι λύση του ΠΑΤ (3.1)-(3.2).

Πρόταση 3.2.5

Η λύση του ΠΑΤ (3.1)-(3.2) είναι μοναδική.

Απόδειξη Έστω ότι το ΠΑΤ (3.1)-(3.2), έχει δύο λύσεις την $y(x)$ και την $\overline{y(x)}$. Χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (3.11) και (3.12) και παίρνουμε:

$$|y(x) - \overline{y(x)}| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t)) - f(t, \overline{y(t)})| dt \leq k \int_{x_0}^x |y(x) - \overline{y(x)}| dt. \quad (3.18)$$

Αφού οι συναρτήσεις $y(x)$ και $\overline{y(x)}$ είναι συνεχείς για $x \in [x_0, x_0 + h]$, έπεται ότι υπάρχει σταθερά $N > 0$, τέτοια ώστε :

$$|y(x) - \overline{y(x)}| \leq N, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + h]. \quad (3.19)$$

Η (3.18) λόγω της (3.19) γίνεται

$$|y(x) - \overline{y(x)}| \leq kN(x-x_0) \quad (3.20)$$

Η (3.18) λόγω της (3.20) δίνει την ανίσωση:

$$|y(x) - \overline{y(x)}| \leq k^2 N \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

Συνεχίζοντας την ίδια διαδικασία αντικατάστασης, καταλήγουμε :

$$|y(x) - \overline{y(x)}| \leq \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} N(x-x_0)^{n+1}.$$

Όμως,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} N(x-x_0)^{n+1} = 0,$$

διότι είναι ο $n+1$ όρος συγκλίνουσας σειράς. Άρα : $y(x) = \overline{y(x)}$. □

Παράδειγμα 3.2.1 Θεωρούμε το ΠΑΤ

$$y' = 2y^2 - 2y, \quad y(0) = \frac{1}{2}. \quad (3.21)$$

(α') Να δείξετε ότι έχει μοναδική λύση.

(β') Να βρεθούν οι τρεις πρώτες προσεγγίσεις της λύσης του 3.21 που προβλέπει το Θεώρημα 3.2.1 (Θεώρημα του Picard).

Λύση (α) Θεωρούμε την περιοχή D του \mathbb{R}^2

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq a, \left| y - \frac{1}{2} \right| \leq b, a, b > 0 \right\}.$$

Η συνάρτηση $f(x, y) = 2y^2 - 2y$ είναι συνεχής σε ολόκληρο το \mathbb{R}^2 , άρα και στην περιοχή D και το φράγμα της είναι :

$$|f(x, y)| \leq 2|y|^2 + 2|y| \leq 2\left(b + \frac{1}{2}\right)\left(b + \frac{3}{2}\right).$$

Επίσης

$$|f_y| = |4y - 2| \leq 2(2|y| + 1) \leq 2\left(2\left(b + \frac{1}{2}\right) + 1\right) = 4(b + 1) = k$$

Άρα η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι Lipschitz ως προς y με σταθερά k . Οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Picard 3.2.1 ισχύουν και υπάρχει μοναδική λύση του ΠΑΤ για

$$|x| \leq h = \min \left\{ a, \frac{2b}{(2b+1)(2b+3)} \right\}.$$

Η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων έχει τη μορφή :

$$y_n(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x f(t, y_{n-1}(t)) dt.$$

Θεωρούμε $y_0(x) = \frac{1}{2}$. Οπότε :

$$y_1(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left(2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x.$$

και

$$y_2(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \left[2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)\right] dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right).$$

Παράδειγμα 3.2.2 Θεωρούμε το ΠΑΤ

$$y' = \frac{10}{3}xy^{2/5}, \quad y(x_0) = y_0. \quad (3.22)$$

(α') Για ποια σημεία (x_0, y_0) το Θεώρημα 3.2.1 εξασφαλίζει ότι η ΔΕ (3.22) έχει μια λύση.

(β') Για ποια σημεία (x_0, y_0) το Θεώρημα 3.2.1 συνεπάγεται ότι η ΔΕ (3.22) έχει μοναδική λύση σε κάποιο ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0 .

(γ') Εξετάστε αν το ΠΑΤ

$$y' = \frac{10}{3}xy^{2/5}, \quad y(0) = 0 \quad (3.23)$$

έχει περισσότερες από μια λύσεις σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το $x_0 = 0$.

Λύση (α) Η συνάρτηση $f(x, y) = \frac{10}{3}xy^{2/5}$ είναι συνεχής για όλα τα (x, y) , το θεώρημα Picard ?? συνεπάγεται ότι η ΔΕ (3.22) έχει μια λύση για κάθε (x_0, y_0) .

(β) Επίσης, η $f_y(x, y) = \frac{4}{3}xy^{-3/5}$ είναι συνεχής για όλα τα (x, y) με $y \neq 0$. Οπότε, αν $y_0 \neq 0$ υπάρχει ένα χωρίο στο οποίο οι f και f_y είναι συνεχείς, και από το Θεώρημα 3.2.1 συνεπάγεται ότι η ΔΕ (3.22) έχει μοναδική λύση σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το x_0 .

Αν $y = 0$, τότε $f_y(x, y)$ δεν ορίζεται και είναι μη συνεχής οπότε το Θεώρημα 3.2.1 δεν εφαρμόζεται στη ΔΕ (3.22) αν $y_0 = 0$.

(γ) Είναι προφανές ότι η μηδενική συνάρτηση $y = 0$ ικανοποιεί τη ΔΕ (3.22) και την αρχική συνθήκη $y(0) = 0$. Συνεπώς η μηδενική είναι λύση του ΠΑΤ (3.23).

Υποθέτουμε ότι y είναι μη τετριμμένη λύση της ΔΕ (3.23), με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών έχουμε μετά από πράξεις

$$y = (x^2 + c)^{5/3}. \quad (3.24)$$

Επειδή διαιρέσαμε με y κατά την επίλυση της (3.23), η λύση (3.24) ισχύει σε ανοικτά διαστήματα όπου $y \neq 0$. Η (3.24) ορίζει το y για όλα τα x , και παραγωγίζοντας έχουμε ότι

$$y' = \frac{10}{3}x(x^2 + c)^{2/3} = \frac{10}{3}xy^{2/5}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Οπότε η (3.24) ικανοποιεί τη ΔΕ του ΠΑΤ (3.23) στο $(-\infty, \infty)$ αν $c \leq 0$, οπότε $y(\sqrt{|c|}) = y(-\sqrt{|c|}) = 0$. Θεωρώντας $c = 0$ στην (3.24) έχουμε $y = x^{10/3}$ μια δεύτερη λύση του (3.23). Και οι δύο λύσεις ορίζονται στο $(-\infty, \infty)$, και διαφέρουν σε κάθε ανοικτό διάστημα που περιέχει το $x_0 = 0$. Υπάρχουν *τέσσερις* διακριτές λύσεις του (3.23) ορισμένες στο $(-\infty, \infty)$ και διαφέρουν η καθεμία από αυτές σε κάθε ανοικτό διάστημα που περιέχει το $x_0 = 0$. Αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη να προσδιορίσει τις άλλες δύο.

Παράδειγμα 3.2.3 Από το Παράδειγμα 3.2.2, το ΠΑΤ

$$y' = \frac{10}{3}xy^{2/5}, \quad y(0) = -1 \quad (3.25)$$

έχει μοναδική λύση σε ανοικτό διάστημα που περιέχει το $x_0 = 0$. Βρείτε μια λύση και προσδιορίστε το μέγιστο ανοικτό διάστημα (a, b) στο οποίο είναι μοναδική.

Λύση Έστω y λύση του ΠΑΤ (3.25). Λόγω της αρχικής συνθήκης $y(0) = -1$ και της συνέχειας της y , υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $I: x_0 = 0 \in I$ στο οποίο το y δεν έχει ρίζες και προκύπτει από την (3.24). Θέτοντας $x = 0$ και $y = -1$ στην (3.24) έχουμε $c = -1$, οπότε

$$y = (x^2 - 1)^{5/3} \quad (3.26)$$

για $x \in I$. Κάθε λύση της (3.25) είναι μη μηδενική και δίνεται από (3.26) στο $(-1, 1)$, έτσι η (3.26) είναι η μοναδική λύση της (3.25) στο $(-1, 1)$. Αυτό είναι και το μεγαλύτερο διάστημα στο οποίο η ΔΕ (3.25) έχει μοναδική λύση. Διότι, η (3.26) είναι λύση της ΔΕ (3.25) στο $(-\infty, \infty)$. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχουν άπειρες τέτοιες λύσεις για την (3.25) διαφορετικές από την (3.26) σε κάθε ανοικτό διάστημα μεγαλύτερο από το $(-1, 1)$, πχ

$$y = \begin{cases} (x^2 - 1)^{5/3}, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

3.2 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να δείξετε ότι το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση και να βρεθούν οι τρεις πρώτες προσεγγίσεις της λύσης του, που προβλέπει το Θεώρημα 3.2.1 (Θεώρημα του Picard).

(α') $y' = 2xy + 2xy^2, y(0) = 1$

(β') $y' = e^x - y^2, y(0) = 1$

(γ') $y' = 2y + 5, y(0) = 3.$

2. Να βρεθεί η τέταρτη προσέγγιση της μεθόδου Picard, για το ΠΑΤ, καθώς και το σφάλμα για αυτήν την προσέγγιση :

(α') $y' = x - y, y(0) = 1$

(β') $y' = x^2 + y, y(1) = 3.$

(γ') $y' = 1 + y + y^2 \cos x, y(0) = 0.$

$$(\delta') \quad y' = 1 + y + y^2 + \cos x^2, y(0) = 0.$$

Βιβλιογραφία

- N. Αλικάκος, & Γ.Η.Καλογερόπουλος, 2003. *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα.
- N. Σταυρακάκης, 2011 *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις: γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή*, Παπασωτηρίου, Αθήνα.
- H. Amann, 1990 *Ordinary Differential Equations: An Introduction to Nonlinear Analysis*, Walter de Gruyter, Berlin.
- L. Brand, 1984 *Μαθηματική Ανάλυση*, Ε.Μ.Ε.
- Jane Cronin, 2008 *Differential Equations: Introduction and Qualitative Theory*, 3rd Ed., Chapman & Hall, Boca Raton.
- W.E Boyce, & R.C. DiPrima, 2001 *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th edn. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- J. E. Marsden & M. J. Hoffman, 1993 *Elementary Classical Analysis*, 2nd Ed., W. H. Freeman, New York.
- W. Rudin, 1976 *Principles of mathematical analysis*, third edn. McGraw-Hill Book Co., New York. International Series in Pure and Applied Mathematics.
- W. F. Trenc, 2013 *Elementary Differential Equations*, Books and Monographs, Trinity University.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητικές Μέθοδοι για την επίλυση ΠΑΤ Δ.Ε.

4.1 Προβλήματα αρχικών τιμών

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με μεθόδους αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (Σ.Δ.Ε.). Δίνονται ορισμένες τεχνικές αντιμετώπισης των προβλημάτων αρχικών τιμών για Σ.Δ.Ε., έτσι ώστε και ο μη μυημένος στο θέμα αναγνώστης να μπορεί να κατανοήσει τα θέματα αριθμητικής επίλυσης τέτοιων προβλημάτων, χωρίς να μπαίνουμε στο βάθος της αριθμητικής ανάλυσης π.χ. δεν εξετάζουμε ευστάθεια και ακρίβεια των μεθόδων με αυστηρό-μαθηματικό τρόπο αλλά πειραματικά. Στις επόμενες ενότητες θα μελετήσουμε αριθμητικές μεθόδους, για προβλήματα αρχικών τιμών, όπως τη μέθοδο του Euler. Ο στόχος μας είναι να εξοικειωθεί ο αναγνώστης με διάφορες έννοιες, και αυτό είναι αρκετά πιο εύκολο να γίνει στην περίπτωση αυτής της απλής μεθόδου παρά σε πιο πολύπλοκες. Στο τέλος θα προσεγγίσουμε τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler, καθώς και τις μεθόδους των Runge-Kutta.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης

$$y' = f(x, y).$$

4.2 Η Μέθοδος του Euler

Σ' αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε μία απλή αριθμητική μέθοδο επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών, τη *μέθοδο του Euler* (*Euler's method*) (L. Euler, Institutionum Calculi Integralis, vol. I, 1768), η οποία είναι πάρα πολύ χρήσιμη σε πρακτικές εφαρμογές. Θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο του Euler, και εκτιμούμε με πειραματικό τρόπο το σφάλμα της, ενώ παράλληλα αναφερόμαστε σε ορισμένες βασικές έννοιες, όπως η τάξη ακρίβειας της, το τοπικό σφάλμα της κ.ά.. Τέλος θα μελετήσουμε πειραματικά την ευστάθεια της μεθόδου του Euler, η οποία θα οδηγήσει σε μία σύντομη μελέτη άκαμπτων Δ. Ε., και θα εισάγουμε ορισμένες γενικεύσεις της μεθόδου του Euler, που ανήκουν σε οικογένειες μεθόδων με τις

οποίες θα ασχοληθούμε λεπτομερέστερα στις επόμενες ενότητες.

Η απλούστερη μέθοδος αριθμητικής επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών Σ.Δ.Ε. είναι η μέθοδος του Euler, η οποία αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως “πολυγωνική μέθοδος του Cauchy”. Η απλότητα της μεθόδου, καθιστά εύκολη την κατανόηση εννοιών και φαινομένων, που θα συναντήσουμε στη συνέχεια και για πιο πολύπλοκες μεθόδους. Πρακτικό ενδιαφέρον δεν παρουσιάζει η μέθοδος του Euler και χρησιμοποιείται σπάνια.

Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (4.1)$$

που δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά είναι απαραίτητο να καταφύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους για να ληφθούν χρήσιμες προσεγγίσεις σε μία λύση. Υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι το ΠΑΤ (4.1) λύνεται μονοσήμαντα.

Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τις προσεγγιστικές τιμές της λύσης του (4.1) σε ισαπέχοντα σημεία. Θεωρούμε ένα διαμερισμό $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ σε ένα διάστημα $[a, b]$, με

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

όπου

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Θα δηλώσουμε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης σε αυτά τα σημεία από y_0, y_1, \dots, y_n , τέτοιο ώστε y_i να είναι μία προσέγγιση για την $y(x_i)$.

4.2.1 Η μέθοδος του Euler

Η απλούστερη αριθμητική μέθοδος για την επίλυση (4.1) είναι *Euler's method*. Αυτή η μέθοδος σπάνια χρησιμοποιείται στην πράξη. Ωστόσο, η απλότητά της την καθιστά χρήσιμη για παραδειγματικούς σκοπούς.

Οι προσεγγίσεις y_1, \dots, y_n , τις οποίες δίνει η μέθοδος του Euler για ομοιόμορφη διαμέριση με “βήμα” h , ($x = x_{i+1} = x_i + h$) προσδιορίζονται από τον εξής αναδρομικό τύπο

$$y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) \quad (4.2)$$

ως μία προσέγγιση για $y(x_{i+1})$. Δηλαδή προσεγγίζουμε την παράγωγο $y'(x_i)$ με το πηλίκο διαφορών

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}.$$

Εφόσον το $y(x_0) = y_0$ είναι γνωστό, εμείς μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε στην (4.2) με $i = 0$ για να υπολογίσουμε

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Για $i = 1$ (4.2) παίρνουμε

$$y_2 = y(x_1) + hf(x_1, y(x_1)),$$

στην οποία θα πρέπει να αντικαταστήσουμε την $y(x_1)$ με την κατά προσέγγιση τιμή της y_1 και επαναπροσδιορίζουμε

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1).$$

Έχοντας υπολογίσει y_2 , μπορούμε να υπολογίσουμε

$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2).$$

Σε γενικές γραμμές, η μέθοδος του Euler ξεκινά με την αρχική τιμή $y(x_0) = y_0$ και υπολογίζει y_1, y_2, \dots, y_n διαδοχικά με τον τύπο

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad 0 \leq i \leq n-1. \quad (4.3)$$

Γενικά, για κάθε αριθμητική μέθοδο μας ενδιαφέρει καταρχάς η ακρίβειά της και να δίνει μικρά σφάλματα

$$e_i := y(x_i) - y_i$$

καθώς και το κόστος της, δηλαδή το πλήθος των απαιτούμενων πράξεων για τον προσδιορισμό προσεγγίσεων μίας ορισμένης ακρίβειας. Η μέθοδος του Euler είναι απλούστατο να εφαρμοσθεί. Σε κάθε βήμα απαιτείται ένας υπολογισμός της f , συγκεκριμένα στο σημείο (x_i, y_i) , ένας πολλαπλασιασμός και μία πρόσθεση. Κατά κανόνα, η συνάρτηση f είναι αρκετά πολύπλοκη και το κόστος υπολογισμού της τιμής της σ' ένα σημείο είναι πολύ μεγαλύτερο από έναν πολλαπλασιασμό και μια πρόσθεση. Έχει λοιπόν επικρατήσει να μετράμε ως κόστος μιας αριθμητικής μεθόδου ανά βήμα μόνο το πλήθος υπολογισμών της f . Το κόστος της μεθόδου του Euler είναι συνεπώς πολύ χαμηλό, ένας υπολογισμός της f ανά βήμα.

Το επόμενο παράδειγμα απεικονίζει την υπολογιστική διαδικασία η οποία αναφέρεται στη μέθοδο του Euler.

Παράδειγμα 4.2.1 Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Euler με $h = 0.1$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές για τη λύση του ΠΑΤ

$$y' + 2y = x^3 e^{-2x}, \quad y(0) = 1 \quad (4.4)$$

για $x = 0.1, 0.2, 0.3$.

Λύση Ξαναγράφουμε (4.4) ως

$$y' = -2y + x^3 e^{-2x}, \quad y(0) = 1,$$

η οποία είναι της μορφής (4.1), με

$$f(x, y) = -2y + x^3 e^{-2x}, \quad x_0 = 0, \text{ και } y_0 = 1.$$

Η μέθοδος του Euler μας δίνει

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) \\ &= 1 + (.1)f(0, 1) = 1 + (.1)(-2) = .8, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) \\ &= .8 + (.1)f(.1, .8) = .8 + (.1)(-2(.8) + (.1)^3e^{-.2}) = .640081873, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) \\ &= .640081873 + (.1)(-2(.640081873) + (.2)^3e^{-.4}) = .512601754. \blacksquare \end{aligned}$$

Γράψαμε λεπτομερώς αυτούς τους υπολογισμούς για να βεβαιωθούμε ότι έχουμε κατανοήσει τη διαδικασία.

Ωστόσο, στα υπόλοιπα παραδείγματα, καθώς και στις ασκήσεις σε αυτό το κεφάλαιο, θα υποθέσουμε ότι μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μία υπολογιστική αριθμομηχανή ή ένα υπολογιστή, ώστε να διενεργήσετε τους απαραίτητους υπολογισμούς.

4.2.2 Εισαγωγή στις έννοιες του σφάλματος και της ακρίβειας για τη μέθοδο του Euler

Στα παρακάτω παραδείγματα θα προσπαθήσουμε να κάνουμε μια πρώτη προσέγγιση των εννοιών του σφάλματος και της ακρίβεια μιας μεθόδου με πειραματικό τρόπο (μια πιο αυστηρή προσέγγιση μπορεί κανείς να βρει στο J. D. Lambert 1991) μέσα από μια σειρά παραδειγμάτων ώστε να κατανοήσουμε τη σημαντικότητα αυτών των εννοιών στην αριθμητική επίλυση τέτοιων προβλημάτων.

Αρχικά θα ορίσουμε το

$$e_i := y(x_i) - y_i$$

ως το *σφάλμα του i βήματος*. Λόγω των αρχικών συνθηκών $y(x_0) = y_0$, θα θεωρούμε δεδομένο πάντα ότι $e_0 = 0$. Ωστόσο, σε γενικές γραμμές έχουμε $e_i \neq 0$ αν $i > 0$.

Συναντάμε δύο πηγές σφάλματος που εφαρμόζονται σε μια αριθμητική μέθοδο για να λύσει ένα ΠΑΤ:

- Οι τύποι που καθορίζουν τη μέθοδο βασίζονται σε κάποιο είδος προσεγγίσεων. Σφάλματα που οφείλονται στην ανακρίβεια της προσέγγισης ονομάζονται *σφάλματα αποκοπής (truncation errors)*.
- Οι υπολογιστές κάνουν αριθμητική με συγκεκριμένο αριθμό ψηφίων, και ως εκ τούτου κάνουν λάθη στρογγυλοποίηση. Σφάλματα τα οποία οφείλονται στην αδυναμία του υπολογιστή να κάνει ακριβή αριθμητική ονομάζονται *σφάλματα στρογγυλοποίησης* (βλέπε J. D. Lambert 1991) (*roundoff errors*).

Από μια προσεκτική ανάλυση το σφάλμα στρογγυλοποίησης είναι πέρα από το σκοπό αυτού του βιβλίου, εμείς θα εξετάσουμε μόνο το σφάλμα αποκοπής.

Παράδειγμα 4.2.2 Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Euler με μεγέθη βήματος $h = 0.1$,

$h = 0.05$, και $h = 0.025$, ώστε να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$y' + 2y = x^3 e^{-2x}, \quad y(0) = 1$$

για $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$.

Συγκρίνετε αυτές τις προσεγγιστικές τιμές με τις τιμές της ακριβούς λύσης.

$$y = \frac{e^{-2x}}{4}(x^4 + 4), \quad (4.5)$$

Λύση Στον Πίνακα 4.1 δίνουμε τις τιμές της ακριβούς λύσης (4.5) στα καθορισμένα σημεία, και τις προσεγγιστικές τιμές της λύσης σε αυτά τα σημεία, τα οποία λαμβάνονται με τη μέθοδο του Euler με μεγέθη βήματος $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$

Κατά την εξέταση του πίνακα, κρατήστε κατά νου ότι οι προσεγγιστικές τιμές στη στήλη που αντιστοιχεί στο $h = .05$ είναι στην πραγματικότητα τα αποτελέσματα της 20 βηματικής μεθόδου του Euler. Εμείς δεν έχουμε απαριθμήσει τις εκτιμήσεις της λύσης που λαμβάνονται για $x = 0.05, 0.15, \dots$, δεδομένου ότι δεν υπάρχει τίποτα για να τα συγκρίνουμε με τη στήλη που αντιστοιχεί στο $h = 0.1$. Ομοίως, οι προσεγγιστικές τιμές στη στήλη που αντιστοιχεί σε $h = 0.025$ είναι στην πραγματικότητα τα αποτελέσματα της 40 βηματικής με τη μέθοδο του Euler.

Πίνακας 4.1: Αριθμητική λύση της $y' + 2y = x^3 e^{-2x}$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο του Euler .

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	Exact
0.0	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
0.1	0.800000000	0.810005655	0.814518349	0.818751221
0.2	0.640081873	0.656266437	0.663635953	0.670588174
0.3	0.512601754	0.532290981	0.541339495	0.549922980
0.4	0.411563195	0.432887056	0.442774766	0.452204669
0.5	0.332126261	0.353785015	0.363915597	0.373627557
0.6	0.270299502	0.291404256	0.301359885	0.310952904
0.7	0.222745397	0.242707257	0.252202935	0.261398947
0.8	0.186654593	0.205105754	0.213956311	0.222570721
0.9	0.159660776	0.176396883	0.184492463	0.192412038
1.0	0.139778910	0.154715925	0.162003293	0.169169104

Μπορείτε να δείτε από τον πίνακα 4.1 ότι η μείωση του μεγέθους βήματος βελτιώνει την ακρίβεια της μεθόδου του Euler.

Για παράδειγμα,

$$y_{\text{exact}}(1) - y_{\text{approx}}(1) \approx \begin{cases} .0293 \text{ με } h = 0.1, \\ .0144 \text{ με } h = 0.05, \\ .0071 \text{ με } h = 0.025. \end{cases}$$

Βασιζόμενοι σε αυτά τα πειράματα, μπορείτε να μαντέψετε ότι το σφάλμα στην προσέγγιση της ακριβούς λύσης σε ένα x από τη μέθοδο του Euler είναι περίπου κατά το ήμισυ, όταν το μέγεθος του βήματος μειώνεται στο μισό.

Εμείς μπορούμε να βρούμε περισσότερα στοιχεία που θα υποστηρίζουν αυτήν την εικασία εξετάζοντας τον πίνακα 4.2, ο οποίος καταγράφει τις κατά προσέγγιση τιμές $y_{\text{exact}} - y_{\text{approx}}$ για $x = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$.

Πίνακας 4.2: Σφάλματα της προσεγγιστικής λύσης της $y' + 2y = x^3 e^{-2x}$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο του Euler.

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
0.1	0.0187	0.0087	0.0042
0.2	0.0305	0.0143	0.0069
0.3	0.0373	0.0176	0.0085
0.4	0.0406	0.0193	0.0094
0.5	0.0415	0.0198	0.0097
0.6	0.0406	0.0195	0.0095
0.7	0.0386	0.0186	0.0091
0.8	0.0359	0.0174	0.0086
0.9	0.0327	0.0160	0.0079
1.0	0.0293	0.0144	0.0071

Παράδειγμα 4.2.3 Οι πίνακες (4.3) και (4.4) αποδεικνύουν ανάλογα αποτελέσματα για το μη γραμμικό ΠΑΤ

$$y' = -2y^2 + xy + x^2, \quad y(0) = 1, \quad (4.6)$$

Σε αυτή την περίπτωση δεν μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα (4.6) ακριβώς.

Τα αποτελέσματα στη στήλη "Ακριβής" ("Exact") ελήφθησαν με τη χρήση μιας περισσότερο ακριβούς αριθμητικής μεθόδου γνωστής ως *Runge-Kutta* με ένα μικρό μέγεθος βήματος που θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

Οι υπολογισμοί έχουν γίνει με οκτώ δεκαδικά ψηφία. ■

Σφάλμα αποκοπής της μεθόδου του Euler

Παρατηρώντας τα αποτελέσματα που αναφέρονται στους προηγούμενους Πίνακες συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια σχέση εξάρτησης του σφάλματος με το μέγεθος του βήματος.

Θα δείξουμε ότι κάτω από λογικές παραδοχές για την f , υπάρχει μια σταθερά K , που το σφάλμα της κατά προσέγγιση λύσης του ΠΑΤ

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

Πίνακας 4.3: Αριθμητική λύση του $y' = -2y^2 + xy + x^2$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο του Euler.

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	“Exact”
0.0	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
0.1	0.800000000	0.821375000	0.829977007	0.837584494
0.2	0.681000000	0.707795377	0.719226253	0.729641890
0.3	0.605867800	0.633776590	0.646115227	0.657580377
0.4	0.559628676	0.587454526	0.600045701	0.611901791
0.5	0.535376972	0.562906169	0.575556391	0.587575491
0.6	0.529820120	0.557143535	0.569824171	0.581942225
0.7	0.541467455	0.568716935	0.581435423	0.593629526
0.8	0.569732776	0.596951988	0.609684903	0.621907458
0.9	0.614392311	0.641457729	0.654110862	0.666250842
1.0	0.675192037	0.701764495	0.714151626	0.726015790

Πίνακας 4.4: Σφάλματα της προσεγγιστικής λύσης της $y' = -2y^2 + xy + x^2$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο του Euler.

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
0.1	0.0376	0.0162	0.0076
0.2	0.0486	0.0218	0.0104
0.3	0.0517	0.0238	0.0115
0.4	0.0523	0.0244	0.0119
0.5	0.0522	0.0247	0.0121
0.6	0.0521	0.0248	0.0121
0.7	0.0522	0.0249	0.0122
0.8	0.0522	0.0250	0.0122
0.9	0.0519	0.0248	0.0121
1.0	0.0508	0.0243	0.0119

σε ένα δεδομένο σημείο $x > x_0$ με τη μέθοδο του Euler, με μέγεθος βήματος $h = (x - x_0)/n$ ικανοποιείται η ανισότητα

$$|y(x) - y_n| \leq Kh,$$

όπου K είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από n .

Υπάρχουν δύο πηγές σφάλματος (not counting roundoff) στη μέθοδο του Euler:

1. Το σφάλμα που προέκυψε προσεγγίζοντας την y' επί του διαστήματος $[x_i, x_{i+1}]$.
2. Το σφάλμα που προέκυψε αντικαθιστώντας $y(x_i)$ με y_i στην (4.2) και χρησιμοποιώντας την (4.3) για να υπολογίσουμε y_{i+1} .

Η μέθοδος του Euler υποθέτει ότι y_{i+1} είναι μια προσέγγιση του $y(x_{i+1})$. Εμείς αποκαλούμε το σφάλμα σε αυτή την προσέγγισή του *τοπικό σφάλμα στο i βήμα* και το συμβολίζουμε με T_i . Δηλαδή,

$$T_i = y(x_{i+1}) - y(x_i) - hf(x_i, y(x_i)). \quad (4.7)$$

Εμείς τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το *Θεώρημα του Taylor* για να υπολογίσουμε την T_i , υποθέτουμε για απλότητα ότι η f , f_x , και f_y είναι συνεχείς και καλά ορισμένες για όλα (x, y) (δηλαδή η f , f_x , και f_y είναι συνεχείς και πληρούν την ολική συνθήκη Lipschitz ως προς y και x , συνεπώς η λύση του προβλήματος είναι μονοσήμαντη).

Συνεπώς, η y'' υπάρχει στο $[a, b]$. Για να το διαπιστώσουμε, παραγωγίζουμε την

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

και παίρνουμε

$$\begin{aligned} y''(x) &= f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))y'(x) \\ &= f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))f(x, y(x)). \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι η f , f_x και f_y είναι φραγμένα, και υπάρχει μια σταθερά M , τέτοια ώστε

$$|f_x(x, y(x)) + f_y(x, y(x))f(x, y(x))| \leq M, \quad a < x < b,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$|y''(x)| \leq M, \quad x_0 < x < b. \quad (4.8)$$

Για $x_{i+1} = x_i + h$, το θεώρημα του Taylor μας δίνει ότι

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(\tilde{x}_i),$$

όπου \tilde{x}_i είναι κάποιος αριθμός μεταξύ x_i και x_{i+1} . Από $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$ αυτό μπορεί να γραφτεί ως

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\tilde{x}_i),$$

ή, ισοδύναμα,

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) - hf(x_i, y(x_i)) = \frac{h^2}{2}y''(\tilde{x}_i).$$

Συγκρίνοντας με την (4.7) έχουμε ότι

$$T_i = \frac{h^2}{2}y''(\tilde{x}_i).$$

Υπενθυμίζοντας (4.8), μπορούμε να ορίσουμε τον περιορισμό

$$|T_i| \leq \frac{Mh^2}{2}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (4.9)$$

Αν και μπορεί να είναι δύσκολο να προσδιοριστεί η σταθερά M , αυτό που είναι σημαντικό είναι ότι υπάρχει ένα M , τέτοιο ώστε η (4.9) διατηρείται. Εμείς θα λέμε ότι, το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου του Euler είναι τάξης h^2 , το οποίο θα γράφουμε ως $O(h^2)$.

Σημειώστε ότι η σπουδαιότητα του τοπικού σφάλματος αποκοπής στη Μέθοδο του Euler καθορίζεται από τη δεύτερη παράγωγο y'' της λύσης του ΠΑΤ.

Εφόσον το τοπικό σφάλμα αποκοπής για τη μέθοδο του Euler είναι $O(h^2)$, είναι λογικό να αναμένεται ότι η μείωση κατά το ήμισυ του h μειώνει το τοπικό σφάλμα αποκοπής κατά ένα συντελεστή 4. Αυτό αληθεύει, αλλά η μείωση κατά το ήμισυ του μέγεθους βήματος απαιτεί διπλάσια περισσότερα βήματα για να προσεγγίσουμε τη λύση σε ένα δεδομένο σημείο.

Δεν αναλύουμε όμως περαιτέρω τη συνολική επίδραση του σφάλματος αποκοπής στη μέθοδο του Euler, μια και δεν είναι ο στόχος μας αυτός. Θα πρέπει όμως να ξέρουμε ότι το συνολικό σφάλμα της μεθόδου του Euler είναι

$$|y(x) - y_n| \leq Kh, \quad (4.10)$$

με K ανεξάρτητο του n .

Παράδειγμα 4.2.4 Να λυθεί το ΠΑΤ (4.11) με τη μέθοδο του Euler.

$$y' - 2xy = 1, \quad y(0) = 3 \quad (4.11)$$

και να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων με την ακριβή λύση

$$y = e^{x^2} \left(3 + \int_0^x e^{-t^2} dt \right) \quad (4.12)$$

Για βήματα $h = 0.2$, $h = 0.1$, και $h = 0.05$ στα $x = 0, 0.2, 0.4, 0.6, \dots, 2.0$

Λύση Ξαναγράφουμε την (4.11) ως

$$y' = 1 + 2xy, \quad y(0) = 3 \quad (4.13)$$

και εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Euler με $f(x, y) = 1 + 2xy$ παίρνουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα (4.5).

Λόγω των μεγάλων διαφορών μεταξύ των εκτιμήσεων που λαμβάνονται για τις τρεις τιμές του h , είναι σαφές ότι τα αποτελέσματα αυτά δεν είναι χρήσιμα, αφού απέχουν πολύ από τις “ ακριβείς ” τιμές που περιελήφθησαν στον πίνακα. Είναι εύκολο να καταλάβουμε γιατί η μέθοδος του Euler αποδίδει τέτοια φτωχά αποτελέσματα. Υπενθυμίζεται ότι η σταθερά M στο (4.9) διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στον καθορισμό του σφάλματος στη μέθοδο του Euler αφού είναι ένα άνω φράγμα για τις τιμές της δεύτερης παραγώγου y'' από τη λύση του ΠΑΤ (4.11) στο $(0, 2)$.

Το πρόβλημα είναι ότι y'' παίρνει πολύ μεγάλες τιμές σε αυτό το διάστημα. Για να το

Πίνακας 4.5: Αριθμητική επίλυση της $y' - 2xy = 1$, $y(0) = 3$, με τη μέθοδο του Euler.

x	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	“Exact”
0.0	3.000000000	3.000000000	3.000000000	3.000000000
0.2	3.200000000	3.262000000	3.294348537	3.327851973
0.4	3.656000000	3.802028800	3.881421103	3.966059348
0.6	4.440960000	4.726810214	4.888870783	5.067039535
0.8	5.706790400	6.249191282	6.570796235	6.936700945
1.0	7.732963328	8.771893026	9.419105620	10.184923955
1.2	11.026148659	13.064051391	14.405772067	16.067111677
1.4	16.518700016	20.637273893	23.522935872	27.289392347
1.6	25.969172024	34.570423758	41.033441257	50.000377775
1.8	42.789442120	61.382165543	76.491018246	98.982969504
2.0	73.797840446	115.440048291	152.363866569	211.954462214

διαπιστώσουμε, παραγωγίζουμε την (4.13) για να λαμβάνουμε

$$y''(x) = 2y(x) + 2xy'(x) = 2y(x) + 2x(1 + 2xy(x)) = 2(1 + 2x^2)y(x) + 2x,$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει αν αντικαταστήσουμε και πάλι από το (4.13).

Από (4.12) συνεπάγεται ότι $y(x) > 3e^{x^2}$ αν $x > 0$,

$$y''(x) > 6(1 + 2x^2)e^{x^2} + 2x, \quad x > 0.$$

Για παράδειγμα, αφήνοντας $x = 2$ δείχνει ότι $y''(2) > 2952$.

Παράδειγμα 4.2.5 Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Euler με βήμα $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ στο ΠΑΤ

$$y' - 2y = \frac{x}{1 + y^2}, \quad y(1) = 7 \quad (4.14)$$

στο $[1, 2]$ παίρνουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα (4.6).

Παράδειγμα 4.2.6 Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Euler με μεγέθη βήματος $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ το ΠΑΤ

$$y' + 3x^2y = 1 + y^2, \quad y(2) = 2 \quad (4.15)$$

στο $[2, 3]$ παίρνουμε τα αποτελέσματα του πίνακα (4.7). Παρατηρούμε την ομοιότητα μεταξύ των τριών στηλών του Πίνακα (4.7) (τουλάχιστον για τις μεγαλύτερες τιμές του x) και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με τις ακριβείς τιμές της λύσης του προβλήματος (4.15), επαληθεύουμε τα καλά αποτελέσματα.

4.2 Ασκήσεις προς επίλυση

Πίνακας 4.6: Αριθμητική επίλυση της $y' - 2y = x/(1 + y^2)$, $y(1) = 7$, με τη μέθοδο του Euler.

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	“Exact”
1.0	7.000000000	7.000000000	7.000000000	7.000000000
1.1	8.402000000	8.471970569	8.510493955	8.551744786
1.2	10.083936450	10.252570169	10.346014101	10.446546230
1.3	12.101892354	12.406719381	12.576720827	12.760480158
1.4	14.523152445	15.012952416	15.287872104	15.586440425
1.5	17.428443554	18.166277405	18.583079406	19.037865752
1.6	20.914624471	21.981638487	22.588266217	23.253292359
1.7	25.097914310	26.598105180	27.456479695	28.401914416
1.8	30.117766627	32.183941340	33.373738944	34.690375086
1.9	36.141518172	38.942738252	40.566143158	42.371060528
2.0	43.369967155	47.120835251	49.308511126	51.752229656

Πίνακας 4.7: Αριθμητική επίλυση της $y' + 3x^2y = 1 + y^2$, $y(2) = 2$, με τη μέθοδο του Euler .

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	“Exact”
2.0	2.000000000	2.000000000	2.000000000	2.000000000
2.1	0.100000000	0.493231250	0.609611171	0.701162906
2.2	0.068700000	0.122879586	0.180113445	0.236986800
2.3	0.069419569	0.070670890	0.083934459	0.103815729
2.4	0.059732621	0.061338956	0.063337561	0.068390786
2.5	0.056871451	0.056002363	0.056249670	0.057281091
2.6	0.050560917	0.051465256	0.051517501	0.051711676
2.7	0.048279018	0.047484716	0.047514202	0.047564141
2.8	0.042925892	0.043967002	0.043989239	0.044014438
2.9	0.042148458	0.040839683	0.040857109	0.040875333
3.0	0.035985548	0.038044692	0.038058536	0.038072838

Μπορείτε αν θέλετε να αποθηκεύσετε τα αποτελέσματα αυτών των ασκήσεων, ώστε να τα επανεξετάσουμε στις επόμενες ενότητες.

Στις Ασκήσεις (1)-(5) χρησιμοποιείτε τη μέθοδο του Euler για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του εκάστοτε ΠΑΤ στα σημεία $x_i = x_0 + ih$, όπου x_0 είναι το σημείο όπου η αρχική συνθήκη είναι επιβεβλημένη και $i = 1, 2, 3$. Ο σκοπός αυτών των ασκήσεων είναι να σας εξοικειώσουν με την υπολογιστική διαδικασία της μεθόδου του Euler .

1. $y' = 2x^2 + 3y^2 - 2$, $y(2) = 1$; $h = 0.05$
2. $y' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(0) = 1$; $h = 0.1$
3. $y' + 3y = x^2 - 3xy + y^2$, $y(0) = 2$; $h = 0.05$
4. $y' = \frac{1+x}{1-y^2}$, $y(2) = 3$; $h = 0.1$
5. $y' + x^2y = \sin xy$, $y(1) = \pi$; $h = 0.2$
6. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Euler με μέγεθος βήματος $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$y' + 3y = 7e^{4x}, \quad y(0) = 2$$

για $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$. Συγκρίνετε αυτές τις κατά προσέγγιση τιμές με τις τιμές της ακριβούς λύσης $y = e^{4x} + e^{-3x}$. Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σε έναν πίνακα, όπως τα παραδείγματα.

7. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Euler με μέγεθος βημάτων $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^3} + 1, \quad y(1) = 1$$

για $x = 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \dots, 2.0$. Συγκρίνετε αυτές τις κατά προσέγγιση τιμές, με τις τιμές της ακριβούς λύση

$$y = \frac{1}{3x^2}(9 \ln x + x^3 + 2).$$

Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σε έναν πίνακα, όπως τα παραδείγματα.

8. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Euler με μεγέθη βήματος $h = 0.05$, $h = 0.025$, και $h = 0.0125$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$y' = \frac{y^2 + xy - x^2}{x^2}, \quad y(1) = 2$$

για $x = 1.0, 1.05, 1.10, 1.15, \dots, 1.5$. Συγκρίνετε αυτές τις προσεγγιστικές τιμές με τις τιμές της ακριβούς λύσης.

$$y = \frac{x(1 + x^2/3)}{1 - x^2/3}.$$

Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σε έναν πίνακα όπως τους πίνακες των παραδειγμάτων.

9. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Euler με μεγέθη βήματος $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$(3y^2 + 4y)y' + 2x + \cos x = 0, \quad y(0) = 1$$

για $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$.

10. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Euler με βήματα $h = 0.1, h = 0.05$, και $h = 0.025$. για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$y' + \frac{(y+1)(y-1)(y-2)}{x+1} = 0, \quad y(1) = 0$$

για $x = 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \dots, 2.0$.

11. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Euler με μεγέθη βήματος $h = 0.1, h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις προσεγγιστικές τιμές στη λύση του ΠΑΤ

$$y' + 3y = 7e^{-3x}, \quad y(0) = 6$$

για $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$. Συγκρίνετε αυτές τις κατά προσέγγιση τιμές με τις τιμές της ακριβούς λύσης $y = e^{-3x}(7x + 6)$. Παρατηρείτε κάτι ιδιαίτερο για αυτά τα αποτελέσματα; Εξηγήστε.

Στα γραμμικά προβλήματα αρχικών τιμών στις ασκήσεις (12)-(17) δεν μπορούμε εύκολα να βρούμε την ακριβή τους λύση. Σε κάθε άσκηση, χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Euler με τα υποδεικνυόμενα μεγέθη βήματος για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης για κάθε ΠΑΤ σε 11 ισαπέχοντα σημεία (συμπεριλαμβανομένων και των τελικών σημείων) στο διάστημα.

12. $y' - 2y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(2) = 2; \quad h = 0.1, 0.05, 0.025$ στο $[2, 3]$

13. $y' + 2xy = x^2, \quad y(0) = 3 \quad h = 0.2, 0.1, 0.05$ στο $[0, 2]$

14. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x^2}, \quad y(1) = 2; \quad h = 0.2, 0.1, 0.05$ στο $[1, 3]$

15. $y' + y = \frac{e^{-x} \tan x}{x}, \quad y(1) = 0; \quad h = 0.05, 0.025, 0.0125$ στο $[1, 1.5]$

16. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{e^x}{(1+x^2)^2}, \quad y(0) = 1; \quad h = 0.2, 0.1, 0.05$ στο $[0, 2]$

17. $xy' + (x+1)y = e^{x^2}, \quad y(1) = 2; \quad h = 0.05, 0.025, 0.0125$ στο $[1, 1.5]$

Σε Ασκήσεις (18)-(20), χρησιμοποιείτε τη μέθοδο του Euler με τα υποδεικνυόμενα μεγέθη βήματος για να βρείτε τις προσεγγιστικές τιμές της λύσης του δεδομένου ΠΑΤ σε 11 ισαπέχοντα σημεία (συμπεριλαμβανομένων και των τελικών σημείων) στο διάστημα.

18. $y' + 3y = xy^2(y+1), \quad y(0) = 1; \quad h = 0.1, 0.05, 0.025$ στο $[0, 1]$

19. $y' - 4y = \frac{x}{y^2(y+1)}, \quad y(0) = 1; \quad h = 0.1, 0.05, 0.025$ στο $[0, 1]$

20. $y' + 2y = \frac{x^2}{1+y^2}, \quad y(2) = 1; \quad h = 0.1, 0.05, 0.025$ στο $[2, 3]$

4.3 Μέθοδοι υψηλότερης τάξης ακρίβειας

Σ' αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με μερικές απλές γενικεύσεις της μεθόδου του Euler. Πρώτα θα γνωρίσουμε την Πεπλεγμένη μέθοδο του Euler ενώ θα αναλύσουμε λίγο παραπάνω τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler και ύστερα θα παρουσιάσουμε μεθόδους υψηλότερης τάξης ακρίβειας.

Στις προηγούμενες ενότητες είδαμε ότι το συνολικό σφάλμα αποκοπής του της μεθόδου του Euler είναι $O(h)$. Συνεπώς, καταλαβαίνουμε ότι μπορεί να επιτύχουν αυθαίρετα ακριβή αποτελέσματα με τη μέθοδο του Euler και καταφεύγουμε στο να επιλέξουμε το μέγεθος του βήματος αρκετά μικρό αν θέλουμε να έχουμε αποτελέσματα αξιόπιστα. Ωστόσο, αυτή η δεν είναι μια καλή ιδέα, για δύο λόγους. Πρώτον, μετά από ένα ορισμένο σημείο, μειώνοντας το μέγεθος του βήματος, θα αυξήσει τα σφάλματα στρογγυλοποίησης (roundoff) στο σημείο όπου η ακρίβεια θα επιδεινωθεί αντί να βελτιωθεί. Δεύτερος και πιο σημαντικός λόγος είναι ότι στις περισσότερες εφαρμογές των αριθμητικών μεθόδων για ένα ΠΑΤ

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (4.16)$$

το ακριβό (κοστοβόρο) μέρος του υπολογισμού είναι ο υπολογισμός της f . Συνεπώς, εμείς θέλουμε μεθόδους οι οποίες δίνουν καλά αποτελέσματα για έναν μικρό αριθμό υπολογισμών της f . Αυτό είναι που μας παρακινεί να κοιτάζουμε για αριθμητικές μεθόδους καλύτερες από τη μέθοδο του Euler .

4.3.1 Η Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler

Η Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler για το ΠΑΤ (4.16) βασίζεται στην προσέγγιση για $(x_i, y(x_i))$ του $y'(x_i)$ με το πηλίκο διαφορών

$$\frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h}$$

Αντικαταθιστώντας το $y(x_i)$ (για $i > 0$) από την κατά προσέγγιση τιμή y_i στη (4.16), γίνεται

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y(x_{i+1})).$$

Ωστόσο, αυτό ακόμα δεν θα λειτουργήσει, γιατί δεν γνωρίζουν $y(x_{i+1})$, που εμφανίζεται στα δεξιά. Εμείς αυτό το ξεπερνάμε αντικαθιστώντας το $y(x_{i+1})$ με $y_i + hf(x_i, y_i)$, την τιμή που θα υπολογίσουμε με τη μέθοδο του Euler στο y_{i+1} .

Έτσι, η Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler ξεκινά με τη γνωστή τιμή $y(x_0) = y_0$ και υπολογίζει τα y_1, y_2, \dots, y_n με επιτυχία με τον τύπο:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i)). \quad (4.17)$$

Ο υπολογισμός που αναφέρεται εδώ, εύκολα μπορεί να οργανωθεί ως εξής: δεδομένου ότι

y_i , υπολογίζει

$$\begin{aligned}k_{1i} &= f(x_i, y_i), \\k_{2i} &= f(x_i + h, y_i + hk_{1i}), \\y_{i+1} &= y_i + hk_{2i}.\end{aligned}$$

Η Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler απαιτεί δύο υπολογισμούς του $f(x, y)$ ανά βήμα, ενώ η μέθοδος του Euler απαιτεί μόνο μία. Ωστόσο όμως, τα αποτελέσματα είναι πολύ καλύτερα από πλευράς ακρίβειας.

4.3.2 Η Βελτιωμένη μέθοδος του Euler

Ένας τρόπος με τον οποίο οδηγείται κανείς στις μεθόδους του Euler είναι ο εξής: Ολοκληρώνοντας τη Δ.Ε. $y' = f(x, y)$ από x_i έως x_{i+1} έχουμε

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t, y(t)) dt. \quad (4.18)$$

Προσεγγίζοντας το ολοκλήρωμα σ' αυτήν τη σχέση με $hf(x_i, y(x_i))$, δηλαδή με τον 'αριστερό' τύπο του ορθογωνίου, οδηγούμαστε στη μέθοδο του Euler · προσεγγίζοντας το ίδιο ολοκλήρωμα με $hf(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$, δηλαδή με τον 'δεξιό' τύπο του ορθογωνίου, οδηγούμαστε στην πεπλεγμένη μέθοδο του Euler. Αν προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα στη (4.18) με τον τύπο του τραπεζίου, δηλαδή με την ποσότητα

$$m_i = \frac{h}{2} (f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))) \quad (4.19)$$

παίρνουμε την *Βελτιωμένη μέθοδο του Euler* για το ΠΑΤ

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \frac{h}{2} (f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))) \quad (4.20)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το $y(x_i)$ (για $i > 0$) από την κατά προσέγγιση τιμή y_i στην (4.20) και έχουμε

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))).$$

Ωστόσο, αυτό απαιτεί την επίλυση μίας μη γραμμικής εξίσωσης, γιατί δεν γνωρίζουν το $y(x_{i+1})$, που εμφανίζεται στα δεξιά. Εμείς αυτό το ξεπερνάμε αντικαθιστώντας το $y(x_{i+1})$ με $y_i + hf(x_i, y_i)$, την τιμή που θα υπολογίσουμε με τη μέθοδο του Euler στο y_{i+1} . Έτσι, η Βελτιωμένη μέθοδος Euler ξεκινά με τη γνωστή τιμή $y(x_0) = y_0$ και υπολογίζει y_1, y_2, \dots, y_n με επιτυχία με τον τύπο.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))). \quad (4.21)$$

Ο υπολογισμός που αναφέρεται εδώ, εύκολα μπορεί να οργανωθεί ως εξής: δεδομένου

ότι y_i , υπολογίζει

$$\begin{aligned}k_{1i} &= f(x_i, y_i), \\k_{2i} &= f(x_i + h, y_i + hk_{1i}), \\y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}(k_{1i} + k_{2i}).\end{aligned}$$

Η Βελτιωμένη μέθοδος του Euler απαιτεί δύο υπολογισμούς του $f(x, y)$ ανά βήμα, ενώ η μέθοδος του Euler απαιτεί μόνο μία. Ωστόσο, θα δούμε στο τέλος αυτής της ενότητας ότι αν το f ικανοποιεί τις κατάλληλες υποθέσεις, το τοπικό σφάλμα με τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler είναι $O(h^3)$, από ότι $O(h^2)$ με τη μέθοδο του Euler. Επομένως, το ολικό σφάλμα με τη Βελτιωμένη μέθοδο Euler είναι $O(h^2)$; Ωστόσο, εμείς δεν θα απόδειξουμε αυτό.

Σημειώνουμε ότι το μέγεθος του τοπικού σφάλματος στη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler και άλλες μεθόδους που περιγράφονται σε αυτήν την ενότητα καθορίζονται από την τρίτη παράγωγο y''' της λύσης του ΠΑΤ.

Επομένως, το τοπικό σφάλμα θα είναι μεγαλύτερο όπου $|y'''|$ είναι μεγάλο, ή μικρότερο, όπου y''' είναι μικρή.

Στα παρακάτω παραδείγματα δεν θα ασχοληθούμε με τη Πεπλεγμένη μέθοδο Euler αφού καλύπτεται στη ουσία από τη Βελτιωμένη μέθοδο Euler.

Στο επόμενο παράδειγμα, απεικονίζετε η υπολογιστική διαδικασία που ενδείκνυται για τη Βελτιωμένη μέθοδο Euler.

Παράδειγμα 4.3.1 Χρησιμοποιήστε τη Βελτιωμένη μέθοδο Euler με $h = 0.1$ για να βρείτε ενδεικτικές τιμές της λύσης του ΠΑΤ.

$$y' + 2y = x^3 e^{-2x}, \quad y(0) = 1 \tag{4.22}$$

για $x = 0.1, 0.2, 0.3$.

Λύση Εμείς ξαναγράφουμε την (4.22) ως

$$y' = -2y + x^3 e^{-2x}, \quad y(0) = 1,$$

η οποία είναι της μορφής (4.16), με

$$f(x, y) = -2y + x^3 e^{-2x}, \quad x_0 = 0, \quad \text{και } y_0 = 1.$$

Η Βελτιωμένη μέθοδος του Euler μας δίδει

$$\begin{aligned}
 k_{10} &= f(x_0, y_0) = f(0, 1) = -2, \\
 k_{20} &= f(x_1, y_0 + hk_{10}) = f(.1, 1 + (.1)(-2)) \\
 &= f(.1, .8) = -2(.8) + (.1)^3 e^{-.2} = -1.599181269, \\
 y_1 &= y_0 + \frac{h}{2}(k_{10} + k_{20}), \\
 &= 1 + (.05)(-2 - 1.599181269) = .820040937, \\
 k_{11} &= f(x_1, y_1) = f(.1, .820040937) = -2(.820040937) + (.1)^3 e^{-.2} = -1.639263142, \\
 k_{21} &= f(x_2, y_1 + hk_{11}) = f(.2, .820040937 + .1(-1.639263142)), \\
 &= f(.2, .656114622) = -2(.656114622) + (.2)^3 e^{-.4} = -1.306866684, \\
 y_2 &= y_1 + \frac{h}{2}(k_{11} + k_{21}), \\
 &= .820040937 + (.05)(-1.639263142 - 1.306866684) = .672734445, \\
 k_{12} &= f(x_2, y_2) = f(.2, .672734445) = -2(.672734445) + (.2)^3 e^{-.4} = -1.340106330, \\
 k_{22} &= f(x_3, y_2 + hk_{12}) = f(.3, .672734445 + .1(-1.340106330)), \\
 &= f(.3, .538723812) = -2(.538723812) + (.3)^3 e^{-.6} = -1.062629710, \\
 y_3 &= y_2 + \frac{h}{2}(k_{12} + k_{22}) \\
 &= .672734445 + (.05)(-1.340106330 - 1.062629710) = .552597643.
 \end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.3.2 Ο πίνακας (4.8) μας δείχνει τα αποτελέσματα από τη χρήση της Βελτιωμένης μεθόδου Euler με βήμα $h = 0.1$ και $h = 0.05$ για τις κατα προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$y' + 2y = x^3 e^{-2x}, \quad y(0) = 1$$

για $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$. Συγκρίνοντας αυτές τις τιμές, με τις αντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές που λαμβάνονται με τη μέθοδο του Euler, και οι τιμές της ακριβούς λύσης.

$$y = \frac{e^{-2x}}{4}(x^4 + 4).$$

τα αποτελέσματα που λαμβάνονται με την Βελτιωμένη μέθοδο του Euler με $h = 0.1$ είναι καλύτερα από ό, τι εκείνα που λαμβάνονται με τη μέθοδο του Euler με $h = 0.05$.

Παράδειγμα 4.3.3 Ο πίνακας (4.9) μας δείχνει τα αποτελέσματα από τη χρήση της Βελτιωμένης μεθόδου Euler για το μη γραμμικό ΠΑΤ

$$y' = -2y^2 + xy + x^2, \quad y(0) = 1.$$

Συγκρίνοντας αυτές τις τιμές, με τις αντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές που λαμβάνονται με τη μέθοδο του Euler, και τις τιμές της ακριβούς λύσης, πόσο καλύτερα είναι και πόσο κοντά την ακριβή λύση.

Πίνακας 4.8: Αριθμητική επίλυση του $y' + 2y = x^3 e^{-2x}$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο του Euler και τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler .

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	Exact
0.0	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
0.1	0.800000000	0.810005655	0.820040937	0.819050572	0.818751221
0.2	0.640081873	0.656266437	0.672734445	0.671086455	0.670588174
0.3	0.512601754	0.532290981	0.552597643	0.550543878	0.549922980
0.4	0.411563195	0.432887056	0.455160637	0.452890616	0.452204669
0.5	0.332126261	0.353785015	0.376681251	0.374335747	0.373627557
0.6	0.270299502	0.291404256	0.313970920	0.311652239	0.310952904
0.7	0.222745397	0.242707257	0.264287611	0.262067624	0.261398947
0.8	0.186654593	0.205105754	0.225267702	0.223194281	0.222570721
0.9	0.159660776	0.176396883	0.194879501	0.192981757	0.192412038
1.0	0.139778910	0.154715925	0.171388070	0.169680673	0.169169104
	Euler		Improved Euler		Exact

Πίνακας 4.9: Αριθμητική επίλυση του $y' = -2y^2 + xy + x^2$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο του Euler και τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler .

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	“Exact”
0.0	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
0.1	0.800000000	0.821375000	0.840500000	0.838288371	0.837584494
0.2	0.681000000	0.707795377	0.733430846	0.730556677	0.729641890
0.3	0.605867800	0.633776590	0.661600806	0.658552190	0.657580377
0.4	0.559628676	0.587454526	0.615961841	0.612884493	0.611901791
0.5	0.535376972	0.562906169	0.591634742	0.588558952	0.587575491
0.6	0.529820120	0.557143535	0.586006935	0.582927224	0.581942225
0.7	0.541467455	0.568716935	0.597712120	0.594618012	0.593629526
0.8	0.569732776	0.596951988	0.626008824	0.622898279	0.621907458
0.9	0.614392311	0.641457729	0.670351225	0.667237617	0.666250842
1.0	0.675192037	0.701764495	0.730069610	0.726985837	0.726015790
	Euler		Improved Euler		“Exact”

Παράδειγμα 4.3.4 Χρησιμοποιήστε το μέγεθος βήματος $h = 0.2$, $h = 0.1$, και $h = 0.05$ για να βρείτε τις προσεγγιστικές τιμές της λύσης

$$y' - 2xy = 1, \quad y(0) = 3 \quad (4.23)$$

για $x = 0, 0.2, 0.4, 0.6, \dots, 2.0$ με τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler

Λύση Ξαναγράφοντας την (4.23) ως

$$y' = 1 + 2xy, \quad y(0) = 3$$

και εφαρμόζοντας τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler με $f(x, y) = 1 + 2xy$ παίρνουμε τα αποτελέσματα τα οποία εμφανίζονται στον πίνακα (4.10).

Πίνακας 4.10: Αριθμητική επίλυση του $y' - 2xy = 1$, $y(0) = 3$, με τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler .

x	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	“Exact”
0.0	3.000000000	3.000000000	3.000000000	3.000000000
0.2	3.328000000	3.328182400	3.327973600	3.327851973
0.4	3.964659200	3.966340117	3.966216690	3.966059348
0.6	5.057712497	5.065700515	5.066848381	5.067039535
0.8	6.900088156	6.928648973	6.934862367	6.936700945
1.0	10.065725534	10.154872547	10.177430736	10.184923955
1.2	15.708954420	15.970033261	16.041904862	16.067111677
1.4	26.244894192	26.991620960	27.210001715	27.289392347
1.6	46.958915746	49.096125524	49.754131060	50.000377775
1.8	89.982312641	96.200506218	98.210577385	98.982969504
2.0	184.563776288	203.151922739	209.464744495	211.954462214

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Euler με $f(x, y) = 1 + 2xy$ παίρνουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στον Πίνακα (4.11).

Πίνακας 4.11: Αριθμητική επίλυση της $y' - 2xy = 1$, $y(0) = 3$, με τη μέθοδο του Euler.

x	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	“Exact”
0.0	3.000000000	3.000000000	3.000000000	3.000000000
0.2	3.200000000	3.262000000	3.294348537	3.327851973
0.4	3.656000000	3.802028800	3.881421103	3.966059348
0.6	4.440960000	4.726810214	4.888870783	5.067039535
0.8	5.706790400	6.249191282	6.570796235	6.936700945
1.0	7.732963328	8.771893026	9.419105620	10.184923955
1.2	11.026148659	13.064051391	14.405772067	16.067111677
1.4	16.518700016	20.637273893	23.522935872	27.289392347
1.6	25.969172024	34.570423758	41.033441257	50.000377775
1.8	42.789442120	61.382165543	76.491018246	98.982969504
2.0	73.797840446	115.440048291	152.363866569	211.954462214

Είναι σαφής η διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων.

4.3.3 Αναζητώντας μεθόδους με σφάλμα αποκοπής $O(h^3)$

Στόχος μας σε αυτή την παράγραφο είναι να παράξουμε μία κατηγορία μεθόδων με $O(h^3)$ με σφάλμα αποκοπής, για την επίλυση (4.16). Για απλότητα, υποθέτουμε ότι η f , f_x , f_y , f_{xx} , f_{yy} , και f_{xy} είναι συνεχές και φραγμένες για όλα τα (x, y) .

Αυτό σημαίνει ότι αν y είναι η λύση της (4.16), τότε y'' και y''' είναι φραγμένα.

Ξεκινάμε με την προσέγγιση του ολοκληρώματος της καμπύλης του (4.16) στο $(x_i, y(x_i))$, από τη γραμμή που διέρχεται από $(x_i, y(x_i))$ με κλίση

$$m_i = \sigma y'(x_i) + \rho y'(x_i + \theta h),$$

όπου σ , ρ , και θ είναι σταθερές τις οποίες σύντομα θα προσδιορίσουμε; Ωστόσο, επιλέγουμε στην αρχή ότι $0 < \theta \leq 1$, έτσι ώστε

$$x_i < x_i + \theta h \leq x_{i+1}.$$

Η εξίσωση της προσεγγιστικής γραμμής είναι

$$\begin{aligned} y &= y(x_i) + m_i(x - x_i) \\ &= y(x_i) + [\sigma y'(x_i) + \rho y'(x_i + \theta h)](x - x_i). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Εφαρμόζοντας την $x = x_{i+1} = x_i + h$ στην (4.24), παίρνουμε

$$\hat{y}_{i+1} = y(x_i) + h[\sigma y'(x_i) + \rho y'(x_i + \theta h)]$$

ως μία προσέγγιση του $y(x_{i+1})$.

Για να προσδιορίσουμε τα σ , ρ , και θ έτσι ώστε το σφάλμα

$$\begin{aligned} E_i &= y(x_{i+1}) - \hat{y}_{i+1} \\ &= y(x_{i+1}) - y(x_i) - h[\sigma y'(x_i) + \rho y'(x_i + \theta h)] \end{aligned} \quad (4.25)$$

σε αυτή την προσέγγιση να είναι $O(h^3)$.

Από το θεώρημα του Taylor έχουμε

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{6}y'''(\hat{x}_i),$$

όπου \hat{x}_i ανήκει στο διάστημα (x_i, x_{i+1}) . Αφού y''' είναι φραγμένο, συνεπάγεται ότι

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) - hy'(x_i) - \frac{h^2}{2}y''(x_i) = O(h^3).$$

Συγκρίνοντας το αυτό με την (4.25) αποδεικνύουμε ότι $E_i = O(h^3)$ εάν

$$\sigma y'(x_i) + \rho y'(x_i + \theta h) = y'(x_i) + \frac{h}{2}y''(x_i) + O(h^2). \quad (4.26)$$

Ωστόσο, εφαρμόζοντας το θεώρημα του Taylor στο y' έχουμε ότι

$$y'(x_i + \theta h) = y'(x_i) + \theta h y''(x_i) + \frac{(\theta h)^2}{2} y'''(\bar{x}_i),$$

όπου \bar{x}_i ανήκει στο διάστημα $(x_i, x_i + \theta h)$. Αφού το y''' είναι φραγμένο, αυτό συνεπάγεται ότι

$$y'(x_i + \theta h) = y'(x_i) + \theta h y''(x_i) + O(h^2).$$

Αντικαθιστώντας το αυτό στην (4.26) και σημειώνοντας ότι το άθροισμα των δύο $O(h^2)$ είναι και πάλι $O(h^2)$ αποδεικνύουμε ότι $E_i = O(h^3)$ αν

$$(\sigma + \rho)y'(x_i) + \rho\theta h y''(x_i) = y'(x_i) + \frac{h}{2}y''(x_i),$$

το οποίο αληθεύει αν

$$\sigma + \rho = 1 \quad \text{and} \quad \rho\theta = \frac{1}{2}. \quad (4.27)$$

Από την $y' = f(x, y)$, εμείς μπορούμε να πάρουμε με τη βοήθεια της (4.25)

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h[\sigma f(x_i, y_i) + \rho f(x_i + \theta h, y(x_i + \theta h))] + O(h^3) \quad (4.28)$$

αν η σ , ρ , και θ ικανοποιούν την (4.27).

Ωστόσο, ο τύπος αυτός δεν θα ήταν χρήσιμος, ακόμη και αν γνωρίζαμε την $y(x_i)$ ακριβώς (όπως θα κάναμε για $i = 0$, από την αρχική συνθήκη), εφόσον ακόμα δεν ξέρουμε την $y(x_i + \theta h)$. Για να ξεπεραστεί αυτή η δυσκολία, θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το θεώρημα του Taylor από το οποίο έχουμε

$$y(x_i + \theta h) = y(x_i) + \theta h y'(x_i) + \frac{h^2}{2} y''(\tilde{x}_i),$$

όπου \tilde{x}_i ανήκει στο διάστημα $(x_i, x_i + \theta h)$. Αφού $y'(x_i) = f(x_i, y(x_i))$ και το y'' είναι φραγμένο, αυτό σημαίνει ότι

$$|y(x_i + \theta h) - y(x_i) - \theta h f(x_i, y(x_i))| \leq K h^2 \quad (4.29)$$

για κάποια σταθερά K . Αφού f_y είναι φραγμένο, από το θεώρημα μέσης τιμής συνεπάγεται ότι

$$|f(x_i + \theta h, u) - f(x_i + \theta h, v)| \leq M |u - v|$$

για κάποια σταθερά M . Γράφοντας

$$u = y(x_i + \theta h) \quad \text{και} \quad v = y(x_i) + \theta h f(x_i, y(x_i))$$

και υπενθυμίζοντας ότι την (4.29) αποδεικνύετε ότι

$$f(x_i + \theta h, y(x_i + \theta h)) = f(x_i + \theta h, y(x_i) + \theta h f(x_i, y(x_i))) + O(h^2).$$

Αντικαθιστώντας στην (4.28) παίρνουμε

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h [\sigma f(x_i, y(x_i)) + \rho f(x_i + \theta h, y(x_i) + \theta h f(x_i, y(x_i)))] + O(h^3).$$

Αυτό συνεπάγεται ότι ο τύπος

$$y_{i+1} = y_i + h [\sigma f(x_i, y_i) + \rho f(x_i + \theta h, y_i + \theta h f(x_i, y_i))]$$

έχει σφάλμα αποκοπής $O(h^3)$, αν σ , ρ , και θ ικανοποιούν (4.27).

Αντικαθιστώντας τα $\sigma = 1 - \rho$ και $\theta = 1/2\rho$ παίρνουμε

$$y_{i+1} = y_i + h \left[(1 - \rho) f(x_i, y_i) + \rho f \left(x_i + \frac{h}{2\rho}, y_i + \frac{h}{2\rho} f(x_i, y_i) \right) \right]. \quad (4.30)$$

Ο υπολογισμός που αναφέρεται εδώ, μπορεί εύκολα να οργανωθεί ως εξής: δεδομένου ότι το y_i , υπολογίζεται

$$\begin{aligned} k_{1i} &= f(x_i, y_i), \\ k_{2i} &= f \left(x_i + \frac{h}{2\rho}, y_i + \frac{h}{2\rho} k_{1i} \right), \\ y_{i+1} &= y_i + h[(1 - \rho)k_{1i} + \rho k_{2i}]. \end{aligned}$$

Για να είμαστε συνεπείς με τις απαιτήσεις μας, έχουμε $0 < \theta < 1$, τότε παίρνουμε $\rho \geq 1/2$.

- Για $\rho = 1/2$ ο τύπος (4.30) μας δίνει την Βελτιωμένη Μέθοδο του Euler (4.21).
- Για $\rho = 3/4$ παίρνουμε τη *μέθοδο του Heun*,

$$y_{i+1} = y_i + h \left[\frac{1}{4} f(x_i, y_i) + \frac{3}{4} f \left(x_i + \frac{2}{3} h, y_i + \frac{2}{3} h f(x_i, y_i) \right) \right],$$

της οποίας μπορούμε να γράψουμε τους υπολογισμούς της ως εξής:

$$\begin{aligned} k_{1i} &= f(x_i, y_i), \\ k_{2i} &= f \left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2h}{3} k_{1i} \right), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{4} (k_{1i} + 3k_{2i}). \end{aligned}$$

- Για $\rho = 1$ παίρνουμε τη *μέθοδο του μέσου σημείου*,

$$y_{i+1} = y_i + h f \left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \right),$$

της οποίας μπορούμε να γράψουμε τους υπολογισμούς της ως εξής:

$$\begin{aligned}k_{1i} &= f(x_i, y_i), \\k_{2i} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_{1i}\right), \\y_{i+1} &= y_i + hk_{2i}.\end{aligned}$$

4.3 Ασκήσεις προς επίλυση

Οι περισσότερες από τις παρακάτω ασκήσεις περιλαμβάνουν τα πρόβλημα αρχικών τιμών που μελετώνται στις ασκήσεις της προηγούμενης ενότητας. Αυτό θα σας βοηθήσει να συγκρίνετε τα αποτελέσματα που θα πάρετε εδώ με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας του Euler.

Στις Ασκήσεις (1)-(5) χρησιμοποιείστε τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler για να βρει τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης στο εκάστοτε ΠΑΤ στα σημεία $x_i = x_0 + ih$, όπου x_0 είναι το σημείο όπου η αρχική συνθήκη είναι επιβεβλημένη και $i = 1, 2, 3$.

Δοκιμάστε να λύσετε ξανά τις ίδιες Ασκήσεις (1)-(5) χρησιμοποιώντας την Πεπλεγμένη μέθοδο του Euler.

1. $y' = 2x^2 + 3y^2 - 2$, $y(2) = 1$; $h = 0.05$
2. $y' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(0) = 1$; $h = 0.1$
3. $y' + 3y = x^2 - 3xy + y^2$, $y(0) = 2$; $h = 0.05$
4. $y' = \frac{1+x}{1-y^2}$, $y(2) = 3$; $h = 0.1$
5. $y' + x^2y = \sin xy$, $y(1) = \pi$; $h = 0.2$
6. Χρησιμοποιήστε τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler με βήμα $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης στο ΠΑΤ

$$y' + 3y = 7e^{4x}, \quad y(0) = 2$$

για $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$. Συγκρίνετε αυτές τις κατά προσέγγιση τιμές με τις τιμές της ακριβούς λύσης $y = e^{4x} + e^{-3x}$, αλλά και με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας του Euler. Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σε έναν πίνακα όπως στον (4.8).

7. Χρησιμοποιήστε τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler με βήμα $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^3} + 1, \quad y(1) = 1$$

για $x = 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \dots, 2.0$. Συγκρίνετε αυτές τις κατά προσέγγιση τιμές με τις

τιμές της ακριβούς λύσης

$$y = \frac{1}{3x^2}(9 \ln x + x^3 + 2)$$

αλλά και με τα αντίστοιχα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας του Euler. Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σε έναν πίνακα όπως στον (4.8).

8. Χρησιμοποιήστε τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler με μέγεθος βήμα $h = 0.05$, $h = 0.025$, και $h = 0.0125$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης στο ΠΑΤ

$$y' = \frac{y^2 + xy - x^2}{x^2}, \quad y(1) = 2,$$

για $x = 1.0, 1.05, 1.10, 1.15, \dots, 1.5$. Συγκρίνετε αυτές τις κατά προσέγγιση τιμές με τις τιμές της ακριβούς λύσης

$$y = \frac{x(1 + x^2/3)}{1 - x^2/3}$$

που ελήφθησαν στο παράδειγμα (2.3.3). Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σε έναν πίνακα όπως στον (4.8).

9. Στο Παράδειγμα (4.3.2) αποδείχθηκε ότι

$$y^5 + y = x^2 + x - 4$$

είναι μια λύση του ΠΑΤ

$$y' = \frac{2x + 1}{5y^4 + 1}, \quad y(2) = 1. \quad (\text{A})$$

Χρησιμοποιήστε τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler με βήμα μεγέθους $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του (A) για $x = 2.0, 2.1, 2.2, 2.3, \dots, 3.0$.

Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σε πινακοειδή μορφή.

Να ελέγξετε το σφάλμα σε αυτές τις κατά προσέγγιση τιμές, και να κατασκευάσετε έναν πίνακα με τις τιμές των υπολοίπων

$$R(x, y) = y^5 + y - x^2 - x + 4$$

για κάθε τιμή του (x, y) που εμφανίζεται στον πρώτο πίνακα.

10. Χρησιμοποιήστε τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler με βήμα $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$(3y^2 + 4y)y' + 2x + \cos x = 0, \quad y(0) = 1$$

για $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$.

11. Χρησιμοποιήστε τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler με βήμα $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης στο ΠΑΤ

$$y' + \frac{(y+1)(y-1)(y-2)}{x+1} = 0, \quad y(1) = 0$$

για $x = 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \dots, 2.0$.

12. Χρησιμοποιήστε τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler και τη Πεπλεγμένη μέθοδο του Euler με βήμα $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$y' + 3y = e^{-3x}(1 - 2x), \quad y(0) = 2,$$

για $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$. Συγκρίνετε αυτές τις κατά προσέγγιση τιμές με τις τιμές της ακριβούς λύσης $y = e^{-3x}(2 + x - x^2)$. Έχετε παρατηρήσει κάτι το ιδιαίτερο σχετικά με τα αποτελέσματα; Εξηγήστε.

Τα παρακάτω γραμμικά ΠΑΤ στις Ασκήσεις (13)-(18) δεν μπορούν να λυθούν ακριβώς με απλό τρόπο.

Σε κάθε άσκηση χρησιμοποιείτε τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler και τη Πεπλεγμένη μέθοδο του Euler με το υποδεικνύόμενο μέγεθος βήματος για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης στο εκάστοτε ΠΑΤ σε 11 ισαπέχοντα σημεία (συμπεριλαμβανομένων των τελικών σημείων) στο διάστημα.

13. $y' - 2y = \frac{1}{1+x^2}$, $y(2) = 2$; $h = 0.1, 0.05, 0.025$ on $[2, 3]$
14. $y' + 2xy = x^2$, $y(0) = 3$; $h = 0.2, 0.1, 0.05$ στο $[0, 2]$
15. $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x^2}$, $y(1) = 2$, $h = 0.2, 0.1, 0.05$ στο $[1, 3]$
16. $y' + y = \frac{e^{-x} \tan x}{x}$, $y(1) = 0$; $h = 0.05, 0.025, 0.0125$ στο $[1, 1.5]$
17. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{e^x}{(1+x^2)^2}$, $y(0) = 1$; $h = 0.2, 0.1, 0.05$ στο $[0, 2]$
18. $xy' + (x+1)y = e^{x^2}$, $y(1) = 2$; $h = 0.05, 0.025, 0.0125$ στο $[1, 1.5]$

Στις Ασκήσεις (19)-(21) χρησιμοποιήστε τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler και τη Πεπλεγμένη μέθοδο του Euler με το υποδεικνύόμενο βήμα μεγέθους για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης στο συγκεκριμένο ΠΑΤ σε 11 ισαπέχοντα σημεία (συμπεριλαμβανομένων των τελικών σημείων) στο διάστημα.

19. $y' + 3y = xy^2(y+1)$, $y(0) = 1$; $h = 0.1, 0.05, 0.025$ στο $[0, 1]$
20. $y' - 4y = \frac{x}{y^2(y+1)}$, $y(0) = 1$; $h = 0.1, 0.05, 0.025$ στο $[0, 1]$
21. $y' + 2y = \frac{x^2}{1+y^2}$, $y(2) = 1$; $h = 0.1, 0.05, 0.025$ στο $[2, 3]$

22. Λύστε ξανά την άσκηση (7) με τη “Μέθοδο του μέσου σημείου.”
23. Λύστε ξανά την άσκηση (7) με τη “Μέθοδο του Heun.”
24. Λύστε ξανά την άσκηση (8) με τη “Μέθοδο του μέσου σημείου.”
25. Λύστε ξανά την άσκηση (8) με τη “Μέθοδο του Heun.”
26. Λύστε ξανά την άσκηση (10) με τη “Μέθοδο του μέσου σημείου.”
27. Λύστε ξανά την άσκηση (10) με τη “Μέθοδο του Heun.”
28. Λύστε ξανά την άσκηση (11) με τη “Μέθοδο του μέσου σημείου.”
29. Λύστε ξανά την άσκηση (11) με τη “Μέθοδο του Heun.”
30. Αποδείξτε ότι αν $f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy},$ και f_{xy} είναι συνεχή και φραγμένα για όλα (x, y) και y η λύση του ΠΑΤ

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

τότε y'' και y''' είναι φραγμένα.

4.4 Η μεθοδος Runge-Kutta

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τη μέθοδο **Runge -Kutta** η οποία, ίσως είναι η πλέον ευρέως διαδεδομένη για την αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

Σε γενικές γραμμές, αν το q είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός και f ικανοποιεί τις κατάλληλες παραδοχές, υπάρχουν αριθμητικές μέθοδοι με σφάλμα αποκοπής $O(h^{q+1})$ για την επίλυση του ΠΑΤ.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (4.31)$$

Επιπλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι μια μέθοδος με σφάλμα αποκοπής $O(h^{q+1})$ έχει ολικό σφάλμα $O(h^q)$.

Στις προηγούμενες ενότητες μελετήσαμε τις αριθμητικές μεθόδους όπου $q = 1$ και $q = 2$.

Οι μέθοδοι RK (Runge-Kutta) εντάσσονται στην κατηγορία των μονοβηματικών μεθόδων, δηλαδή των μεθόδων οι οποίες για τον υπολογισμό της προσέγγισης y_{i+1} χρησιμοποιούν μόνο την αμέσως προηγούμενη τιμή y_i .

Έστω $q \in \mathbf{N}$, $t_l \in \mathbb{R}$, με $l = 1, \dots, q$ (συνήθως $0 \leq t_l \leq 1$), $a_{l,j} \in \mathbb{R}$, $l, j = 1, \dots, q$, και $b_l \in \mathbb{R}$, $l = 1, \dots, q$. Για $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ προσεγγίζουμε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{t_l} \psi(s) ds$$

με τα αθροίσματα (κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης)

$$\sum_{j=1}^q a_{lj} \psi(t_j), \quad l = 1, \dots, q,$$

και το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \psi(s) ds$$

με το άθροισμα

$$\sum_{j=1}^q b_j \psi(t_j).$$

Οι σταθερές a_{lj}, t_l, b_l ορίζουν δηλαδή $q + 1$ τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης. Τα t_l είναι οι κόμβοι σ' όλους αυτούς τους τύπους ολοκλήρωσης, τα b_l είναι τα βάρη στον τύπο για την προσέγγιση του ολοκληρώματος στο διάστημα $[0, 1]$ και τα $a_{lj}, j = 1, \dots, q$, είναι τα βάρη στον τύπο που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση του ολοκληρώματος στο διάστημα $[0, t_l]$. Καθένα τέτοιο σύνολο σταθερών ορίζει μία μέθοδο RK. Έχει επικρατήσει να γράφουμε αυτούς τους αριθμούς σε μορφή μητρώου (συμβολισμός του J. Butcher)

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} & t_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qq} & t_q \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_q & \end{array} \quad (4.32)$$

Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τις προσεγγιστικές τιμές της λύσης του (4.1) σε ισαπέχοντα σημεία. Θεωρούμε έναν διαμερισμό $x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b$ σε ένα διάστημα $[a, b]$, με

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

όπου

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Θα δηλώσουμε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης σε αυτά τα σημεία από y_0, y_1, \dots, y_n , έτσι, y_i είναι μία προσέγγιση για την $y(x_i)$. Έστω επιπλέον

$$x_{l,i} = x_i + t_l h, \quad l = 0, 1, \dots, q.$$

Τώρα μπορούμε να γράψουμε τους υπολογισμούς της παραπάνω γενικής μεθόδου Runge-Kutta ως εξής:

$$\left. \begin{array}{l} k_{l,i} = f \left(x_{l,i}, y_i + h \sum_{j=1}^q a_{lj} k_{j,i} \right), \quad l = 1, \dots, q, \\ y_{i+1} = y_i + h \sum_{l=1}^q b_l k_{l,i}. \end{array} \right\} \quad (4.33)$$

Εμείς θα παραλείψουμε τις μεθόδους για $q = 3$ και θα δείξουμε τη μέθοδο *Runge-Kutta* που είναι η ευρύτερα χρησιμοποιούμενη με $q = 4$.

Το μέγεθος του σφάλματος αποκοπής καθορίζεται από την πέμπτη παράγωγο $y^{(5)}$ της

λύσης του ΠΑΤ. Επομένως, το σφάλμα αποκοπής θα είναι μεγαλύτερο όπου $|y^{(5)}|$ είναι μεγάλο, ή μικρότερο, όπου $|y^{(5)}|$ είναι μικρό.

Η μέθοδος του Runge-Kutta υπολογίζει τις κατά προσέγγιση τιμές y_1, y_2, \dots, y_n της λύσης της (4.31) για $a = x_0, x_0 + h, \dots, x_0 + nh = b$ ως εξής: Δεδομένου ότι η y_i , υπολογίζει την $y(x_i)$,

$$\begin{aligned} k_{1i} &= f(x_i, y_i), \\ k_{2i} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_{1i}\right), \\ k_{3i} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_{2i}\right), \\ k_{4i} &= f(x_i + h, y_i + hk_{3i}), \end{aligned}$$

και

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_{1i} + 2k_{2i} + 2k_{3i} + k_{4i}).$$

Το επόμενο παράδειγμα, διαπραγματεύεται το ΠΑΤ και μελετάται μέσα από τα παραδείγματα (4.2.1) και (4.3.1), η υπολογιστική διαδικασία για τη μέθοδο Runge-Kutta.

Παράδειγμα 4.4.1 Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Runge-Kutta με $h = 0.1$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές για τη λύση του ΠΑΤ

$$y' + 2y = x^3 e^{-2x}, \quad y(0) = 1, \quad (4.34)$$

για $x = 0.1, 0.2$.

Λύση Γράφουμε ξανά την εξίσωση (4.34) ως

$$y' = -2y + x^3 e^{-2x}, \quad y(0) = 1,$$

η οποία είναι της μορφής (4.31), με

$$f(x, y) = -2y + x^3 e^{-2x}, \quad x_0 = 0, \text{ και } y_0 = 1.$$

Από τη μέθοδο του Runge-Kutta παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 k_{10} &= f(x_0, y_0) = f(0, 1) = -2, \\
 k_{20} &= f(x_0 + h/2, y_0 + hk_{10}/2) = f(.05, 1 + (.05)(-2)) \\
 &= f(.05, .9) = -2(.9) + (.05)^3 e^{-.1} = -1.799886895, \\
 k_{30} &= f(x_0 + h/2, y_0 + hk_{20}/2) = f(.05, 1 + (.05)(-1.799886895)) \\
 &= f(.05, .910005655) = -2(.910005655) + (.05)^3 e^{-.1} = -1.819898206, \\
 k_{40} &= f(x_0 + h, y_0 + hk_{30}) = f(.1, 1 + (.1)(-1.819898206)) \\
 &= f(.1, .818010179) = -2(.818010179) + (.1)^3 e^{-.2} = -1.635201628, \\
 y_1 &= y_0 + \frac{h}{6}(k_{10} + 2k_{20} + 2k_{30} + k_{40}), \\
 &= 1 + \frac{.1}{6}(-2 + 2(-1.799886895) + 2(-1.819898206) - 1.635201628) = .818753803, \\
 k_{11} &= f(x_1, y_1) = f(.1, .818753803) = -2(.818753803) + (.1)^3 e^{-.2} = -1.636688875, \\
 k_{21} &= f(x_1 + h/2, y_1 + hk_{11}/2) = f(.15, .818753803 + (.05)(-1.636688875)) \\
 &= f(.15, .736919359) = -2(.736919359) + (.15)^3 e^{-.3} = -1.471338457, \\
 k_{31} &= f(x_1 + h/2, y_1 + hk_{21}/2) = f(.15, .818753803 + (.05)(-1.471338457)) \\
 &= f(.15, .745186880) = -2(.745186880) + (.15)^3 e^{-.3} = -1.487873498, \\
 k_{41} &= f(x_1 + h, y_1 + hk_{31}) = f(.2, .818753803 + (.1)(-1.487873498)) \\
 &= f(.2, .669966453) = -2(.669966453) + (.2)^3 e^{-.4} = -1.334570346, \\
 y_2 &= y_1 + \frac{h}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41}), \\
 &= .818753803 + \frac{.1}{6}(-1.636688875 + 2(-1.471338457) + 2(-1.487873498) - 1.334570346) \\
 &= .670592417.
 \end{aligned}$$

Η μέθοδος Runge-Kutta είναι επαρκώς ακριβής για τις περισσότερες εφαρμογές.

Παράδειγμα 4.4.2 Στον πίνακα (4.12) βλέπουμε τα αποτελέσματα που παίρνουμε χρησιμοποιώντας τη Runge-Kutta με μέγεθος βήματος $h = 0.1$ και $h = 0.05$. Βρίσκουμε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$y' + 2y = x^3 e^{-2x}, \quad y(0) = 1$$

για $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$. Παρατηρούμε ότι, συγκριτικά μας δίνει αντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές με αυτές που λαμβάνονται με τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler στο Παράδειγμα (4.3.2), και τις τιμές για την ακριβή λύση του.

$$y = \frac{e^{-2x}}{4}(x^4 + 4).$$

Τα αποτελέσματα που λαμβάνονται με τη μέθοδο Runge-Kutta είναι σαφώς καλύτερα από εκείνα τα οποία λαμβάνονται από τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler, στην πραγματικότητα

τα αποτελέσματα που λαμβάνονται με τη μέθοδο του Runge-Kutta με $h = 0.1$ είναι καλύτερα από εκείνα τα οποία λαμβάνονται με την Βελτιωμένη μέθοδο του Euler με $h = 0.05$.

Πίνακας 4.12: Αριθμητική λύση του $y' + 2y = x^3 e^{-2x}$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο Runge-Kutta και τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler .

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	Exact
0.0	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
0.1	0.820040937	0.819050572	0.818753803	0.818751370	0.818751221
0.2	0.672734445	0.671086455	0.670592417	0.670588418	0.670588174
0.3	0.552597643	0.550543878	0.549928221	0.549923281	0.549922980
0.4	0.455160637	0.452890616	0.452210430	0.452205001	0.452204669
0.5	0.376681251	0.374335747	0.373633492	0.373627899	0.373627557
0.6	0.313970920	0.311652239	0.310958768	0.310953242	0.310952904
0.7	0.264287611	0.262067624	0.261404568	0.261399270	0.261398947
0.8	0.225267702	0.223194281	0.222575989	0.222571024	0.222570721
0.9	0.194879501	0.192981757	0.192416882	0.192412317	0.192412038
1.0	0.171388070	0.169680673	0.169173489	0.169169356	0.169169104
	Improved Euler		Runge-Kutta		Exact

Παράδειγμα 4.4.3 Ο πίνακας (4.13) δείχνει ανάλογα αποτελέσματα για το μη γραμμικό ΠΑΤ

$$y' = -2y^2 + xy + x^2, \quad y(0) = 1.$$

Συγκρίνουμε με τα αποτελέσματα της Βελτιωμένης μεθόδου του Euler του παραδείγματος (3).

Παράδειγμα 4.4.4 Ο πίνακας (4.14) δείχνει τα αποτελέσματα που λαμβάνονται εφαρμόζοντας τη μέθοδο του Runge-Kutta στο ΠΑΤ

$$y' - 2xy = 1, \quad y(0) = 3,$$

το οποίο μελετάμε στο παράδειγμα (4.2.4) και (4.3.4).

4.4 Ασκήσεις προς επίλυση

Οι περισσότερες από τις ακόλουθες αριθμητικές ασκήσεις περιλαμβάνουν τα προβλήματα των αρχικών τιμών που μελετώνται στις ασκήσεις των προηγούμενων ενοτήτων. Αυτό το κάνουμε για καθαρά διδακτικούς λόγους, ώστε να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα που λαμβάνετε εδώ με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που λαμβάνονται σε εκείνες τις ενότητες.

Πίνακας 4.13: Αριθμητική λύση του $y' = -2y^2 + xy + x^2$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο Runge-Kutta και τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler .

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	“Exact”
0.0	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000	1.000000000
0.1	0.840500000	0.838288371	0.837587192	0.837584759	0.837584494
0.2	0.733430846	0.730556677	0.729644487	0.729642155	0.729641890
0.3	0.661600806	0.658552190	0.657582449	0.657580598	0.657580377
0.4	0.615961841	0.612884493	0.611903380	0.611901969	0.611901791
0.5	0.591634742	0.588558952	0.587576716	0.587575635	0.587575491
0.6	0.586006935	0.582927224	0.581943210	0.581942342	0.581942225
0.7	0.597712120	0.594618012	0.593630403	0.593629627	0.593629526
0.8	0.626008824	0.622898279	0.621908378	0.621907553	0.621907458
0.9	0.670351225	0.667237617	0.666251988	0.666250942	0.666250842
1.0	0.730069610	0.726985837	0.726017378	0.726015908	0.726015790
	Improved Euler		Runge-Kutta		“Exact”

Πίνακας 4.14: Αριθμητική λύση του $y' - 2xy = 1$, $y(0) = 3$, με τη μέθοδο Runge-Kutta

x	$h = 0.2$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	“Exact”
0.0	3.000000000	3.000000000	3.000000000	3.000000000
0.2	3.327846400	3.327851633	3.327851952	3.327851973
0.4	3.966044973	3.966058535	3.966059300	3.966059348
0.6	5.066996754	5.067037123	5.067039396	5.067039535
0.8	6.936534178	6.936690679	6.936700320	6.936700945
1.0	10.184232252	10.184877733	10.184920997	10.184923955
1.2	16.064344805	16.066915583	16.067098699	16.067111677
1.4	27.278771833	27.288605217	27.289338955	27.289392347
1.6	49.960553660	49.997313966	50.000165744	50.000377775
1.8	98.834337815	98.971146146	98.982136702	98.982969504
2.0	211.393800152	211.908445283	211.951167637	211.954462214

Στις ασκήσεις (1)-(5) χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Runge-Kutta για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του εκάστοτε ΠΑΤ στα σημεία $x_i = x_0 + ih$, όπου x_0 είναι το σημείο της αρχικής συνθήκης και $i = 1, 2$.

- $y' = 2x^2 + 3y^2 - 2$, $y(2) = 1$; $h = 0.05$
- $y' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$, $y(0) = 1$; $h = 0.1$
- $y' + 3y = x^2 - 3xy + y^2$, $y(0) = 2$; $h = 0.05$

4. $y' = \frac{1+x}{1-y^2}$, $y(2) = 3$; $h = 0.1$
5. $y' + x^2y = \sin xy$, $y(1) = \pi$; $h = 0.2$
6. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Runge-Kutta με μέγεθος βήματος $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$y' + 3y = 7e^{4x}, \quad y(0) = 2,$$

για $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$. Συγκρίνετε αυτές τις κατά προσέγγιση τιμές με τις τιμές της ακριβούς λύσης $y = e^{4x} + e^{-3x}$, και με τις μεθόδους των προηγούμενων ενοτήτων. Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σ' έναν πίνακα.

7. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Runge-Kutta με μέγεθος βήματος $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{3}{x^3} + 1, \quad y(1) = 1$$

για $x = 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \dots, 2.0$. Συγκρίνετε αυτές τις κατά προσέγγιση τιμές με τις τιμές της ακριβούς λύσης

$$y = \frac{1}{3x^2}(9 \ln x + x^3 + 2),$$

και με τις μεθόδους των προηγούμενων ενοτήτων. Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σ' έναν πίνακα.

8. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Runge-Kutta με μέγεθος βήματος $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$(3y^2 + 4y)y' + 2x + \cos x = 0, \quad y(0) = 1,$$

για $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$. Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σ' έναν πίνακα.

9. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Runge-Kutta με μέγεθος βήματος $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$y' + \frac{(y+1)(y-1)(y-2)}{x+1} = 0, \quad y(1) = 0,$$

για $x = 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \dots, 2.0$.

10. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Runge-Kutta και την Βελτιωμένη μέθοδο του Euler με μέγεθος βήματος $h = 0.1$, $h = 0.05$, και $h = 0.025$ για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του ΠΑΤ

$$y' + 3y = e^{-3x}(1 - 4x + 3x^2 - 4x^3), \quad y(0) = -3$$

για $x = 0, 0.1, 0.2, 0.3, \dots, 1.0$. Συγκρίνετε αυτά με τις κατά προσέγγιση τιμές με τις τιμές της ακριβούς λύσης $y = -e^{-3x}(3 - x + 2x^2 - x^3 + x^4)$. Παρουσιάστε τα απο-

τελέσματά σας σ' έναν πίνακα. Αντιλαμβάνεστε κάτι ιδιαίτερο με τα αποτελέσματα; Εξηγήστε

Τα γραμμικά προβλήματα των αρχικών τιμών στις Ασκήσεις (11)-(16) δεν μπορούν να λυθούν ακριβώς με απλές στοιχειώδεις πράξεις. Σε κάθε άσκηση χρησιμοποιήστε τη μέθοδο Runge-Kutta και την Βελτιωμένη μέθοδο του Euler με το δοσμένο μέγεθος βήματος για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του εκάστοτε ΠΑΤ σε 11 ισαπέχοντα σημεία (συμπεριλαμβανομένων των τελικών σημείων) στο διάστημα.

Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σ' έναν πίνακα. Αντιλαμβάνεστε κάτι ιδιαίτερο με τα αποτελέσματα; Εξηγήστε.

$$11. \quad y' - 2y = \frac{1}{1+x^2}, \quad y(2) = 2; \quad h = 0.1, 0.05, 0.025 \text{ στο } [2, 3]$$

$$12. \quad y' + 2xy = x^2, \quad y(0) = 3; \quad h = 0.2, 0.1, 0.05 \text{ στο } [0, 2]$$

$$13. \quad y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x^2}, \quad y(1) = 2; \quad h = 0.2, 0.1, 0.05 \text{ στο } [1, 3]$$

$$14. \quad y' + y = \frac{e^{-x} \tan x}{x}, \quad y(1) = 0; \quad h = 0.05, 0.025, 0.0125 \text{ στο } [1, 1.5]$$

$$15. \quad y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{e^x}{(1+x^2)^2}, \quad y(0) = 1; \quad h = 0.2, 0.1, 0.05 \text{ στο } [0, 2]$$

$$16. \quad xy' + (x+1)y = e^{x^2}, \quad y(1) = 2; \quad h = 0.05, 0.025, 0.0125 \text{ στο } [1, 1.5]$$

Στις Ασκήσεις (17)-(19) χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Runge-Kutta και την Βελτιωμένη μέθοδο του Euler με το δοσμένο μέγεθος βήματος για να βρείτε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης του δεδομένου προβλήματος τιμών πρόβλημα σε 11 ισαπέχοντα σημεία (συμπεριλαμβανομένων των τελικών σημείων) στο το διάστημα.

Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σ' έναν πίνακα. Αντιλαμβάνεστε κάτι ιδιαίτερο με τα αποτελέσματα; Εξηγήστε.

$$17. \quad y' + 3y = xy^2(y+1), \quad y(0) = 1; \quad h = 0.1, 0.05, 0.025 \text{ στο } [0, 1]$$

$$18. \quad y' - 4y = \frac{x}{y^2(y+1)}, \quad y(0) = 1; \quad h = 0.1, 0.05, 0.025 \text{ στο } [0, 1]$$

$$19. \quad y' + 2y = \frac{x^2}{1+y^2}, \quad y(2) = 1; \quad h = 0.1, 0.05, 0.025 \text{ στο } [2, 3]$$

20. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο του Runge-Kutta με μέγεθος βήματος $h = 0.1$, $h = 0.05$ και $h = 0.025$ τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσης

$$y' = -x^2y - xy^2, \quad y(1) = 1$$

για $x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$. Παρουσιάστε τα αποτελέσματά σας σ' έναν πίνακα.

4.5 Σύγκριση Μεθόδων Αριθμητικών Μεθόδων

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση των προβλημάτων αρχικών τιμών, όπως τη *Μέθοδο του Euler* (κυρίως για εκπαιδευτικούς σκοπούς), τη *Βελτιωμένη Μέθοδο του Euler*, τη *Μέθοδο Μέσου Σημείου*, τη *Μέθοδο του Heun* και τη *Runge-Kutta Μέθοδο*.

Στις προηγούμενες ενότητες μελετήσαμε πειραματικά το συνολικό σφάλμα αποκοπής των μεθόδων και τον συσχετισμό του με το μέγεθος του βήματος ώστε να έχουμε αποτελέσματα αξιόπιστα. Όμως ο κίνδυνος μείωσης του μεγέθους του βήματος, μπορεί να αυξήσει τα σφάλματα στρογγυλοποίησης (roundoff) στο σημείο όπου η ακρίβεια θα επιδεινωθεί αντί να βελτιωθεί. Έτσι καταφύγαμε σε πιο πολύπλοκες μεθόδους με πολλούς υπολογισμούς του δεξιού μέρους της f που είναι και το πιο ακριβό (κοστοβόρο) μέρος του υπολογισμού.

Συνεπώς, εμείς θέλουμε μεθόδους οι οποίες δίνουν καλά αποτελέσματα για ένα μικρό αριθμό υπολογισμών της f . Αυτό είναι που μας παρακινεί να κοιτάζουμε για αριθμητικές μεθόδους καλύτερες από τη μέθοδο του Euler.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα αυτή τη σύγκριση παρουσιάζουμε το επόμενο παράδειγμα.

Υποθέτουμε ότι θέλουμε τις κατά προσέγγιση τιμές της μεθόδου του Euler στο ΠΑΤ

$$y' = y, \quad y(0) = 1, \quad (\text{με λύση } y = e^x)$$

στο $[0, 1]$, με $h = 1/12, 1/24$ και $1/48$, αντίστοιχα.

Εφόσον κάθε βήμα στη μέθοδο του Euler απαιτεί ένα υπολογισμό της f , ο αριθμός των υπολογισμών των f σε κάθε μία από αυτές τις προσπάθειες είναι $n = 12, 24$, και 48 , αντίστοιχα. Η δεύτερη στήλη του Πίνακα (4.15) δείχνει τα αποτελέσματα για τη μέθοδο του Euler. Η πρώτη στήλη του πίνακα υποδηλώνει τον αριθμό των υπολογισμών των f που απαιτούνται για να λάβουμε την προσέγγιση, και η τελευταία στήλη περιέχει την τιμή των e η οποία στρογγυλοποιείται σε δέκα σημαντικά στοιχεία.

Αντίστοιχα η Βελτιωμένη μέθοδος του Euler απαιτεί δύο υπολογισμούς της f σε κάθε βήμα. Έχουμε εφαρμόσει αυτή τη μέθοδο με βήματα $h = 1/6, 1/12$, και $1/24$. Ο απαιτούμενος αριθμός των υπολογισμών της f είναι $12, 24$, και 48 , όπως και στις τρεις εφαρμογές της μεθόδου του Euler. Ωστόσο, αν δούμε την τελευταία στήλη του Πίνακα (4.15) η προσέγγιση που λαμβάνεται με την Βελτιωμένη μέθοδος του Euler με μόνο 12 υπολογισμούς της f είναι καλύτερη από ό,τι η προσέγγιση που λαμβάνεται με τη μέθοδο του Euler με 48 υπολογισμούς.

Τέλος θα συγκρίνουμε με τη μέθοδο Runge-Kutta η οποία απαιτεί τέσσερεις υπολογισμούς της f σε κάθε βήμα. Έχουμε εφαρμόσει αυτή τη μέθοδο με $h = 1/3, 1/6$, και $1/12$. Ο απαιτούμενος αριθμός των υπολογισμών της f είναι και πάλι $12, 24$, και 48 , όπως στις τρεις εφαρμογές της μεθόδου του Euler και στη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler. Ωστόσο, μπορούμε να δούμε στην τέταρτη στήλη του Πίνακα (4.15) ότι η προσέγγιση που λαμβάνεται με τη μέθοδο Runge-Kutta με μόνο 12 υπολογισμούς της f είναι καλύτερη από την προσέγγιση η οποία λαμβάνεται με την Βελτιωμένη μέθοδος Euler με 48 υπολογισμούς.

Βιβλιογραφία

Πίνακας 4.15: Αριθμητική λύση του $y' = y$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο Euler, Βελτιωμένη Euler, Runge-Kutta και με λύση $y = e^x$.

n	Euler	Improved Euler	Runge-Kutta	Exact
12	2.613035290	2.707188994	2.718069764	2.718281828
24	2.663731258	2.715327371	2.718266612	2.718281828
48	2.690496599	2.717519565	2.718280809	2.718281828

M. Abramowitz & I.A. Stegun, I.A. 1972, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York.

U.M. Ascher, & L.R. Petzold, 1998 *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. SIAM, Philadelphia.

J.C. Butcher, 2003 *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley, Chichester (2003)

K. Dekker, & J.G. Verwer, 1984 *Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*. North-Holland, Amsterdam.

Euler, L. 1768 *Institutionum calculi integralis*. Volumen Primum, Opera Omnia XI (1768)

E. Hairer, S. P. Nørsett, & G. Wanner, 1993 *Solving Ordinary Differential Equations*, vol. I. Springer, Berlin.

P. Hartman, 1982, *Ordinary Differential Equations*. Birkhäuser, Boston/Basel/Stuttgart.

J. D. Lambert 1991, *Numerical Methods for Ordinary Differential Systems*. New York: Wiley.

E. Isaacson & H. B. Keller, 1966 *Analysis of Numerical Methods*. New York: Wiley.

J. M. Ortega & W. G. Poole 1981, *An Introduction to Numerical Methods for Differential Equations*. Marshfield, MA: Pitman.

J. D. Pryce 1993, *Numerical Solution of Sturm–Liouville Problems*. Oxford: Clarendon.

L. F. Shampine, 1994, *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. New York: Chapman & Hall.

L. F. Shampine & M. K. Gordon, 1975, *Computer Solution of Ordinary Differential Equations*. San Francisco: Freeman.

Κεφάλαιο 5

Γραμμικές Βαθμωτές ΔΕ

Στο παρόν κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τη θεωρία όσο και με τη μεθοδολογία επίλυσης βαθμωτών γραμμικών ΔΕ 2ης και n -στής τάξης. Θα μελετήσουμε, ως επί το πλείστον, γραμμικά προβλήματα. Η θεωρία καθώς και η μεθοδολογία επίλυσης των εξισώσεων δεύτερης τάξης, δύναται στις περισσότερες των περιπτώσεων να γενικευθούν στις εξισώσεις n -στής τάξης. Στην περίπτωση των βαθμωτών ΔΕ 1ης-τάξης, είχαμε δει πώς επιλύεται το γραμμικό ΠΑΤ και πως η λύση του εν τέλει λαμβάνει κλειστή μορφή. Δυσκολίες είχαμε στην επίλυση τόσο μη γραμμικών όσο και γραμμικών προβλημάτων. Όπως θα δούμε στη συνέχεια οι δυσκολίες στην επίλυση βαθμωτών ΔΕ ανώτερης τάξης αρχίζουν ήδη από τις γραμμικές δεύτερης τάξης, όπου αν κάποια από αυτές επιλύεται, τότε αυτό αποτελεί πραγματι ένα ευχάριστο ατύχημα. Υπάρχει πλειάδα περιωνύμων γραμμικών ΔΕ, αναφέρουμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

- (i) Αρμονική ταλάντωση $y'' + \omega^2 y = 0$
 - (ii) Εξίσωση Chebyshev $(1 - x^2)y'' - xy' + a^2 y = 0$
 - (iii) Εξίσωση Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + a(a + 1)y = 0$
 - (iv) Εξίσωση Bessel $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$
 - (v) Εξίσωση Airy $y'' - xy = 0$
 - (vi) Εξίσωση Hermite $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$
 - (vii) Εξίσωση Euler $x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y^{(1)} + a_0 y = 0$
- Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση της θεωρίας ΔΕ 2ης-τάξης της μορφής

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x).$$

Τέτοιες εξισώσεις καλούνται *γραμμικές*. Όπως και στις ΔΕ 1ης-τάξης (Α) καλούνται *ομογενείς* αν $F \equiv 0$ ή *μη ομογενείς* αν $F \neq 0$.

Στο Εδάφιο 5.1 θα αναφερθούμε στην θεωρία των ομογενών γραμμικών ΔΕ και θα την γενικεύσουμε για ΔΕ n -τάξης.

Στο Εδάφιο 5.2.1 θα ασχοληθούμε με ΔΕ 2ής-τάξης με σταθερούς συντελεστές $ay'' + by' + cy = 0$, όπου a, b , και c είναι σταθεροί ($a \neq 0$). Στο Εδάφιο 5.1.2 θα μελετήσουμε τη γενική θεωρία ΔΕ n -οστής τάξης με σταθερούς συντελεστές

Εδάφιο 5.3 παρουσιάζουμε τη θεωρία των μη ομογενών ΔΕ 2ης-τάξης και τη *μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών* στο εδάφιο 5.3.2 για την επίλυση ΔΕ της μορφής $ay'' + by' +$

$cy = F(x)$, όπου a , b , και c είναι σταθεροί και F έχει συγκεκριμένη μορφή που προέρχεται από τις εφαρμογές.

Στο εδάφιο 5.4 θα ασχοληθούμε με τον *υποβιβασμό τάξης*, μια τεχνική που βασίζεται στην ιδέα της μεταβολής των παραμέτρων, και μας επιτρέπει να βρούμε την γενική λύση μιας μη ομογενούς ΔΕ 2ης-τάξης όταν γνωρίζουμε μια μη τετριμμένη λύση της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ.

Στο εδάφιο 5.5 θα μελετήσουμε την μέθοδο *μεταβολής των παραμέτρων*, και μας επιτρέπει να βρούμε την γενική λύση μιας μη ομογενούς ΔΕ 2ης-τάξης όταν γνωρίζουμε δύο μη τετριμμένες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ και θα επεκτείνουμε την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών και της μεταβολής των παραμέτρων για γραμμικές ΔΕ n -στής τάξης.

Στο εδάφιο 5.6 θα παρουσιάσουμε φυσικές εφαρμογές των ΔΕ 2ης-τάξης από μηχανικές και ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

5.1 Ομογενείς Γραμμικές ΔΕ

5.1.1 Ομογενείς Γραμμικές ΔΕ 2ης-τάξης

Μια ΔΕ 2ης-τάξης καλείται *γραμμική*, αν δύναται να γραφεί στη μορφή

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \quad (5.1)$$

Θα λέμε τη συνάρτηση f *συνάρτηση εξαναγκασμού*, διότι στις φυσικές εφαρμογές όπως θα δούμε στο εδάφιο 5.6 σχετίζεται με τη δύναμη που ασκείται σε φυσικά προβλήματα τα οποία μαθηματικά περιγράφονται με ΔΕ. Θα λέμε ότι η ΔΕ (5.1) είναι *ομογενής*, αν $f \equiv 0$ ή *μη ομογενής* αν $f \not\equiv 0$. Συνεπώς επειδή οι ορισμοί είναι παρόμοιοι με αυτούς που παρουσιάστηκαν στο εδάφιο 2.1 για γραμμικές ΔΕ 1ης τάξης

$$y' + p(x)y = f(x), \quad (5.2)$$

είναι φυσικό να περιμένουμε ομοιότητες στον τρόπο επίλυσης των (5.1) και (5.2). Όμως, η επίλυση της ΔΕ (5.1) είναι πιο δύσκολο θέμα από την επίλυση της (5.2). Για παράδειγμα, αφού το Θεώρημα 2.1.1 μας παρέχει ένα τύπο για την επίλυση της ΔΕ (5.2) στην περίπτωση που $f \equiv 0$ και το Θεώρημα 2.1.2 δίνει τον αντίστοιχο τύπο για την μη ομογενή ΔΕ ($f \not\equiv 0$), δεν υπάρχουν γενικοί τύποι για την επίλυση της ΔΕ (5.1). Θα πρέπει, λοιπόν, να είμαστε χαρούμενοι αν βρούμε έναν αντίστοιχο γενικό τύπο για τις ΔΕ 2ης-τάξης.

Στο εδάφιο 2.1 θεωρήσαμε πρώτα την ομογενή ΔΕ $y' + p(x)y = 0$ και εν συνεχεία, με χρήση μιας μη τετριμμένης λύσης της ομογενούς ΔΕ προσδιορίσαμε μια λύση της μη

ομογενούς. $y' + p(x)y = f(x)$. Στην περίπτωση των ΔΕ 2ης-τάξης η διαδικασία δεν είναι τόσο απλή και χρειάζεται να λύσουμε την ομογενή ΔΕ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5.3)$$

με σκοπό να λύσουμε την μη ομογενή (5.1). Το παρόν εδάφιο επικεντρώνεται στην επίλυση της ΔΕ (5.3).

Το επόμενο Θεώρημα μας δίνει επαρκείς συνθήκες για την ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων ΠΑΤ (5.3).

Θεώρημα 5.1.1 *Υποθέτουμε ότι p και q είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ανοικτό διάστημα (a, b) , έστω x_0 εσωτερικό του (a, b) , και k_0, k_1 αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί. Τότε το ΠΑΤ*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1$$

έχει μοναδική λύση στο (a, b) .

Λόγω ότι η $y \equiv 0$ είναι μια προφανής λύση του (5.3) θα τη λέμε *τετριμμένη* λύση. Οποιαδήποτε άλλη λύση καλείται *μη τετριμμένη*. Υπο τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 5.1.1, η μόνη λύση του ΠΑΤ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0$$

στο (a, b) είναι η τετριμμένη λύση.

Στα επόμενα παράδειγματα, δεν θα πρέπει να επικεντρωθείται στον τρόπο επίλυσης των ΔΕ (αφού θα το συζητήσουμε αναλυτικά στη συνέχεια).

Παράδειγμα 5.1.1 Έστω ω είναι θετική σταθερά. Οι συντελεστές του y' και y στην

$$y'' + \omega^2 y = 0 \quad (5.4)$$

είναι οι σταθερές συναρτήσεις $p \equiv 0$ και $q \equiv \omega^2$, που είναι συνεχείς στο $(-\infty, \infty)$. Συνεπώς το Θεώρημα 5.1.1 συνεπάγεται ότι κάθε ΠΑΤ για την (5.4) έχει μοναδική λύση στο $(-\infty, \infty)$.

(α') Επιβεβαιώστε ότι $y_1 = \cos \omega x$ και $y_2 = \sin \omega x$ είναι λύσεις της (5.4) στο $(-\infty, \infty)$.

(β') Επιβεβαιώστε ότι αν c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές τότε $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ είναι λύση της (5.4) στο $(-\infty, \infty)$.

(γ') Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3. \quad (5.5)$$

Λύση (α) Αν $y_1 = \cos \omega x$, τότε $y_1' = -\omega \sin \omega x$ και $y_1'' = -\omega^2 \cos \omega x = -\omega^2 y_1$, οπότε $y_1'' + \omega^2 y_1 = 0$. Αν $y_2 = \sin \omega x$ τότε, $y_2' = \omega \cos \omega x$ και $y_2'' = -\omega^2 \sin \omega x = -\omega^2 y_2$, οπότε $y_2'' + \omega^2 y_2 = 0$.

(β) Αν

$$y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x \quad (5.6)$$

τότε

$$y' = \omega(-c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x) \quad (5.7)$$

και

$$y'' = -\omega^2(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x),$$

οπότε

$$\begin{aligned} y'' + \omega^2 y &= -\omega^2(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) + \omega^2(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) \\ &= c_1 \omega^2(-\cos \omega x + \cos \omega x) + c_2 \omega^2(-\sin \omega x + \sin \omega x) = 0 \end{aligned}$$

για όλα x . Συνεπώς, $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ είναι λύση της (5.4) στο $(-\infty, \infty)$.

(γ) Για να λύσουμε την (5.5), πρέπει να επιλέξουμε c_1 και c_2 στην (5.6), έτσι ώστε $y(0) = 1$ και $y'(0) = 3$. Θέτοντας $x = 0$ στην (5.6) και (5.7) έχουμε ότι $c_1 = 1$ και $c_2 = 3/\omega$. Οπότε

$$y = \cos \omega x + \frac{3}{\omega} \sin \omega x$$

είναι μοναδική λύση της (5.5) στο $(-\infty, \infty)$. ■

Το Θεώρημα 5.1.1 συνεπάγεται ότι αν k_0 και k_1 είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί, τότε το ΠΑΤ

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1 \quad (5.8)$$

έχει μοναδική λύση στο (a, b) το οποίο περιέχει x_0 , έτσι ώστε οι P_0, P_1 , και P_2 είναι συνεχείς και P_0 δεν μηδενίζεται στο (a, b) . Μπορούμε να γράψουμε τη ΔΕ (5.8) ως

$$y'' + \frac{P_1(x)}{P_0(x)}y' + \frac{P_2(x)}{P_0(x)}y = 0$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.1.1 με $p = P_1/P_0$ και $q = P_2/P_0$. Αφήνουμε στον αναγνώστη την επίλυση του παρακάτω παραδείγματος.

Παράδειγμα 5.1.2 Η ΔΕ

$$x^2 y'' + x y' - 4y = 0 \quad (5.9)$$

έχει τη μορφή (5.8), με $P_0(x) = x^2$, $P_1(x) = x$, και $P_2(x) = -4$, όλες συνεχείς συναρτήσεις στο $(-\infty, \infty)$. Όμως $P_0(0) = 0$ πρέπει να θεωρήσουμε λύσεις της (5.9) στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$. Επίσης P_0 δεν έχει ρίζες σε αυτά τα διαστήματα, το Θεώρημα 5.1.1 συνεπάγεται ότι το ΠΑΤ

$$x^2 y'' + x y' - 4y = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1$$

έχει μοναδική λύση στο $(0, \infty)$ αν $x_0 > 0$, ή στο $(-\infty, 0)$ αν $x_0 < 0$.

(α') Δείξτε ότι $y_1 = x^2$ είναι λύση της (5.9) στο $(-\infty, \infty)$ και $y_2 = 1/x^2$ είναι λύση της (5.9) στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$.

(β') Δείξτε ότι αν c_1 και c_2 είναι οποιαδήποτε σταθερές $y = c_1x^2 + c_2/x^2$ είναι λύση της (5.9) στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$.

(γ') Λύστε το ΠΑΤ

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0. \quad (5.10)$$

(δ') Λύστε το ΠΑΤ

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 0. \quad (5.11)$$

Η Γενική Λύση της Ομογενούς ΔΕ 2ης τάξης

Αν y_1 και y_2 ορίζονται στο διάστημα (a, b) και c_1, c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές τότε

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των y_1 και y_2 . Για παράδειγμα, $y = 2 \cos x + 7 \sin x$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $y_1 = \cos x$ και $y_2 = \sin x$, με $c_1 = 2$ και $c_2 = 7$.

Με το επόμενο θεώρημα διατυπώνουμε τα αποτελέσματα των Παραδειγμάτων 5.1.1, και 5.1.2.

Θεώρημα 5.1.2 Αν y_1 και y_2 είναι λύσεις της ομογενούς ΔΕ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5.12)$$

στο (a, b) , τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \quad (5.13)$$

των y_1 και y_2 είναι, επίσης, λύση της ΔΕ (5.12) στο (a, b) .

Απόδειξη Αν

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

τότε

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2' \quad \text{και} \quad y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(x)(c_1y_1' + c_2y_2') + q(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

αφού y_1 και y_2 είναι λύσεις της (5.12). ■

Θα λέμε ότι το $\{y_1, y_2\}$ είναι ένα *θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (5.12) στο (a, b)* αν κάθε λύση της (5.12) στο (a, b) δύναται να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των y_1 και y_2 όπως

στην (5.13). Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι η (5.13) είναι *γενική λύση της* (5.12) στο (a, b) .

Γραμμική Ανεξαρτησία

Πρέπει να καθορίσουμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε το σύνολο $\{y_1, y_2\}$ λύσεων της (5.12) να είναι ένα θεμελιώδες σύνολο.

Θα λέμε ότι δύο λύσεις y_1 και y_2 ορισμένες στο διάστημα (a, b) είναι *γραμμικά ανεξάρτητες στο* (a, b) , αν η καθεμία δεν είναι πολλαπλάσιο της άλλης.

Θεώρημα 5.1.3 *Υποθέτουμε ότι p και q είναι συνεχείς στο (a, b) . Τότε το σύνολο $\{y_1, y_2\}$ λύσεων της*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5.14)$$

στο (a, b) είναι ένα θεμελιώδες σύνολο, αν και μόνο αν $\{y_1, y_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο (a, b) .

Ας εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.1.3 στις λύσεις των Παραδειγμάτων 5.1.1, and 5.1.2.

Παράδειγμα 5.1.3

(α') Αφού $\cos \omega x / \sin \omega x = \cot \omega x$ δεν είναι σταθερά από το Θεώρημα 5.1.3 έχουμε ότι $y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x$ είναι η γενική λύση της ΔΕ $y'' + \omega^2 y = 0$ στο $(-\infty, \infty)$.

(β') Αφού $x^2/x^{-2} = x^4$ δεν είναι σταθερά, από το Θεώρημα 5.1.3 έχουμε ότι $y = c_1 x^2 + c_2/x^2$ είναι η γενική λύση της $x^2 y'' + x y' - 4y = 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$.

Η ορίζουσα Wronski και ο τύπος του Abel

Θα αποδείξουμε το θεώρημα 5.1.3, αλλά πριν ας δούμε τι πρέπει να ικανοποιεί το $\{y_1, y_2\}$ ώστε να είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (5.14) στο (a, b) . Έστω x_0 είναι ένα αυθαίρετο εσωτερικό σημείο του (a, b) , και υποθέτουμε ότι y είναι μια αυθαίρετη λύση της (5.14) στο (a, b) . Τότε, η y είναι μοναδική λύση του ΠΑΤ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1; \quad (5.15)$$

όπου, k_0 και k_1 προκύπτουν από τις y και y' για x_0 . Επιπλέον, k_0 και k_1 μπορεί να είναι οποιοδήποτε πραγματικοί αριθμοί από το Θεώρημα 5.1.1, δηλ. η (5.15) έχει μια λύση που δεν εξαρτάται από την επιλογή των k_0 και k_1 . Συνεπώς $\{y_1, y_2\}$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (5.14) στο (a, b) αν και μόνο αν είναι δυνατόν να γράψουμε τη λύση του ΠΑΤ (5.15) ως $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$, το οποίο είναι ισοδύναμο να απαιτήσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= k_0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= k_1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

έχει μια λύση (c_1, c_2) για κάθε επιλογή (k_0, k_1) . Επιλύοντας το σύστημα (5.16), έχουμε

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{y_2'(x_0)k_0 - y_2(x_0)k_1}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0)} \\ c_2 &= \frac{y_1(x_0)k_1 - y_1'(x_0)k_0}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0)}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

ανεξάρτητα από την επιλογή των k_0 και k_1 , και επιπλέον οι συναρτήσεις y_1 και y_2 πρέπει να ικανοποιούν την

$$y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0. \quad (5.18)$$

Θεώρημα 5.1.4 Υποθέτουμε p και q είναι συνεχείς στο (a, b) , y_1 και y_2 είναι λύσεις της ΔΕ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5.19)$$

στο (a, b) , και ορίζουμε

$$W(y_1, y_2) = y_1y_2' - y_1'y_2. \quad (5.20)$$

Εστω x_0 ένα σημείο εσωτερικό στο (a, b) . Τότε

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^x p(t) dt}, \quad a < x < b. \quad (5.21)$$

η W δεν έχει ρίζες στο (a, b) ή $W \equiv 0$ στο (a, b) .

Απόδειξη Διαφορίζοντας την (5.20), έχουμε

$$W' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1''y_2 - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1''y_2. \quad (5.22)$$

Οι y_1 και y_2 ικανοποιούν την (5.19),

$$y_1'' = -py_1' - qy_1 \quad \text{and} \quad y_2'' = -py_2' - qy_2.$$

Αντικαθιστώντας στην (5.22) έχουμε

$$\begin{aligned} W' &= -y_1(py_2' + qy_2) + y_2(py_1' + qy_1) \\ &= -p(y_1y_2' - y_2y_1') - q(y_1y_2 - y_2y_1) \\ &= -p(y_1y_2' - y_2y_1') = -pW. \end{aligned}$$

Οπότε $W' + p(x)W = 0$; δηλ, W είναι λύση του ΠΑΤ

$$y' + p(x)y = 0, \quad y(x_0) = W(x_0).$$

Αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη να επιβεβαιώσει τη σχέση (5.21). Αν $W(x_0) \neq 0$, η (5.21) συνεπάγεται ότι W δεν έχει ρίζες στο (a, b) . Αν $W(x_0) = 0$, η (5.21) δίνει ότι $W(x) = 0$ για όλα τα x στο (a, b) . ■

Η συνάρτηση $W(y_1, y_2)$ που ορίστηκε στη (5.20) καλείται *ορίζουσα Wronski των $\{y_1, y_2\}$* . Η σχέση (5.21) καλείται *τύπος του Abel*.

Η ορίζουσα Wronski των $\{y_1, y_2\}$ μπορεί συνήθως να γραφτεί

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Οι σχέσεις (5.17) για c_1 και c_2 μπορούν να γραφούν

$$c_1 = \frac{1}{W(x_0)} \begin{vmatrix} k_0 & y_2(x_0) \\ k_1 & y_2'(x_0) \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{1}{W(x_0)} \begin{vmatrix} y_1(x_0) & k_0 \\ y_1'(x_0) & k_1 \end{vmatrix}.$$

Παράδειγμα 5.1.4 Επιβεβαιώστε τον τύπο του Abel για τις ακόλουθες ΔΕ με τις αντίστοιχες λύσεις από τα Παραδείγματα 5.1.1, and 5.1.2:

(α') $y'' + \omega^2 y = 0$; $y_1 = \cos \omega x$, $y_2 = \sin \omega x$

(β') $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$; $y_1 = x^2$, $y_2 = 1/x^2$

Λύση (α) Αφού $p \equiv 0$, μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τον τύπο του Abel δείχνοντας ότι η W είναι σταθερή, πράγματι

$$\begin{aligned} W(\cos x, \sin x) = W(x) &= \begin{vmatrix} \cos \omega x & \sin \omega x \\ -\omega \sin \omega x & \omega \cos \omega x \end{vmatrix} \\ &= \cos \omega x (\omega \cos \omega x) - (-\omega \sin \omega x) \sin \omega x \\ &= \omega (\cos^2 \omega x + \sin^2 \omega x) = \omega \end{aligned}$$

για όλα x .

(β) Υπολογίζοντας την ορίζουσα Wronski των $y_1 = x^2$ και $y_2 = 1/x^2$ έχουμε

$$W(x^2, 1/x^2) = \begin{vmatrix} x^2 & 1/x^2 \\ 2x & -2/x^3 \end{vmatrix} = x^2 \left(-\frac{2}{x^3}\right) - 2x \left(\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{4}{x}. \quad (5.23)$$

Για να επιβεβαιώσουμε τον τύπο του Abel γράφουμε τη ΔΕ

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = 0$$

όπου $p(x) = 1/x$. Αν x_0 και x είναι στο $(-\infty, 0)$ ή στο $(0, \infty)$ τότε

$$\int_{x_0}^x p(t) dt = \int_{x_0}^x \frac{dt}{t} = \ln \left(\frac{x}{x_0} \right),$$

ο τύπος του Abel γίνεται

$$\begin{aligned} W(x) &= W(x_0)e^{-\ln(x/x_0)} = W(x_0)\frac{x_0}{x} \\ &= -\left(\frac{4}{x_0}\right)\left(\frac{x_0}{x}\right) \quad \text{από (5.23)} \\ &= -\frac{4}{x}, \end{aligned}$$

το οποίο ταυτίζεται με (5.23). ■

Το επόμενο Θεώρημα συμπληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.3.

Θεώρημα 5.1.5 *Υποθέτουμε ότι p και q είναι συνεχείς συναρτήσεις στο ανοικτό διάστημα (a, b) , έστω y_1 και y_2 είναι λύσεις της ΔΕ*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5.24)$$

στο (a, b) , και $W = y_1y_2' - y_1'y_2$. Τότε y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο (a, b) , αν και μόνο αν η W δεν έχει ρίζες στο (a, b) .

Απόδειξη Πρώτα αποδεικνύουμε ότι $W(x_0) = 0$ για κάποιο x_0 στο (a, b) , τότε y_1 και y_2 είναι γραμμικά εξαρτημένες λύσεις στο (a, b) . Έστω I είναι ένα υποδιάστημα του (a, b) στο οποίο η y_1 δεν έχει ρίζες. (Εάν δεν υπάρχει τέτοιο υποδιάστημα, $y_1 \equiv 0$ στο (a, b) , οπότε y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες και έχουμε τελειώσει την απόδειξη.) Τότε y_2/y_1 ορίζεται στο I , και

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1y_2' - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{W}{y_1^2}. \quad (5.25)$$

Ομως, αν $W(x_0) = 0$, από το Θεώρημα 5.1.4 έχουμε ότι $W \equiv 0$ στο (a, b) . Οπότε η (5.25) δίνει $(y_2/y_1)' \equiv 0$, οπότε η $y_2/y_1 = c$ (σταθερή) στο I . Αυτό αποδεικνύει ότι $y_2(x) = cy_1(x)$ για όλα x στο I . Όμως θέλουμε να δείξουμε ότι $y_2 = cy_1(x)$ για όλα x στο (a, b) . Έστω $Y = y_2 - cy_1$. Τότε Y είναι μια λύση της (5.24) στο (a, b) τέτοια ώστε $Y \equiv 0$ στο I , και συνεπώς $Y' \equiv 0$ στο I . Συνακόλουθα, αν x_0 έχει επιλεγεί αυθαίρετα στο I , τότε Y είναι μια λύση του ΠΑΤ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0,$$

η οποία συνεπάγεται ότι $Y \equiv 0$ στο (a, b) , ακολουθώντας το Θεώρημα 5.1.1. Έτσι, $y_2 - cy_1 \equiv 0$ στο (a, b) , η οποία συνεπάγεται ότι y_1 και y_2 δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο (a, b) .

Τώρα υποθέτουμε ότι η W δεν έχει ρίζες στο (a, b) . Τότε y_1 δεν μπορεί να είναι ταυτοτικά μηδέν (a, b) και το I είναι υποδιάστημα του (a, b) στο y_1 δεν έχει ρίζες. Από την (5.25) έχουμε ότι y_2/y_1 δεν είναι σταθερή στο I , y_2 δεν είναι πολλαπλάσια της y_1 στο (a, b) .

Παρομοίως, αποδεικνύουμε ότι η y_1 δεν είναι πολλαπλάσια της y_2 στο (a, b) , διότι

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_2^2} = -\frac{W}{y_2^2}$$

σε κάθε υποδιάστημα του (a, b) όπου η y_2 δεν έχει ρίζες. ■

Μπορούμε να συμπληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.3. Από το Θεώρημα 5.1.5, δύο λύσεις y_1 και y_2 της (5.24) είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο (a, b) αν και μόνο αν η W δεν έχει ρίζες στο (a, b) . Από το Θεώρημα 5.1.4 και τα συνακόλουθα σχόλια, το σύνολο $\{y_1, y_2\}$ είναι ένα θεμελειώδες σύνολο της (5.24) αν και μόνο αν η W δεν έχει ρίζες στο (a, b) . Συνεπώς $\{y_1, y_2\}$ είναι θεμελειώδες σύνολο λύσεων για την (5.24) στο (a, b) αν και μόνο αν $\{y_1, y_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο (a, b) . ■

Το επόμενο θεώρημα συγκεντρώνει τις βασικές έννοιες που αναπτύξαμε στο εδάφιο.

Θεώρημα 5.1.6 *Υποθέτουμε ότι p και q είναι συνεχείς σε ανοικτό διάστημα (a, b) και y_1, y_2 είναι λύσεις της ΔΕ*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5.26)$$

στο (a, b) . Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες;

(α') Η γενική λύση της (5.26) στο (a, b) δίνεται από $y = c_1y_1 + c_2y_2$.

(β') $\{y_1, y_2\}$ αποτελεί θεμελιώδες σύνολο λύσεων για τη ΔΕ (5.26) στο (a, b) .

(γ') $\{y_1, y_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο (a, b) .

(δ') Η ορίζουσα Wronskin του $\{y_1, y_2\}$ είναι μη μηδενική σε εσωτερικό σημείο του (a, b) .

(ε') Η ορίζουσα Wronskin του $\{y_1, y_2\}$ είναι μη μηδενική σε όλα τα σημεία του (a, b) .

Εφαρμόζοντας το θεώρημα για τη ΔΕ

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

στο διάστημα (a, b) όπου P_0, P_1 , και P_2 είναι συνεχείς και P_0 δεν έχει ρίζες.

Αφήνουμε στον αναγνώστη την απόδειξη του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 5.1.7 *Υποθέτουμε $c \in (a, b)$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ μη μηδενικοί, και ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 5.1.6, επιπλέον υποθέτουμε ότι y_1 και y_2 είναι λύσεις της ΔΕ (5.26) έτσι ώστε*

$$\alpha y_1(c) + \beta y_1'(c) = 0 \quad \text{and} \quad \alpha y_2(c) + \beta y_2'(c) = 0. \quad (5.27)$$

Τότε $\{y_1, y_2\}$ δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητο στο (a, b) .

(Συχνά όταν γνωρίζουμε μια μη τετριμμένη λύση της ΔΕ $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, με χρήση του τύπου Abel μπορούμε να βρούμε μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη.)

Υποθέτουμε ότι p και q είναι συνεχείς συναρτήσεις και y_1 είναι μια λύση της ΔΕ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5.28)$$

$y_1 \neq 0$ στο (a, b) . Έστω $P(x) = \int p(x) dx$ είναι οποιαδήποτε παράγουσα της p στο (a, b) . Αποδεικνύεται ότι

(α') αν K είναι μια αυθαίρετη μη μηδενική σταθερά και η y_2 ικανοποιεί την σχέση

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = K e^{-P(x)} \quad (5.29)$$

στο (a, b) , τότε η y_2 ικανοποιεί επίσης τη ΔΕ (5.28) στο (a, b) , και $\{y_1, y_2\}$ αποτελεί θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (5.28) στο (a, b) .

(β') Από το (α) προκύπτει ότι αν $y_2 = u y_1$ όπου $u' = K \frac{e^{-P(x)}}{y_1^2(x)}$, τότε $\{y_1, y_2\}$ αποτελεί θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (5.28) στο (a, b) .

Επίσης όταν μας δίνεται το θεμελιώδες σύνολο λύσεων $\{y_1, y_2\}$ μιας ΔΕ μπορούμε να προσδιορίσουμε τη ΔΕ χρησιμοποιώντας την ορίζουσα Wronski. Πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι y_1 και y_2 είναι διπλά διαφορίσιμες συναρτήσεις στο (a, b) και η ορίζουσα Wronski W των $\{y_1, y_2\}$ δεν έχει ρίζες στο (a, b) τότε η εξίσωση:

$$\frac{1}{W} \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0 \quad (5.30)$$

είναι ισοδύναμη με την (5.28) στο (a, b) .

5.1.2 Ομογενείς Γραμμικές ΔΕ n -οστής τάξης

Μια ΔΕ n -οστής τάξης καλείται *γραμμική* αν μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_0(x)y = f(x). \quad (5.31)$$

Θα επεκτείνουμε τη θεωρία των ΔΕ 2ης τάξης για ΔΕ ανώτερης τάξης χωρίς αποδείξεις.

Μπορούμε να γράψουμε τη ΔΕ ως

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + P_0(x)y = F(x), \quad (5.32)$$

η οποία μπορεί να γραφεί στη μορφή (5.31) σε κάθε διάστημα όπου P_n δεν έχει ρίζες, με $p_n = P_{n-1}/P_n, \dots, p_0 = P_0/P_n$ και $f = F/P_n$. Για διευκόλυνση θα γράφουμε το αριστερό μέρος της (5.32) ως Ly , δηλ.

$$Ly = P_n y^{(n)} + P_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + P_0 y.$$

Θα λέμε ότι η ΔΕ είναι $Ly = F$ είναι *κανονική* στο (a, b) αν P_0, P_1, \dots, P_n και F είναι συνεχείς στο (a, b) και P_n δεν μηδενίζεται σε εσωτερικό σημείο του (a, b) , τότε η $Ly = F$ μπορεί να γραφεί στη μορφή (5.31) με p_1, \dots, p_n και f συνεχείς στο (a, b) .

Το επόμενο Θεώρημα αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 5.3.1.

Θεώρημα 5.1.8 Υποθέτουμε ότι $Ly = F$ είναι κανονική στο (a, b) , και x_0 εσωτερικό σημείο

στο (a, b) , και k_0, k_1, \dots, k_{n-1} αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί σταθεροί. Τότε το ΠΑΤ

$$Ly = F, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}$$

έχει μοναδική λύση στο (a, b) .

Ομογενείς ΔΕ

Η ΔΕ (5.32) θα λέγεται *ομογενής*, αν $F \equiv 0$ και *μη ομογενής* σε διαφορετική περίπτωση. Κάθε μη μηδενική λύση της ΔΕ θα λέγεται *μη τετριμμένη* λύση.

Αν y_1, y_2, \dots, y_n ορίζονται στο (a, b) και c_1, c_2, \dots, c_n είναι σταθερές τότε

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (5.33)$$

είναι ένας *γραμμικός συνδυασμός* των $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι αν y_1, y_2, \dots, y_n είναι λύσεις της ΔΕ $Ly = 0$ στο (a, b) , τότε οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός είναι επίσης λύση $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. (Βλέπε το Θεώρημα 5.1.2.) Θα λέμε ότι $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ είναι ένα *θεμελιώδες σύνολο λύσεων της $Ly = 0$ στο (a, b)* αν κάθε λύση της $Ly = 0$ στο (a, b) μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, όπως στην (5.33). Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι η (5.33) είναι *γενική λύση της $Ly = 0$ στο (a, b)* .

Θα λέμε ότι το $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* στο (a, b) αν οι μόνες σταθερές c_1, c_2, \dots, c_n τέτοιες ώστε

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) = 0, \quad a < x < b, \quad (5.34)$$

είναι $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Αν η (5.34) ισχύει για κάποιο σύνολο σταθερών c_1, c_2, \dots, c_n οι οποίες δεν είναι όλες μηδέν, τότε το $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ καλείται *γραμμικά εξαρτημένο* στο (a, b) .

Το επόμενο Θεώρημα είναι ανάλογο του Θεωρήματος 5.1.3.

Θεώρημα 5.1.9 *Αν η ΔΕ $Ly = 0$ είναι κανονική στο (a, b) , τότε το σύνολο $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ των n -λύσεων της $Ly = 0$ στο (a, b) είναι ένα θεμελιώδες σύνολο, αν και μόνο αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο (a, b) .*

Παράδειγμα 5.1.5 Η ΔΕ

$$x^3 y''' - x^2 y'' - 2xy' + 6y = 0 \quad (5.35)$$

είναι κανονική και δέχεται λύσεις τις $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$, και $y_3 = 1/x$ στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$. Εύκολα αποδεικνύεται (αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη) ότι το σύνολο $\{y_1, y_2, y_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$ και μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση της (5.35) στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$ στη μορφή (5.33).

Ορίζουσα Wronski

Υποθέτουμε ότι n λύσεις $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ μιας n -τάξης ΔΕ $Ly = 0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο (a, b) στο οποίο η ΔΕ είναι κανονική. Αν c_1, c_2, \dots, c_n είναι σταθερές τέτοιες ώστε

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n = 0, \quad a < x < b,$$

παραγωγίζοντας την προηγούμενη σχέση $n - 1$ -φορές οδηγούμαστε σε ένα $n \times n$ σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) &= 0 \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) + \dots + c_n y_n'(x) &= 0 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x) + c_2 y_2^{(n-1)}(x) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x) &= 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

για τις c_1, c_2, \dots, c_n . Για σταθερό x , η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

η οποία λέγεται *ορίζουσα Wronski* των $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Αν $W(x) \neq 0$ για κάποιο x στο (a, b) τότε το σύστημα (5.36) έχει την τετριμμένη λύση $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$, και το Θεώρημα 5.1.9 συνεπάγεται ότι

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$$

είναι η γενική λύση της ΔΕ $Ly = 0$ στο (a, b) .

Το επόμενο Θεώρημα αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος 5.1.4.

Θεώρημα 5.1.10 *Υποθέτουμε ότι η n -οστής τάξης ομογενής ΔΕ*

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + P_0(x)y = 0 \quad (5.37)$$

είναι κανονική στο (a, b) , έστω y_1, y_2, \dots, y_n είναι λύσεις της (5.37) στο (a, b) , και $x_0 \in (a, b)$. Τότε η ορίζουσα Wronski των $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ δίνεται από

$$W(x) = W(x_0) \exp \left\{ - \int_{x_0}^x \frac{P_{n-1}(t)}{P_0(t)} dt \right\}, \quad a < x < b. \quad (5.38)$$

Συνεπώς, είτε η W δεν έχει ρίζες στο (a, b) ή $W \equiv 0$ στο (a, b) .

Ο τύπος (5.38) είναι γνωστός και ως *τύπος Abel*.

Το επόμενο θεώρημα είναι ανάλογο του Θεωρήματος 5.1.6.

Θεώρημα 5.1.11 Θεωρούμε την κανονική ΔΕ $Ly = 0$ στο (a, b) και y_1, y_2, \dots, y_n είναι n λύσεις της $Ly = 0$ στο (a, b) . Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (α') Η γενική λύση της $Ly = 0$ στο (a, b) δίνεται από $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$.
 (β') $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ αποτελεί θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ $Ly = 0$ στο (a, b) .
 (γ') $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο (a, b) .
 (δ') Η ορίζουσα Wronski των $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ είναι μη μηδενική σε κάποιο εσωτερικό σημείο του (a, b) .
 (ε') Η ορίζουσα Wronski των $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ είναι μη μηδενική σε όλα τα σημεία του (a, b) .

Παράδειγμα 5.1.6 Στο Παράδειγμα 5.1.5 είδαμε ότι οι λύσεις $y_1 = x^2$, $y_2 = x^3$, and $y_3 = 1/x$ της

$$x^3y''' - x^2y'' - 2xy' + 6y = 0$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$. Το επιβεβαιώνουμε αυτό υπολογίζοντας την ορίζουσα Wronski των $\{y_1, y_2, y_3\}$.

Λύση Πράγματι, αν $x \neq 0$, τότε

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 & \frac{1}{x} \\ 2x & 3x^2 & -\frac{1}{x^2} \\ 2 & 6x & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = 12x$$

Συνεπώς, $W(x) \neq 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$.

5.1 Ασκήσεις προς επίλυση

1. (α') Δείξτε ότι $y_1 = 1/(x-1)$ και $y_2 = 1/(x+1)$ είναι λύσεις της ΔΕ

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0 \tag{A}$$

στο $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, και $(1, \infty)$. Ποια είναι η γενική λύση της (A) σε καθένα από τα υποδιαστήματα;

- (β') Να λυθεί το ΠΑΤ

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0, \quad y(0) = -5, \quad y'(0) = 1.$$

Σε ποιά διάστημα ισχύει η λύση; Σχεδιάστε τη λύση.

- (γ') Επιβεβαιώστε τον τύπο του Abel για y_1 και y_2 , με $x_0 = 0$.

2. Υπολογίστε την ορίζουσα Wronski για καθένα από τα παρακάτω σύνολα συναρτήσεων:

(a) $\{1, e^x\}$

(b) $\{e^x, e^x \sin x\}$

(c) $\{x + 1, x^2 + 2\}$

(d) $\{x^{1/2}, x^{-1/3}\}$

(e) $\left\{\frac{\sin x}{x}, \frac{\cos x}{x}\right\}$

(f) $\{x \ln |x|, x^2 \ln |x|\}$

(g) $\{e^x \cos \sqrt{x}, e^x \sin \sqrt{x}\}$

3. Υπολογίστε την ορίζουσα Wronski για το σύνολο λύσεων $\{y_1, y_2\}$ των παρακάτω ΔΕ

(α') $y'' + 3(x^2 + 1)y' - 2y = 0$, με $W(\pi) = 0$.

(β') $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, με $W(0) = 1$. (*Εξίσωση Legendre.*)

(γ') $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, με $W(1) = 1$. (*Εξίσωση Bessel.*)

Στις Ασκήσεις 4–17 βρείτε μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση y_2 της y_1 .

4. $y'' - 2y' - 3y = 0$; $y_1 = e^{3x}$

5. $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y_1 = e^{3x}$

6. $y'' - 2ay' + a^2y = 0$ ($a =$ μη μηδενική σταθερά); $y_1 = e^{ax}$

7. $x^2y'' + xy' - y = 0$; $y_1 = x$

8. $x^2y'' - xy' + y = 0$; $y_1 = x$

9. $x^2y'' - (2a - 1)xy' + a^2y = 0$ ($a =$ μη μηδενική σταθερά; $x > 0$); $y_1 = x^a$

10. $4x^2y'' - 4xy' + (3 - 16x^2)y = 0$; $y_1 = x^{1/2}e^{2x}$

11. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$; $y_1 = e^x$

12. $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0$; $y_1 = x \cos x$

13. $4x^2(\sin x)y'' - 4x(x \cos x + \sin x)y' + (2x \cos x + 3 \sin x)y = 0$; $y_1 = x^{1/2}$

14. $(3x - 1)y'' - (3x + 2)y' - (6x - 8)y = 0$; $y_1 = e^{2x}$

15. $(x^2 - 4)y'' + 4xy' + 2y = 0$; $y_1 = \frac{1}{x - 2}$

16. $(2x + 1)xy'' - 2(2x^2 - 1)y' - 4(x + 1)y = 0$; $y_1 = \frac{1}{x}$

17. $(x^2 - 2x)y'' + (2 - x^2)y' + (2x - 2)y = 0$; $y_1 = e^x$

18. Να προσδιορίσετε την ομογενή γραμμική ΔΕ για την οποία οι παρακάτω συναρτήσεις αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων σε κάποιο διάστημα.

(a) $e^x \cos 2x, e^x \sin 2x$

(b) x, e^{2x}

(c) $x, x \ln x$

(d) $\cos(\ln x), \sin(\ln x)$

(e) $\cosh x, \sinh x$

(f) $x^2 - 1, x^2 + 1$

19. (α') Υπολογίστε την ορίζουσα Wronski W των $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$. Βρείτε την τιμή $W(0)$.

- (β') Επιβεβαιώστε ότι οι y_1, y_2 , και y_3 ικανοποιούν τη ΔΕ $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
 (γ') Με χρήση της $W(0)$ από (α) και τον τύπο του Abel να προσδιορίσετε την $W(x)$.
 (δ') Ποια είναι η γενική λύση της ΔΕ του (β).

20. Υπολογίστε την ορίζουσα Wronski για τα παρακάτω σύνολα συναρτήσεων:

- (a) $\{1, e^x, e^{-x}\}$ (b) $\{e^x, e^x \sin x, e^x \cos x\}$
 (c) $\{2, x + 1, x^2 + 2\}$ (d) $\{x, x \ln x, 1/x\}$
 (e) $\{1, x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^3}{3!}, \dots, \frac{x^n}{n!}\}$ (f) $\{e^x, e^{-x}, x\}$

21. Να προσδιορίσετε την ομογενή γραμμική ΔΕ για την οποία οι παρακάτω συναρτήσεις αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων σε κάποιο διάστημα.

- (a) $\{x, x^2 - 1, x^2 + 1\}$ (b) $\{e^x, e^{-x}, x\}$
 (c) $\{e^x, xe^{-x}, 1\}$ (d) $\{x, x^2, e^x\}$
 (e) $\{x, x^2, 1/x\}$ (f) $\{x + 1, e^x, e^{3x}\}$
 (g) $\{x, x^3, 1/x, 1/x^2\}$ (h) $\{x, x \ln x, 1/x, x^2\}$
 (i) $\{e^x, e^{-x}, x, e^{2x}\}$ (j) $\{e^{2x}, e^{-2x}, 1, x^2\}$

5.2 Ομογενείς ΔΕ με Σταθερούς Συντελεστές

5.2.1 Ομογενείς ΔΕ 2ης τάξης με Σταθερούς Συντελεστές

Αν a, b , και c είναι πραγματικοί αριθμοί και $a \neq 0$, τότε η ΔΕ

$$ay'' + by' + cy = F(x)$$

καλείται *ΔΕ με σταθερούς συντελεστές*. Θεωρούμε την ομογενή ΔΕ

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (5.39)$$

όλες οι λύσεις της (5.39) ορίζονται στο $(-\infty, \infty)$. Στην προσπάθειά μας να προσδιορίσουμε λύσεις της (5.39), παρατηρούμε ότι, από τις γνωστές συναρτήσεις, η εκθετική $y = e^{rx}$ όπου r είναι σταθερά, είναι η μόνη που έχει την ιδιότητα, οι παράγωγοί της να είναι πολλαπλάσια αυτής. Αυτό το γεγονός μας προτρέπει να προσπαθήσουμε τη $y = e^{rx}$ ως πιθανή λύση της (5.39), για κατάλληλη τιμή του r . Αντικαθιστώντας το e^{rx} στη ΔΕ (5.39), προκύπτει

$$ay'' + by' + cy = ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = (ar^2 + br + c)e^{rx}. \quad (5.40)$$

Επομένως, για να έχουμε μη τετριμμένη λύση της (5.39), θα πρέπει να ισχύει

$$p(r) = ar^2 + br + c$$

το οποίο καλείται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* της (5.39), και η σχέση $p(r) = 0$ καλείται *χαρακτηριστική εξίσωση*. Από (5.40) είναι φανερό ότι η $y = e^{rx}$ είναι λύση της ΔΕ (5.39) αν και μόνο αν $p(r) = 0$.

Οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου δίνονται από

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (5.41)$$

Περίπτωση 1. Απλές ρίζες

Αν $b^2 - 4ac > 0$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει δύο ρίζες $r_{1,2}$ *πραγματικές και άνισες* και η γενική λύση θα είναι

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, x \in \mathbb{R}$$

αφού

$$W[e^{r_1 x}, e^{r_2 x}] = (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)x} \neq 0$$

δηλαδή οι $e^{r_1 x}, e^{r_2 x}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Παράδειγμα 5.2.1

(α') Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + 6y' + 5y = 0. \quad (5.42)$$

(β') Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 6y' + 5y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1. \quad (5.43)$$

Λύση (α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (5.42) είναι $p(r) = r^2 + 6r + 5 = (r + 1)(r + 5)$. Αφού $p(-1) = p(-5) = 0$, $y_1 = e^{-x}$ και $y_2 = e^{-5x}$ είναι λύσεις της (5.42), και $W[y_1, y_2] \neq 0$, η γενική λύση της ΔΕ (5.42) δίνεται από

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-5x}. \quad (5.44)$$

(β) Θα προσδιορίσουμε τις σταθερές c_1 και c_2 στην (5.44) έτσι ώστε η y να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (5.43). Παραγωγίζοντας την (5.44) έχουμε

$$y' = -c_1 e^{-x} - 5c_2 e^{-5x}. \quad (5.45)$$

θέτοντας τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$ στις (5.44) και (5.45) έχουμε

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 3 \\ -c_1 - 5c_2 &= -1. \end{aligned}$$

Επιλύοντας το σύστημα, έχουμε $c_1 = 7/2$, $c_2 = -1/2$. Επομένως η λύση της (5.43) είναι

$$y = \frac{7}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-5x}.$$

Περίπτωση 2. Διπλή Ρίζα

Αν $b^2 - 4ac = 0$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει διπλή ρίζα $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$. Προφανώς, μια λύση είναι η $e^{r_1 x}$. Για την εύρεση της άλλης γραμμικά ανεξάρτητης λύσης εργαζόμαστε ως εξής: Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μια αυθαίρετη διπλή ρίζα r_1 , τότε

$$p(r) = a(r - r_1)^2 = a(r^2 - 2r_1 r + r_1^2).$$

Συνεπώς

$$ar^2 + br + c = ar^2 - (2ar_1)r + ar_1^2,$$

δηλαδή $b = -2ar_1$ και $c = ar_1^2$. Οπότε $ay'' + by' + cy = 0$ μπορεί να γραφεί $a(y'' - 2r_1 y' + r_1^2 y) = 0$. Αφού $a \neq 0$ έχει τις ίδιες λύσεις με την

$$y'' - 2r_1 y' + r_1^2 y = 0. \quad (5.46)$$

Αφού $p(r_1) = 0$, τότε $y_1 = e^{r_1 x}$ είναι λύση της $ay'' + by' + cy = 0$, και της ΔΕ (5.46). Αναζητούμε μια δεύτερη λύση της (5.46) της μορφής $y = ue^{r_1 x}$, οπότε

$$y' = u'e^{r_1 x} + r_1 u e^{r_1 x} \quad \text{and} \quad y'' = u''e^{r_1 x} + 2r_1 u'e^{r_1 x} + r_1^2 u e^{r_1 x},$$

$$\begin{aligned} y'' - 2r_1 y' + r_1^2 y &= e^{r_1 x} [(u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u) - 2r_1(u' + r_1 u) + r_1^2 u] \\ &= e^{r_1 x} [u'' + (2r_1 - 2r_1)u' + (r_1^2 - 2r_1^2 + r_1^2)u] = u''e^{r_1 x}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η $y = ue^{r_1 x}$ είναι λύση της (5.46) αν και μόνο αν $u'' = 0$, που είναι ισοδύναμο με την $u = c_1 + c_2 x$, όπου c_1 και c_2 είναι σταθερές. Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$y = e^{r_1 x}(c_1 + c_2 x) \quad (5.47)$$

είναι λύση της ΔΕ (5.46). Θέτοντας $c_1 = 1$ και $c_2 = 0$ οδηγούμαστε στην ήδη γνωστή λύση $y_1 = e^{r_1 x}$. Θέτοντας $c_1 = 0$ και $c_2 = 1$ προκύπτει μια δεύτερη λύση $y_2 = xe^{r_1 x}$, για τις οποίες $W[y_1, y_2] \neq 0$, δηλαδή το $\{y_1, y_2\}$ είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων για την (5.46), και η (5.47) είναι η γενική λύση.

Θεώρημα 5.2.1 Αν $r = r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}$ είναι ρίζα πολλαπλότητας 2 για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $p(r) = ar^2 + br + c$, τότε η συνάρτηση $xe^{r_1 x}$ είναι μια λύση της ΔΕ (5.39), γραμμικά ανεξάρτητη της $e^{r_1 x}$.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.2.2

(α') Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + 6y' + 9y = 0. \quad (5.48)$$

(β') Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1. \quad (5.49)$$

Λύση (α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (5.48) είναι $p(r) = r^2 + 6r + 9 = (r + 3)^2$, με διπλή ρίζα $r_1 = -3$. Οπότε $y_1 = e^{-3x}$ είναι μια λύση της (5.48). Εφαρμόζοντας την παραπάνω διαδικασία, μια δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη λύση είναι $y_2 = xe^{-3x}$ και η γενική λύση γράφεται ως εξής:

$$y(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2x). \quad (5.50)$$

(β) Παραγωγίζοντας την (5.50), έχουμε

$$y' = -3e^{-3x}(c_1 + c_2x) + c_2e^{-3x}. \quad (5.51)$$

θέτοντας τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$ στην (5.50) και (5.51) προκύπτει $c_1 = 3$ και $c_2 = 8$. Οπότε η λύση της (5.49) είναι

$$y = e^{-3x}(3 + 8x).$$

Περίπτωση 3. Μιγαδικές Ρίζες

Αν $b^2 - 4ac < 0$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει μιγαδικές ρίζες

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a},$$

οι οποίες ισοδύναμα γράφονται

$$r_1 = \lambda + i\omega, \quad r_2 = \lambda - i\omega, \quad (5.52)$$

με

$$\lambda = -\frac{b}{2a}, \quad \omega = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

τότε η γενική λύση θα είναι η μιγαδική συνάρτηση

$$y(x) = a_1e^{(\lambda+i\omega)x} + a_2e^{(\lambda-i\omega)x},$$

Επειδή είναι μιγαδικές λύσεις, είναι επιθυμητό να τις εκφράσουμε ως πραγματικές. Παρατηρούμε ότι, αφού οι $e^{(\lambda+i\omega)x}$, $e^{(\lambda-i\omega)x}$ είναι λύσεις της (5.39), τότε το άθροισμα και η διαφορά αυτών θα είναι επίσης λύσεις αυτής. Έτσι, με την χρήση του *τύπου Euler*

$e^{(\lambda+i\omega)x} = e^{\lambda x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$ προκύπτει

$$e^{(\lambda+i\omega)x} + e^{(\lambda-i\omega)x} = 2e^{\lambda x}\cos\beta x, \quad e^{(\lambda+i\omega)x} - e^{(\lambda-i\omega)x} = 2ie^{\lambda x}\sin\beta x$$

Επομένως, παραλείποντας τους σταθερούς πολλαπλασιαστές 2, $2i$ οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = e^{\lambda x}\cos\beta x, \quad y_2(x) = e^{\lambda x}\sin\beta x$$

είναι πραγματικές λύσεις της ΔΕ (5.39). Άρα η γενική λύση της (5.39) δίδεται από την πραγματική συνάρτηση

$$y = e^{\lambda x}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) \quad (5.53)$$

Τα παραπάνω αποτελούν ειδική περίπτωση ενός γενικότερου αποτελέσματος για τις γραμμικές ΔΕ, που εξαρτάται μόνο από το γεγονός ότι, οι συντελεστές της ΔΕ είναι πραγματικές συναρτήσεις, ανεξάρτητα αν είναι σταθερές ή όχι. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

Θεώρημα 5.2.2 Έστω οι πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις A, B, C , ορισμένες στο διάστημα (a, b) . Έστω, $y(x) = u(x) + iv(x)$, μια μιγαδική λύση της ΔΕ

$$Ay'' + By' + Cy = 0, \quad x \in (a, b), \quad (5.54)$$

όπου u, v είναι πραγματικές συναρτήσεις. Τότε, οι u, v είναι, επίσης, λύσεις της ΔΕ (5.54).

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.2.3

(α') Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y'' + 4y' + 13y = 0. \quad (5.55)$$

(β') Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3. \quad (5.56)$$

Λύση (α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (5.55) $p(r) = r^2 + 4r + 13 = r^2 + 4r + 4 + 9 = (r + 2)^2 + 9$. με ρίζες μιγαδικές συζυγείς $r_1 = -2 + 3i$ και $r_2 = -2 - 3i$. Εφαρμόζοντας την θεωρία, έχουμε ότι η γενική λύση της ΔΕ (5.55) δίνεται από

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) \quad (5.57)$$

(β) Εφαρμόζοντας τη συνθήκη $y(0) = 2$ στην (5.57), έχουμε $c_1 = 2$. Παραγωγίζοντας την (5.57) προκύπτει

$$y' = -2e^{-2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x) + 3e^{-2x}(-c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x),$$

και εφαρμόζοντας τη δεύτερη αρχική συνθήκη $y'(0) = -3$ προκύπτει $-3 = -2c_1 + 3c_2 = -4 + 3c_2$, δηλαδή $c_2 = 1/3$. Συνεπώς η λύση του ΠΑΤ (5.56) είναι

$$y = e^{-2x} \left(2 \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x \right).$$

Σύνοψη

Το επόμενο θεώρημα συνοψίζει τα αποτελέσματα για την επίλυση ομογενών ΔΕ 2ης τάξης.

Θεώρημα 5.2.3 Έστω $p(r) = ar^2 + br + c$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ΔΕ

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (5.58)$$

Τότε:

(α') Αν $p(r) = 0$ έχει απλές πραγματικές ρίζες r_1 και r_2 , τότε η γενική λύση της ΔΕ (5.58) είναι

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}.$$

(β') Αν $p(r) = 0$ έχει διπλή ρίζα r_1 , τότε η γενική λύση της ΔΕ (5.58) είναι

$$y = e^{r_1 x} (c_1 + c_2 x).$$

(γ') Αν $p(r) = 0$ έχει μιγαδικές συζυγείς ρίζες $r_1 = \lambda + i\omega$ και $r_2 = \lambda - i\omega$ (όπου $\omega > 0$), τότε η γενική λύση της ΔΕ (5.58) είναι

$$y = e^{\lambda x} (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x).$$

Παρατήρηση:

(α') Υποθέτουμε ότι y είναι η λύση της ομογενούς ΔΕ με σταθερούς συντελεστές

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (5.59)$$

Έστω $z(x) = y(x - x_0)$, όπου x_0 είναι αυθαίρετος πραγματικός αριθμός, τότε $az'' + bz' + cz = 0$.

(β') Έστω $z_1(x) = y_1(x - x_0)$ και $z_2(x) = y_2(x - x_0)$, όπου $\{y_1, y_2\}$ είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (5.59). Τότε $\{z_1, z_2\}$ είναι, επίσης, θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (5.59).

(γ') Το Θεώρημα 5.2.3 εφαρμόζεται και στην επίλυση του ΠΑΤ

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1,$$

όπου η αρχική συνθήκη ορίζεται στο $x_0 = 0$. Αλλά και στην περίπτωση

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1, \quad (5.60)$$

όπου $x_0 \neq 0$, ο προσδιορισμός των σταθερών στις

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad y = e^{r_1 x} (c_1 + c_2 x), \quad \text{or } y = e^{\lambda x} (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x)$$

είναι εφικτός με την κατάλληλη αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής, ώστε οι αρχικές συνθήκες να μεταφερθούν στο $x_0 = 0$.

5.2.2 Ομογενείς Γραμμικές ΔΕ n -οστής τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η Γραμμική βαθμωτή n -οστής τάξης ΔΕ εμφανίζεται συνήθως στη μορφή:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = F(x)$$

όπου a_0, a_1, \dots, a_n είναι σταθερές και $a_n \neq 0$. Σε αυτό το εδάφιο θα θεωρήσουμε ομογενή ΔΕ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0. \quad (5.61)$$

Η ΔΕ (5.61) είναι κανονική στο $(-\infty, \infty)$, τα θεωρήματα του εδαφίου 5.1.2 εφαρμόζονται για $(a, b) = (-\infty, \infty)$.

Όπως στο εδάφιο 5.2.1, το πολώνυμο

$$p(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_0 \quad (5.62)$$

καλείται *χαρακτηριστικό πολώνυμο* της (5.61). Η μέθοδος που αναπτύξαμε στο εδάφιο 5.2.1 για $n = 2$, μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση που το χαρακτηριστικό πολώνυμο είναι n -οστού βαθμού, αλλά η όλη διαδικασία είναι αρκετά πολύπλοκη και στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε έναν διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης.

Αν k είναι θετικός ακέραιος, με το σύμβολο D^k ορίζουμε τον k -τάξης διαφορικό τελεστή, δηλαδή $D^k y = y^{(k)}$. Αν

$$q(r) = b_m r^m + b_{m-1} r^{m-1} + \dots + b_0$$

είναι ένα αυθαίρετο πολώνυμο, ορίζουμε

$$q(D) = b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_0$$

έτσι ώστε

$$q(D)y = (b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \dots + b_0)y = b_m y^{(m)} + b_{m-1} y^{(m-1)} + \dots + b_0 y$$

όπου y είναι συνάρτηση με m παραγώγους, καλούμε το $L := q(D)$ *πολυωνυμικό* τελεστή.

Με p όπως ορίστηκε στην (5.62),

$$p(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_0,$$

η (5.61) μπορεί να γραφεί $Ly = p(D)y = 0$.

Η πρώτη παρατήρηση σχετικά με τις ανωτέρω εξίσωσεις είναι ότι αφήνουν τις εκθετικές συναρτήσεις σχεδόν αναλλοίωτες. Πράγματι, αν r είναι σταθερά,

$$\begin{aligned} L(e^{rx}) &= a_0 D^n(e^{rx}) + a_1 D^{n-1}(e^{rx}) + \cdots + a_{n-1} D(e^{rx}) + a_n e^{rx} \\ &= a_0 r^n e^{rx} + a_1 r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_{n-1} r e^{rx} + a_n e^{rx} \\ &= (a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n) e^{rx} = p(r) e^{rx} \end{aligned}$$

Έχουμε το πρώτο συμπέρασμα.

Πρόταση 5.2.1 *Η συνάρτηση e^{rx} αποτελεί λύση της (5.61), αν και μόνο η τιμή r αποτελεί ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου (5.62).*

Ιδιαίτερος στην περίπτωση όπου $L = aD^2 + bD + c$ έχουμε αναπτύξει στο εδάφιο 5.2.1 την σχετική μεθοδολογία, στο σημείο αυτό θα δώσουμε μια διαφορετική προσέγγιση για να κατανοήσουμε την μέθοδο στην περίπτωση που το πολυώνυμο είναι n -βαθμού. Αν r_1, r_2 ($r_1 \neq r_2$) αποτελούν ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $p(r) = ar^2 + br + c$, τότε το $\{e^{r_1 t}, e^{r_2 t}\}$ αποτελεί θεμελιώδες σύνολο λύσεων της $Ly = 0$. Ας εξετάσουμε τη περίπτωση που το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει πραγματικές ρίζες ($\Delta > 0$) με

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}, \quad r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\Leftrightarrow y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1 r_2 y = 0 \\ &\Leftrightarrow (y' - r_2 y)' - r_1 (y' - r_2 y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y' - r_2 y) = \tilde{c}_1 e^{r_1 x} \\ &\Leftrightarrow e^{-r_2 x} (y' - r_2 y) = \tilde{c}_1 e^{(r_1 - r_2)x} \\ &\Leftrightarrow (e^{-r_2 x} y)' = \tilde{c}_1 e^{(r_1 - r_2)x} \\ &\Leftrightarrow e^{-r_2 x} y = \tilde{c} \frac{e^{(r_1 - r_2)x}}{r_1 - r_2} + c_2 \\ &\Leftrightarrow y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \end{aligned}$$

Παρομοίως, στην περίπτωση όπου $\Delta = 0$ και $r = -\frac{\beta}{2a}$, $r^2 = \frac{\gamma}{a}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &\Leftrightarrow y'' - 2ry' + r^2 y = 0 \\ &\Leftrightarrow (y' - ry)' - r(y' - ry) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y' - ry) = c_1 e^{rx} \\ &\Leftrightarrow e^{-rx} (y' - ry) = \tilde{c} \\ &\Leftrightarrow e^{-rx} y = c_1 x + c_2 \\ &\Leftrightarrow y = (c_1 x + c_2) e^{rx} \end{aligned}$$

Τέλος, στην περίπτωση των μιγαδικών ριζών τα πράγματα περιπλέκονται. Εάν θεωρείται δεδομένη η γνώση της εκθετικής μιγαδικών e^{zx} , $z \in \mathbb{C}$ και των ιδιοτήτων της, τότε με παρόμοια διαδικασία θα καταλήγαμε στη γενική λύση. Στο ίδιο αποτέλεσμα όμως μπορούμε να καταλήξουμε και αποφεύγοντας τη χρήση των μιγαδικών. Ας παρατηρήσουμε, μελετώντας την διαδικασία την οποία ακολουθήσαμε στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις, ότι καταλήξαμε στην γενική λύση αφού προηγουμένως παραγοντοποιήσαμε τον διαφορικό

τελεστή:

$$L = aD^2 + bD + c = a(D - r_1)(D - r_2), \quad \text{ή} \quad a(D - r)^2 \quad \text{όπου} \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Είναι άραγε δυνατόν να επιτευχθεί το ίδιο στην περίπτωση των μιγαδικών ιδιοτιμών. Συγκεκριμένα: Υπάρχουν συναρτήσεις g, h , ώστε

$$aD^2 + bD + c = a(D - g(x))(D - h(x));$$

Το οποίο σημαίνει ότι:

$$\begin{aligned} (D - g)(D - h)y &= (D - g)(y' - hy) = (y' - hy)' - g(y' - hy) \\ &= y'' - (g + h)y' + (gh - h')y. \end{aligned}$$

Άρα, θα είχαμε:

$$D^2 - (g + h)D + (-h' + gh) = D^2 + \frac{b}{a}D + \frac{c}{a},$$

ή ισοδύναμα

$$g + h = -\frac{b}{a} \quad \text{και} \quad -h' + gh = \frac{c}{a},$$

Το ανωτέρω σύστημα μετά την αντικατάσταση

$$g = -\frac{b}{a} - h$$

στη δεύτερη εξίσωση καταλήγει στην βαθμωτή ΔΕ πρώτης τάξης:

$$h' = -\left(h^2 + \frac{b}{a}h + \frac{c}{a}\right) \quad (5.63)$$

της οποίας δεν αναζητούμε την γενική λύση αλλά κάποια λύση h . Σημειωτέον ότι στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις μια τέτοια λύση είναι η σταθερά, ενώ στην περίπτωση ($\Delta < 0$) καμία πραγματική σταθερά δεν μπορεί να αποτελέσει λύση διότι

$$h^2 + \frac{b}{a}h + \frac{c}{a} = \left(h + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2} > 0.$$

Η γενική λύση της (5.63), η οποία επιλύεται ως ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών, είναι η

$$h = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tan\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}(x + c)\right).$$

Επιλέγουμε την h για $c = 0$, οπότε η g θα ισούται προς

$$g = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \tan\left(\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}x\right).$$

ή απλούστερα

$$g = \xi + \eta \tan(\eta x) \quad \text{και} \quad h = \xi - \eta \tan(\eta x)$$

όπου

$$\xi = -\frac{b}{2a} \quad \text{και} \quad \eta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Άρα, ο τελεστής L πράγματι παραγοντοποιείται και έχουμε τις ακόλουθες ισοδυναμίες όπου οι σταθερές διατηρούν τα ίδια σύμβολα όχι όμως απαραίτητως και τις ίδιες τιμές. Έστω, έχουμε:

$$\begin{aligned} Ly = 0 &\Leftrightarrow (D - g)((D - h)y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (D - h)y = \tilde{c}e^{\int_x^x (g(s) - h(s))ds} \\ &\Leftrightarrow \left(e^{-\int_x^x h(s)ds} y\right)' = \tilde{c}e^{2\eta \int_x^x \tan(\eta s)ds} \end{aligned}$$

Όμως

$$e^{2\eta \int_x^x \tan(\eta s)ds} = \tilde{c}e^{-2 \log|\cos(\eta x)|} = \tilde{c}\sec^2(\eta x)$$

Συνεπώς, οι ανωτέρω ισοδυναμίες συνεχίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow e^{-\int_x^x (\xi - \eta \tan(\eta s))ds} y = c_1 \int_x^x \sec^2(\eta s)ds + c_2 \\ &\Leftrightarrow y = e^{\xi x + \log|\cos(\eta x)|} (c_1 \tan(\eta x) + c_2) \\ &\Leftrightarrow y = e^{\xi x} \cos(\eta x) (c_1 \tan(\eta x) + c_2) \\ &\Leftrightarrow y = e^{\xi x} (c_1 \sin(\eta x) + c_2 \cos(\eta x)) \end{aligned}$$

η οποία είναι και η μορφή που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο.

Θεώρημα 5.2.4 Έστω a_n, \dots, a_0 πραγματικές σταθερές, $a_0 \neq 0$ και ο γραμμικός τελεστής

$$L = a_n D^n + \dots + a_1 D + a_0$$

όπου $D = \frac{d}{dx}$ ενώ

$$p(r) = a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του τελεστή. Αν το $p(r)$ έχει ως ρίζες:

(α') πραγματικές r_1, \dots, r_k με πολλαπλότητες μ_1, \dots, μ_k αντιστοίχως και

(β') μιγαδικές $\alpha_1 \pm i\beta_1, \dots, \alpha_\lambda \pm i\beta_\lambda$ με πολλαπλότητες $\mu_{k+1}, \dots, \mu_{k+\lambda}$ αντιστοίχως, όπου

$$\mu_1, \dots, \mu_k + 2(\mu_{k+1}, \dots, \mu_{k+\lambda}) = n$$

Τότε η γενική λύση της ΔΕ $Ly = 0$

$$a_n y^{(n)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$$

είναι η

$$y(x) = \sum_{\rho=1}^k p_{\rho}(x) e^{r_{\rho} x} + \sum_{\sigma=1}^{\lambda} e^{\alpha_{\sigma} x} (q_{1,\sigma}(x) \cos \beta_{\sigma} x + q_{2,\sigma}(x) \sin \beta_{\sigma} x), \quad (5.64)$$

όπου p_{ρ} πολυώνυμο βαθμού το πολύ $\mu_{\rho} - 1$, ενώ $q_{1,\sigma}, q_{2,\sigma}$ πολυώνυμα βαθμού το πολύ $\mu_{k+\sigma} - 1$.

Τα επόμενα Θεωρήματα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 5.2.4.

Θεώρημα 5.2.5 *Αν m θετικός ακέραιος, τότε*

$$\{e^{ax}, xe^{ax}, \dots, x^{m-1} e^{ax}\} \quad (5.65)$$

είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων για τη ΔΕ

$$(D - a)^m y = 0. \quad (5.66)$$

Θεώρημα 5.2.6 *Αν $\omega \neq 0$ και m είναι θετικός ακέραιος, τότε*

$$\{e^{\lambda x} \cos \omega x, xe^{\lambda x} \cos \omega x, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x} \cos \omega x, \\ e^{\lambda x} \sin \omega x, xe^{\lambda x} \sin \omega x, \dots, x^{m-1} e^{\lambda x} \sin \omega x\}$$

είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων για τη ΔΕ

$$[(D - \lambda)^2 + \omega^2]^m y = 0.$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα ως εφαρμογή των παραπάνω.

Παράδειγμα 5.2.4

(α') Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0. \quad (5.67)$$

(β') Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 5, \quad y''(0) = 9. \quad (5.68)$$

Λύση (α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο για τη ΔΕ (5.67) είναι

$$p(r) = r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = (r - 1)(r - 2)(r - 3).$$

Συνεπώς $\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για τη ΔΕ (5.67), διότι η ορίζουσα Wronski είναι

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = e^{6x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0.$$

Συνεπώς, η γενική λύση της (5.67) γράφεται ως

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}. \quad (5.69)$$

(β) Για τον καθορισμό των σταθερών c_1, c_2 και c_3 στην (5.69) πρέπει η y να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (5.68), καταλήγουμε στο γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 4 \\ c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 5 \\ c_1 + 4c_2 + 9c_3 &= 9. \end{aligned}$$

η λύση του οποίου είναι $c_1 = 4, c_2 = -1, c_3 = 1$. Η λύση του ΠΑΤ (5.68) είναι

$$y = 4e^x - e^{2x} + e^{3x}$$

■

Παράδειγμα 5.2.5 Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y''' - y'' + y' - y = 0. \quad (5.70)$$

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο που αντιστοιχεί στη ΔΕ (5.70) είναι

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0 \Leftrightarrow (r - 1)(r^2 - 1) = 0$$

Συνεπώς, η ΔΕ (5.70) γράφεται στην ισοδύναμη τελεστική μορφή

$$(D - 1)(D^2 + 1)y = 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι κάθε λύση της $(D^2 + 1)y = 0$ είναι λύση της (5.70). Οπότε $y_1 = \cos x$ και $y_2 = \sin x$ είναι λύσεις της (5.70).

Ομοίως, μπορούμε να γράψουμε την (5.70) ως

$$(D^2 + 1)(D - 1)y = 0,$$

που σημαίνει ότι κάθε λύση της $(D - 1)y = 0$ είναι λύση της (5.70). Συνεπώς, η $y_3 = e^x$ είναι λύση της (5.70).

Η ορίζουσα Wronski των $\{e^x, \cos x, \sin x\}$ είναι

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x & e^x \\ -\sin x & \cos x & e^x \\ -\cos x & -\sin x & e^x \end{vmatrix}.$$

Αφού $W(0) = 2 \neq 0$, το $\{\cos x, \sin x, e^x\}$ είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων και η

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 e^x$$

είναι η γενική λύση της (5.70). ■

Παράδειγμα 5.2.6 Βρείτε την γενική λύση της ΔΕ

$$y^{(4)} - 16y = 0. \quad (5.71)$$

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (5.71) είναι

$$p(r) = r^4 - 16 = (r^2 - 4)(r^2 + 4) = (r - 2)(r + 2)(r^2 + 4).$$

Όπως εργαστήκαμε στο Παράδειγμα 5.2.5, μπορεί να αποδειχθεί ότι η (5.71) μπορεί να γραφεί ως

$$(D^2 + 4)(D + 2)(D - 2)y = 0$$

ή

$$(D^2 + 4)(D - 2)(D + 2)y = 0$$

ή

$$(D - 2)(D + 2)(D^2 + 4)y = 0.$$

Οπότε η y είναι λύση της (5.71), αν είναι και λύση καθεμιάς από τις παρακάτω ΔΕ

$$(D - 2)y = 0, \quad (D + 2)y = 0, \quad (D^2 + 4)y = 0.$$

Δηλ., $\{e^{2x}, e^{-2x}, \cos 2x, \sin 2x\}$ είναι το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (5.71), διότι η ορίζουσα Wronski είναι

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} & \cos 2x & \sin 2x \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ 4e^{2x} & 4e^{-2x} & -4\cos 2x & -4\sin 2x \\ 8e^{2x} & -8e^{-2x} & 8\sin 2x & -8\cos 2x \end{vmatrix}.$$

Αφού $W(0) = -512$, και

$$y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$$

είναι η γενική λύση της ΔΕ (5.71). ■

Παράδειγμα 5.2.7 Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0. \quad (5.72)$$

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (5.72) είναι $p(r) = r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = (r+1)^3$. Η ΔΕ (5.72) μπορεί να γραφεί σε ισοδύναμη μορφή $(D+1)^3 y = 0$, από το Θεώρημα 5.2.5 έχουμε ότι η γενική λύση της (5.72) είναι

$$y = e^{-x}(c_1 + c_2x + c_3x^2). \blacksquare$$

Παράδειγμα 5.2.8 Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' = 0. \quad (5.73)$$

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (5.73) είναι

$$\begin{aligned} p(r) &= r^4 + 4r^3 + 6r^2 + 4r \\ &= r(r^3 + 4r^2 + 6r + 4) \\ &= r(r+2)(r^2 + 2r + 2) \\ &= r(r+2)[(r+1)^2 + 1]. \end{aligned}$$

Η ΔΕ (5.73) μπορεί να γραφεί σε ισοδύναμη μορφή $[(D+1)^2 + 1](D+2)Dy = 0$. Τα θεμελιώδη σύνολα λύσεων των

$$[(D+1)^2 + 1]y = 0, \quad (D+2)y = 0, \quad \text{και} \quad Dy = 0.$$

δίνονται από

$$\{e^{-x} \cos x, e^{-x} \sin x\}, \quad \{e^{-2x}\}, \quad \text{και} \quad \{1\},$$

αντίστοιχα. Συνεπώς η γενική λύση της (5.73) είναι

$$y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + c_3 e^{-2x} + c_4. \blacksquare$$

Εξισώσεις Euler

Ονομάζονται οι γραμικές ΔΕ της μορφής

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y^{(0)} = 0,$$

όπου a_0, a_1, \dots, a_n πραγματικές σταθερές και $a_n \neq 0$. Ιδιαίτερως, στην περίπτωση της 2ης-τάξης λαμβάνουν την μορφή

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0, \quad (5.74)$$

όπου a, b, c πραγματικές σταθερές και $a \neq 0$. Οι ανωτέρω εξισώσεις έχουν πεδίο ορισμού των λύσεων τους το \mathbb{R}^- ή το \mathbb{R}^+ . Οι εξισώσεις Euler μ'ένα απλούστατο μετασχηματισμό

ανάγονται στις γραμμικές με σταθερούς συντελεστές. Συγκεκριμένα αν θέσουμε

$$y(x) = \begin{cases} z(\log x) & x > 0, \\ z(\log(-x)) & x < 0 \end{cases}$$

τότε για $x > 0$ (και παρομοίως για $x < 0$) θα έχουμε:

$$y'(x) = \frac{dz(\log x)}{dx} = z'(\log x) \frac{1}{x}$$

και

$$y''(x) = \frac{z''(\log x) - z'(\log x)}{x^2}$$

και τελικά

$$ax^2y'' + bxy' + cy = az''(\log x) + (b - a)z'(\log x) + cz(\log x).$$

Έχουμε τελικά ότι η (5.74) είναι ισοδύναμη με την

$$az''(\log x) + (b - a)z'(\log x) + cz(\log x) = 0.$$

την οποία γνωρίζουμε πως να αντιμετωπίσουμε. Η παραπάνω διαδικασία μπορεί πολύ απλά να γενικευθεί στην περίπτωση της ΔΕ n -οστής τάξης, αλλά και ακόμη γενικότερα της ΔΕ

$$a_n(x - x_0)^n y^{(n)} + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y^{(0)} = 0,$$

όπου ο μετασχηματισμός θα είναι

$$y(x) = \begin{cases} z(\log(x - x_0)) & x > x_0, \\ z(\log(x_0 - x)) & x < x_0. \end{cases}$$

Παράδειγμα 5.2.9 Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$x^2y'' + xy' - x = 0. \quad (5.75)$$

Λύση Λόγω του μετασχηματισμού $y(x) = z(\log x)$ λαμβάνουμε την ακόλουθη ΔΕ με άγνωστη συνάρτηση z :

$$z'' - z = 0.$$

με γενική λύση

$$z(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Όμως $y(x) = z(\log x)$, άρα η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$y(x) = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 5.2.10 Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$x^2y'' + xy' + x = 0. \quad (5.76)$$

Λύση Λόγω του μετασχηματισμού $y(x) = z(\log x)$ για $x > 0$ λαμβάνουμε την ακόλουθη ΔΕ με άγνωστη συνάρτηση z :

$$z'' + z = 0.$$

η οποία έχει γενική λύση

$$z(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Όμως $y(x) = z(\log x)$, άρα η γενική λύση θα έχει την μορφή

$$y(x) = c_1 \cos(\log x) + c_2 \sin(\log(x)).$$

Αναλόγως εργαζόμαστε στην περίπτωση $x < 0$ και λαμβάνουμε:

$$y(x) = c_1 \cos(\log(-x)) + c_2 \sin(\log(-x)). \blacksquare$$

Παράδειγμα 5.2.11 Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$x^3 y^{(3)} + xy^{(1)} - y = 0. \quad (5.77)$$

Λύση Έχουμε

$$\begin{aligned} y(x) &= z(\log x) \\ y'(x) &= z'(\log x) \frac{1}{x} \\ y''(x) &= z''(\log x) \frac{1}{x^2} - z'(\log x) \frac{1}{x^2} \\ y'''(x) &= z'''(\log x) \frac{1}{x^3} - 3z''(\log x) \frac{1}{x^3} + 2z'(\log x) \frac{1}{x^3} \end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$z''' - 3z'' + 3z' - z = (D - 1)^3 z$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $p(r) = (r - 1)^3$ και ως εκ τούτου η γενική λύση για το z θα είναι

$$z(x) = e^x (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)$$

συνεπώς δοθέντος του $y(x) = z(\log x)$ θα έχουμε:

$$y(x) = x (c_1 + c_2 \log x + c_3 (\log x)^2). \blacksquare$$

5.2 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-24 να βρεθεί η γενική λύση των ΔΕ

1. $y'' + 5y' - 6y = 0$

2. $y'' - 4y' + 5y = 0$

3. $y'' + 8y' + 7y = 0$

4. $y'' - 4y' + 4y = 0$

5. $y'' + 2y' + 10y = 0$

6. $y'' + 6y' + 10y = 0$

7. $y'' - 8y' + 16y = 0$

8. $y'' + y' = 0$

9. $y'' - 2y' + 3y = 0$

10. $y'' + 6y' + 13y = 0$

11. $4y'' + 4y' + 10y = 0$

12. $10y'' - 3y' - y = 0$

13. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

14. $y^{(4)} + 8y'' - 9y = 0$

15. $y''' - y'' + 16y' - 16y = 0$

16. $2y''' + 3y'' - 2y' - 3y = 0$

17. $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 0$

18. $4y''' - 8y'' + 5y' - y = 0$

19. $27y''' + 27y'' + 9y' + y = 0$

20. $y^{(4)} + y'' = 0$

21. $y^{(4)} - 16y = 0$

22. $y^{(4)} + 12y'' + 36y = 0$

23. $16y^{(4)} - 72y'' + 81y = 0$

24. $6y^{(4)} + 5y''' + 7y'' + 5y' + y = 0$

Στις Ασκήσεις 25-33 να λυθεί το ΠΑΤ.

25. $y'' + 14y' + 50y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -17$

26. $6y'' - y' - y = 0, \quad y(0) = 10, \quad y'(0) = 0$

27. $6y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3$

28. $4y'' - 4y' - 3y = 0, \quad y(0) = \frac{13}{12}, \quad y'(0) = \frac{23}{24}$

29. $4y'' - 12y' + 9y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = \frac{5}{2}$

30. $y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 4$

31. $y'' - 6y' - 7y = 0, \quad y(2) = -\frac{1}{3}, \quad y'(2) = -5$

32. $y'' - 14y' + 49y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 11$

33. $9y'' + 6y' + y = 0, \quad y(2) = 2, \quad y'(2) = -\frac{14}{3}$

Στις Ασκήσεις 34-39 να λυθούν οι ΔΕ και να βρεθεί το πεδίο ορισμού των λύσεων αυτών.

34. $x^2y'' - xy' + y = 0$

35. $2x^2y'' + 2xy' + y = 0$

36. $x^2y'' + xy' + y = 0$

37. $x^2y'' + xy' - y = 0$

$$38. (x-1)^2 y'' + 4(x-1)y' + y = 0$$

$$39. (2x+1)^2 y'' - (4x+2)y' - 4y = 0$$

5.3 Μη Ομογενείς Γραμμικές Βαθμωτές ΔΕ

5.3.1 Μη Ομογενείς ΔΕ 2ης-τάξης

Στο εδάφιο αυτό θα θεωρήσουμε μη ομογενείς ΔΕ 2ης-τάξης της μορφής

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (5.78)$$

όπου ο όρος μη ομογένειας f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Το επόμενο Θεώρημα, που αποτελεί μια επέκταση του Θεωρήματος 5.1.1, μας δίνει τις ικανές συνθήκες για την ύπαρξη και μοναδικότητα των λύσεων ενός ΠΑΤ με ΔΕ την (5.78). Για την απόδειξη παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία.

Θεώρημα 5.3.1 *Θεωρούμε p, q και f συνεχείς συναρτήσεις σε ένα ανοικτό διάστημα (a, b) , έστω x_0 σημείο του (a, b) , και k_0, k_1 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Τότε το ΠΑΤ*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(x_0) = k_0, \quad y'(x_0) = k_1$$

έχει μοναδική λύση στο (a, b) .

Για την εύρεση της λύσης της ΔΕ (5.78) στο διάστημα (a, b) όπου p, q , και f είναι συνεχείς, είναι αναγκαίο να βρούμε την γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5.79)$$

στο (a, b) . Καλούμε την (5.79) *αντίστοιχη ομογενή* για την (5.78).

Το επόμενο Θεώρημα παρουσιάζει έναν τρόπο εύρεσης της λύσης της ΔΕ (5.78), εάν γνωρίζουμε μια λύση y_p της (5.78) και το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (5.79). Η y_p καλείται *ειδική λύση* της (5.78) και είναι μια οποιαδήποτε λύση που μπορούμε να βρούμε.

Θεώρημα 5.3.2 *Θεωρούμε p, q , και f συνεχείς συναρτήσεις στο (a, b) . Έστω y_p είναι μια ειδική λύση της ΔΕ*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (5.80)$$

στο (a, b) , και $\{y_1, y_2\}$ είναι το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (5.81)$$

στο (a, b) . Τότε y είναι λύση της (5.80) στο (a, b) αν και μόνο αν

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (5.82)$$

όπου c_1 και c_2 είναι σταθερές.

Απόδειξη Στην αρχή θα δείξουμε ότι η y στην (5.82) είναι μια λύση της (5.80) για οποιαδήποτε επιλογή των c_1 και c_2 . Παραγωγίζοντας την (5.82), έχουμε

$$y' = y'_p + c_1 y'_1 + c_2 y'_2 \quad \text{and} \quad y'' = y''_p + c_1 y''_1 + c_2 y''_2,$$

οπότε

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= (y''_p + c_1 y''_1 + c_2 y''_2) + p(x)(y'_p + c_1 y'_1 + c_2 y'_2) \\ &\quad + q(x)(y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= (y''_p + p(x)y'_p + q(x)y_p) + c_1(y''_1 + p(x)y'_1 + q(x)y_1) \\ &\quad + c_2(y''_2 + p(x)y'_2 + q(x)y_2) \\ &= f + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = f, \end{aligned}$$

η y_p ικανοποιεί την (5.80) και y_1, y_2 ικανοποιούν την (5.81).

Στην συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι κάθε λύση της (5.80) δίνεται από (5.82) για κάποια επιλογή των σταθερών c_1 και c_2 . Υποθέτουμε ότι y είναι λύση της (5.80). Θα δείξουμε ότι $y - y_p$ είναι λύση της (5.81), και είναι της μορφής $y - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$, το οποίο συνεπάγεται την (5.82). Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} (y - y_p)'' + p(x)(y - y_p)' + q(x)(y - y_p) &= (y'' - y''_p) + p(x)(y' - y'_p) \\ &\quad + q(x)(y - y_p) \\ &= (y'' + p(x)y' + q(x)y) \\ &\quad - (y''_p + p(x)y'_p + q(x)y_p) \\ &= f(x) - f(x) = 0, \end{aligned}$$

αφού y και y_p ικανοποιούν την (5.80). ■

Θα λέμε την (5.82) γενική λύση της (5.80) στο (a, b) .

Παρατήρηση: Αν $P_0, P_1,$ και F συνεχείς και P_0 δεν μηδενίζεται στο (a, b) , τότε το Θεώρημα 5.3.2 συνεπάγεται ότι η γενική λύση της

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x) \tag{5.83}$$

στο (a, b) είναι $y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$, όπου y_p είναι η ειδική λύση της (5.83) στο (a, b) και $\{y_1, y_2\}$ είναι το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$$

στο (a, b) . Μπορούμε να γράψουμε την (5.83) ως

$$y'' + \frac{P_1(x)}{P_0(x)}y' + \frac{P_2(x)}{P_0(x)}y = \frac{F(x)}{P_0(x)}$$

και να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.3.2 με $p = P_1/P_0, q = P_2/P_0,$ και $f = F/P_0$. Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 5.3.1**(α')** Να βρεθεί η γενική λύση της

$$y'' + y = 1. \quad (5.84)$$

(β') Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7. \quad (5.85)$$

Λύση (α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.3.2 με $(a, b) = (-\infty, \infty)$, όπου $p \equiv 0$, $q \equiv 1$, και $f \equiv 1$ στην (5.84) συνεχείς στο $(-\infty, \infty)$. Εύκολα επιβεβαιώνεται ότι $y_p \equiv 1$ είναι μια ειδική λύση της (5.84). Επίσης, $y_1 = \cos x$ και $y_2 = \sin x$ αποτελούν το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ $y'' + y = 0$, τότε η γενική λύση της ΔΕ (5.84) είναι

$$y = 1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x. \quad (5.86)$$

(β) Η γενική λύση (5.86) ικανοποιώντας τις αρχικές συνθήκες $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$ δίνει $c_1 = 1$ και $c_2 = 7$, συνεπώς, η λύση του ΠΑΤ (5.85) είναι

$$y = 1 + \cos x + 7 \sin x. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 5.3.2**(α')** Να βρεθεί η γενική λύση της

$$y'' - 2y' + y = -3 - x + x^2. \quad (5.87)$$

(β') Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' - 2y' + y = -3 - x + x^2, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1. \quad (5.88)$$

Λύση (α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αντίστοιχης ομογενούς

$$y'' - 2y' + y = 0$$

είναι $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2$, συνεπώς $y_1 = e^x$ και $y_2 = xe^x$ αποτελούν το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς ΔΕ. Για την εύρεση μια ειδικής λύσης της (5.87), αναζητούμε μια πολυωνμική λύση της μορφής $y_p = A + Bx + Cx^2$, αντικαθιστώντας την στη ΔΕ (5.87) προσδιορίζουμε τους συντελεστές A , B , και C , εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} y_p'' - 2y_p' + y_p &= 2C - 2(B + 2Cx) + (A + Bx + Cx^2) \\ &= (2C - 2B + A) + (-4C + B)x + Cx^2 = -3 - x + x^2. \end{aligned}$$

εξισώνοντας τους συντελεστές των ομοιοβάθμιων όρων x :

$$\begin{aligned} C &= 1 \\ B - 4C &= -1 \\ A - 2B + 2C &= -3, \end{aligned}$$

δηλ. $C = 1$, $B = 3$, και $A = 1$. Η ειδική λύση της (5.87) είναι $y_p = 1 + 3x + x^2$ και από το Θεώρημα 5.3.2 συνεπάγεται ότι

$$y = 1 + 3x + x^2 + e^x(c_1 + c_2x) \quad (5.89)$$

είναι η γενική λύση της ΔΕ (5.87).

(β) Εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες $y(0) = -2$ και $y'(0) = 1$ στην (5.89) έχουμε $c_1 = -3$ και $c_2 = 1$. Συνεπώς, η γενική λύση της (5.88) είναι

$$y = 1 + 3x + x^2 - e^x(3 - x). \blacksquare$$

Η Αρχή της Υπέρθεσης Λύσεων

Το επόμενο θεώρημα μας επιτρέπει συχνά να χωρίζουμε την μη ομογενή ΔΕ σε επιμέρους εξισώσεις, βρίσκοντας την λύση κάθε μιας και συνδυάζοντάς τις όλες μαζί για να προκύψει μια ειδική λύση του αρχικού προβλήματος.

Θεώρημα 5.3.3 [*Η Αρχή της Υπέρθεσης*] Υποθέτουμε ότι y_{p_1} είναι μια ειδική λύση της ΔΕ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

στο (a, b) και y_{p_2} είναι η ειδική λύση της

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

στο (a, b) . Τότε

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

είναι η ειδική λύση της ΔΕ

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

στο (a, b) .

Απόδειξη Αν $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ τότε

$$\begin{aligned} y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p &= (y_{p_1} + y_{p_2})'' + p(x)(y_{p_1} + y_{p_2})' + q(x)(y_{p_1} + y_{p_2}) \\ &= (y_{p_1}'' + p(x)y_{p_1}' + q(x)y_{p_1}) + (y_{p_2}'' + p(x)y_{p_2}' + q(x)y_{p_2}) \\ &= f_1(x) + f_2(x). \blacksquare \end{aligned}$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε το Θεώρημα 5.3.3 για ΔΕ της μορφής

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (5.90)$$

όπου

$$f = f_1 + f_2 + \dots + f_k;$$

αν y_{p_i} είναι η ειδική λύση της

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x)$$

στο (a, b) για $i = 1, 2, \dots, k$, τότε $y_{p_1} + y_{p_2} + \dots + y_{p_k}$ είναι η ειδική λύση της (5.90) στο (a, b) . Βέβαια, η αρχή της υπέρθεσης ισχύει και για τη ΔΕ

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x)$$

αν y_{p_1} είναι η ειδική λύση της

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F_1(x)$$

στο (a, b) και y_{p_2} είναι η ειδική λύση της

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F_2(x)$$

στο (a, b) , τότε $y_{p_1} + y_{p_2}$ είναι λύση της

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F_1(x) + F_2(x)$$

στο (a, b) .

Πρόταση 5.3.1 (α') Αν a, b, c, α , και M είναι πραγματικές σταθερές και $M \neq 0$, τότε

$$ax^2y'' + bxy' + cy = Mx^\alpha \quad (5.91)$$

δέχεται ως ειδική λύση την $y_p = Ax^\alpha$ ($A = \text{σταθερά}$), αν και μόνο αν $\alpha(\alpha-1) + b\alpha + c \neq 0$.

(β') Αν α και M είναι πραγματικές σταθερές και $M \neq 0$ τότε η γραμμική ΔΕ με σταθερούς συντελεστές

$$ay'' + by' + cy = Me^{\alpha x} \quad (5.92)$$

δέχεται ως ειδική λύση την $y_p = Ae^{\alpha x}$ ($A = \text{σταθερά}$) αν και μόνο αν $e^{\alpha x}$ δεν είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ.

(γ') Αν M, N είναι μη μηδενικές σταθερές και $\omega > 0$, η γραμμική ΔΕ με σταθερούς συντελεστές

$$ay'' + by' + cy = M \cos \omega x + N \sin \omega x \quad (5.93)$$

δέχεται ως ειδική λύση έναν γραμμικό συνδυασμό από $\cos \omega x$ και $\sin \omega x$ αν και μόνο αν η ομογενής ΔΕ της (5.93) δεν είναι της μορφής $a(y'' + \omega^2 y)$, έτσι ώστε $\cos \omega x$ και

$\sin \omega x$ είναι λύσεις της ομογενούς ΔΕ.

5.3.2 Μέθοδος Προσδιορισμού των Συντελεστών

Η μέθοδος εφαρμόζεται στην επίλυση ΔΕ με σταθερούς συντελεστές και μη ομογενούς όρου ειδικής μορφής. Δηλαδή εξισώσεων, οι οποίες στην περίπτωση των ΔΕ 2ης-τάξης, είναι της μορφής:

$$ay'' + by' + cy = F(x) \quad (5.94)$$

Από τα Θεώρημα 5.3.2, η γενική λύση της (5.94) είναι $y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$, όπου y_p είναι η ειδική λύση της ΔΕ (5.94) και $\{y_1, y_2\}$ είναι το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ $ay'' + by' + cy = 0$. Σε αυτό το εδάφιο θα παρουσιάσουμε συστηματικούς τρόπους για την εύρεση μιας ειδικής λύσης y_p . Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε λέγεται *μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών*. Ο μη ομογενής όρος F στη ΔΕ (5.94) είναι μια από τις κάτωθι μορφές:

(α') Πολυωνυμική συνάρτηση.

(β') Εκθετική συνάρτηση, δηλαδή $F(x) = e^{rx}$.

(γ') Ημίτονο ή συνημίτονο, δηλαδή $F(x) = \sin \omega x$ ή $q(x) = \cos \omega x$.

(δ') Γινόμενο πολυωνύμου επί εκθετικής, δηλαδή $F(x) = p(x)e^{rx}$.

(ε') Γινόμενο πολυωνύμου επί ημιτόνου ή συνημιτόνου δηλαδή μη ομογενής όρος της μορφής $F(x) = p(x)\sin \omega x$ ή $F(x) = p(x)\cos \omega x$, όπου $p(x)$ πολώνυμο.

(ς') Γινόμενο πολυωνύμου, εκθετικής και ημιτόνου ή συνημιτόνου, δηλαδή μη ομογενής όρος της μορφής $F(x) = p(x)e^{rx}\sin \omega x$ ή $F(x) = p(x)e^{rx}\cos \omega x$, όπου $p(x)$ πολώνυμο.

(ζ') Γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων περιπτώσεων.

Το σημαντικό στοιχείο εδώ είναι ότι, σε κάθε μία από τις ανωτέρω μορφές, υπάρχει ειδική λύση παρόμοιας μορφής με τον μη ομογενή όρο. Ορισμένες περιπτώσεις τις παρουσιάσαμε στην Πρόταση 5.3.1.

Ας εξετάσουμε την περίπτωση που ο μη ομογενής όρος είναι εκθετική συνάρτηση $q(x) = e^{rx}$. Η ΔΕ (5.94) μπορεί να γραφεί σε τελεστική μορφή

$$Ly := ay'' + by' + cy = e^{rx}. \quad (5.95)$$

για τις διάφορες τιμές των a, b, c και r . Αναζητούμε ειδική λύση της μορφής $y_p = Ae^{rx}$, όπου A προσδιορίστέα σταθερά. Έχουμε:

$$L(Ae^{rx}) = a(Ae^{rx})'' + b(Ae^{rx})' + c(Ae^{rx}) = A(ar^2 + br + c)e^{rx}$$

Συνεπώς, αν

$$p(r) = ar^2 + br + c \neq 0,$$

τότε η συνάρτηση

$$y_p = \frac{1}{ar^2 + br + c} e^{rx} = \frac{1}{p(r)} e^{rx}$$

αποτελεί ειδική λύση, όπου $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ (του τελεστή L).

Τι συμβαίνει όταν το r μηδενίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο;

Σε αυτή την περίπτωση επιτρέπουμε στον εκθέτη $\varrho \in \mathbb{R}$ να μεταβάλλεται και ακολούθως παραγωγίζουμε ως προς ϱ . Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} L(e^{\varrho x}) = p(\varrho)e^{\varrho x} &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \varrho} L(e^{\varrho x}) = \frac{\partial}{\partial \varrho} (p(\varrho)e^{\varrho x}) \\ &\Rightarrow L\left(\frac{\partial}{\partial \varrho}(e^{\varrho x})\right) = (p'(\varrho) + xp(\varrho))e^{\varrho x} \\ &\Rightarrow L(xe^{\varrho x}) = (p'(\varrho) + xp(\varrho))e^{\varrho x} \end{aligned} \quad (5.96)$$

Αν θέσουμε στην ανωτέρω σχέση $\varrho = r$, και χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $p(r) = 0$ θα έχουμε

$$L(xe^{rx}) = p'(r)e^{rx}$$

Αν λοιπόν $p'(r) = ar^2 + br + c \neq 0$ (δηλ. η $\varrho = r$ είναι απλή ρίζα), τότε η συνάρτηση

$$y_p = \frac{1}{2ar + b}xe^{rx} = \frac{1}{p'(r)}xe^{rx}, \quad (5.97)$$

αποτελεί ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ. Η περίπτωση αυτή ονομάζεται περίπτωση *απλού συντονισμού*.

Τέλος, αν το r αποτελεί διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή $p(r) = p'(r) = 0$, τότε αν παραγωγίσουμε εκ νέου την (5.96), έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varrho} L(e^{\varrho x}) &= \frac{\partial}{\partial \varrho} (p'(\varrho) + \varrho p(\varrho))e^{\varrho x} \\ &\Rightarrow L(x^2e^{\varrho x}) = (p''(\varrho) + 2xp'(\varrho) + x^2p(\varrho))e^{\varrho x} \end{aligned}$$

Οπότε για $\varrho = r$ λαμβάνουμε:

$$L(x^2e^{rx}) = p''(r)e^{rx} = 2ae^{rx}$$

Στην τελευταία περίπτωση στην οποία έχουμε *διπλό συντονισμό* ειδική λύση είναι η

$$y_p = \frac{1}{2a}e^{rx} = \frac{1}{p''(r)}e^{rx} \quad (5.98)$$

Παράδειγμα 5.3.3 Ας εξετάσουμε τώρα τη ΔΕ της μορφής:

$$Ly = y'' + y = \cos \omega x \quad (5.99)$$

για διάφορες τιμές του ω .

Λύση Αναζητούμε ειδική λύση της μορφής

$$y_p = A\cos \omega x + B\sin \omega x,$$

οπότε

$$y_p'' + y_p = A(1 - \omega^2) \cos \omega x + B(1 - \omega^2) \sin \omega x.$$

Συνεπώς, για $\omega \neq \pm 1$, μια ειδική λύση θα είναι η

$$y_p(x) = \frac{1}{1 - \omega^2} \cos \omega x.$$

Στην περίπτωση όμως κατά την οποία $\omega = 1$ ή -1 , τότε παραγωγίζοντας ως προς ω , λαμβάνουμε:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} L(A \cos \omega x + B \sin \omega x) = \frac{\partial}{\partial \omega} (A(1 - \omega^2) \cos \omega x + B(1 - \omega^2) \sin \omega x),$$

οπότε ισοδύναμα:

$$L(-Ax \sin \omega x + Bx \cos \omega x) = (1 - \omega^2)(-Ax \sin \omega x + Bx \cos \omega x) - 2Ax \cos \omega x - 2Bx \sin \omega x.$$

Συνεπώς, αν θέσουμε $\omega = 1$, λαμβάνουμε:

$$L(-Ax \sin x + Bx \cos x) = -2Ax \cos x - 2Bx \sin x.$$

Αν θέσουμε $A = 0$ και $B = -1/2$, τότε το δεξιό μέλος της ανωτέρω σχέσης γίνεται ίσο προς $F(x) = \cos x$. Συνεπώς, η συνάρτηση

$$y_p(x) = -\frac{1}{2} x \sin x \quad (5.100)$$

αποτελεί ειδική λύση της ΔΕ $y'' + y = \cos x$.

Παράδειγμα 5.3.4 Να βρεθεί η γενική λύση της μη ομογενούς ΔΕ

$$x^3 y''' + xy' - y = x. \quad (5.101)$$

Λύση Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ είναι εξίσωση Euler. Πραγματοποιώντας τον μετασχηματισμό $y(x) = z(\log x)$, καταλήγουμε στη ΔΕ

$$z'''(\log x) - 3z''(\log x) + 3z'(\log x) - z(\log x) = x,$$

η οποία μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως:

$$z'''(x) - 3z''(x) + 3z'(x) - z(x) = e^x$$

με τον μη ομογενή όρο να υφίσταται τριπλό συντονισμό (διότι ο $r = 1$ στον εκθετικό όρο είναι τριπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της ομογενούς). Αναζητώντας ειδική λύση της μορφής

$$z_p(x) = Ax^3 e^x,$$

διαπιστώνουμε ότι $A = 1/6$. Ως εκ τούτου, λόγω του Παραδείγματος 5.3.3, η γενική λύση

ως προς z θα είναι:

$$z(x) = e^x \left(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \frac{x^3}{6} \right).$$

και ως εκ τούτου, πραγματοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό λαμβάνουμε:

$$y(x) = x \left(c_1 + c_2 \log x + c_3 (\log x)^2 + \frac{(\log x)^3}{6} \right),$$

η οποία αποτελεί την γενική λύση της ΔΕ (5.101)

Έστω η γραμμική ΔΕ n -οστής τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = F(x) \quad (5.102)$$

με μη ομογενή όρο της μορφής:

$$F(x) = e^{rx} (p(x)\cos\omega x + q(x)\sin\omega x),$$

όπου $p(x), q(x)$ πολυώνυμα και $\omega \in \mathbb{R}$. Λέγεται ότι ο όρος $F(x)$ υφίσταται *απλό (αντίστοιχα n -πλό) συντονισμό* αν ο $z = r + i\omega$ αποτελεί απλή (αντίστοιχα n -πλή) ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της (5.102).

Συνολικά, ισχύει το εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.3.4 Έστω η ΔΕ

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = F(x) \quad (5.103)$$

όπου a_0, a_1, \dots, a_n , πραγματικές σταθερές, $a_n \neq 0$ και

$$p(\zeta) = a_n \zeta^n + a_{n-1} \zeta^{n-1} + \dots + a_0$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(α') Αν ο μη ομογενής όρος είναι η συνάρτηση $F(x) = e^{rx}$, τότε η ΔΕ (5.103) έχει ειδική λύση της μορφής $y_p(x) = A e^{rx}$, αν $p(r) \neq 0$ (δηλαδή η r δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου). Ενώ αν r ρίζα πολλαπλότητας k , τότε έχει ειδική λύση της μορφής $A x^k e^{rx}$, όπου

$$A = \frac{1}{p^{(k)}(r)}.$$

(β') Αν η $F(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$, τότε η ΔΕ (5.103) έχει ειδική λύση της μορφής $y_p(x) = C \cos \omega x + D \sin \omega x$, αν $p(i\omega) \neq 0$ (δηλαδή, η φανταστική τιμή $i\omega$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου). Ενώ αν $p(i\omega) = 0$ (δηλαδή, $i\omega$ αποτελεί ρίζα του $p(\zeta)$), έχει ειδική λύση της μορφής $y(x) = x^k (C \cos \omega x + D \sin \omega x)$, όπου k η πολλαπλότητα της ρίζας.

(γ') Αν ο μη ομογενής όρος αποτελεί πολυώνυμο βαθμού n , τότε η ΔΕ (5.103) έχει ειδική λύση επίσης πολυώνυμο βαθμού $n, n + 1, n + k$ αν το $\zeta = 0$ δεν αποτελεί ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, είναι απλή ρίζα ή είναι ρίζα πολλαπλότητας k αντίστοιχα.

(δ') Αν $F(x) = q(x)e^{rx}$, όπου $q(x)$ πολυώνυμο βαθμού n , τότε η ΔΕ (5.103) έχει ειδική λύση επίσης πολυώνυμο επί την εκθετική e^{rx} , με το πολυώνυμο να είναι βαθμού n , $n+1$, $n+k$ αν το $\zeta = r$ δεν είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, είναι απλή ρίζα ή είναι ρίζα πολλαπλότητας k , αντίστοιχα.

(ε') Αν ο μη ομογενής όρος είναι της μορφής:

$$F(x) = e^{rx} (q_1(x)\cos\omega x + q_2(x)\sin\omega x),$$

όπου $q_1(x), q_2(x)$ πολυώνυμα με μέγιστο των δύο βαθμό n , τότε (5.103) έχει ειδική λύση της ίδιας μορφής

$$y_p(x) = e^{rx} (\tilde{q}_1(x)\cos\omega x + \tilde{q}_2(x)\sin\omega x),$$

όπου ο μέγιστος βαθμός των πολυωνύμων $\tilde{q}_1(x), \tilde{q}_2(x)$ είναι $n+k$, αν το $\zeta = r + i\omega$ αποτελεί ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου πολλαπλότητας k ($k \geq 0$).

Θα παρουσιάσουμε μερικά αντιπροσωπευτικά παραδείγματα για την επίλυση μη ομογενών γραμμικών ΔΕ.

Παράδειγμα 5.3.5 Να βρεθεί μια ειδική λύση των ΔΕ

$$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(-1 + 2x + x^2). \quad (5.104)$$

$$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}(6 + 8x + 12x^2). \quad (5.105)$$

Λύση Αντικαθιστώντας στη ΔΕ (5.104)

$$y_p = e^{3x} (A + Bx + Cx^2),$$

και, εξισώνοντας τους συντελεστές δυνάμεων του x , καταλήγουμε στο αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{aligned} 2C &= 1 \\ 2B + 6C &= 2 \\ 2A + 3B + 2C &= -1. \end{aligned}$$

η λύση του οποίου είναι $C = 1/2, B = -1/2, A = -1/4$. Συνεπώς, μια ειδική λύση της (5.104), δίνεται από

$$y_p = -\frac{e^{3x}}{4}(1 + 2x - 2x^2).$$

Για τη ΔΕ (5.105) παρατηρούμε ότι η e^{3x} είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ οπότε μια ειδική λύση της μη ομογενούς θα είναι της μορφής:

$$y_p = ue^{3x} (Ax + Bx^2 + Cx^3)$$

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ (5.105) και εξισώνοντας τους συντελεστές δυνάμεων του x καταλήγουμε προκύπτει $C = 2, B = -1$, και $A = 4$. Συνεπώς μια ειδική λύση της ΔΕ (5.105), είναι

$$y_p = xe^{3x}(4 - x + 2x^2).$$

Παράδειγμα 5.3.6 Να βρεθεί μια ειδική λύση για τις ΔΕ

$$y'' + 4y = 8 \cos 2x + 12 \sin 2x. \quad (5.106)$$

$$y'' + 3y' + 2y = (16 + 20x) \cos x + 10 \sin x. \quad (5.107)$$

$$y'' + y = (8 - 4x) \cos x - (8 + 8x) \sin x. \quad (5.108)$$

Λύση Αντικαθιστώντας ως ειδική λύση $y_p = A \cos 2x + B \sin 2x$ για y στην (5.106), έχουμε

$$y_p'' + 4y_p = -4(A \cos 2x + B \sin 2x) + 4(A \cos 2x + B \sin 2x) = 0$$

για οποιαδήποτε επιλογή των A και B , αλλά $\cos 2x$ και $\sin 2x$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ για την (5.106). Θα αναζητήσουμε ως ειδική λύση της μορφής

$$y_p = x(A \cos 2x + B \sin 2x). \quad (5.109)$$

Τότε

$$y_p' = A \cos 2x + B \sin 2x + 2x(-A \sin 2x + B \cos 2x)$$

και

$$\begin{aligned} y_p'' &= -4A \sin 2x + 4B \cos 2x - 4x(A \cos 2x + B \sin 2x) \\ &= -4A \sin 2x + 4B \cos 2x - 4y_p \text{ (see (5.109))}, \end{aligned}$$

οπότε

$$y_p'' + 4y_p = -4A \sin 2x + 4B \cos 2x.$$

Συνεπώς, η y_p είναι λύση της (5.106) αν

$$-4A \sin 2x + 4B \cos 2x = 8 \cos 2x + 12 \sin 2x,$$

δηλαδή αν $A = -3$ και $B = 2$. Συνεπώς

$$y_p = -x(3 \cos 2x - 2 \sin 2x)$$

είναι μια ειδική λύση της ΔΕ (5.106).

Οι συντελεστές των $\cos x$ και $\sin x$ στην (5.107) είναι πολυώνυμα βαθμού ένα και μηδέν αντίστοιχα. Οπότε αναζητούμε, σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.4 ως ειδική λύση της ΔΕ (5.107)

$$y_p = (A_0 + A_1x) \cos x + (B_0 + B_1x) \sin x. \quad (5.110)$$

Τότε

$$y_p' = (A_1 + B_0 + B_1x) \cos x + (B_1 - A_0 - A_1x) \sin x \quad (5.111)$$

και

$$y_p'' = (2B_1 - A_0 - A_1x) \cos x - (2A_1 + B_0 + B_1x) \sin x, \quad (5.112)$$

οπότε

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = [A_0 + 3A_1 + 3B_0 + 2B_1 + (A_1 + 3B_1)x] \cos x + [B_0 + 3B_1 - 3A_0 - 2A_1 + (B_1 - 3A_1)x] \sin x. \quad (5.113)$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές των όρων $x \cos x$, $x \sin x$, $\cos x$, και $\sin x$ στην παραπάνω σχέση με τους αντίστοιχους συντελεστές στην (5.107) έχουμε ότι η y_p είναι ειδική λύση της ΔΕ (5.107) αν

$$\begin{aligned} A_1 + 3B_1 &= 20 \\ -3A_1 + B_1 &= 0 \\ A_0 + 3B_0 + 3A_1 + 2B_1 &= 16 \\ -3A_0 + B_0 - 2A_1 + 3B_1 &= 10. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας $A_0 = 1$, $A_1 = 2$, $B_0 = -1$, $B_1 = 6$ στην (5.110) έχουμε

$$y_p = (1 + 2x) \cos x - (1 - 6x) \sin x$$

είναι ειδική λύση της (5.107).

Για την (5.108) αναζητούμε λύση της μορφής

$$y_p = (A_0x + A_1x^2) \cos x + (B_0x + B_1x^2) \sin x, \quad (5.114)$$

διότι $\cos x$ και $\sin x$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς. Οπότε

$$y_p'' + y_p = (2A_1 + 2B_0 + 4B_1x) \cos x + (2B_1 - 2A_0 - 4A_1x) \sin x.$$

Εργαζόμενοι όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα υπολογίζουμε τους συντελεστές $A_1 = 2$, $B_1 = -1$, $A_0 = 3$, $B_0 = 2$. Συνεπώς

$$y_p = x [(3 + 2x) \cos x + (2 - x) \sin x]$$

είναι μια ειδική λύση της ΔΕ (5.108).

Παράδειγμα 5.3.7 Να βρεθεί μια ειδική λύση για τις ΔΕ

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-2x} [2 \cos 3x - (34 - 150x) \sin 3x]. \quad (5.115)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} [(6 - 16x) \cos 2x - (8 + 8x) \sin 2x]. \quad (5.116)$$

Λύση Για τη ΔΕ (5.115) αναζητούμε μια ειδική λύση της μορφής

$$y = e^{-2x} ((A_0 + A_1x) \cos 3x + (B_0 + B_1x) \sin 3x).$$

Με αντικατάσταση στη ΔΕ και ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράψαμε σε προηγούμενα παραδείγματα (αφήνουμε τις πράξεις στον αναγνώστη για άσκηση) έχουμε τις τιμές των συντελεστών $A_0 = 1$, $A_1 = 7$, $B_0 = -2$, και $B_1 = 1$. Συνεπώς η

$$y_p = e^{-2x} [(1 + 7x) \cos 3x - (2 - x) \sin 3x]$$

είναι μια ειδική λύση για τη ΔΕ (5.115).

Επειδή $e^{-x} \cos 2x$ and $e^{-x} \sin 2x$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς, θεωρούμε μια ειδική λύση της (5.116) της μορφής

$$y_p = xe^{-x} [(A_0 + A_1x) \cos 2x + (B_0 + B_1x) \sin 2x].$$

Μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε στις εξής τιμές για τους συντελεστές $A_1 = 1$, $B_1 = -2$, $B_0 = 1$, $A_0 = 1$. Συνεπώς, η

$$y_p = xe^{-x} [(1 + x) \cos 2x + (1 - 2x) \sin 2x]$$

είναι μια ειδική λύση της Δ Ε(5.116). ■Στα επόμενα παραδείγματα παρουσιάζουμε έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού της ειδικής λύσης μιας ΔΕ. Συγκεκριμένα όταν ο μη ομογενής όρος περιέχει συνδυασμό εκθετικής e^{ax} με πολυωνυμική συνάρτησης $q(x)$, μπορούμε να αναζητήσουμε μια ειδική λύση της μορφής $y_p = ue^{ax}$ και εν συνεχεία να αναζητήσουμε κατάλληλη μορφή για τη συνάρτηση u .

Παράδειγμα 5.3.8 Να βρεθεί μια ειδική λύση της ΔΕ

$$y^{(4)} - y''' - 6y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(4 + 19x + 6x^2). \quad (5.117)$$

Λύση Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned} y_p &= ue^{2x}, \\ y_p' &= e^{2x}(u' + 2u), \\ y_p'' &= e^{2x}(u'' + 4u' + 4u), \\ y_p''' &= e^{2x}(u''' + 6u'' + 12u' + 8u), \\ y_p^{(4)} &= e^{2x}(u^{(4)} + 8u''' + 24u'' + 32u' + 16u) \end{aligned}$$

στην (5.117) και με απαλειφή του όρου e^{2x} έχουμε

$$\begin{aligned} (u^{(4)} + 8u''' + 24u'' + 32u' + 16u) - (u''' + 6u'' + 12u' + 8u) \\ - 6(u'' + 4u' + 4u) + 4(u' + 2u) + 8u = 4 + 19x + 6x^2, \end{aligned}$$

ή

$$u^{(4)} + 7u''' + 12u'' = 4 + 19x + 6x^2. \quad (5.118)$$

Αφού u και u' δεν εμφανίζονται στο αριστερό μέρος της προηγούμενης σχέσης, βλέπουμε ότι η (5.118) έχει μια ειδική λύση της μορφής

$$u_p = Ax^2 + Bx^3 + Cx^4. \quad (5.119)$$

Τότε

$$\begin{aligned}u_p' &= 2Ax + 3Bx^2 + 4Cx^3 \\u_p'' &= 2A + 6Bx + 12Cx^2 \\u_p''' &= 6B + 24Cx \\u_p^{(4)} &= 24C.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας u_p'' , u_p''' , και $u_p^{(4)}$ στο αριστερό μέρος της (5.118), έχουμε

$$\begin{aligned}u_p^{(4)} + 7u_p''' + 12u_p'' &= 24C + 7(6B + 24Cx) + 12(2A + 6Bx + 12Cx^2) \\&= (24A + 42B + 24C) + (72B + 168C)x + 144Cx^2.\end{aligned}$$

μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε $C = 1/24$, $B = 1/6$, $A = -1/6$. Αντικαθιστώντας στην (5.119), έχουμε

$$u_p = \frac{x^2}{24}(-4 + 4x + x^2)$$

είναι μια ειδική λύση της (5.118), δηλαδή

$$y_p = e^{2x}u_p = \frac{x^2 e^{2x}}{24}(-4 + 4x + x^2)$$

είναι μια ειδική λύση της (5.117). ■

Παράδειγμα 5.3.9 Να βρεθεί μια ειδική λύση της ΔΕ

$$y''' + 4y'' + 6y' + 4y = e^{-x} [(1 - 6x) \cos x - (3 + 2x) \sin x]. \quad (5.120)$$

Λύση Αντικαθιστώντας

$$\begin{aligned}y_p &= ue^{-x}, \\y_p' &= e^{-x}(u' - u), \\y_p'' &= e^{-x}(u'' - 2u' + u), \\y_p''' &= e^{-x}(u''' - 3u'' + 3u' - u)\end{aligned}$$

στην (5.120) και απαλείφοντας όρους e^{-x} , έχουμε

$$(u''' - 3u'' + 3u' - u) + 4(u'' - 2u' + u) + 6(u' - u) + 4u = (1 - 6x) \cos x - (3 + 2x) \sin x,$$

ή

$$u''' + u'' + u' + u = (1 - 6x) \cos x - (3 + 2x) \sin x. \quad (5.121)$$

Αφού $\cos x$ και $\sin x$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ

$$u''' + u'' + u' + u = 0,$$

έχουμε ότι μια ειδική λύση της (5.121) είναι της μορφής

$$u_p = (A_0x + A_1x^2) \cos x + (B_0x + B_1x^2) \sin x. \quad (5.122)$$

Τότε

$$\begin{aligned} u_p' &= [A_0 + (2A_1 + B_0)x + B_1x^2] \cos x + [B_0 + (2B_1 - A_0)x - A_1x^2] \sin x, \\ u_p'' &= [2A_1 + 2B_0 - (A_0 - 4B_1)x - A_1x^2] \cos x \\ &\quad + [2B_1 - 2A_0 - (B_0 + 4A_1)x - B_1x^2] \sin x, \\ u_p''' &= -[3A_0 - 6B_1 + (6A_1 + B_0)x + B_1x^2] \cos x \\ &\quad - [3B_0 + 6A_1 + (6B_1 - A_0)x - A_1x^2] \sin x, \end{aligned}$$

δηλ.

$$\begin{aligned} u_p''' + u_p'' + u_p' + u_p &= -[2A_0 - 2B_0 - 2A_1 - 6B_1 + (4A_1 - 4B_1)x] \cos x \\ &\quad - [2B_0 + 2A_0 - 2B_1 + 6A_1 + (4B_1 + 4A_1)x] \sin x. \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας του συντελεστές των $x \cos x$, $x \sin x$, $\cos x$ και $\sin x$ εδώ με τους αντίστοιχους στην (5.121), έχουμε ότι u_p είναι λύση της (5.121) αν

$$\begin{aligned} -4A_1 + 4B_1 &= -6 \\ -4A_1 - 4B_1 &= -2 \\ -2A_0 + 2B_0 + 2A_1 + 6B_1 &= 1 \\ -2A_0 - 2B_0 - 6A_1 + 2B_1 &= -3. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των $A_0 = -3/2$, $A_1 = 1$, $B_0 = -1/2$, $B_1 = -1/2$ στην (5.122) έχουμε ότι

$$u_p = -\frac{x}{2} [(3 - 2x) \cos x + (1 + x) \sin x]$$

είναι ειδική λύση της (5.121), οπότε η

$$y_p = e^{-x} u_p = -\frac{x e^{-x}}{2} [(3 - 2x) \cos x + (1 + x) \sin x]$$

είναι η ειδική λύση της ΔΕ (5.120). ■

5.3 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-4 να βρείτε τη γενική λύση των ΔΕ.

1. $y'' + 5y' - 6y = 22 + 18x - 18x^2$
2. $y'' - 4y' + 5y = 1 + 5x$
3. $y'' + 8y' + 7y = -8 - x + 24x^2 + 7x^3$
4. $y'' - 4y' + 4y = 2 + 8x - 4x^2$

Στις Ασκήσεις 5–14 να βρεθεί μια ειδική λύση της ΔΕ.

$$5. \quad x^2 y'' + 7xy' + 8y = \frac{6}{x} \qquad 6. \quad x^2 y'' - 7xy' + 7y = 13x^{1/2}$$

$$7. \quad x^2 y'' - xy' + y = 2x^3 \qquad 8. \quad x^2 y'' + 5xy' + 4y = \frac{1}{x^3}$$

$$9. \quad x^2 y'' + xy' + y = 10x^{1/3} \qquad 10. \quad x^2 y'' - 3xy' + 13y = 2x^4$$

$$11. \quad y'' + 5y' - 6y = 6e^{3x} \qquad 12. \quad y'' - 4y' + 5y = e^{2x}$$

$$13. \quad y'' + 2y' + 10y = e^{x/2} \qquad 14. \quad y'' + 6y' + 10y = e^{-3x}$$

15. Να αποδείξετε: αν a, b, c, α , και M σταθερές και $M \neq 0$ τότε η ΔΕ

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = Mx^\alpha$$

δέχεται ως ειδική λύση την $y_p = Ax^\alpha$ ($A = \text{σταθερά}$), αν και μόνο αν $a\alpha(\alpha - 1) + b\alpha + c \neq 0$.

Στις Ασκήσεις 16–62 να βρεθεί μια ειδική λύση.

$$16. \quad y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(1 + x) \qquad 17. \quad y'' - 6y' + 5y = e^{-3x}(35 - 8x)$$

$$18. \quad y'' - 2y' - 3y = e^x(-8 + 3x) \qquad 19. \quad y'' + 2y' + y = e^{2x}(-7 - 15x + 9x^2)$$

$$20. \quad y'' + 4y = e^{-x}(7 - 4x + 5x^2) \qquad 21. \quad y'' - y' - 2y = e^x(9 + 2x - 4x^2)$$

$$22. \quad y'' - 4y' - 5y = -6xe^{-x} \qquad 23. \quad y'' - 3y' + 2y = e^x(3 - 4x)$$

$$24. \quad y'' + y' - 12y = e^{3x}(-6 + 7x) \qquad 25. \quad 2y'' - 3y' - 2y = e^{2x}(-6 + 10x)$$

$$26. \quad y'' + 2y' + y = e^{-x}(2 + 3x) \qquad 27. \quad y'' - 2y' + y = e^x(1 - 6x)$$

$$28. \quad y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(1 - 3x + 6x^2)$$

$$29. \quad 9y'' + 6y' + y = e^{-x/3}(2 - 4x + 4x^2)$$

$$30. \quad y'' + y' + y = xe^x + e^{-x}(1 + 2x)$$

$$31. \quad y'' - 7y' + 12y = -e^x(17 - 42x) - e^{3x}$$

$$32. \quad y'' - 8y' + 16y = 6xe^{4x} + 2 + 16x + 16x^2$$

$$33. \quad y'' - 3y' + 2y = -e^{2x}(3 + 4x) - e^x$$

$$34. \quad y'' - 2y' + 2y = e^x(1 + x) + e^{-x}(2 - 8x + 5x^2)$$

35. $y'' + y = e^{-x}(2 - 4x + 2x^2) + e^{3x}(8 - 12x - 10x^2)$
 36. $y'' + 3y' - 2y = e^{-2x}[(4 + 20x) \cos 3x + (26 - 32x) \sin 3x]$
 37. $y'' + 4y = -12 \cos 2x - 4 \sin 2x$
 38. $y'' + y = (-4 + 8x) \cos x + (8 - 4x) \sin x$
 39. $4y'' + y = -4 \cos x/2 - 8x \sin x/2$
 40. $y'' + 2y' + y = 8x^2 \cos x - 4x \sin x$
 41. $y'' + 3y' + 2y = (12 + 20x + 10x^2) \cos x + 8x \sin x$
 42. $y'' + 3y' + 2y = (1 - x - 4x^2) \cos 2x - (1 + 7x + 2x^2) \sin 2x$
 43. $y'' - 5y' + 6y = -e^x[(4 + 6x - x^2) \cos x - (2 - 4x + 3x^2) \sin x]$
 44. $y'' - 2y' + y = -e^x[(3 + 4x - x^2) \cos x + (3 - 4x - x^2) \sin x]$
 45. $y'' - 2y' + 2y = e^x[(2 - 2x - 6x^2) \cos x + (2 - 10x + 6x^2) \sin x]$
 46. $y'' - 2y' - 3y = 4e^{3x} + e^x(\cos x - 2 \sin x)$
 47. $y'' + y = 4 \cos x - 2 \sin x + xe^x + e^{-x}$
 48. $y'' - 3y' + 2y = xe^x + 2e^{2x} + \sin x$
 49. $y'' - 2y' + 2y = 4xe^x \cos x + xe^{-x} + 1 + x^2$
 50. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(1 + x) + e^{2x}(\cos x - \sin x) + 3e^{3x} + 1 + x$
 51. $y^{(4)} + 8y''' + 32y'' + 64y' + 39y = e^{-2x}[(4 - 15x) \cos 3x - (4 + 15x) \sin 3x]$
 52. $y^{(4)} - 5y''' + 13y'' - 19y' + 10y = e^x[(7 + 8x) \cos 2x + (8 - 4x) \sin 2x]$
 53. $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = -2e^{-x}(\cos x - 2 \sin x)$
 54. $y^{(4)} - 8y''' + 32y'' - 64y' + 64y = e^{2x}(\cos 2x - \sin 2x)$
 55. $y^{(4)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = e^{2x}[3 \cos x - (1 + 3x) \sin x]$
 56. $y''' + y'' - y' - y = 4e^{-x}(1 - 6x) - 2x \cos x + 2(1 + x) \sin x$
 57. $y^{(4)} - 5y''' + 4y = -12e^x + 6e^{-x} + 10 \cos x$
 58. $y^{(4)} - 4y''' + 11y'' - 14y' + 10y = -e^x(\sin x + 2 \cos 2x)$
 59. $y^{(4)} + 2y''' - 3y'' - 4y' + 4y = 2e^x(1 + x) + e^{-2x}$
 60. $y^{(4)} + 4y = \sinh x \cos x - \cosh x \sin x$
 61. $y^{(4)} + 5y''' + 9y'' + 7y' + 2y = e^{-x}(30 + 24x) - e^{-2x}$
 62. $y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = e^x(12x - 2 \cos x + 2 \sin x)$

Στις Ασκήσεις 63-67 να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

63. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(1 + x)$ 64. $y'' - 6y' + 8y = e^x(11 - 6x)$
 65. $y'' + 6y' + 9y = e^{2x}(3 - 5x)$ 66. $y'' + 2y' - 3y = -16xe^x$

$$67. \quad y'' - 2y' + y = e^x(2 - 12x)$$

Στις Ασκήσεις 68-76 να λυθούν τα ΠΑΤ

$$68. \quad y'' - 7y' + 6y = -e^x(17 \cos x - 7 \sin x), \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2$$

$$69. \quad y'' - 2y' + 2y = -e^x(6 \cos x + 4 \sin x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$$

$$70. \quad y'' + 6y' + 10y = -40e^x \sin x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$$

$$71. \quad y'' - 6y' + 10y = -e^{3x}(6 \cos x + 4 \sin x), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7$$

$$72. \quad y'' - 3y' + 2y = e^{3x} [21 \cos x - (11 + 10x) \sin x], \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$$

$$73. \quad y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 2e^x(1 - 6x), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7, \quad y''(0) = 9$$

$$74. \quad y''' - y'' - y' + y = -e^{-x}(4 - 8x), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0$$

$$75. \quad 4y''' - 3y' - y = e^{-x/2}(2 - 3x), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 15, \quad y''(0) = -17$$

$$76. \quad y^{(4)} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = e^{-x}(20 - 12x), \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -4, \quad y''(0) = 7, \quad y'''(0) = -22$$

5.4 Υποβιβασμός της τάξης

Γενική μέθοδος επίλυσης της γραμμικής (ομογενούς ή μη) τάξης δύο ή μεγαλύτερης, δεν υπάρχει. Στην περίπτωση των ΔΕ 2ης-τάξης υπάρχει η δυνατότητα να βρεθεί η γενική λύση, αν είναι γνωστή μία μη μηδενική λύση της. Γενικότερα, αν σε μία γραμμική ΔΕ n -οστής τάξης είναι γνωστές k γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, τότε είναι δυνατόν να αναχθεί η ΔΕ σε εξίσωση $n - k$ τάξης.

Ας ξεκινήσουμε με ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.4.1

(α') Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ

$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = x^2, \quad (5.123)$$

αφού διαπιστωθεί ότι η $y_1 = e^x$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ

$$xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0. \quad (5.124)$$

(β') Να βρεθεί το θεμελιώδες σύνολο της ΔΕ (5.124).

Λύση (α) Πράγματι η $y_1 = e^x$ αποτελεί λύση της ΔΕ (5.123). Αν $y = ue^x$, τότε $y' = u'e^x + ue^x$ και $y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$, έτσι

$$\begin{aligned} xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y &= x(u''e^x + 2u'e^x + ue^x) \\ &\quad - (2x + 1)(u'e^x + ue^x) + (x + 1)ue^x \\ &= (xu'' - u')e^x. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η $y = ue^x$ είναι λύση της ΔΕ (5.123) αν και μόνο αν

$$(xu'' - u')e^x = x^2,$$

η οποία είναι ΔΕ 1ης-τάξης ως προς u' . Η τελευταία μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$u'' - \frac{u'}{x} = xe^{-x}. \quad (5.125)$$

Θέτοντας $z = u'$, η (5.125) γίνεται

$$z' - \frac{z}{x} = xe^{-x}. \quad (5.126)$$

Η $z_1 = x$ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$$z' - \frac{z}{x} = 0$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων, όπως παρουσιάστηκε στο εδάφιο 2.1, μπορούμε να δούμε ότι κάθε λύση της ΔΕ (5.126) είναι της μορφής

$$z = vx \quad \text{όπου} \quad v'x = xe^{-x}, \quad \text{οπότε} \quad v' = e^{-x} \quad \text{και} \quad v = -e^{-x} + C_1.$$

Αφού $u' = z = vx$, u είναι λύση της ΔΕ (5.125) αν και μόνο αν

$$u' = vx = -xe^{-x} + C_1x.$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$u = (x + 1)e^{-x} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2.$$

Συνεπώς η γενική λύση της (5.123) είναι

$$y = ue^x = x + 1 + \frac{C_1}{2}x^2e^x + C_2e^x. \quad (5.127)$$

(β) Για να δείξουμε ότι το σύνολο λύσεων

$$\{e^x, x^2e^x\}$$

αποτελεί θεμελιώδες σύνολο λύσεων για την ομογενή ΔΕ (5.124), αρκεί να υπολογίσουμε την αντίστοιχη ορίζουσα Wronski αυτών. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ορίζουσα Wronski είναι μη μηδενική. ■

Γενική περίπτωση

Θα παρουσιάσουμε την μεθοδολογία υποβιβασμού τάξης σε γενική περίπτωση. Δοθέ-

ντος ότι η $y(x)$ αποτελεί μη μηδενική λύση της ΔΕ

$$y'' + py' + qy = 0$$

τότε να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ:

$$\begin{cases} y''(x) + py(x)' + qy(x) = h(x), \\ y(\chi) = \xi_0, y'(\chi) = \xi_1. \end{cases} \quad (5.128)$$

Μεθοδολογία επίλυσης. Θέτουμε εκ νέου $y = \varphi u$ οπότε

$$y' = \varphi u' + \varphi' u, \quad y'' = \varphi u'' + 2\varphi' u' + \varphi'' u.$$

Αντικαθιστώντας στη ΔΕ έχουμε

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= \varphi u'' + 2\varphi' u' + \varphi'' u + p(\varphi u' + \varphi' u) + \varphi'' u \\ &= u(\varphi'' + p\varphi' + \varphi) + \varphi u'' + (2\varphi' + p\varphi)u' \\ &= \varphi u'' + (2\varphi' + p\varphi)u' \end{aligned}$$

Άρα, αναγόμενα στη ΔΕ

$$\varphi u'' + (2\varphi' + p\varphi)u' = h, \quad (5.129)$$

η οποία μπορεί να επιλυθεί ως γραμμική ΔΕ 1ης τάξης:

$$u'' + \left(\frac{2\varphi' + p\varphi}{\varphi} \right) u' = \frac{h}{\varphi}$$

Ως ολοκληρωτικό παράγοντα αυτής, μπορούμε να επιλέξουμε την συνάρτηση (αφήνουμε τους υπολογισμούς ως άσκηση στον αναγνώστη)

$$\mu(x) = \varphi^2(x) \exp \left(\int_{\chi}^x p(s) ds \right)$$

για κάποιο $\chi \in I$. Αν λοιπόν πολλαπλασιάσουμε με αυτόν τη ΔΕ (5.129) θα έχουμε:

$$\left(\varphi^2(x) e^{\int_{\chi}^x p(s) ds} u' \right)' = \varphi(x) h(x) e^{\int_{\chi}^x p(s) ds} \quad (5.130)$$

Όμως, επειδή $y' = \varphi' u + \varphi u'$, τότε

$$\varphi^2(x) u' = \varphi(x) y' - \varphi(x) \varphi'(x) u = \varphi(x) y' - \varphi'(x) y$$

Κατ'αυτό τον τρόπο η (5.130) λαμβάνει τη μορφή:

$$\left(e^{\int_{\chi}^x p(s) ds} (\varphi(x) y' - \varphi'(x) y) \right)' = \varphi(x) h(x) e^{\int_{\chi}^x p(s) ds}$$

Ολοκληρώνοντας στο διάστημα $[\chi, x]$ και ενσωματώνοντας τις αρχικές συνθήκες του ΠΑΤ

(5.128) λαμβάνουμε:

$$\varphi(x)y' - \varphi'(x)y = e^{-\int_x^x p(s)ds} (\varphi(\chi)\xi_1 - \varphi'(\chi)\xi_0) + \int_x^x \varphi(s)h(s)e^{-\int_x^x p(\sigma)d\sigma} ds$$

η οποία αποτελεί πλέον ΔΕ 1ης τάξης. Άρα λοιπόν η τάξη της αρχικής εξίσωσης έχει ήδη μειωθεί κατά ένα. Με αυτό τον τρόπο, το αρχικό πρόβλημα έχει αναχθεί στο παρακάτω ΠΑΤ

$$y' - \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right) y = g(x), y(\chi) = \xi_0$$

το οποίο είναι 1ης τάξης και

$$g(x) = \frac{1}{\varphi(x)} e^{-\int_x^x p(s)ds} (\varphi(\chi)\xi_1 - \varphi'(\chi)\xi_0) + \int_x^x \varphi(s)h(s)e^{-\int_x^x p(\sigma)d\sigma} ds$$

Στην παραπάνω διαδικασία πρέπει να υποθέσουμε ότι $\varphi(\chi) \neq 0$.

Παράδειγμα 5.4.2 Να βρεθεί η γενική λύση και το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0, \quad (5.131)$$

δοθέντως ότι $y_1 = x$ είναι μια λύση.

Λύση Αν $y = ux$, τότε $y' = u'x + u$ και $y'' = u''x + 2u'$, δηλ.

$$\begin{aligned} x^2 y'' - 3xy' + 3y &= x^2(u''x + 2u') - 3x(u'x + u) + 3ux \\ &= x^3 u'' - x^2 u'. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $y = ux$ είναι λύση της (5.131) αν και μόνο αν

$$x^3 u'' - x^2 u' = 0.$$

Διαχωρίζοντας μεταβλητές u' και x , έχουμε

$$\frac{u''}{u'} = \frac{1}{x},$$

δηλ

$$\ln |u'| = \ln |x| + k, \quad \text{ή ισοδύναμα,} \quad u' = C_1 x.$$

Συνεπώς

$$u = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2,$$

οπότε η γενική λύση της (5.131) είναι

$$y = ux = \frac{C_1}{2} x^3 + C_2 x,$$

η οποία γράφεται ως

$$y = c_1x + c_2x^3.$$

Συνεπώς, το $\{x, x^3\}$ είναι το θεμελιώδες σύνολο λύσεων για την (5.131). ■

5.4 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-9 να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ, δοθέντως ότι y_1 ικανοποιεί την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ. Επίσης, να βρείτε το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς.

1. $(2x + 1)y'' - 2y' - (2x + 3)y = (2x + 1)^2; \quad y_1 = e^{-x}$
2. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}; \quad y_1 = e^{2x}$
3. $4x^2y'' + (4x - 8x^2)y' + (4x^2 - 4x - 1)y = 4x^{1/2}e^x(1 + 4x); \quad y_1 = x^{1/2}e^x$
4. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x; \quad y_1 = e^x \cos x$
5. $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 8e^{-x(x+2)}; \quad y_1 = e^{-x^2}$
6. $x^2y'' + 2x(x - 1)y' + (x^2 - 2x + 2)y = x^3e^{2x}; \quad y_1 = xe^{-x}$
7. $x^2y'' - x(2x - 1)y' + (x^2 - x - 1)y = x^2e^x; \quad y_1 = xe^x$
 $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = -e^x; \quad y_1 = e^x$
8. $4x^2y'' - 4x(x + 1)y' + (2x + 3)y = 4x^{5/2}e^{2x}; \quad y_1 = x^{1/2}$
9. $x^2y'' - 5xy' + 8y = 4x^2; \quad y_1 = x^2$

Στις Ασκήσεις 10-17 να βρεθεί το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ, δοθέντως ότι y_1 είναι μια λύση.

10. $xy'' + (2 - 2x)y' + (x - 2)y = 0; \quad y_1 = e^x$
11. $x^2(\ln|x|)^2y'' - (2x \ln|x|)y' + (2 + \ln|x|)y = 0; \quad y_1 = \ln|x|$
12. $4xy'' + 2y' + y = 0; \quad y_1 = \sin \sqrt{x}$
13. $x^2y'' - (2a - 1)xy' + a^2y = 0; \quad y_1 = x^a$
14. $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0; \quad y_1 = x \sin x$
15. $4x^2(\sin x)y'' - 4x(x \cos x + \sin x)y' + (2x \cos x + 3 \sin x)y = 0; \quad y_1 = x^{1/2}$
16. $(2x + 1)xy'' - 2(2x^2 - 1)y' - 4(x + 1)y = 0; \quad y_1 = 1/x$
17. $xy'' - (4x + 1)y' + (4x + 2)y = 0; \quad y_1 = e^{2x}$

Στις Ασκήσεις 18-20 να λυθεί το αντίστοιχο ΠΑΤ, δοθέντως ότι η y_1 ικανοποιεί την αντίστοιχη ομογενή ΔΕ.

18. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 4x^4, \quad y(-1) = 7, \quad y'(-1) = -8; \quad y_1 = x^2$
19. $(3x - 1)y'' - (3x + 2)y' - (6x - 8)y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3; \quad y_1 = e^{2x}$
20. $(x + 1)^2y'' - 2(x + 1)y' - (x^2 + 2x - 1)y = (x + 1)^3e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1;$
 $y_1 = (x + 1)e^x$

5.5 Μεταβολή των Παραμέτρων

Σε αυτό το εδάφιο παρουσιάζουμε τη μέθοδο *μεταβολής των παραμέτρων* για την εύρεση μια ειδικής λύσης του ΠΑΤ

$$\begin{cases} y''(x) + py'(x) + qy(x) = h(x), \\ y(\chi) = \xi_0, y'(\chi) = \xi_1. \end{cases} \quad (5.132)$$

όπου $p, q, h \in C(I)$ και $\chi \in I$, αν γνωρίζουμε το θεμελιώδες σύνολο λύσεων $\{y_1, y_2\}$ της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ

$$y''(x) + py(x)' + qy(x) = 0. \quad (5.133)$$

Έχοντας βρεί την ειδική λύση y_p με τη συγκεκριμένη μέθοδο, μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση της (5.132) ως

$$y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2,$$

και εν συνεχεία να εφαρμόσουμε τις δοσμένες αρχικές συνθήκες.

Λόγω του ότι χρειαζόμαστε μια μη τετριμμένη λύση της ΔΕ (5.133) για να βρούμε την γενική λύση της (5.132) με τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης, είναι φυσικό να αναρωτηθούμε γιατί είναι ενδιαφέρουσα η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων, η οποία απαιτεί να γνωρίζουμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (5.133) για να επιτύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Η απάντηση είναι:

- Αν γνωρίζουμε δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (5.133), τότε η μεταβολή των παραμέτρων θα είναι πιθανόν πιο απλή από τον υποβιβασμό τάξης.
- Η μέθοδος μεταβολής παραμέτρων γενικεύεται εύκολα για την εύρεση ειδικών λύσεων ανώτερης τάξης ΔΕ (όπως θα δούμε παρακάτω) αλλά και σε γραμμικά συστήματα ΔΕ (βλ. εδάφιο 8.6), αφού ο υποβιβασμός δεν βοηθάει.
- Η Μεταβολή των Παραμέτρων είναι ισχυρό θεωρητικό εργαλείο και εφαρμόζεται από ερευνητές και σε άλλες περιπτώσεις.

Ας ξεκινήσουμε την παρουσίαση της μεθόδου. Ως γνωστόν, η γενική λύση της ΔΕ (5.133) είναι

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2.$$

Η μέθοδος ονομάζεται *μεταβολή των παραμέτρων*, διότι συνίσταται στην εύρεση μεταβλητών συντελεστών u_1, u_2 για τους οποίους η συνάρτηση

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 \quad (5.134)$$

αποτελεί λύση της αντίστοιχης μη ομογενούς. Λόγω του γεγονότος ότι u_1 και u_2 πρέπει να ικανοποιούν μια συνθήκη (ότι y_p είναι λύση της (5.132)), μπορούμε να διατυπώσουμε μια δεύτερη συνθήκη η οποία παράγει μια κατάλληλη απλοποίηση. Παραγωγίζοντας την (5.134) έχουμε

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2' + u_1'y_1 + u_2'y_2. \quad (5.135)$$

Πριν παραγωγίσουμε για δεύτερη φορά, απαιτούμε από τις προσδιοριστέες συναρτήσεις u_1 και u_2 να ικανοποιούν:

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0. \quad (5.136)$$

Τότε η (5.135) γράφεται

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'; \quad (5.137)$$

η οποία θα αποτελέσει μία από τις δύο εξισώσεις τις οποίες χρειαζόμαστε για τον προσδιορισμό των u_1 και u_2 .

Πράγματι, παραγωγίζοντας την (5.137), λαμβάνουμε

$$y_p'' = u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2'. \quad (5.138)$$

Αντικαθιστώντας τα y_p, y_p', y_p'' λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} h &= y_p'' + p y_p' + q y_p \\ &= u_1 y_1'' + u_2 y_2'' + u_1' y_1' + u_2' y_2' + p(u_1 y_1' + u_2 y_2') + q(u_1 y_1 + u_2 y_2) \\ &= u_1 (y_1''(x) + p y_1'(x) + q y_1(x)) + u_2 (y_2''(x) + p y_2'(x) + q y_2(x)) + u_1 y_1' + u_2 y_2'. \end{aligned}$$

Λαμβάνουμε τη δεύτερη εξίσωση για τα u_1 και u_2 :

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = h. \quad (5.139)$$

Συνεπώς, η (5.134) ικανοποιεί την (5.132) αν

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= h. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Οι εξισώσεις (5.140) αποτελούν σύστημα 2×2 με ορίζουσα Wronski των $y_1, y_2, W(y_1, y_2)$, η οποία είναι μη μηδενική, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ h & y_2' \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)}, \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & h \end{vmatrix}}{W(y_1, y_2)}$$

ή απλούστερα

$$u_1' = \frac{-y_2 h}{W(y_1, y_2)}, \quad u_2' = \frac{y_1 h}{W(y_1, y_2)}. \quad (5.141)$$

Οπότε μια λύση της μη ομογενούς ΔΕ θα είναι η

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_1(x) \int_x^x u_1'(s) ds + y_2(x) \int_x^x u_2'(s) ds \\ &= y_1(x) \int_x^x \frac{-y_2(s) h(s)}{W(y_1(s), y_2(s))} ds + y_2(x) \int_x^x \frac{y_1(s) h(s)}{W(y_1(s), y_2(s))} ds \\ &= \int_x^x \frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & y_1(x) \\ y_2(s) & y_2(x) \end{vmatrix}}{W(y_1(s), y_2(s))} h(s) ds \end{aligned} \quad (5.142)$$

η οποία όπως εύκολα διαπιστώνεται, ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες:

$$y_p(\chi) = y'_p(\chi) = 0,$$

άρα αποτελεί τη μοναδική λύση του ΠΑΤ (5.132) για $\chi_0 = \chi_1 = 0$.

Παράδειγμα 5.5.1 Να βρεθεί μια ειδική λύση y_p της ΔΕ

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^{9/2}, \quad (5.143)$$

αν οι $y_1 = x$ and $y_2 = x^2$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Τότε να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ (5.143).

Λύση Θέτουμε

$$y_p = u_1 x + u_2 x^2,$$

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε παραπάνω και ολοκληρώνοντας θέτοντας τις σταθερές ολοκλήρωσης με μηδέν έχουμε

$$u_1 = -\frac{2}{7}x^{7/2} \quad \text{and} \quad u_2 = \frac{2}{5}x^{5/2}.$$

Συνεπώς

$$y_p = u_1 x + u_2 x^2 = -\frac{2}{7}x^{7/2}x + \frac{2}{5}x^{5/2}x^2 = \frac{4}{35}x^{9/2},$$

και η γενική λύση της (5.143) είναι

$$y = \frac{4}{35}x^{9/2} + c_1 x + c_2 x^2. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 5.5.2 Να βρεθεί μια ειδική λύση y_p της

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2, \quad (5.144)$$

αν οι $y_1 = x$ και $y_2 = e^x$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0.$$

Τότε να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ (5.144).

Λύση Θέτουμε

$$y_p = u_1 x + u_2 e^x,$$

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε παραπάνω και ολοκληρώνοντας θέτοντας τις σταθερές ολοκλήρωσης με μηδέν έχουμε

$$u_1 = -x \quad \text{and} \quad u_2 = -(x+1)e^{-x}.$$

Συνεπώς

$$y_p = u_1x + u_2e^x = (-x)x + (-(x+1)e^{-x})e^x = -x^2 - x - 1,$$

και η γενική λύση της (5.144) είναι

$$y = y_p + c_1x + c_2e^x = -x^2 - x - 1 + c_1x + c_2e^x = -x^2 - 1 + (c_1 - 1)x + c_2e^x. \quad (5.145)$$

Επειδή c_1 είναι αυθαίρετη σταθερά, το ίδιο ισχύει και για $c_1 - 1$, συνεπώς μπορούμε να γράψουμε την γενική λύση στην μορφή

$$y = -x^2 - 1 + c_1x + c_2e^x. \quad \blacksquare \quad (5.146)$$

Παράδειγμα 5.5.3 Να βρεθεί μια ειδική λύση y_p της

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}. \quad (5.147)$$

και να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ.

Λύση

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad (5.148)$$

είναι $p(r) = r^2 + 3r + 2 = (r+1)(r+2)$, οπότε $y_1 = e^{-x}$ και $y_2 = e^{-2x}$ αποτελούν θεμελιώδεις σύνολο λύσεων της ΔΕ (5.148). Αναζητούμε μια ειδική λύση για τη ΔΕ (5.147) της μορφής

$$y_p = u_1e^{-x} + u_2e^{-2x},$$

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε παραπάνω και ολοκληρώνοντας θέτοντας τις σταθερές ολοκλήρωσης με μηδέν έχουμε

$$u_1 = \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{dv}{1+v} = \ln(1+v) = \ln(1+e^x)$$

και

$$\begin{aligned} u_2 &= - \int \frac{e^{2x}}{1+e^x} dx = - \int \frac{v}{1+v} dv = \int \left[\frac{1}{1+v} - 1 \right] dv \\ &= \ln(1+v) - v = \ln(1+e^x) - e^x. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 e^{-x} + u_2 e^{-2x} \\ &= [\ln(1 + e^x)]e^{-x} + [\ln(1 + e^x) - e^x] e^{-2x}, \end{aligned}$$

οπότε

$$y_p = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(1 + e^x) - e^{-x}.$$

Επειδή ο τελευταίος όρος στην προηγούμενη σχέση είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς μπορούμε να τον απαλείψουμε, δηλαδή

$$y_p = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(1 + e^x).$$

Η γενική λύση της ΔΕ (5.147) είναι

$$y = y_p + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(1 + e^x) + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}. \blacksquare$$

Παράδειγμα 5.5.4 Να λυθεί το ΠΑΤ

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = \frac{2}{x+1}, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -5, \quad (5.149)$$

δοθέντως ότι

$$y_1 = \frac{1}{x-1} \quad \text{and} \quad y_2 = \frac{1}{x+1}$$

είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς ΔΕ

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0.$$

Λύση Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων για την εύρεση μιας ειδικής λύσης της ΔΕ

$$(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = \frac{2}{x+1}$$

στο $(-1, 1)$ στην μορφή

$$y_p = \frac{u_1}{x-1} + \frac{u_2}{x+1},$$

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που αναπτύξαμε παραπάνω και ολοκληρώνοντας θέτοντας τις σταθερές ολοκλήρωσης με μηδέν έχουμε

$$\begin{aligned} u_1 &= - \int \frac{x-1}{x+1} dx = - \int \frac{x+1-2}{x+1} dx \\ &= \int \left[\frac{2}{x+1} - 1 \right] dx = 2 \ln(x+1) - x \end{aligned}$$

and

$$u_2 = \int dx = x.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} y_p &= \frac{u_1}{x-1} + \frac{u_2}{x+1} = [2 \ln(x+1) - x] \frac{1}{x-1} + x \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{2 \ln(x+1)}{x-1} + x \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right] = \frac{2 \ln(x+1)}{x-1} - \frac{2x}{(x+1)(x-1)}. \end{aligned}$$

Όμως, επειδή ο τελευταίος όρος στην προηγούμενη σχέση

$$\frac{2x}{(x+1)(x-1)} = \left[\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right]$$

είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς μπορούμε να τον απαλείψουμε, δηλαδή

$$y_p = \frac{2 \ln(x+1)}{x-1}.$$

Συνεπώς, η γενική λύση της ΔΕ (5.150) είναι

$$y = \frac{2 \ln(x+1)}{x-1} + \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{x+1}. \quad (5.150)$$

Παραγωγίζοντας αυτή

$$y' = \frac{2}{x^2-1} - \frac{2 \ln(x+1)}{(x-1)^2} - \frac{c_1}{(x-1)^2} - \frac{c_2}{(x+1)^2}.$$

και θέτοντας $x = 0$ στις δυο τελευταίες σχέσεις και επιβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες $y(0) = -1$ and $y'(0) = -5$ προσδιορίζουμε τις τιμές $c_1 = 2$, $c_2 = 1$. Αντικαθιστώντας στην (5.150), έχουμε

$$\begin{aligned} y &= \frac{2 \ln(x+1)}{x-1} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{2 \ln(x+1)}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2-1} \end{aligned}$$

ως λύση της ΔΕ (5.149). ■

Η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων δύναται να γενικευθεί και στην περίπτωση των εξισώσεων n -οστής τάξης. Έστω λοιπόν η n -άδα $\{y_1, \dots, y_n\}$ αποτελεί θεμελιώδες σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$Ly = 0, L := D^n + p_{n-1}(x)D^{n-1} + \dots + p_0(x).$$

Ας υποθέσουμε ότι αναζητούμε τη λύση του ΠΑΤ

$$\begin{cases} Ly = h(x), \\ y^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1 \end{cases} \quad (5.151)$$

Όπως και στην περίπτωση της δεύτερης τάξης, θα αναζητήσουμε λύση με μεταβλητούς συντελεστές

$$y(x) = \sum_{l=1}^n u_l(x)y_l(x).$$

Ο προσδιορισμός των n αγνώστων μεταβλητών συντελεστών είναι εφικτός όταν έχουμε στην διάθεσή μας n κατάλληλες εξισώσεις. Οι $n-1$ από αυτές επιλέγονται αυθαίρετα, ενώ μόνο η n -οστή αποτελεί τη ΔΕ. Έχουμε λοιπόν:

$$y'(x) = \sum_{l=1}^n u_l'(x)y_l(x) + \sum_{l=1}^n u_l(x)y_l'(x), \quad (5.152)$$

οπότε η πρώτη μας εξίσωση θα είναι η

$$u_1'(x)y_1(x) + \dots + u_n'(x)y_n(x) = 0 \quad (5.153)$$

Παραγωγίζοντας εκ νέου, την (5.152) και χρησιμοποιώντας την (5.153), λαμβάνουμε:

$$y''(x) = \sum_{l=1}^n u_l'(x)y_l'(x) + \sum_{l=1}^n u_l(x)y_l''(x),$$

από όπου και η δεύτερη μας εξίσωση:

$$u_1'(x)y_1'(x) + \dots + u_n'(x)y_n'(x) = 0 \quad (5.154)$$

Με αυτή την διαδικασία προκύπτουν οι πρώτες $n-1$ εξισώσεις. Συγκεκριμένα, η k -οστή παράγωγος της y θα είναι η

$$y^{(k)}(x) = \sum_{l=1}^n u_l'(x)y_l^{(k-1)}(x) + \sum_{l=1}^n u_l(x)y_l^{(k)}(x),$$

από όπου προκύπτει και η k -οστή εξίσωση για τις u_1, \dots, u_n

$$u_1'(x)y^{(k-1)}(x) + \dots + u_n'(x)y^{(k-1)}(x) = 0$$

Τέλος, η n -οστή παράγωγος της y θα είναι η

$$y^{(n)}(x) = \sum_{l=1}^n u_l'(x)y_l^{(n-1)}(x) + \sum_{l=1}^n u_l(x)y_l^{(n)}(x),$$

Αντικαθιστώντας τα $y, y', \dots, y^{(n)}$ με αυτό με το οποίο ισούται, λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} h &= y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_0y^{(0)} \\ &= u'_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + u'_n(x)y^{(n-1)}(x) + u_1(x)y_1^{(n)}(x) + \dots + u_n(x)y_n^{(n)} \\ &\quad + p_{n-1} \left(u_1y_1^{(k)} + \dots + u_ny_n^{(k)} \right) + \dots + p_0 (u_1y_1 + \dots + u_ny_n) \\ &= u_1 \left(y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_0y_1 \right) + \dots + \\ &\quad + u_n \left(y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + p_0y_n \right) + u'_1(x)y^{(n-1)} + \dots + u'_ny^{(n-1)} \\ &= 0 + \dots + 0 + u'_1y_n^{(n-1)} + \dots + u'_ny_n^{(n-1)}, \end{aligned}$$

η οποία αποτελεί και την n -οστή εξίσωση. Συνολικά, έχουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned} u'_1(x)y(x) + \dots + u'_n(x)y(x) &= 0, \\ u'_1(x)y'(x) + \dots + u'_n(x)y'(x) &= 0, \\ &\vdots \\ u'_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \dots + u'_n(x)y_n^{(n-1)}(x) &= h, \end{aligned}$$

το οποίο έχει λύση διότι η ορίζουσα του συστήματος είναι η ορίζουσα Wronski η οποία δεν μηδενίζεται λόγω του ότι οι $\{y_1, \dots, y_n\}$ αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων. Η λύση του συστήματος λαμβάνεται με τον κανόνα του Cramer:

$$u'_k(x) = \frac{W_k(y_1(x), \dots, y_n(x))}{W(y_1(x), \dots, y_n(x))}, \quad k = 1, \dots, n$$

όπου

$$W(x) = W(y_1(x), \dots, y_n(x))$$

η ορίζουσα Wronski, ενώ οι συναρτήσεις

$$W_k(x) = W_k(y_1(x), \dots, y_n(x))$$

δίνονται από τον τύπο

$$W_k(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_{k-1}(x) & 0 & y_{k+1}(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_{k-1}^{(n-2)}(x) & 0 & y_{k+1}^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_{k-1}^{(n-1)}(x) & h & y_{k+1}^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Αν τώρα $\chi \in I$, όπου I το πεδίο ορισμού των λύσεων, τότε μια λύση της ΔΕ $Ly = h$ θα είναι η

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x) \int_{\chi}^x u'_1(s)ds + \dots + y_n(x) \int_{\chi}^x u'_n(s)ds \\ &= y_1(x) \int_{\chi}^x \frac{W_1(s)}{W(s)}ds + \dots + y_n(x) \int_{\chi}^x \frac{W_n(s)}{W(s)}ds = \int_{\chi}^x \frac{W(x, s)}{W(s)}h(s)ds. \end{aligned}$$

όπου

$$W(x, s) = \begin{vmatrix} y_1(s) & \cdots & y_{n-1}(s) & y_n(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & \cdots & y_{n-1}^{(n-2)}(s) & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(x) & \cdots & y_{n-1}(x) & y_n(x) \end{vmatrix}$$

και είναι μάλιστα η λύση εκείνη η οποία ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες

$$y(\chi) = y'(\chi) = \cdots = y^{(n-1)}(\chi).$$

Άρα, είναι και η μοναδική λύση του ΠΑΤ (5.151).

5.5 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-6 να βρεθεί μια ειδική λύση της ΔΕ με την μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων.

1. $y'' + 9y = \tan 3x$
2. $y'' + 4y = \sin 2x \sec^2 2x$
3. $y'' - 3y' + 2y = \frac{4}{1 + e^{-x}}$
4. $y'' - 2y' + 2y = 3e^x \sec x$
5. $y'' - 2y' + y = 14x^{3/2}e^x$
6. $y'' - y = \frac{4e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$

Στις Ασκήσεις 7-26 να βρεθεί μια ειδική λύση της ΔΕ με την μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων, δοθέντων των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς.

7. $x^2y'' + xy' - y = 2x^2 + 2; \quad y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x}$
8. $xy'' + (2 - 2x)y' + (x - 2)y = e^{2x}; \quad y_1 = e^x, \quad y_2 = \frac{e^x}{x}$
9. $4x^2y'' + (4x - 8x^2)y' + (4x^2 - 4x - 1)y = 4x^{1/2}e^x, \quad x > 0; \\ y_1 = x^{1/2}e^x, \quad y_2 = x^{-1/2}e^x$
10. $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 4e^{-x(x+2)}; \quad y_1 = e^{-x^2}, \quad y_2 = xe^{-x^2}$
11. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^{5/2}, \quad x > 0; \quad y_1 = x^2, \quad y_2 = x^3$
12. $x^2y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 \sin x; \quad y_1 = x, \quad y_2 = x^3$
13. $(2x + 1)y'' - 2y' - (2x + 3)y = (2x + 1)^2e^{-x}; \quad y_1 = e^{-x}, \quad y_2 = xe^x$
14. $4xy'' + 2y' + y = \sin \sqrt{x}; \quad y_1 = \cos \sqrt{x}, \quad y_2 = \sin \sqrt{x}$
15. $xy'' - (2x + 2)y' + (x + 2)y = 6x^3e^x; \quad y_1 = e^x, \quad y_2 = x^3e^x$
16. $x^2y'' - (2a - 1)xy' + a^2y = x^{a+1}; \quad y_1 = x^a, \quad y_2 = x^a \ln x$
17. $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = x^3 \cos x; \quad y_1 = x \cos x, \quad y_2 = x \sin x$

18. $xy'' - y' - 4x^3y = 8x^5$; $y_1 = e^{x^2}$, $y_2 = e^{-x^2}$
19. $(\sin x)y'' + (2 \sin x - \cos x)y' + (\sin x - \cos x)y = e^{-x}$; $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-x} \cos x$
20. $4x^2y'' - 4xy' + (3 - 16x^2)y = 8x^{5/2}$; $y_1 = \sqrt{x}e^{2x}$, $y_2 = \sqrt{x}e^{-2x}$
21. $x^4y^{(4)} - 4x^3y''' + 12x^2y'' - 24xy' + 24y = x^4$; $\{x, x^2, x^3, x^4\}$
22. $x^4y^{(4)} - 4x^3y''' + 2x^2(6 - x^2)y'' + 4x(x^2 - 6)y' + (x^4 - 4x^2 + 24)y = 4x^5e^x$;
 $\{xe^x, x^2e^x, xe^{-x}, x^2e^{-x}\}$
23. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 2x^2y'' - 4xy' + 4y = 12x^2$; $\{x, x^2, 1/x, 1/x^2\}$
24. $xy^{(4)} + 4y''' - 2xy'' - 4y' + xy = 4e^x$; $\{e^x, e^{-x}, e^x/x, e^{-x}/x\}$
25. $xy^{(4)} + (4 - 6x)y''' + (13x - 18)y'' + (26 - 12x)y' + (4x - 12)y = 3e^x$; $\{e^x, e^{2x}, e^x/x, e^{2x}/x\}$
26. $x^4y^{(4)} - 4x^3y''' + x^2(12 - x^2)y'' + 2x(x^2 - 12)y' + 2(12 - x^2)y = 2x^5$; $\{x, x^2, xe^x, xe^{-x}\}$

Στις Ασκήσεις 27-38 με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων, να λυθούν τα ΠΑΤ, δοθέντων των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς.

27. $(3x - 1)y'' - (3x + 2)y' - (6x - 8)y = (3x - 1)^2e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
 $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{-x}$
28. $(x - 1)^2y'' - 2(x - 1)y' + 2y = (x - 1)^2$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -6$;
 $y_1 = x - 1$, $y_2 = x^2 - 1$
29. $(x - 1)^2y'' - (x^2 - 1)y' + (x + 1)y = (x - 1)^3e^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -6$;
 $y_1 = (x - 1)e^x$, $y_2 = x - 1$
30. $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$; $y_1 = \frac{1}{x - 1}$, $y_2 = \frac{1}{x + 1}$
31. $x^2y'' + 2xy' - 2y = -2x^2$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$; $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x^2}$
32. $(x + 1)(2x + 3)y'' + 2(x + 2)y' - 2y = (2x + 3)^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
 $y_1 = x + 2$, $y_2 = \frac{1}{x + 1}$
33. $(x^2 - 2x + 2)y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = (x^2 - 2x + 2)^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$,
 $y''(0) = 0$; $\{x, x^2, e^x\}$
34. $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = x(x + 1)$, $y(-1) = -6$, $y'(-1) = \frac{43}{6}$, $y''(-1) = -\frac{5}{2}$;
 $\{x, x^2, 1/x\}$
35. $(3x - 1)y''' - (12x - 1)y'' + 9(x + 1)y' - 9y = 2e^x(3x - 1)^2$, $y(0) = \frac{3}{4}$,
 $y'(0) = \frac{5}{4}$, $y''(0) = \frac{1}{4}$; $\{x + 1, e^x, e^{3x}\}$
36. $(x^2 - 2)y''' - 2xy'' + (2 - x^2)y' + 2xy = 2(x^2 - 2)^2$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -5$,
 $y''(0) = 5$; $\{x^2, e^x, e^{-x}\}$

37. $x^4 y^{(4)} + 3x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 9x^2$, $y(1) = -7$, $y'(1) = -11$, $y''(1) = -5$, $y'''(1) = 6$; $\{x, x^2, 1/x, x \ln x\}$
38. $(2x-1)y^{(4)} - 4xy''' + (5-2x)y'' + 4xy' - 4y = 6(2x-1)^2$, $y(0) = \frac{55}{4}$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 13$, $y'''(0) = 1$; $\{x, e^x, e^{-x}, e^{2x}\}$

5.6 Εφαρμογές των Γραμμικών ΔΕ

5.6.1 Μηχανικές ταλαντώσεις

Ένα ελικοειδές ελατήριο (σούστα) αντιστέκεται στη συμπίεση ή την επιμήκυνσή του. Με άλλα λόγια, τείνει να διατηρήσει το φυσικό του μήκος, L . Αυτό σημαίνει ότι, σε κάθε σώμα Σ που είναι προσδεμένο σ' ένα από τα ελεύθερα άκρα του, το παραμορφωμένο ελατήριο ασκεί κάποια δύναμη, F_s . Το μέγεθος της F_s εξαρτιέται τόσο από την κατασκευή του ελατηρίου όσο και από την αλλαγή του μήκους του, ΔL . Όταν το κλάσμα $\Delta L/L$ είναι μικρό, τότε μια ικανοποιητική αναπαράσταση της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο Σ δίνεται από τη σχέση $F_s l = -k\Delta L$. Η θετική παράμετρος k δείχνει το πόσο ισχυρό είναι το ελατήριο και, άρα, εκφράζει την κατασκευή του. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα ενός ελατηρίου που το ένα άκρο του είναι στερεωμένο στο "ταβάνι" και στο άλλο έχει προσδεθεί ένα σώμα Σ μάζας m . Όταν το σύστημα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, έχουμε την κατάσταση που παριστάνει το επόμενο σχήμα. Αν αυτή η κατάσταση αντιστοιχεί στην επιμήκυνση του ελατηρίου κατά ΔL_0 , τότε το Σ ισορροπεί υπό την επίδραση δύο δυνάμεων: Του βάρους του, B , και της δύναμης $F_s = -k\Delta L_0$ που ασκεί επάνω του το ελατήριο. Αυτό σημαίνει ότι η ολική δύναμη, F , που υφίσταται το Σ μηδενίζεται:

$$F = B + F_s = 0 \quad (5.155)$$

Αν θεωρήσουμε ως θετική την προς το πάτωμα κατεύθυνση, τότε το βάρος του σώματος είναι ίσο με το γινόμενο mg , όπου $g \equiv 9,8 \text{ m/sec}^2$. Συνεπώς, η (5.155) γίνεται

$$mg - k\Delta L_0 = 0, \quad (5.156)$$

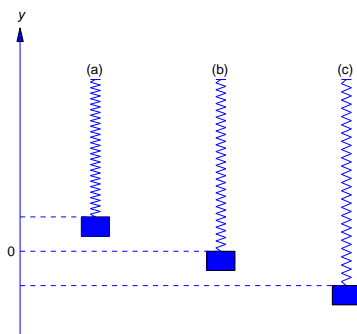
οπότε

$$\Delta L_0 = \frac{mg}{k} \quad (5.157)$$

Από αυτή τη σχέση έπεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η χαρακτηριστική σταθερή k , τόσο μικρότερη θα είναι η επιμήκυνση του ελατηρίου. Ισοδύναμα, αν κρεμάσουμε δύο σώματα του ίδιου βάρους σε δύο ελατήρια με χαρακτηριστικές k_1 και $k_2 > k_1$, αντίστοιχα, τότε το δεύτερο ελατήριο θα ξεντώσει λιγότερο -είναι το πιο ισχυρό ή "σφιχτό".

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι τραβάμε το σώμα Σ προς τα κάτω και μετά το αφήνουμε, ή το χτυπάμε ελαφρά προς τα πάνω. Τότε θα παρατηρήσουμε ότι το Σ αρχίζει να ανεβοκατεβαίνει και, μετά από μερικές ταλαντώσεις, θα σταματήσει στη θέση όπου ισορροπούσε

αρχικά. Αυτές οι ταλαντώσεις και η απόσβεσή τους μπορούν να εξηγηθούν με πολύ απλό τρόπο. Ας επιλέξουμε ως άξονα x την κατακόρυφη ευθεία κατά μήκος της οποίας κινείται το Σ , με τη θετική του φορά προς τα κάτω. Ως αρχή αυτού του άξονα βολεύει να θεωρήσουμε το σημείο όπου ισορροπούσε το Σ αρχικά (βλ Στο Σχήμα 5.1). Τότε, ο 2ος νόμος της Νευτωνικής μηχανικής παίρνει την ακόλουθη μορφή: Τη χρονική στιγμή t , η θέση του Σ δίνεται από τον αριθμό $x = y(t)$, όπου $y(t)$ μια λύση της ΔΕ



Σχήμα 5.1: (a) $y > 0$ (b) $y = 0$, (c) $y < 0$



Σχήμα 5.2: Σύστημα ελατήριο-μάζα με απώλειες.

$$my'' = F(t), \quad t \in I \quad (5.158)$$

Στην προκείμενη περίπτωση, η συνολική δύναμη $F(t)$ που δρα στο Σ έχει τις ακόλουθες συνιστώσες:

(α') Το βάρος $B = mg$ του ίδιου του σώματος Σ .

(β') Την "δύναμη επαναφοράς", $F_s(t) = -k(\Delta L_0 + y(t))$ που ασκεί στο Σ το ελατήριο

(γ') Την αντίσταση του αέρα. Είναι η δύναμη που κάνει το Σ να χάνει διαρκώς ενέργεια, με αποτέλεσμα να επανέρχεται στη θέση ισορροπίας. Όπως τονίσαμε και με άλλη ευκαιρία, ο τύπος $F_{res}(t) = -ry'(t)$ δίνει μια (ικανοποιητική για μικρές ταχύτητες) αναπαράσταση αυτής της δύναμης.

Συνεπώς, η εξίσωση (5.158) γίνεται

$$my'' = mg - k(\Delta L_0 + y) - ry', \quad (5.159)$$

όπου, για ευκολία, παραλείψαμε τη ρητή αναφορά της ανεξάρτητης μεταβλητής, t . Αλλά, από τη συνθήκη ισορροπίας (5.156) έπεται ότι η (5.159) γίνεται

$$my'' = -ky - ry', \quad (5.160)$$

Τώρα, είναι φανερό ότι αρκεί να θέσουμε

$$\frac{r}{m} = 2\kappa, \quad \frac{k}{m} = \lambda \quad (5.161)$$

για να φέρουμε την (5.160) στη μορφή

$$y'' + 2\kappa y' + \lambda y = 0, \quad (5.162)$$

που μελετήσαμε νωρίτερα. Σημειώνουμε, ωστόσο, ότι, σε αντίθεση με τη γενική περίπτωση, οι φυσικές σταθερές κ, λ είναι πάντα θετικές.

Θυμίζουμε ότι η μορφή της γενικής λύσης της (5.162) καθορίζεται από το πρόσημο του συνδυασμού $\lambda^2 - \kappa^2$. Αφού στην προκειμένη περίπτωση $\lambda > 0$, μπορούμε να θέσουμε

$$\lambda = \omega_0^2, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.163)$$

και να περιγράψουμε τις τρεις δυνατές περιπτώσεις με τον ακόλουθο τρόπο:

(i) $\omega_0 > \kappa \Leftrightarrow r^2 < 4mk$ (*Φθίνουσα αρμονική ταλάντωση*). Κάτω από αυτή την προϋπόθεση, η λύση γίνεται

$$y = e^{-\kappa t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t), \quad \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}. \quad (5.164)$$

Είναι φανερό ότι σ' αυτή την περίπτωση η κίνηση του σώματος Σ είναι μια *φθίνουσα ταλάντωση*. Κι αυτό γιατί, όσο εξαρτιέται από τον παράγοντα $c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$, το σωματίο ταλαντεύεται γύρω από το σημείο $x = 0$ με γωνιακή ταχύτητα ω , δηλαδή με συχνότητα $\nu = \omega\{2\pi\}$. Από την άλλη, ο παράγοντας $e^{-\kappa t}$ φθίνει συνεχώς. Σαν αποτέλεσμα, η μέγιστη απομάκρυνση του Σ από τη θέση ισορροπίας μειώνεται σε κάθε κύκλο της ταλάντωσης. Σημειώστε ότι, η στιγμιαία ταχύτητα του Σ δίνεται από τη συνάρτηση

$$v := y'(t) = e^{-\kappa t} ((\omega c_2 - \kappa c_1) \cos \omega t - (\omega c_1 + \kappa c_2) \sin \omega t). \quad (5.165)$$

Συνεπώς, η ταχύτητα μηδενίζεται τις στιγμές $\{t_j\}$, κατά τις οποίες

$$\tan \omega t_j = \frac{(\omega c_2 - \kappa c_1)}{(\omega c_1 + \kappa c_2)}. \quad (5.166)$$

(ii) $\omega_0 = \kappa \Leftrightarrow r^2 = 4mk$ (Κρίσιμη απόσβεση). Τώρα, η κίνηση του σώματος Σ περιγράφεται από την γενική λύση

$$y = (c_1 t + c_2) e^{-\kappa t}. \quad (5.167)$$

Από αυτή την έκφραση γίνεται φανερό ότι, εξαιτίας του παράγοντα $e^{-\kappa t}$, η απόσταση $|u(t)|$ του Σ από το σημείο $x = 0$ θα μειώνεται πολύ γρήγορα. Από την άλλη, ο παράγοντας $c_1 t + c_2$ μπορεί να μηδενιστεί για μία το πολύ τιμή της χρονικής μεταβλητής t . Συνακόλουθα, το Σ είτε θα παραμείνει στη μια πλευρά σημείου ισορροπίας καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησής του, είτε θα "καταφέρει" να περάσει κάποια στιγμή από την άλλη, για να παραμείνει εκεί έως ότου πάψει να κινείται.

(iii) $\omega_0 > \kappa \Leftrightarrow r^2 > 4mk$ (Υπερκρίσιμη απόσβεση). Όταν ο συντελεστής αντίστασης ξεπεράσει το κατώφλι ω_0 , η γενική λύση που περιγράφει την κίνηση του Σ δίνεται από τις συναρτήσεις

$$y = c_1 e^{-(\kappa+\nu)t} + c_2 e^{-(\kappa-\nu)t}, \quad \nu := \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}. \quad (5.168)$$

Από τον ορισμό της σταθερής ν και το γεγονός ότι $\kappa > 0$ έπεται ότι $\kappa \pm \nu > 0$. Συνακόλουθα, οι συναρτήσεις $e^{-(\kappa \pm \nu)t}$ είναι φθίνουσες. Αυτό συνεπάγεται ότι, και σ' αυτή την περίπτωση, η απόσταση $|y(t)|$ του σώματος Σ από το σημείο $x = 0$ μειώνεται πολύ γρήγορα. Γενικά, η κίνηση του Σ έχει τα ίδια χαρακτηριστικά μ' εκείνη που αντιστοιχεί στη συνθήκη $\omega_0 = \kappa$. Η μόνη αξιόλογη διαφορά είναι ότι, στην προκείμενη περίπτωση, τα χαρακτηριστικά της κίνησης είναι ευσταθή ως προς μικρές αλλαγές της παραμέτρου κ . Αντίθετα, στην περίπτωση όπου $\omega_0 = \kappa$ μια μικρή μείωση της τιμής της κ (ελάττωση του συντελεστή αντίστασης) αρκεί για να μετατρέψει την κίνηση σε φθίνουσα ταλάντωση.

5.6.2 Ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Στην περίπτωση ενός απλού ηλεκτρικού κυκλώματος οι παράμετροι κ και λ της εξίσωσης

$$y'' + 2\kappa y' + \lambda y = 0,$$

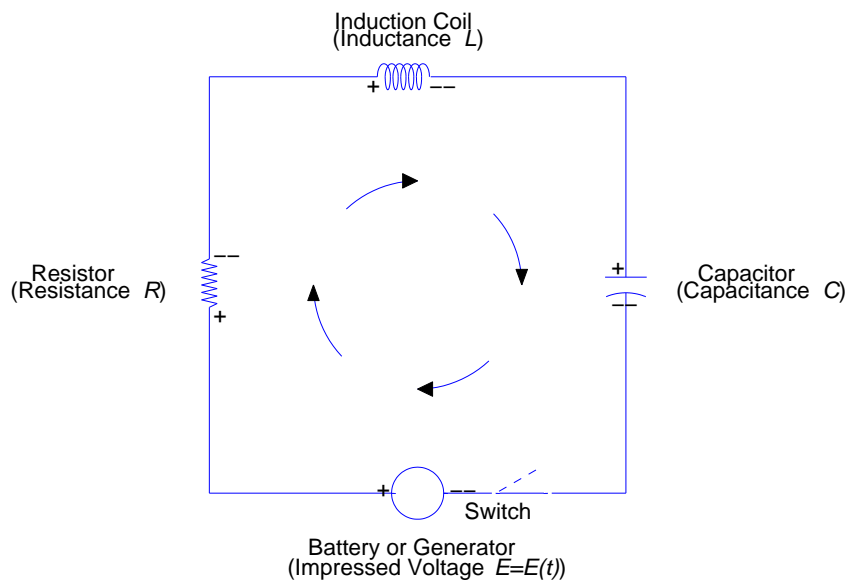
αποκτούν διαφορετική φυσική σημασία. Για να δούμε αναλυτικά το νόημά τους, θα χρειαστεί να υπενθυμίσουμε τη δομή ενός τέτοιου κυκλώματος και τις αντίστοιχες φυσικές έννοιες. Αρχίζουμε από τα βασικά στοιχεία του απλού ηλεκτρικού κυκλώματος, που είναι τα εξής:

- (i) Ένας πυκνωτής (*capacitor*), δηλαδή μια συσκευή στην οποία μπορεί να συσσωρευτεί ηλεκτρικό φορτίο. Χαρακτηρίζεται μονοσήμαντα από μια θετική σταθερή C , η οποία εκφράζει τη χωρητικότητα (αποθηκευτική ικανότητα) του πυκνωτή. Η σταθερή C χρησιμοποιείται και ως σύμβολο του ίδιου του πυκνωτή. Ως μονάδα

χωρητικότητας χρησιμοποιείται το Farad, που συμβολίζεται με το γράμμα F . Συνήθως, η χωρητικότητα είναι τόσο μικρή που μετριέται σε εκατομμυριοστά του Farad ή μικρο-Farad, mF : $1mF = 10^{-6}F$.

- (ii) Μια αντίσταση (*resistance*), δηλαδή μια συσκευή που καθορίζει την αντίσταση μετακίνησης ηλεκτρικού φορτίου προς ή από τον πυκνωτή ή, ισοδύναμα, κατά μήκος του ηλεκτρικού κυκλώματος. Η αντίσταση συμβολίζεται με R . Η αντίστοιχη μονάδα μέτρησης είναι το Ohm, που συμβολίζεται με Ω .
- (iii) Ένα πηνίο (*induction coil*), δηλαδή μια συσκευή που καθορίζει την αντίσταση του κυκλώματος στην αλλαγή της ταχύτητας ροής του φορτίου. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται αυτεπαγωγή και εκφράζεται από μια θετική σταθερή L , η οποία συμβολίζει και το ίδιο το πηνίο. Μονάδα μέτρησης της αυτεπαγωγής είναι το Henry, το οποίο συμβολίζεται με H . Συνήθως, οι τιμές αυτεπαγωγής που συναντάμε είναι της τάξης του μιλι-Henry, mH . ($1mH = 10^{-3}H$).
- (iv) Μια μπαταρία (*battery*) ή γεννήτρια (*generator*), δηλαδή μια συσκευή που, σαν αντλία, εξωθεί το φορτίο να μετακινείται κατά μήκος του κυκλώματος ή προς και από τον "οπλισμό" του πυκνωτή.

Ένα κύκλωμα με τα παραπάνω στοιχεία παριστάνεται γραφικά με τον τρόπο που δείχνει το Σχήμα 5.3.



Σχήμα 5.3: Το RLC κύκλωμα.

Ακολουθώντας τον καθιερωμένο συμβολισμό, εισάγουμε πρώτα τις συναρτήσεις $Q(t)$, $I_\sigma(t)$ και $V_\sigma(t)$, στις οποίες δίνουμε την ακόλουθη φυσική σημασία:

- (i) Η $Q(t)$ παριστάνει το ηλεκτρικό φορτίο του πυκνωτή τη χρονική στιγμή t . Ακριβέστερα, η συνάρτηση $Q(t)$ εκφράζει το φορτίο που βρίσκεται στο ένα από τα δύο

μεταλικά φύλλα του πυκνωτή. Στο άλλο φύλλο, που είναι ηλεκτρικά μονωμένο από το πρώτο, συσσωρεύεται το ίδιο σε μέγεθος, αλλά αντίθετο σε πρόσημο, φορτίο, δηλαδή $-Q(t)$. Ως μονάδα φορτίου, συνήθως, υιοθετείται το Coulomb (C).

- (ii) Η $I_\sigma(t)$ εκφράζει το ηλεκτρικό φορτίο που διέρχεται από κάποιο σημείο, σ , του κυκλώματος ανά μονάδα χρόνου και λέγεται ηλεκτρικό ρεύμα. Η συνηθισμένη μονάδα ρεύματος είναι το *Ampere* (A). Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι το $I_Q(t)$ παριστάνει το φορτίο που διέρχεται ανά μονάδα χρόνου από ένα σημείο του κυκλώματος ακριβώς έξω από τον πυκνωτή. Αυτό το φορτίο είναι ίσο μ' εκείνο που "κερδίζει" ή "χάνει" ο πυκνωτής. Συνεπώς, η συνάρτηση $I_Q(t)$ εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνει ή μειώνεται το φορτίο στον πυκνωτή. Με άλλα λόγια, $I_Q(t) = Q'(t)$. Όμως, στην απλή διάταξη που μελετάμε, το ηλεκτρικό ρεύμα είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία του κυκλώματος. Γι αυτό το συμβολίζουμε $I(t)$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

$$I(t) = Q'(t) \quad (5.169)$$

- (iii) Η $V_\sigma(t)$ παριστάνει τη στιγμιαία διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού στους ακροδέκτες του στοιχείου σ του κυκλώματος και μετριέται σε *Volt* (V). Αυτή η συνάρτηση καθορίζεται από τις δύο προηγούμενες και την τιμή της σταθερής που χαρακτηρίζει το στοιχείο σ . Συγκεκριμένα,

$$V_C(t) = Q(t)/C, \quad V_R(t) = RI(t), \quad V_L(t) = LI'(t) \quad (5.170)$$

Η αρχή της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου οδηγεί στον 1ο νόμο του Kirchhoff: Το άθροισμα των $V_R(t)$, $V_C(t)$ και $V_L(t)$ πρέπει να είναι ίσο προς τη διαφορά δυναμικού, $E(t)$, στους ακροδέκτες της πηγής (γεννήτριας ή μπαταρίας). Με άλλα λόγια, σε κάθε απλό κύκλωμα ισχύει η συνθήκη

$$RI(t) + \frac{1}{C}Q(t) + LI'(t) = E(t) \quad (5.171)$$

Αλλά από την (5.169) έπεται ότι αυτή η συνθήκη γράφεται και ως εξής:

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t) \quad (5.172)$$

Συνεπώς, η χρονική εξέλιξη του ηλεκτρικού φορτίου που βρίσκουμε στον πυκνωτή ενός απλού ηλεκτρικού κυκλώματος περιγράφεται από μια, γενικά μη ομογενή, ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Όταν το κύκλωμα δεν περιλαμβάνει μπαταρία ή γεννήτρια, το δεξί μέλος της (5.172) μηδενίζεται, οπότε καταλήγουμε σε μια ομογενή ΔΕ, της ίδιας μορφής με την (5.160). Ακριβέστερα, η (5.172) προκύπτει από την (5.160), μέσω της αντικατάστασης

$$(m, k, r, u) \rightarrow (L, C^{-1}, R, Q) \quad (5.173)$$

Συνακόλουθα, οι λύσεις της (5.172) εμπίπτουν σε μια από τις τρεις επόμενες κατηγορίες, όπου, τώρα

$$\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \kappa := \frac{R}{2L} \quad (5.174)$$

(α') $\omega_0 > \kappa \Leftrightarrow R^2 < 4L/C$ (Φθίνουσα αρμονική ταλάντωση).

$$Q = e^{-\kappa t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t), \quad \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2} \quad (5.175)$$

(β') $\omega_0 = \kappa \Leftrightarrow R^2 = 4L/C$ (Κρίσιμη απόσβεση).

$$Q = (c_1 t + c_2) e^{\kappa t} \quad (5.176)$$

(γ') $\omega_0 < \kappa \Leftrightarrow R^2 > 4L/C$ (Υπερκρίσιμη απόσβεση)

$$Q = c_1 e^{-(\kappa+\nu)t} + c_2 e^{-(\kappa-\nu)t}, \quad \nu := \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} \quad (5.177)$$

Κλείνοντας αυτή τη σύντομη ανάλυση των απλών ηλεκτρικών κυκλωμάτων θα σημειώσουμε ότι:

Παρατήρηση: Παραγωγίζοντας την βασική εξίσωση (5.172) και λαβαίνοντας υπόψη τη σχέση $Q'(t) = I(t)$ καταλήγουμε στην

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = E'(t)$$

Αυτή την εξίσωση συντάμε συχνότερα στις εφαρμογές, δοσμένου ότι, η φυσική παράμετρος ενός κυκλώματος που συνήθως μετριέται με το κατάλληλο όργανο είναι το ρεύμα του.

Οι σχέσεις (5.169) και (5.170) καθορίζουν και τις σχέσεις των μονάδων στις οποίες μετράμε τόσο τα αδρανή στοιχεία R , L και C , όσο και τις καταστατικές ποσότητες Q και I του κυκλώματος. Για παράδειγμα, από την (5.169) έπεται ότι

$$1A = 1C/\text{sec} \Leftrightarrow 1 \text{ Ampere} = (1 \text{ Coulomb})/(1 \text{ sec})$$

Ανάλογα, από την πρώτη των (5.170) συνάγεται ότι $C = Q/V$. Συνεπώς,

$$1F = 1C/V \Leftrightarrow 1 \text{ Farad} = (1 \text{ Coulomb})/(1 \text{ Volt}).$$

Με τον ίδιο τρόπο, η τρίτη των (5.170) συνεπάγεται ότι $L = V/I'$. Συνακόλουθα,

$$1H = 1V/(A/\text{sec}) = 1V \cdot \text{sec}/A \Leftrightarrow 1 \text{ Henry} = 1 \text{ Volt} \cdot \text{sec}/\text{Ampere}$$

Από αυτές τις σχέσεις αμέσως έπεται ότι το γινόμενο LC έχει τη φυσική διάσταση

$$HF = (1V \cdot \text{sec}/A)(1C/V) = C \text{ sec}/A = \text{sec}^2$$

5.6 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-9 να λυθούν τα ακόλουθα ΠΑΤ, τα οποία αναφέρονται στη διάταξη του προτελευταίου σχήματος (το σώμα Σ στην ελεύθερη άκρη του ελατήριου που κρέμεται από το ταβάνι). Σε όλες τις περιπτώσεις, η μάζα του Σ και ο συντελεστής αντίστασης του αέρα θεωρούνται ίσες με $m = 2\text{kg}$ και $r = 0.4\text{Nsec/m}$, αντίστοιχα. Η σταθερή σκληρότητας του ελατήριου, k , δίνεται κατά περίπτωση. Για κάθε ΠΑΤ ξεχωριστά, να υπολογιστεί η στιγμιαία ταχύτητα του Σ , καθώς και η συχνότητα με την οποία τυχόν ταλαντώνεται. Επίσης, να δοθεί η γραφική παράσταση της θέσης και της ταχύτητας του Σ , για το χρονικό διάστημα $t \geq 0$.

1. $u(0) = 10\text{cm}$, $u'(0) = 0$, $k = 2,02\text{N/m}$.
2. $u(0) = 0$, $u'(0) = -10\text{cm/sec}$, $k = 2,02\text{N/m}$.
3. $u(0) = 10\text{cm}$, $u'(0) = -10\text{cm/sec}$, $k = 2,02\text{N/m}$.
4. $u(0) = 10\text{cm}$, $u'(0) = 0$, $k = 0,02\text{N/m}$.
5. $u(0) = 0$, $u'(0) = 10\text{cm/sec}$, $k = 2,02\text{N/m}$.
6. $u(0) = 10\text{cm}$, $u'(0) = 10\text{cm/sec}$, $k = 0,02\text{N/m}$.
7. $u(0) = 10\text{cm}$, $u'(0) = -3\text{cm/sec}$, $k = 0,015\text{N/m}$.
8. $u(0) = 0$, $u'(0) = -3\text{cm/sec}$, $k = 0,015\text{N/m}$.
9. $u(0) = 10\text{cm}$, $u'(0) = 0$, $k = 0,015\text{N/m}$.

Στις Ασκήσεις 10-17 να λυθούν τα ακόλουθα ΠΑΤ, τα οποία αφορούν την διάταξη του επόμενου σχήματος -ένα ηλεκτρικό κύκλωμα RCL χωρίς πηγή- αλλά με τον διακόπτη κλειστό. Για όλα τα ΠΑΤ, $L = 50\text{mH}$, $R = 10$, ενώ η χωρητικότητα C του πυκνωτή δίνεται κατά περίπτωση. Σε κάθε περίπτωση, να δοθεί η γραφική παράσταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διατρέχει το κύκλωμα, για το χρονικό διάστημα $t \geq 0$.

10. $I(0) = 0,3\text{A}$, $I'(0) = 0,1\text{A/sec}$, $C = 400\mu\text{F}$
11. $I(0) = 0,3\text{A}$, $I'(0) = 0$, $C = 400\mu\text{F}$
12. $I(0) = 0$, $I'(0) = 0,1\text{A/sec}$, $C = 400\mu\text{F}$
13. $I(0) = 0,3\text{A}$, $I'(0) = 0,1\text{A/sec}$, $C = 400\mu\text{F}$
14. $I(0) = 0,3\text{A}$, $I'(0) = 0$, $C = 2.000\mu\text{F}$
15. $I(0) = 0$, $I'(0) = 0.1\text{A/sec}$, $C = 3.125\mu\text{F}$
16. $I(0) = 0,3\text{A}$, $I'(0) = 0$, $C = 3.125\mu\text{F}$
17. $I(0) = 0$, $I'(0) = 0,1\text{A/sec}$, $C = 3.125\mu\text{F}$

Βιβλιογραφία

- Ν. Αλικάκος, & Γ.Η.Καλογερόπουλος, 2003. *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα.
- Ν. Σταυρακάκης, 2011 *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις: γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή*, Παπασωτηρίου, Αθήνα.
- W.E Boyce & R.C. DiPrima, 2001 *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th edn. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.

- M. Braun, 1993 *Differential equations and their Applications*, Springer-Verlag.
- E.A Coddington, & N. Levinson, 1984 *Theory of Ordinary Differential Equations*. MacGraw-Hill, New York.
- P. Hartman, 1982 *Ordinary Differential Equations*. Birkhäuser Verlag, Boston/ Basel/ Stuttgart.
- B. Rai & D. P. Choudhury, 2005 *Ordinary Differential Equations, An introduction*, Alpha Science, International Ltd.
- W. F. Trenc, 2013 *Elementary Differential Equations*, Books and Monographs, Trinity University.
- P. Waltman, 1986, *A second Course in Elementary Differential Equations*, Academic Press, Inc. NY.

Κεφάλαιο 6

Επίλυση με Σειρές Γραμμικών ΔΕ 2ης τάξης

Στο κεφάλαιο αυτό διαπραγματευόμαστε μιας δεύτερης τάξης ΔΕ που συναντάμε σε πολλές εφαρμογές, αλλά δεν μπορούν να λυθούν σε κλειστή μορφή. Μερικά παραδείγματα:

Εξίσωση του Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

η οποία λαμβάνει χώρα σε προβλήματα που εμφανίζουν κυλινδρική συμμετρία, όπως διάθλαση του φωτός μέσα από ένα κυκλικό άνοιγμα, η διάδοση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μέσω ενός ομοαξονικού καλωδίου, και οι δονήσεις μιας κυκλικής επιφάνειας τυμπάνου.

Εξίσωση του Airy

$$y'' - xy = 0,$$

η οποία εμφανίζεται στην αστρονομία και στη κβαντική φυσική.

Εξίσωση του Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

που εμφανίζεται σε προβλήματα με σφαιρική συμμετρία, ιδιαίτερα στον ηλεκτρομαγνητισμό.

Αυτές οι εξισώσεις και άλλες που μελετώνται σε αυτό το κεφάλαιο μπορούν να γραφούν με τον τύπο

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0, \quad (6.1)$$

όπου P_0 , P_1 , και P_2 είναι πολυώνυμα χωρίς κοινό παράγοντα. Για τις περισσότερες εξισώσεις που απαντώνται στις εφαρμογές αυτά τα πολυώνυμα είναι το πολύ δευτέρου βαθμού. Θα επιβάλλουμε αυτόν τον περιορισμό, παρόλο που οι μέθοδοι που θα αναπτύξουμε μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση όπου οι συντελεστές των συναρτήσεων είναι πολυώνυμα του αυθαίρετου βαθμού, ή ακόμα και οι δυναμικές σειρές που συγκλίνουν σε κάποιο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο.

Αφού η (6.1) γενικά δεν έχει κλειστούς τύπους λύσεων, αναζητούμε σειρές που παρουσιάζονται για λύσεις. Θα δούμε ότι, αν η $P_0(0) \neq 0$ τότε οι λύσεις της (6.1) μπορούν να

γραφτούν ως δυναμικές σειρές

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

οι οποίες συγκλίνουν σε ένα ανοικτό διάστημα με κέντρο στο $x = 0$ (βλ. Ρόθος & Σφυράκης, 2011).

Στις παρακάτω ενότητες αρχικά θα παρουσιάσουμε τις ιδιότητες των δυναμικών σειρών, ενώ στη συνέχεια, οι επόμενες δύο ενότητες είναι αφιερωμένες στην εξεύρεση λύσεων των δυναμικών σειρών του (6.1) στην περίπτωση όπου $P_0(0) \neq 0$. Η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη, αν η $P_0(0) = 0$; ωστόσο, αν η P_1 και P_2 ικανοποιήσει τις παραδοχές ότι εφαρμόζεται στις περισσότερες εξισώσεις του ενδιαφέροντος, τότε θα είμαστε σε θέση να χρησιμοποιήσουμε μια τροποποιημένη μέθοδο σειρών για να λάβουμε λύσεις του (6.1). Τέλος εισάγουμε τις κατάλληλες παραδοχές για P_1 και P_2 στην περίπτωση όπου $P_0(0) = 0$, και ασχολούμαστε με την *Εξίσωση του Euler*

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0,$$

όπου a , b , και c είναι σταθερές, μια και αυτή είναι η απλούστερη εξίσωση που ικανοποιεί τις παραδοχές μας.

6.1 Δυναμικές Σειρές

Πολλές εφαρμογές μας δίνουν ΔΕ οι λύσεις των οποίων δεν μπορούν να εκφραστούν με όρους στοιχειωδών συναρτήσεων όπως τα πολώνυμα, ρητές συναρτήσεις, εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις και τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Οι λύσεις μερικών από αυτές τις σημαντικές εξισώσεις μπορούν να εκφραστούν με όρους των δυναμικών σειρών.

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε συνοπτικά τις ιδιότητες των Δυναμικών Σειρών παραλείποντας τις αποδείξεις, οι οποίες μπορούν να βρεθούν σε οποιοδήποτε βιβλίο λογισμού.

Ορισμός 6.1.1 Μια άπειρη σειρά του τύπου

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (6.2)$$

όπου x_0 και $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ είναι σταθερές, ονομάζεται *Δυναμική Σειρά* (*Power Series*) στο $x - x_0$. Λέμε ότι η Δυναμική Σειρά (6.2) *συγκλίνει* για ένα δεδομένο x αν το όριο

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n$$

υπάρχει, αλλιώς, θα λέμε ότι η Δυναμική Σειρά *αποκλίνει* για το δεδομένο x .

Το επόμενο θεώρημα μας λέει τότε μια δυναμική σειρά συγκλίνει για κάποιο x (βλ. Ρόθος & Σφυράκης, 2011).

Θεώρημα 6.1.1 Για κάθε δυναμική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, ισχύει ακριβώς μια από τις παρακάτω εκφράσεις:

- (i) Συγκλίνει μόνο για $x = x_0$.
- (ii) Συγκλίνει για όλες τις τιμές των x .
- (iii) Υπάρχει ένας θετικός αριθμός R , τέτοιος ώστε η δυναμική σειρά να συγκλίνει αν $|x - x_0| < R$ και να αποκλίνει αν $|x - x_0| > R$.

Στην περίπτωση (iii) λέμε ότι R είναι η *Ακτίνα Σύγκλισης* της δυναμικής σειράς.

Για λόγους ευκολίας, θα περιλαμβάνουμε τις άλλες δύο περιπτώσεις σε αυτόν τον ορισμό προσδιορίζοντας ότι

$R = 0$ στην περίπτωση (i) και

$R = \infty$ στην περίπτωση (ii).

Ορίζουμε το *Ανοιχτό Διάστημα Σύγκλισης* της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ να είναι

$$(x_0 - R, x_0 + R) \quad \text{αν} \quad 0 < R < \infty, \quad \text{ή} \quad (-\infty, \infty) \quad \text{αν} \quad R = \infty.$$

Αν η ακτίνα R είναι πεπερασμένη, τότε η σειρά συγκλίνει στο τελικό σημείο $x = x_0 \pm R$ του ανοικτού διαστήματος σύγκλισης, οι σειρές μπορούν να συγκλίνουν στο ένα ή στα δύο σημεία ή να αποκλίνουν και στα δύο

Από τον διαφορικό λογισμό ξέρουμε ότι, μια σειρά σταθερών $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ *συγκλίνει απόλυτα*, αν οι σειρές των απόλυτων τιμών $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|$ συγκλίνουν. Μπορεί να αποδειχθεί ότι, μια δυναμική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ με μια θετική ακτίνα σύγκλισης R συγκλίνει απόλυτα στο δικό τους ανοικτό διάστημα σύγκλισης, δηλαδή, οι σειρές

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x - x_0|^n$$

των απόλυτων τιμών συγκλίνουν αν $|x - x_0| < R$. Ωστόσο, αν $R < \infty$, οι σειρές μπορεί να μην επιτυγχάνουν την απόλυτη σύγκλιση στο τελικό σημείο $x_0 \pm R$, ακόμα και αν συγκλίνει εκεί, (βλ. Ρόθος & Σφυράκης, 2011).

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μία χρήσιμη μέθοδο για τον προσδιορισμό της ακτίνας σύγκλισης μιας δυναμικής σειράς. Σχετικά με το θεώρημα, δείτε τις Ασκήσεις 2 και 4.

Θεώρημα 6.1.2 *Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός N , τέτοιος ώστε $a_n \neq 0$, αν $n \geq N$ και*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L,$$

όπου $0 \leq L \leq \infty$. Τότε, η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ είναι $R = \frac{1}{L}$, η οποία περιλαμβάνει και τις περιπτώσεις $R = 0$ αν $L = \infty$, ή $R = \infty$ αν $L = 0$.

Παράδειγμα 6.1.1 Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης των σειρών:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=10}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n n^2 (x - 1)^n.$$

Λύση α)

Εδώ $a_n = n!$, έτσι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Ως εκ τούτου, $R = 0$.

Λύση β)

Εδώ $a_n = (1)^n/n!$ για $n \geq N = 10$, έτσι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ως εκ τούτου, $R = \infty$.

Λύση c)

Εδώ $a_n = 2^n n^2$, έτσι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)^2}{2^n n^2} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = 2.$$

Ως εκ τούτου, $R = 1/2$.

6.2 Σειρές Taylor

Αν μια συνάρτηση f έχει όλες τις παραγώγους της σε ένα σημείο $x = x_0$, τότε η *Σειρά Taylor* της f στο x_0 είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου $x_0 = 0$, αυτή η σειρά αποκαλείται *Σειρά Maclaurin* της f .

Οι σειρές του Taylor για τις περισσότερες στοιχειώδεις συναρτήσεις συγκλίνουν, στα δικά τους ανοικτά διαστήματα σύγκλισης.

Οι πιο γνωστές σειρές Maclaurin είναι

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (6.3)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (6.4)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (6.5)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1. \quad (6.6)$$

6.3 Ιδιότητες Δυναμικών Σειρών

Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιάσουμε τις πιο βασικές Ιδιότητες των Δυναμικών Σειρών, όπως την Παραγωγή, τη Μοναδικότητα, τα πολώνυμα Taylor. Ακόμα θα αναφερθούμε στη δυνατότητα Μετατόπισης του Δείκτη μιας Δυναμικής Σειράς αλλά και σε Γραμμικές Πράξεις μεταξύ Δυναμοσειρών.

6.3.1 Παραγωγήσιση Δυναμικών Σειρών

Έστω μια δυναμική σειρά, με θετική ακτίνα σύγκλισης R που ορίζει την συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

στο ανοικτό διάστημα της σύγκλισης $(-R, R)$.

Στο επόμενο θεώρημα, θα διατυπώνουμε την παραγωγήσιση της f στο $(-R, R)$ παραγωγίζοντας "όρο προς όρο" την σειρά. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί άπειρες φορές και συνεπώς μία δυναμοσειρά ορίζει απειρο-παραγωγίσιμη συνάρτηση στο ανοικτό διάστημα σύγκλισής της.

Θεώρημα 6.3.1 Έστω δυναμική σειρά με θετική ακτίνα σύγκλισης R που ορίζει η συνάρτηση f .

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Η f έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξης που δίνονται διαδοχικά αν διαφορίζουμε κατ' επανάληψη όρο προς όρο, την αρχική σειρά

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}, \quad (6.7)$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n(x - x_0)^{n-2}, \quad (6.8)$$

⋮

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n(x - x_0)^{n-k}. \quad (6.9)$$

Επιπλέον, όλες αυτές οι σειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης R .

Παράδειγμα 6.3.1 Έστω $f(x) = \sin x$. Από το παράδειγμα (6.4), έχουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Παραγωγίζοντας όπως την (6.7), παίρνουμε

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{d}{dx} \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

παρατηρούμε ότι το αποτέλεσμα ταυτίζεται με τη σειρά $\cos x$, βλέπε παράδειγμα (6.5).

6.3.2 Μοναδικότητα Δυναμικών Σειρών

Το επόμενο θεώρημα διατυπώνει το γεγονός ότι αν f είναι μία δυναμική σειρά στο $x - x_0$ με θετική ακτίνα σύγκλισης, τότε η δυναμική σειρά ταυτίζεται με τη σειρά του Taylor της f στο x_0 .

Θεώρημα 6.3.2 Έστω η δυναμική σειρά

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

με θετική ακτίνα σύγκλισης R , τότε

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (6.10)$$

που αν αντικατασταθεί στη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, παίρνουμε τη σειρά του Taylor της f στο x_0 .

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να επιτευχθεί αντικαθιστώντας $x = x_0$ στην (6.9), η οποία μας δίνει

$$f^{(k)}(x_0) = k(k-1) \cdots 1 \cdot a_k = k!a_k.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Αυτό είναι το ίδιο με την (6.10).

Το επόμενο θεώρημα καταγράφει δύο σημαντικές ιδιότητες των δυναμικών σειρών οι οποίες προκύπτουν από το θεώρημα 6.3.2.

Θεώρημα 6.3.3

(α') Αν

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$$

για όλα τα x σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_0 , τότε $a_n = b_n$ για όλα τα $n = 0, 1, 2, \dots$

(β') Αν

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = 0$$

για όλα τα x σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_0 , τότε $a_n = 0$ για όλα τα $n = 0, 1, 2, \dots$

Από το (α) παρατηρούμε ότι οι δύο σειρές αντιπροσωπεύουν την ίδια συνάρτηση f στο ανοικτό διάστημα, ως εκ τούτου, απ' το Θεώρημα 6.3.2 συνεπάγεται ότι

$$a_n = b_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

6.3.3 Πολυώνυμο Taylor

Έστω ότι η f έχει παραγώγους μέχρι και N τάξης στο σημείο x_0 τότε

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

είναι το N -ο πολυώνυμο Taylor της f στο x_0 (βλ. Ρόθος & Σφυράκης, 2011). Από τον ορισμό των δυναμικών σειρών και το θεώρημα 6.3.2 συνεπάγεται ότι αν

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

όπου η δυναμική σειρά με θετική ακτίνα σύγκλισης τότε τα πολυώνυμα του Taylor της f στο x_0 δίνονται από

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n.$$

Τα πολυώνυμα του Taylor τα χρησιμοποιούμε σε αριθμητικές εφαρμογές, για να προσεγγίσουν την f .

Για το παράδειγμα, (6.3) το πολυώνυμο Taylor είναι T_N της $f(x) = e^x$ είναι

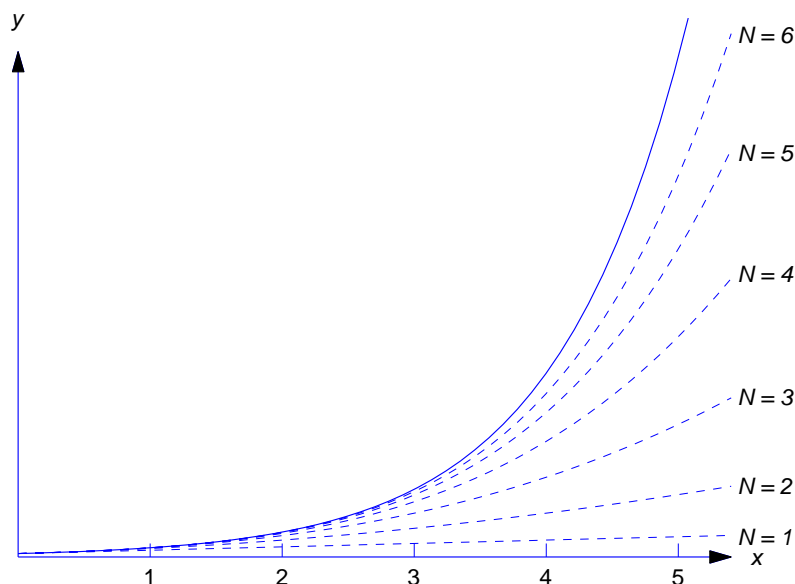
$$T_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}.$$

Στο Σχήμα 6.1 η συνεχής καμπύλη είναι η γραφική παράσταση της $y = e^x$ στο διάστημα $[0, 5]$. Οι διακεκομμένες καμπύλες στο Σχήμα 6.1 είναι οι γραφικές παραστάσεις των πολυωνύμων του Taylor T_1, \dots, T_6 του $y = e^x$ στο $x_0 = 0$. Από το σχήμα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ακρίβεια κατά προσέγγιση των $y = e^x$ από το πολυώνυμο Taylor T_N βελτιώνεται, καθώς η N αυξάνεται.

6.3.4 Μετατόπιση του Δείκτη μιας Δυναμικής Σειράς

Στον Ορισμό 6.1.1 μιας δυναμικής σειράς στο $x - x_0$, ο n -ος όρος είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο του $(x - x_0)^n$. Αυτό δεν αληθεύει στις περιπτώσεις (6.7), (6.8) και (6.9), όπου οι γενικοί όροι είναι σταθερά πολλαπλάσια των $(x - x_0)^{n-1}$, $(x - x_0)^{n-2}$ και $(x - x_0)^{n-k}$, αντίστοιχα.

Ωστόσο, αυτές οι σειρές μπορούν όλες να ξαναγραφούν, έτσι ώστε οι δικό τους n -οι όροι να είναι σταθερά πολλαπλάσια της $(x - x_0)^n$.



Σχήμα 6.1: Προσέγγιση της $y = e^x$ με το πολυώνυμο Taylor στο $x = 0$.

Για παράδειγμα, αντικαθιστώντας $n = k + 1$ στη σειρά (6.7), παίρνουμε

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k, \quad (6.11)$$

όπου θα ξεκινήσουμε με το άθροισμα του δείκτη k από το μηδέν, έτσι ώστε ο πρώτος όρος στην (6.11) ($k = 0$) είναι ο ίδιος όπως ο πρώτος όρος στην (6.7) ($n = 1$).

Ωστόσο, το άθροισμα μιας σειράς είναι ανεξάρτητο από το σύμβολο που χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει τον αθροισμένο δείκτη, όπως και η τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητο από το σύμβολο που χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει τη μεταβλητή της ολοκλήρωσης. Ως εκ τούτου, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή k με n στην (6.11) για να αποκτήσουμε

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n, \quad (6.12)$$

όπου ο γενικός όρος είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο του $(x-x_0)^n$.

Δεν είναι πραγματικά αναγκαίο να εισάγουμε τον ενδιάμεσο δείκτη k . Μπορούμε να πάρουμε την (6.12) απευθείας από την (6.7) αντικαθιστώντας n με $n+1$ στον γενικό όρο (6.7) και αφαιρώντας 1 από το κατώτερο όριο του (6.7). Γενικότερα, χρησιμοποιούμε την ακόλουθη διαδικασία για τη μετατόπιση των δεικτών.

boxitΜετατόπιση του Δείκτη μιας Δυναμικής Σειράς

Για κάθε ακέραιο αριθμό k , η δυναμική σειρά

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{n-k}$$

μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\sum_{n=n_0-k}^{\infty} b_{n+k}(x-x_0)^n,$$

αντικαθιστώντας τη μεταβλητή n με $n+k$ στο γενικό όρο και αφαιρώντας την k από το κατώτερο όριο της άθροισης, αφήνοντας αμετάβλητη τη σειρά.

Παράδειγμα 6.3.2 Ξαναγράψτε τις ακόλουθες δυναμικές σειρές (6.8) και (6.9) έτσι ώστε ο γενικός όρος σε καθένα να είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο της $(x-x_0)^n$:

- (a)

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

- (b)

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k}.$$

Λύση

- (a) Αντικαθιστώντας n με $n+2$ στον γενικό όρο και αφαιρώντας την 2 από το χαμηλότερο σημείο της άθροισης αυτό μας δίδει

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-x_0)^n.$$

- (b) Αντικαθιστώντας n με $n+k$ στον γενικό όρο και αφαιρώντας k από το χαμηλότερο σημείο της άθροισης αυτό μας δίδει

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1)a_{n+k}(x-x_0)^n.$$

Παράδειγμα 6.3.3 Έστω ότι

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Γράψτε την xf'' ως δυναμική σειρά της οποίας ο γενικός όρος είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο της x^n .

Λύση Από το θεώρημα 6.3.1 στο $x_0 = 0$ έχουμε,

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

Επομένως

$$x f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}.$$

Αντικαταστήντας την n με $n+1$ στο γενικό όρο και αφαιρώντας 1 από το κατώτερο όριο των αθροίσεων αυτό μας δίδει

$$x f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n.$$

Μπορούμε επίσης αυτό να το γράψουμε ως

$$x f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n,$$

Αφού ο πρώτος όρος σε αυτή την τελευταία σειρά είναι μηδενικός. (Θα διαπιστώσουμε αργότερα ότι μερικές φορές είναι χρήσιμο να συμπεριλάβουμε τους μηδενικούς όρους κατά το ξεκίνημα μιας σειράς).

6.3.5 Γραμμικές Πράξης με Δυναμικές Σειρές

Αν μια δυναμική σειρά πολλαπλασιασθεί με μία σταθερά, τότε η σταθερά μπορεί να τοποθετείται μέσα στο άθροισμα, δηλαδή,

$$c \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c a_n (x - x_0)^n.$$

Δύο δυναμικές σειρές

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{και} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

με θετικές ακτίνες σύγκλισης μπορούν να προστεθούν όρο με όρο στα κοινά σημεία των ανοικτών διαστημάτων σύγκλισής τους. Δηλαδή, εάν η πρώτη σειρά συγκλίνει για $|x - x_0| < R_1$ και η δεύτερη συγκλίνει για $|x - x_0| < R_2$, τότε

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n$$

για $|x - x_0| < R$, όπου R είναι το μικρότερο από τα R_1 και R_2 .

Γενικότερα, οι γραμμικοί συνδυασμοί των δυναμικών σειρών μπορούν να σχηματιστούν όρο προς όρο, για παράδειγμα

$$c_1 f(x) + c_2 f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_1 a_n + c_2 b_n)(x - x_0)^n.$$

Παράδειγμα 6.3.4 Βρείτε τη σειρά Maclaurin της $\cosh x$ ως έναν γραμμικό συνδυασμό των σειρών Maclaurin της e^x και e^{-x} .

Λύση

Εξ ορισμού

$$\cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Αφού

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{και} \quad e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!},$$

προκύπτει ότι

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} [1 + (-1)^n] \frac{x^n}{n!}. \quad (6.13)$$

Καθώς

$$\frac{1}{2} [1 + (-1)^n] = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = 2m, \text{ (για κάθε άρτιο ακέραιο),} \\ 0 & \text{αν } n = 2m + 1, \text{ (για κάθε περιττό ακέραιο),} \end{cases}$$

μπορούμε να ξαναγράψουμε την (6.13) πιο απλά ως

$$\cosh x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για $(-\infty, \infty)$, το ανοικτό διάστημα σύγκλισης των σειρών Maclaurin για e^x και e^{-x} .

Παράδειγμα 6.3.5 Υποθέτοντας

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

σε ένα ανοικτό διάστημα I ,

(α') εκφράσατε την

$$(2 - x)y'' + 2y$$

ως μία δυναμική σειρά του x στο I .

(β') Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της (α) για να βρείτε αναγκαίες και ικανές συνθήκες για τους συντελεστές $\{a_n\}$ της y , ώστε αυτή να είναι μία λύση της ομοιογενούς

εξίσωσης

$$(2 - x)y'' + 2y = 0 \quad (6.14)$$

στο I .**Λύση**(α) Από (6.8) με $x_0 = 0$,

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} (2-x)y'' + 2y &= 2y'' - xy' + 2y \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Για να συνδυάσουμε τις τρεις σειρές μετατοπίζουμε τους δείκτες στις δύο πρώτες σειρές ώστε να κάνουμε τους δικούς τους γενικούς όρους σταθερά πολλαπλάσια του x^n . Σύνεπώς

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1)a_{n+2} x^n \quad (6.16)$$

και

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)na_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)na_{n+1} x^n, \quad (6.17)$$

όπου προσθέσαμε έναν μηδενικό όρο στις αρχικές σειρές, έτσι ώστε όταν αντικαταστήσουμε από (6.16) και (6.17) στο (6.15) όλες οι τρεις σειρές θα ξεκινάνε με $n = 0$. Άρα

$$(2-x)y'' + 2y = \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} + 2a_n] x^n. \quad (6.18)$$

(β) Από την (6.18) έχουμε ότι y ικανοποιεί την (6.14) στο I αν

$$2(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} + 2a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.19)$$

Αντίστροφα, από το θεώρημα 6.3.3 (β) συνεπάγεται ότι, αν $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ικανοποιεί την (6.14) στο I , τότε ισχύει η (6.19).

Παράδειγμα 6.3.6 Υποθέτοντας

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$$

σε ένα ανοικτό διάστημα I το οποίο περιέχει $x_0 = 1$. Εκφράστε τη συνάρτηση

$$(1+x)y'' + 2(x-1)^2y' + 3y \quad (6.20)$$

ως μία δυναμική σειρά του $x-1$ στο I .

Λύση

Εφόσον εμείς θέλουμε μία δυναμική σειρά στο $x-1$, ξαναγράφουμε το συντελεστή του y'' στην (6.20) ως $1+x = 2+(x-1)$, άρα

$$2y'' + (x-1)y'' + 2(x-1)^2y' + 3y.$$

Από την (6.7) και την (6.8) με $x_0 = 1$, έχουμε

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} \quad \text{και} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} 2y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n(x-1)^{n-2}, \\ (x-1)y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-1)^{n-1}, \\ 2(x-1)^2y' &= \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n(x-1)^{n+1}, \\ 3y &= \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n(x-1)^n. \end{aligned}$$

Πριν από την πρόσθεση αυτών των τεσσάρων σειρών μετακινούμε τους δείκτες στις τρεις πρώτες σειρές έτσι ώστε οι δικό τους γενικοί όροι να γίνονται σταθερά πολλαπλάσια του

$(x - 1)^n$. Αυτό μας δίδει

$$2y'' = \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n, \quad (6.21)$$

$$(x-1)y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)na_{n+1}(x-1)^n, \quad (6.22)$$

$$2(x-1)^2y' = \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)a_{n-1}(x-1)^n, \quad (6.23)$$

$$3y = \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n(x-1)^n, \quad (6.24)$$

όπου προσθέτουμε τους αρχικούς μηδενικούς όρους στις σειρές στο (6.22) και (6.23). Προσθέτοντας (6.21)–(6.24) αυτό μας δίνει

$$\begin{aligned} (1+x)y'' + 2(x-1)^2y' + 3y &= 2y'' + (x-1)y'' + 2(x-1)^2y' + 3y \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-1)^n, \end{aligned}$$

όπου

$$b_0 = 4a_2 + 3a_0, \quad (6.25)$$

$$b_n = 2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)na_{n+1} + 2(n-1)a_{n-1} + 3a_n, \quad n \geq 1. \quad (6.26)$$

Ο τύπος (6.25) για b_0 δεν μπορεί να ενταχθεί για $n = 0$ στο (6.26), αφού το άθροισμα στο (6.23) αρχίζει με $n = 1$, ενώ εκείνα στις (6.21), (6.22) και (6.24) αρχίζουν με $n = 0$.

6.3 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Για καθεμία από τις παρακάτω δυναμικές σειρές χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 6.1.2 για να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R . Αν $R > 0$, βρείτε το ανοικτό διάστημα

σύγκλισης. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n} (x-1)^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n n (x-2)^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{9^n} x^n$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{16^n} (x-2)^n$

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7^n}{n!} x^n$

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}(n+1)^2} (x+7)^n$

2. Έστω ότι υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός M τέτοιος ώστε $b_m \neq 0$ για $m \geq M$, και

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{m+1}}{b_m} \right| = L,$$

όπου $0 \leq L \leq \infty$. Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_0)^{2m}$$

είναι $R = \frac{1}{\sqrt{L}}$, η οποία περιλαμβάνει και τις περιπτώσεις $R = 0$ αν $L = \infty$, ή $R = \infty$ αν $L = 0$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα 6.1.2 για τη σειρά $\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ και στη συνέχεια αντικαταστήστε $z = (x - x_0)^2$.

3. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Άσκησης 2 για να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R για τις παρακάτω ασκήσεις. Αν $R > 0$, βρείτε το ανοικτό διάστημα της σύγκλισης.

<p>(a) $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (3m+1)(x-1)^{2m+1}$</p>	<p>(b) $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{m(2m+1)}{2^m} (x+2)^{2m}$</p>
<p>(c) $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(2m)!} (x-1)^{2m}$</p>	<p>(d) $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{m!}{9^m} (x+8)^{2m}$</p>
<p>(e) $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m-1)}{3^m} x^{2m+1}$</p>	<p>(f) $\sum_{m=0}^{\infty} (x-1)^{2m}$</p>

4. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος αριθμός M έτσι ώστε $b_m \neq 0$ για $m \geq M$, και

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{b_{m+1}}{b_m} \right| = L,$$

όπου $0 \leq L \leq \infty$. Έστω η k είναι ένας θετικός ακέραιος. Αποδείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m (x - x_0)^{km}$$

είναι $R = \frac{1}{\sqrt[k]{L}}$, η οποία περιλαμβάνει και τις περιπτώσεις $R = 0$ αν $L = \infty$, ή $R = \infty$ αν $L = 0$.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα 6.1.2 για τη σειρά $\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ και στη συνέχεια αντικαταστήστε $z = (x - x_0)^k$.

5. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της Άσκησης 4 για να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R για τις παρακάτω ασκήσεις. Αν $R > 0$, βρείτε το ανοικτό διάστημα της σύγκλισης.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(27)^m} (x-3)^{3m+2} & \text{(b)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{7m+6}}{m} \\
 \text{(c)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{9^m(m+1)}{(m+2)} (x-3)^{4m+2} & \text{(d)} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{2^m}{m!} x^{4m+3} \\
 \text{(e)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(26)^m} (x+1)^{4m+3} & \text{(f)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{8^m m(m+1)} (x-1)^{3m+1}
 \end{array}$$

6. Προσεγγίστε τη γραφική παράσταση $y = \sin x$ με τα πολυώνυμα του Taylor

$$T_{2M+1}(x) = \sum_{n=0}^M \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

στο διάστημα $(-2\pi, 2\pi)$ για $M = 1, 2, 3, \dots$, μέχρι να βρείτε μια τιμή του M για την οποία δεν υπάρχει αντιληπτή διαφορά μεταξύ των δύο γραφημάτων.

7. Προσεγγίστε τη γραφική παράσταση $y = \cos x$ με τα πολυώνυμα του Taylor

$$T_{2M}(x) = \sum_{n=0}^M \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

στο διάστημα $(-2\pi, 2\pi)$ για $M = 1, 2, 3, \dots$, μέχρι να βρείτε μία τιμή του M για την οποία δεν υπάρχει αντιληπτή διαφορά μεταξύ των δύο γραφημάτων.

8. Προσεγγίστε τη γραφική παράσταση $y = \frac{1}{1-x}$ με τα πολυώνυμα του Taylor

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^N x^n$$

στο διάστημα $[0, .95]$ για $N = 1, 2, 3, \dots$, μέχρι να βρείτε μία τιμή του N για την οποία δεν υπάρχει αντιληπτή διαφορά μεταξύ των δύο γραφημάτων. Επιλέξτε την κλίμακα στο y -άξονα έτσι ώστε $0 \leq y \leq 20$.

9. Προσεγγίστε τη γραφική παράσταση $y = \cosh x$ με τα πολυώνυμα του Taylor

$$T_{2M}(x) = \sum_{n=0}^M \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

στο διάστημα $(-5, 5)$ για $M = 1, 2, 3, \dots$, μέχρι να βρείτε μία τιμή του M για την οποία δεν υπάρχει αισθητή διαφορά μεταξύ των δύο γραφημάτων. Επιλέξτε την κλίμακα στο y -άξονα έτσι ώστε $0 \leq y \leq 75$.

10. Προσεγγίστε τη γραφική παράσταση $y = \sinh x$ με τα πολυώνυμα του Taylor

$$T_{2M+1}(x) = \sum_{n=0}^M \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

στο διάστημα $(-5, 5)$ για $M = 0, 1, 2, \dots$, μέχρι να βρείτε μία τιμή του M για την οποία δεν υπάρχει αντιληπτή διαφορά μεταξύ των δύο γραφημάτων. Επιλέξτε την κλίμακα στο y -άξονα, έτσι ώστε $-75 \leq y \leq 75$.

Στις Ασκήσεις 11–15 βρείτε μία δυναμική σειρά $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ που να είναι λύση της:

11. $(2 + x)y'' + xy' + 3y$

12. $(1 + 3x^2)y'' + 3x^2y' - 2y$

13. $(1 + 2x^2)y'' + (2 - 3x)y' + 4y$

14. $(1 + x^2)y'' + (2 - x)y' + 3y$

15. $(1 + 3x^2)y'' - 2xy' + 4y$

16. Υποθέστε $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + 1)^n$ σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει $x_0 = -1$. Βρείτε τη δυναμική σειρά στο $x + 1$ για

$$xy'' + (4 + 2x)y' + (2 + x)y.$$

17. Υποθέστε $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - 2)^n$ σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει $x_0 = 2$. Βρείτε τη δυναμική σειρά στο $x - 2$ για

$$x^2y'' + 2xy' - 3xy.$$

18. Ας υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει σε ένα ανοικτό διάστημα $(-R, R)$, έστω r είναι ένας αυθαίρετος πραγματικός αριθμός, και

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

στο $(0, R)$. Χρησιμοποιήστε στο Θεώρημα 6.3.1 τον κανόνα της παραγώγισης των δύο συναρτήσεων για να δείξετε ότι

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1},$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2},$$

⋮

$$y^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) \cdots (n+r-k) a_n x^{n+r-k}$$

στο $(0, R)$

Στις Ασκήσεις 19–24, έστω y αυτό που ορίζεται στην άσκηση 18, να γράψτε την κάθε έκφραση με τη μορφή $x^r \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

19. $x^2(1-x)y'' + x(4+x)y' + (2-x)y$
20. $x^2(1+x)y'' + x(1+2x)y' - (4+6x)y$
21. $x^2(1+x)y'' - x(1-6x-x^2)y' + (1+6x+x^2)y$
22. $x^2(1+3x)y'' + x(2+12x+x^2)y' + 2x(3+x)y$
23. $x^2(1+2x^2)y'' + x(4+2x^2)y' + 2(1-x^2)y$
24. $x^2(2+x^2)y'' + 2x(5+x^2)y' + 2(3-x^2)y$

6.4 Επίλυση με τη μέθοδο των Σειρών σε ομαλό σημείο I

Πολλές φυσικές εφαρμογές περιγράφονται με τη δεύτερης τάξης ομογενή γραμμική ΔΕ της μορφής

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0, \quad (6.27)$$

όπου P_0 , P_1 , και P_2 είναι πολυώνυμα. Συνήθως, οι λύσεις αυτών των εξισώσεων δεν μπορούν να εκφραστούν με όρους των γνωστών στοιχειωδών συναρτήσεων. Ως εκ τούτου, θα μελετήσουμε το πρόβλημα (6.27) με τη λύση να αναζητείται με τη μορφή σειρών.

Υποθέτουμε ότι οι P_0 , P_1 και P_2 δεν έχουν κοινούς παράγοντες. Τότε λέμε ότι η x_0 είναι ένα *ομαλό σημείο* του (6.27) αν $P_0(x_0) \neq 0$ ή ένα *ανώμαλο σημείο* αν $P_0(x_0) = 0$.

Για την εξίσωση του Legendre,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0, \quad (6.28)$$

τα $x_0 = 1$ και $x_0 = -1$ είναι ανώμαλα σημεία και όλα τα άλλα σημεία είναι ομαλά σημεία.

Για την εξίσωση του Bessel

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

το $x_0 = 0$ είναι ένα ανώμαλο σημείο και όλα τα άλλα σημεία είναι ομαλά σημεία.

Αν P_0 είναι μία μη μηδενική σταθερά όπως στην εξίσωση του Airy,

$$y'' - xy = 0, \quad (6.29)$$

τότε κάθε σημείο είναι ένα ομαλό σημείο.

Εφόσον τα πολυώνυμα είναι συνεχή παντού, P_1/P_0 και P_2/P_0 είναι συνεχείς σε οποιοδήποτε σημείο x_0 που δεν είναι μηδέν το P_0 . Ως εκ τούτου, εάν x_0 είναι ένα ομαλό σημείο της (6.27) και a_0 και a_1 είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί, τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0, \quad y(x_0) = a_0, \quad y'(x_0) = a_1 \quad (6.30)$$

έχει μία μοναδική λύση, στο μεγαλύτερο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει και το x_0 και για κανένα x σε αυτό το P_0 δεν είναι μηδενικό.

Για να το καταλάβουμε αυτό, ξαναγράφουμε τη ΔΕ (6.30) ως

$$y'' + \frac{P_1(x)}{P_0(x)}y' + \frac{P_2(x)}{P_0(x)}y = 0.$$

Σε αυτή την ενότητα και στην επόμενη θα μελετήσουμε το πρόβλημα αναζητώντας λύσεις της (6.27) με δυναμικές σειρές που συγκλίνουν οι τιμές της x κοντά σε ένα ομαλό σημείο x_0 .

Το επόμενο θεώρημα που θα παρουσιάσουμε θα είναι χωρίς απόδειξη, μιας και δεν είναι μέσα στους στόχους του βιβλίου αυτού.

Θεώρημα 6.4.1 *Υποθέτουμε ότι P_0 , P_1 , και P_2 είναι πολυώνυμα χωρίς κοινό παράγοντα και P_0 δεν είναι μηδενικό. Έστω x_0 ένα σημείο τέτοιο ώστε $P_0(x_0) \neq 0$, και έστω το ρ είναι η απόσταση από το x_0 για το οποίο η P_0 στο μιγαδικό επίπεδο είναι μη μηδενική. (Αν P_0 είναι σταθερά, τότε $\rho = \infty$.) Στη συνέχεια, κάθε λύση της*

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \quad (6.31)$$

μπορεί να γραφεί ως μια δυναμική σειρά της μορφής

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (6.32)$$

το οποίο συγκλίνει τουλάχιστον στο ανοικτό διάστημα $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. (Αν P_0 είναι μη σταθερό, τότε ρ είναι κατά ανάγκη πεπερασμένο, στο ανοικτό διάστημα σύγκλισης της (6.32) μπορεί να είναι μεγαλύτερο από $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Αν P_0 είναι συνεχής τότε $\rho = \infty$ και $(x_0 - \rho, x_0 + \rho) = (-\infty, \infty)$.)

Καλούμε την (6.32) *λύση με δυναμική σειρά σε δυνάμεις του $x - x_0$* της (6.31). Θα αναπτύξουμε τώρα μια μέθοδο για την εύρεση λύσεων με δυναμικές σειρές της (6.31). Για το σκοπό αυτό, γράφουμε την (6.31) ως $Ly = 0$, όπου

$$Ly = P_0y'' + P_1y' + P_2y. \quad (6.33)$$

Το θεώρημα 6.4.1 συνεπάγεται ότι κάθε λύση της $Ly = 0$ στο $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ μπορεί να γραφεί ως

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Αντικαθιστώντας $x = x_0$ σε αυτή τη σειρά και στη σειρά

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1}$$

έχουμε ότι η $y(x_0) = a_0$ και $y'(x_0) = a_1$. Δεδομένου ότι κάθε πρόβλημα αρχικών τιμών (6.30) έχει μια μοναδική λύση, αυτό σημαίνει ότι a_0 και a_1 μπορεί να επιλεγούν αυθαίρετα, και a_2, a_3, \dots είναι μοναδικά προσδιορισμένα από αυτά.

Για να βρούμε τα a_2, a_3, \dots , γράφουμε της P_0, P_1 , και P_2 με τη μορφή των δυναμικών σειρών στο $x - x_0$, ως εξής

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1},$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}$$

από την (6.33), και συλλέγουμε τους συντελεστές μετατοπίζοντας τους δείκτες όπου χρειάζεται (όπως τις δυναμικές σειρές στο $x - x_0$). Αυτό μας δίνει

$$Ly = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad (6.34)$$

όπου $\{b_0, b_1, \dots, b_n, \dots\}$ εκφράζονται σε όρους των $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$ και οι συντελεστές των P_0, P_1 , και P_2 , είναι γραμμένοι ως δυναμικές σειρές στο $x - x_0$. Αφού (6.34) και (α) του θεωρήματος 6.3.3, συνεπάγεται ότι $Ly = 0$, αν και μόνο αν $b_n = 0$ για κάθε $n \geq 0$. Άρα οι λύσεις όλων των δυναμικών σειρών στο $x - x_0$ της $Ly = 0$ μπορούν να λαμβάνονται επιλέγοντας τα a_0 και a_1 αυθαίρετα και υπολογίζοντας τα a_2, a_3, \dots , διαδοχικά, έτσι ώστε $b_n = 0$ για κάθε $n \geq 0$.

Για απλότητα, καλούμε τις δυναμικές σειρές που λαμβάνουμε με αυτό τον τρόπο *Δυναμικές Σειρές στο $x - x_0$ της γενικής λύσης* της $Ly = 0$, χωρίς να προσδιορίζεται ρητά το ανοικτό διάστημα σύγκλισης των σειρών.

Παράδειγμα 6.4.1 Έστω x_0 ένας αυθαίρετος πραγματικός αριθμός. Βρείτε τις δυναμικές σειρές στο $x - x_0$ για τη γενική λύση της

$$y'' + y = 0. \quad (6.35)$$

Λύση Έστω

$$Ly = y'' + y.$$

Αν

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

τότε

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2},$$

άρα

$$Ly = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Για τον υπολογισμό των συντελεστών της δυναμικής σειράς στο $x-x_0$, θα μετατοπίσουμε τον δείκτη στο πρώτο άθροισμα. Αυτή μας δίνει

$$Ly = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n,$$

με

$$b_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n.$$

Ως εκ τούτου $Ly = 0$, αν και μόνο αν

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)}, \quad n \geq 0, \quad (6.36)$$

όπου a_0 και a_1 είναι αυθαίρετα, αφού οι δείκτες της αριστερής και δεξιάς πλευράς της (6.36) διαφέρουν κατά δύο. Γράφουμε την (6.36) ξεχωριστά για n άρτιο ($n = 2m$) και για n περιτό ($n = 2m+1$). Αυτό μας δίνει

$$a_{2m+2} = \frac{-a_{2m}}{(2m+2)(2m+1)}, \quad m \geq 0, \quad (6.37)$$

and

$$a_{2m+3} = \frac{-a_{2m+1}}{(2m+3)(2m+2)}, \quad m \geq 0. \quad (6.38)$$

Υπολογίζοντας τους άρτιους συντελεστές της δυναμικής σειράς στο $x-x_0$ από την (6.37), έχουμε

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{a_0}{2 \cdot 1} \\ a_4 &= -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = -\frac{1}{4 \cdot 3} \left(-\frac{a_0}{2 \cdot 1} \right) = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}, \\ a_6 &= -\frac{a_4}{6 \cdot 5} = -\frac{1}{6 \cdot 5} \left(\frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \right) = -\frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}, \end{aligned}$$

και γενικά,

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{(2m)!}, \quad m \geq 0. \quad (6.39)$$

Υπολογίζοντας τους άρτιους συντελεστές της δυναμικής σειράς στο $x-x_0$ από την (6.38),

έχουμε

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{a_1}{3 \cdot 2} \\ a_5 &= -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = -\frac{1}{5 \cdot 4} \left(-\frac{a_1}{3 \cdot 2} \right) = \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}, \\ a_7 &= -\frac{a_5}{7 \cdot 6} = -\frac{1}{7 \cdot 6} \left(\frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \right) = -\frac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}, \end{aligned}$$

και γενικά,

$$a_{2m+1} = \frac{(-1)^m a_1}{(2m+1)!} \quad m \geq 0. \quad (6.40)$$

Έτσι, η γενική λύση της (6.35) μπορεί να γραφεί ως

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m} (x - x_0)^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} (x - x_0)^{2m+1},$$

ή, από την (6.39) και την (6.40), έχουμε

$$y = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(x - x_0)^{2m}}{(2m)!} + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(x - x_0)^{2m+1}}{(2m+1)!}. \quad (6.41)$$

Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τους παραπάνω υπολογισμούς με

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(x - x_0)^{2m}}{(2m)!} = \cos(x - x_0) \quad \text{και} \quad \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(x - x_0)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sin(x - x_0).$$

Τότε η (6.41) γίνεται

$$y = a_0 \cos(x - x_0) + a_1 \sin(x - x_0). \quad \blacksquare$$

Εξισώσεις όπως η (6.36), η (6.37) και η (6.38), οι οποίες ορίζουν έναν δεδομένο συντελεστή στην ακολουθία $\{a_n\}$ σε όρους ενός ή περισσότερων συντελεστών με μικρότερους δείκτες ονομάζονται *αναδρομικές σχέσεις*. Όταν χρησιμοποιούμε μία αναδρομική σχέση για τον υπολογισμό όρων μίας ακολουθίας λέμε ότι υπολογίζουμε *αναδρομικά*.

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα μελετήσουμε το πρόβλημα εξεύρεσης λύσεων με δυναμικές σειρές στο $x - x_0$ για εξισώσεις της μορφής

$$(1 + \alpha(x - x_0)^2) y'' + \beta(x - x_0) y' + \gamma y = 0. \quad (6.42)$$

Πολλές σημαντικές εξισώσεις οι οποίες προκύπτουν σε εφαρμογές είναι αυτής της μορφής με $x_0 = 0$, συμπεριλαμβανομένης της εξίσωσης Legendre (6.28), της εξίσωσης του Airy (6.29), της *εξίσωσης του Chebyshev*,

$$(1 - x^2) y'' - x y' + \alpha^2 y = 0,$$

και της εξίσωσης του *Hermite*,

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0.$$

Αφού

$$P_0(x) = 1 + \alpha(x - x_0)^2$$

στο (6.42), το σημείο x_0 είναι ένα ομαλό σημείο του (6.42), και από το θεώρημα 6.4.1 συνεπάγεται ότι η λύση της (6.42) μπορεί να γραφεί ως δυναμικής σειράς στο $x - x_0$ και μάλιστα συγκλίνει στο διάστημα $(x_0 - 1/\sqrt{|\alpha|}, x_0 + 1/\sqrt{|\alpha|})$ αν $\alpha \neq 0$, ή στο $(-\infty, \infty)$ αν $\alpha = 0$. Θα διαπιστώσουμε ότι οι συντελεστές σε αυτής της δυναμικής σειράς μπορούν να λαμβάνονται με μεθόδους παρόμοιες με αυτήν που χρησιμοποιήθηκε στο Παράδειγμα 6.4.1.

Για την απλοποιημένη γραφή των συντελεστών, προτείνουμε τον παρακάτω συμβολισμό:

$$\prod_{j=r}^s b_j = b_r b_{r+1} \cdots b_s \quad \text{αν} \quad s \geq r.$$

Ορίζουμε ακόμα

$$\prod_{j=r}^s b_j = 1 \quad \text{αν} \quad s < r,$$

ανεξαρτήτως ποια είναι η μορφή της b_j .

Δίνουμε μερικά παραδείγματα για εξοικείωση:

$$\prod_{j=2}^7 b_j = b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7,$$

$$\prod_{j=0}^4 (2j+1) = (1)(3)(5)(7)(9) = 945,$$

και

$$\prod_{j=2}^2 j^2 = 2^2 = 4.$$

Παράδειγμα 6.4.2 Βρείτε τη δυναμική σειρά στο x που είναι η γενική λύση της

$$(1 + 2x^2)y'' + 6xy' + 2y = 0. \quad (6.43)$$

Λύση Έστω

$$Ly = (1 + 2x^2)y'' + 6xy' + 2y.$$

Εάν

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

τότε

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{και} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

άρα

$$\begin{aligned} Ly &= (1+2x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 6x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} [2n(n-1) + 6n + 2] a_n x^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 a_n x^n. \end{aligned}$$

Για τη συλλογή των συντελεστών του x^n , θα μετατοπίσουμε τον δείκτη του πρώτου αρθοίσματος κατά δύο (2). Αυτό μας δίνει

$$Ly = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Συνεπώς

$$b_n = (n+2)(n+1) a_{n+2} + 2(n+1)^2 a_n, \quad n \geq 0.$$

Για να πάρουμε τη γενική λύση της (6.43), θέτουμε $b_n = 0$ για $n \geq 0$. Αυτή είναι ισοδύναμη με την αναδρομική σχέση

$$a_{n+2} = -2 \frac{n+1}{n+2} a_n, \quad n \geq 0. \quad (6.44)$$

Αφού οι δείκτες για την αριστερή και τη δεξιά διαφέρουν κατά δύο, γράφουμε την (6.44) ξεχωριστά για $n = 2m$ άρτιο και για $n = 2m+1$ περιττό, όπως στο παράδειγμα 6.4.1. Αυτό μας δίνει

$$a_{2m+2} = -2 \frac{2m+1}{2m+2} a_{2m} = -\frac{2m+1}{m+1} a_{2m}, \quad m \geq 0, \quad (6.45)$$

και

$$a_{2m+3} = -2 \frac{2m+2}{2m+3} a_{2m+1} = -4 \frac{m+1}{2m+3} a_{2m+1}, \quad m \geq 0. \quad (6.46)$$

Υπολογίζοντας τους συντελεστές της δυναμικής σειράς στο x από την (6.45), έχουμε

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{1}{1}a_0, \\ a_4 &= -\frac{3}{2}a_2 = \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{1}\right)a_0 = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}a_0, \\ a_6 &= -\frac{5}{3}a_4 = -\frac{5}{3}\left(\frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}\right)a_0 = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}a_0, \\ a_8 &= -\frac{7}{4}a_6 = -\frac{7}{4}\left(-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right)a_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a_0. \end{aligned}$$

Γενικά

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{\prod_{j=1}^m (2j-1)}{m!} a_0, \quad m \geq 0. \quad (6.47)$$

(Σημειώνουμε ότι η (6.47) ισχύει και για $m = 0$ γιατί έχουμε ορίσει $\prod_{j=1}^0 b_j = 1$ που είναι ανεξάρτητο του b_j .)

Υπολογίζοντας τους συντελεστές των περιττών δυνάμεων του x από την (6.46), έχουμε

$$\begin{aligned} a_3 &= -4\frac{1}{3}a_1, \\ a_5 &= -4\frac{2}{5}a_3 = -4\frac{2}{5}\left(-4\frac{1}{3}\right)a_1 = 4^2\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5}a_1, \\ a_7 &= -4\frac{3}{7}a_5 = -4\frac{3}{7}\left(4^2\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5}\right)a_1 = -4^3\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7}a_1, \\ a_9 &= -4\frac{4}{9}a_7 = -4\frac{4}{9}\left(4^3\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7}\right)a_1 = 4^4\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}a_1. \end{aligned}$$

Γενικά,

$$a_{2m+1} = \frac{(-1)^m 4^m m!}{\prod_{j=1}^m (2j+1)} a_1, \quad m \geq 0. \quad (6.48)$$

Από την (6.47) και την (6.48) έχουμε,

$$y = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\prod_{j=1}^m (2j-1)}{m!} x^{2m} + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{4^m m!}{\prod_{j=1}^m (2j+1)} x^{2m+1}.$$

που είναι η δυναμική σειρά στο x που αποτελεί τη γενική λύση της (6.43). Αφού $P_0(x) = 1 + 2x^2$ δεν έχει κανένα πραγματικό μηδενικό, από το Θεώρημα 5.1.1 συνεπάγεται ότι κάθε λύση της (6.43) ορίζεται στο $(-\infty, \infty)$. Ωστόσο, αφού $P_0(\pm i/\sqrt{2}) = 0$, από το Θεώρημα 6.4.1 συνεπάγεται μόνο ότι η δυναμική σειρά συγκλίνει στο $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ για κάθε επιλογή των a_0 και a_1 .

Τα αποτελέσματα των παραδειγμάτων 6.4.1 και 6.4.2 είναι συνέπειες του ακόλουθου γενικού θεωρήματος.

Θεώρημα 6.4.2 Οι συντελεστές $\{a_n\}$ μιας λύση $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ της

$$(1 + \alpha(x - x_0)^2)y'' + \beta(x - x_0)y' + \gamma y = 0 \quad (6.49)$$

ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$a_{n+2} = -\frac{p(n)}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n \geq 0, \quad (6.50)$$

όπου

$$p(n) = \alpha n(n-1) + \beta n + \gamma. \quad (6.51)$$

Επιπλέον, οι συντελεστές των άρτιων και των περιττών δυναμικών του $x - x_0$ μπορούν να υπολογιστούν ξεχωριστά ως

$$a_{2m+2} = -\frac{p(2m)}{(2m+2)(2m+1)}a_{2m}, \quad m \geq 0 \quad (6.52)$$

και

$$a_{2m+3} = -\frac{p(2m+1)}{(2m+3)(2m+2)}a_{2m+1}, \quad m \geq 0, \quad (6.53)$$

όπου a_0 και a_1 είναι αυθαίρετα.

Απόδειξη Έστω

$$Ly = (1 + \alpha(x - x_0)^2)y'' + \beta(x - x_0)y' + \gamma y.$$

Εάν

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

τότε

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1} \quad \text{και} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n(x - x_0)^{n-2}.$$

Ως εκ τούτου,

$$\begin{aligned} Ly &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n(x - x_0)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} [\alpha n(n-1) + \beta n + \gamma] a_n(x - x_0)^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n(x - x_0)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p(n) a_n(x - x_0)^n, \end{aligned}$$

από την (6.51). Για τη συλλογή των συντελεστών των δυναμικών του $x - x_0$, θα μετατο-

πίσουμε τον αθροισμένο δείκτη του πρώτου αθροίσματος. Αυτή μας δίδει

$$Ly = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + p(n)a_n] (x-x_0)^n.$$

Αφού, $Ly = 0$ αν και μόνο αν

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + p(n)a_n = 0, \quad n \geq 0,$$

το οποίο είναι ισοδύναμο με την (6.50). Γράφοντας την (6.50) ξεχωριστά για τις περιπτώσεις όπου $n = 2m$ είναι άρτιος και που $n = 2m + 1$ είναι περιττός έχουμε την (6.52) και την (6.53).

Παράδειγμα 6.4.3 Βρείτε τη δυναμική σειρά στο $x - 1$ που είναι η γενική λύση της

$$(2 + 4x - 2x^2)y'' - 12(x-1)y' - 12y = 0. \quad (6.54)$$

Λύση Θα πρέπει πρώτα να γράψουμε τον συντελεστή $P_0(x) = 2 + 4x - x^2$ σε μορφή δυνάμεων του $x - 1$. Για να γίνει αυτό, γράφουμε $x = (x - 1) + 1$ στο $P_0(x)$ και στη συνέχεια, αναπτύσσουμε τους όρους, συλλέγοντας τις δυνάμεις των $x - 1$, άρα,

$$\begin{aligned} 2 + 4x - 2x^2 &= 2 + 4[(x-1) + 1] - 2[(x-1) + 1]^2 \\ &= 4 - 2(x-1)^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς, μπορούμε να ξαναγράψουμε (6.54) ως

$$(4 - 2(x-1)^2)y'' - 12(x-1)y' - 12y = 0,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\left(1 - \frac{1}{2}(x-1)^2\right)y'' - 3(x-1)y' - 3y = 0.$$

Αυτό είναι της μορφής της (6.49) με $\alpha = -1/2$, $\beta = -3$, και $\gamma = -3$. Ως εκ τούτου, από τη (6.51) έχουμε

$$p(n) = -\frac{n(n-1)}{2} - 3n - 3 = -\frac{(n+2)(n+3)}{2}.$$

Άρα απ' το Θεώρημα 6.4.2 συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} a_{2m+2} &= -\frac{p(2m)}{(2m+2)(2m+1)}a_{2m} \\ &= \frac{(2m+2)(2m+3)}{2(2m+2)(2m+1)}a_{2m} = \frac{2m+3}{2(2m+1)}a_{2m}, \quad m \geq 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} a_{2m+3} &= -\frac{p(2m+1)}{(2m+3)(2m+2)}a_{2m+1} \\ &= \frac{(2m+3)(2m+4)}{2(2m+3)(2m+2)}a_{2m+1} = \frac{m+2}{2(m+1)}a_{2m+1}, \quad m \geq 0. \end{aligned}$$

Το αφήνουμε σε εσάς να δείξετε ότι

$$a_{2m} = \frac{2m+1}{2^m}a_0 \quad \text{και} \quad a_{2m+1} = \frac{m+1}{2^m}a_1, \quad m \geq 0,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι η δυναμική σειρά στο $x-1$ η γενική λύση της (6.54) άρα

$$y = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{2^m} (x-1)^{2m} + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m+1}{2^m} (x-1)^{2m+1}. \quad \blacksquare$$

Στα παραδείγματα που μελετήσαμε μέχρι τώρα ήμασταν σε θέση να λαμβάνουμε κλειστής μορφής τύπους για τους συντελεστές επίλυσης των δυναμικών σειρών. Σε μερικές περιπτώσεις αυτό είναι αδύνατον, και πρέπει να ξέρουμε τις αρχικές τιμές της εξίσωσης για τον υπολογισμό ενός πεπερασμένου αριθμού των όρων στις σειρές. Το επόμενο παράδειγμα θα βοηθήσει στην κατανόηση αυτού με ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.

Παράδειγμα 6.4.4 Υπολογίστε τα a_0, a_1, \dots, a_7 για την επίλυση με τη μέθοδο των δυναμικών σειρών $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ του ΠΑΤ

$$(1+2x^2)y'' + 10xy' + 8y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3. \quad (6.55)$$

Λύση Αντικαθιστώντας στην (6.49) $\alpha = 2, \beta = 10$, και $\gamma = 8$ έχουμε (6.55),

$$p(n) = 2n(n-1) + 10n + 8 = 2(n+2)^2.$$

Επομένως

$$a_{n+2} = -2 \frac{(n+2)^2}{(n+2)(n+1)} a_n = -2 \frac{n+2}{n+1} a_n, \quad n \geq 0.$$

Γράφοντας αυτήν την εξίσωση ξεχωριστά για $n = 2m$ και $n = 2m+1$ έχουμε

$$a_{2m+2} = -2 \frac{(2m+2)}{2m+1} a_{2m} = -4 \frac{m+1}{2m+1} a_{2m}, \quad m \geq 0 \quad (6.56)$$

και

$$a_{2m+3} = -2 \frac{2m+3}{2m+2} a_{2m+1} = -\frac{2m+3}{m+1} a_{2m+1}, \quad m \geq 0. \quad (6.57)$$

Ξεκινώντας με $a_0 = y(0) = 2$, υπολογίζουμε a_2, a_4 , και a_6 από την (6.56):

$$\begin{aligned} a_2 &= -4 \frac{1}{1} 2 = -8, \\ a_4 &= -4 \frac{2}{3} (-8) = \frac{64}{3}, \\ a_6 &= -4 \frac{3}{5} \left(\frac{64}{3} \right) = -\frac{256}{5}. \end{aligned}$$

Ξεκινώντας με $a_1 = y'(0) = -3$, υπολογίζουμε $a_3 = y'(0) = -3$, από την (6.57):

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{3}{1} (-3) = 9, \\ a_5 &= -\frac{5}{2} 9 = -\frac{45}{2}, \\ a_7 &= -\frac{7}{3} \left(-\frac{45}{2} \right) = \frac{105}{2}. \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, η λύση της (6.55) είναι

$$y = 2 - 3x - 8x^2 + 9x^3 + \frac{64}{3}x^4 - \frac{45}{2}x^5 - \frac{256}{5}x^6 + \frac{105}{2}x^7 + \dots$$

Ο υπολογισμός των συντελεστών αναδρομικά όπως στο Παράδειγμα 6.4.4 είναι κουραστικός. Σας συνιστούμε να κάνετε αυτού του είδους τους υπολογισμούς, γράφοντας ένα σύντομο πρόγραμμα, για να εφαρμόσετε την κατάλληλη σχέση επανάληψης σε μια αριθμομηχανή ή στον υπολογιστή.

Για υπολογιστικούς λόγους είναι συνήθως πιο αποτελεσματικό να ξεκινάτε με τους δεδομένους συντελεστές $a_0 = y(x_0)$ και $a_1 = y'(x_0)$, και να υπολογίζετε a_2, \dots, a_N αναδρομικά και στη συνέχεια υπολογίζετε τις κατά προσέγγιση τιμές της λύσεως από το πολυώνυμο του Taylor.

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n (x - x_0)^n.$$

Το κόλπο είναι να αποφασίσουμε πώς να επιλέξουμε N έτσι ώστε η προσέγγιση της $y(x) \approx T_N(x)$ να είναι επαρκώς ακριβής για το υποδιάστημα του διαστήματος σύγκλισης που μας ενδιαφέρει. Στις υπολογιστικές ασκήσεις σε αυτήν και στις επόμενες δύο ενότητες, συχνά θα σας ζητηθεί να λαμβάνετε τη λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος αριθμητικής ολοκλήρωσης, και να συγκρίνετε τη λύση που λαμβάνετε με αυτό τον τρόπο με τις προσεγγίσεις που λαμβάνονται με T_N για διάφορες τιμές των N . Αυτό είναι ένα τυπικό είδος ασκήσεων, έχει σχεδιαστεί για να σας δώσει εικόνα πώς η ακρίβεια της προσέγγισης της $y(x) \approx T_N(x)$ συμπεριφέρεται ως μία συνάρτηση του N και το διάστημα που εργάζεστε. Στην πραγματικότητα, θα επιλέγατε τη μία ή την άλλη από τις δύο μεθόδους (αριθμητική ολοκλήρωση ή επίλυση σειρών). Εάν επιλέξετε τη μέθοδο επίλυσης σειρών,

τότε μία πρακτική διαδικασία για τον προσδιορισμό μιας κατάλληλης τιμής της N είναι η συνεχώς αυξανόμενη N μέχρι το μέγιστο της $|T_N - T_{N-1}|$ για το διάστημα που μας ενδιαφέρει να είναι εντός του περιθωρίου σφάλματος που είστε διατεθειμένοι να αποδεχθείτε.

Ασχολούμενοι με υπολογιστικά προβλήματα που εφαρμόζουμε την αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων θα πρέπει να επιλέξουμε την πιο ακριβή αριθμητική ολοκλήρωση που υποστηρίζει το λογισμικό μας, και να πειραματιστούμε με το μέγεθος του βήμα μέχρι να είμαστε σίγουροι ότι τα αριθμητικά αποτελέσματα είναι επαρκώς ικανοποιητικά για το πρόβλημα στο χέρι.

6.4 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1 -8 βρείτε τη δυναμική σειρά στο x που είναι η γενική λύση της δοσμένης ΔΕ.

1. $(1 + x^2)y'' + 6xy' + 6y = 0$
2. $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$
3. $(1 + x^2)y'' - 8xy' + 20y = 0$
4. $(1 - x^2)y'' - 8xy' - 12y = 0$
5. $(1 + 2x^2)y'' + 7xy' + 2y = 0$
6. $(1 + x^2)y'' + 2xy' + \frac{1}{4}y = 0$
7. $(1 - x^2)y'' - 5xy' - 4y = 0$
8. $(1 + x^2)y'' - 10xy' + 28y = 0$
9. (α') Βρείτε τη δυναμική σειρά στο x που είναι η γενική λύση της ΔΕ: $y'' + xy' + 2y = 0$.
- (β') Για αρκετές επιλογές των a_0 και a_1 , χρησιμοποιείτε λογισμικό ΔΕ για την επίλυση του ΠΑΤ

$$y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1, \quad (\text{A})$$

στο διάστημα $(-5, 5)$.

- (γ') Για τις τιμές της σταθεράς r στο $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ σχεδιάστε το γράφημα της

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$$

και της λύσης που πήρατε στο (α) στο $(-r, r)$. Συνεχίστε αυξάνοντας το N μέχρι να μην υπάρχει αισθητή διαφορά μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων.

10. Ακολουθήστε τις οδηγίες της άσκησης 9 για τη ΔΕ

$$y'' + 2xy' + 3y = 0.$$

Στις Ασκήσεις 11-13 βρείτε τα a_0, \dots, a_N για N τουλάχιστον 7 στην επίλυση της δυναμικής σειράς $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ του δοσμένου ΠΑΤ.

11. $(1 + x^2)y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
12. $(1 + 2x^2)y'' - 9xy' - 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
13. $(1 + 8x^2)y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
14. Κάντε το επόμενο πείραμα για διάφορες επιλογές των πραγματικών αριθμών a_0, a_1 , και r , με $0 < r < 1/\sqrt{2}$.

(α') Χρησιμοποιήστε λογισμικό διαφορικών εξισώσεων για την επίλυση του ΠΑΤ

$$(1 - 2x^2)y'' - xy' + 3y = 0, \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1, \quad (\text{A})$$

στο διάστημα $(-r, r)$.

(β') Αφού επιλύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών (A) με τη μέθοδο των δυναμικών σειρών $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, υπολογίστε τη για $N = 2, 3, 4, \dots, a_2, \dots, a_N$ και κάντε τη γραφική παράσταση

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$$

και τη λύση που λαμβάνετε στο (α) στο $(-r, r)$. Συνεχίστε αυξάνοντας το N μέχρι που να μην υπάρχει αισθητή διαφορά μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων.

15. Κάντε το (α) και (β) για αρκετές τιμές του r στο $(0, 1)$:

(α') Χρησιμοποιήστε λογισμικό διαφορικών εξισώσεων για την επίλυση του ΠΑΤ

$$(1 + x^2)y'' + 10xy' + 14y = 0, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 1, \quad (\text{A})$$

στο διάστημα $(-r, r)$.

(β') Αφού επιλύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών (A) με τη μέθοδο των δυναμικών σειρών $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, υπολογίστε τη για $N = 2, 3, 4, \dots, a_2, \dots, a_N$ και κάντε τη γραφική παράσταση των

$$T_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n$$

και η λύση που λαμβάνετε στο (α) στο $(-r, r)$. Συνεχίστε αυξάνοντας το N μέχρι που να μην υπάρχει αισθητή διαφορά μεταξύ των δύο γραφικών παραστάσεων. Τι συμβαίνει με το απαιτούμενο N καθώς $r \rightarrow 1$?

(γ') Δοκιμάστε (α) και (β) με $r = 1.2$. Εξηγήστε τα αποτελέσματά σας.

Στις Ασκήσεις 16-20 βρείτε τη δυναμική σειρά στο $x - x_0$ που είναι η γενική λύση.

16. $y'' - y = 0; \quad x_0 = 3$

17. $y'' - (x - 3)y' - y = 0; \quad x_0 = 3$

18. $(1 - 4x + 2x^2)y'' + 10(x - 1)y' + 6y = 0; \quad x_0 = 1$

19. $(11 - 8x + 2x^2)y'' - 16(x - 2)y' + 36y = 0; \quad x_0 = 2$

20. $(5 + 6x + 3x^2)y'' + 9(x + 1)y' + 3y = 0; \quad x_0 = -1$

Στις Ασκήσεις 21-26 βρείτε τα a_0, \dots, a_N για N και τουλάχιστον ως το 7 της δυναμικής σειράς $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ για την επίλυση του δεδομένου ΠΑΤ. Πάρτε το x_0 για να είναι το σημείο όπου οι αρχικές συνθήκες επιβάλλονται.

21. $(x^2 - 4)y'' - xy' - 3y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$

22. $y'' + (x - 3)y' + 3y = 0, \quad y(3) = -2, \quad y'(3) = 3$

23. $(5 - 6x + 3x^2)y'' + (x - 1)y' + 12y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 1$

24. $(4x^2 - 24x + 37)y'' + y = 0, \quad y(3) = 4, \quad y'(3) = -6$

25. $(x^2 - 8x + 14)y'' - 8(x - 4)y' + 20y = 0, \quad y(4) = 3, \quad y'(4) = -4$

26. $(2x^2 + 4x + 5)y'' - 20(x + 1)y' + 60y = 0, \quad y(-1) = 3, \quad y'(-1) = -3$

27. (α') Βρείτε μια δυναμική σειρά στο x που να είναι η γενική λύση της

$$(1 + x^2)y'' + 4xy' + 2y = 0. \quad (\text{A})$$

(β') Χρησιμοποιήστε το (α) και τον τύπο

$$\frac{1}{1 - r} = 1 + r + r^2 + \dots + r^n + \dots \quad (-1 < r < 1)$$

για το άθροισμα των γεωμετρικών σειρών, ώστε να βρείτε έναν κλειστό τύπο για να εκφράσετε τη γενική λύση της (A) στο $(-1, 1)$.

(γ') Δείξτε ότι η έκφραση που λαμβάνετε στο (β) είναι στην πραγματικότητα η γενική λύση της (A) σε $(-\infty, \infty)$.

28. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα 6.4.2 για να δείξετε ότι οι δυναμικές σειρές στο x για τη γενική λύση της

$$(1 + \alpha x^2)y'' + \beta xy' + \gamma y = 0$$

είναι

$$y = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\prod_{j=0}^{m-1} p(2j) \right] \frac{x^{2m}}{(2m)!} + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\prod_{j=0}^{m-1} p(2j + 1) \right] \frac{x^{2m+1}}{(2m + 1)!}.$$

29. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 28 για να δείξετε ότι όλες οι λύσεις της

$$(1 + \alpha x^2)y'' + \beta xy' + \gamma y = 0$$

είναι πολυώνυμα, αν και μόνο αν

$$\alpha n(n-1) + \beta n + \gamma = \alpha(n-2r)(n-2s-1),$$

όπου r και s είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί.

30. (α') Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 28 για να δείξετε ότι οι δυναμικές σειρές στο x για τη γενική λύση του

$$(1 - x^2)y'' - 2bxy' + \alpha(\alpha + 2b - 1)y = 0$$

είναι $y = a_0y_1 + a_1y_2$, όπου

$$y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\prod_{j=0}^{m-1} (2j - \alpha)(2j + \alpha + 2b - 1) \right] \frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

and

$$y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\prod_{j=0}^{m-1} (2j + 1 - \alpha)(2j + \alpha + 2b) \right] \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

(β') Υποθέτουμε ότι $2b$ δεν είναι ένας αρνητικός περιττός ακέραιος αριθμός και k είναι μη αρνητικός ακέραιος αριθμός. Δείξτε ότι y_1 είναι ένας πολυώνυμο βαθμού $2k$ τέτοιο ώστε $y_1(-x) = y_1(x)$ αν $\alpha = 2k$, ενώ y_2 είναι ένα πολυώνυμο του βαθμού $2k + 1$ τέτοιο ώστε $y_2(-x) = -y_2(x)$ αν $\alpha = 2k + 1$. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αν το n είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός, τότε υπάρχει ένα πολυώνυμο P_n βαθμού n , τέτοιο ώστε $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ και

$$(1 - x^2)P_n'' - 2bxP_n' + n(n + 2b - 1)P_n = 0. \quad (\text{A})$$

(γ') Δείξτε ότι η (A) συνεπάγεται ότι

$$[(1 - x^2)^b P_n']' = -n(n + 2b - 1)(1 - x^2)^{b-1} P_n,$$

και χρησιμοποιήστε το για να δείξετε ότι αν m και n είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί, τότε

$$\begin{aligned} & [(1 - x^2)^b P_n']' P_m - [(1 - x^2)^b P_m']' P_n = \\ & [m(m + 2b - 1) - n(n + 2b - 1)] (1 - x^2)^{b-1} P_m P_n. \end{aligned} \quad (\text{B})$$

(δ') Τώρα ας υποθέσουμε ότι $b > 0$. Χρησιμοποιήστε το (B) και ολοκληρώστε τα

μέρη για να δείξει ότι αν $m \neq n$, τότε

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{b-1} P_m(x) P_n(x) dx = 0.$$

(Εμείς λέμε ότι P_m και P_n είναι *ορθογώνια* στο $(-1, 1)$ με συνάρτηση βάρους $(1-x^2)^{b-1}$.)

31. (α') Χρησιμοποιήστε την άσκηση 28 για να αποδείξετε ότι οι δυναμικές σειρές στο x για τη γενική επίλυση της εξίσωσης του Hermite

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

είναι $y = a_0 y_1 + a_1 y_2$, όπου

$$y_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\prod_{j=0}^{m-1} (2j - \alpha) \right] \frac{2^m x^{2m}}{(2m)!}$$

και

$$y_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\prod_{j=0}^{m-1} (2j + 1 - \alpha) \right] \frac{2^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

- (β') Ας υποθέσουμε ότι k είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός. Αποδείξτε ότι y_1 είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2k$ τέτοιο ώστε $y_1(-x) = y_1(x)$ αν $\alpha = 2k$, ενώ y_2 είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2k + 1$ τέτοιο ώστε $y_2(-x) = -y_2(x)$ αν $\alpha = 2k + 1$. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αν το n είναι αρνητικός ακέραιος αριθμός τότε υπάρχει ένα πολυώνυμο P_n βαθμού n τέτοιο ώστε $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ και

$$P_n'' - 2xP_n' + 2nP_n = 0. \quad (\text{A})$$

- (γ') Αποδείξτε ότι (A) συνεπάγεται ότι

$$[e^{-x^2} P_n']' = -2ne^{-x^2} P_n,$$

και χρησιμοποιήστε το για να αποδείξετε ότι αν m και n είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, τότε

$$[e^{-x^2} P_n']' P_m - [e^{-x^2} P_m']' P_n = 2(m-n)e^{-x^2} P_m P_n. \quad (\text{B})$$

- (δ') Χρησιμοποιήστε το (B) και ολοκλήρωση και στα δύο μέρη για να αποδείξετε ότι αν $m \neq n$, τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} P_m(x) P_n(x) dx = 0.$$

(Λέμε ότι P_m και P_n are *ορθογώνια* στο $(-\infty, \infty)$ με συνάρτηση βάρους e^{-x^2} .)

32. Μελετήστε την εξίσωση

$$(1 + \alpha x^3) y'' + \beta x^2 y' + \gamma xy = 0, \quad (\text{A})$$

και έστω $p(n) = \alpha n(n-1) + \beta n + \gamma$. (Η ιδιαίτερη περίπτωση της $y'' - xy = 0$ για (A) είναι η εξίσωση του Airy.)

(α') Τροποποιήστε το επιχείρημα που χρησιμοποιείται στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.4.2 για να αποδείξετε ότι

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

είναι μία λύση της (A) αν και μόνο αν το $a_2 = 0$ και

$$a_{n+3} = -\frac{p(n)}{(n+3)(n+2)} a_n, \quad n \geq 0.$$

(β') Αποδείξτε από το (α) ότι η $a_n = 0$ εκτός αν $n = 3m$ ή $n = 3m+1$ για κάποιους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς m , και ότι

$$a_{3m+3} = -\frac{p(3m)}{(3m+3)(3m+2)} a_{3m}, \quad m \geq 0,$$

και

$$a_{3m+4} = -\frac{p(3m+1)}{(3m+4)(3m+3)} a_{3m+1}, \quad m \geq 0,$$

όπου a_0 και a_1 μπορούν να καθοριστούν αυθαίρετα.

(γ') Συμπεραίνοντας από την (β) ότι οι δυναμικές σειρές στο x για τη γενική λύση της (A) είναι

$$y = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\prod_{j=0}^{m-1} \frac{p(3j)}{3j+2} \right] \frac{x^{3m}}{3^m m!} \\ + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\prod_{j=0}^{m-1} \frac{p(3j+1)}{3j+4} \right] \frac{x^{3m+1}}{3^m m!}.$$

Στις Ασκήσεις 33-37 χρησιμοποιήστε τη μέθοδο της Άσκησης 32 και βρείτε τις δυναμικές σειρές στο x για τη γενική λύση της δεδομένης ΔΕ.

33. $y'' - xy = 0$

34. $(1 - 2x^3)y'' - 10x^2y' - 8xy = 0$

35. $(1 + x^3)y'' + 7x^2y' + 9xy = 0$

36. $(1 - 2x^3)y'' + 6x^2y' + 24xy = 0$

37. $(1 - x^3)y'' + 15x^2y' - 63xy = 0$

38. Μελετήστε την εξίσωση

$$(1 + \alpha x^{k+2})y'' + \beta x^{k+1}y' + \gamma x^k y = 0, \quad (\text{A})$$

όπου k είναι ένας θετικός ακέραιος, και έστω $p(n) = \alpha n(n-1) + \beta n + \gamma$.

(α') Τροποποιήστε το επιχειρήμα που χρησιμοποιείται για να αποδείξει του θεωρήματος 6.4.2 για να αποδείξετε ότι

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

είναι μία λύση του (A) αν και μόνο αν το $a_n = 0$ για $2 \leq n \leq k+1$ και

$$a_{n+k+2} = -\frac{p(n)}{(n+k+2)(n+k+1)} a_n, \quad n \geq 0.$$

(β') Αποδείξτε από (α) ότι είναι $a_n = 0$ εκτός αν $n = (k+2)m$ ή $n = (k+2)m+1$ για κάποιο μη αρνητικό ακέραιο αριθμό m , και ότι

$$a_{(k+2)(m+1)} = -\frac{p((k+2)m)}{(k+2)(m+1)[(k+2)(m+1)-1]} a_{(k+2)m}, \quad m \geq 0,$$

και

$$a_{(k+2)(m+1)+1} = -\frac{p((k+2)m+1)}{[(k+2)(m+1)+1](k+2)(m+1)} a_{(k+2)m+1}, \quad m \geq 0,$$

όπου a_0 και a_1 μπορεί να είναι αυθαίρετα.

(γ') Συνοψίζοντας από το (β) ότι οι δυναμικές σειρές στο x για τη γενική λύση του (A) είναι

$$y = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\prod_{j=0}^{m-1} \frac{p((k+2)j)}{(k+2)(j+1)-1} \right] \frac{x^{(k+2)m}}{(k+2)^m m!} \\ + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left[\prod_{j=0}^{m-1} \frac{p((k+2)j+1)}{(k+2)(j+1)+1} \right] \frac{x^{(k+2)m+1}}{(k+2)^m m!}.$$

Στις Ασκήσεις 39-44 χρησιμοποιείτε τη μέθοδο της άσκησης 38 για να βρείτε τις δυναμικές σειρές στο x για τη γενική λύση της δεδομένης ΔΕ.

39. $(1 + 2x^5)y'' + 14x^4y' + 10x^3y = 0$

40. $y'' + x^2y = 0$

41. $y'' + x^6y' + 7x^5y = 0$

42. $(1 + x^8)y'' - 16x^7y' + 72x^6y = 0$

43. $(1 - x^6)y'' - 12x^5y' - 30x^4y = 0$

44. $y'' + x^5y' + 6x^4y = 0$

Βιβλιογραφία

Ν. Σταυρακάκης, 2011 *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις: γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή*, Παπασωτηρίου, Αθήνα.

Β. Μ. Ρόθος, Χ. Α. Σφυράκης, 2011 *Λογισμός μιας Μεταβλητής* Εκδόσεις Αφοι Βλάσσοι, Αθήνα.

Ντούγιας Σωτήρης Κ., 2003. *Απειροστικός λογισμός I ακολουθίες σειρές, συναρτήσεις (όριο-συνέχεια), διαφορικός λογισμός*, Leader Books, Αθήνα.

L. Brand, 1984 *Μαθηματική Ανάλυση*, Ε.Μ.Ε.

W.E Boyce, & R.C. DiPrima, 2001 *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th edn. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.

W. Rudin, 1976 *Principles of mathematical analysis*, third edn. McGraw-Hill Book Co., New York. International Series in Pure and Applied Mathematics.

W. F. Trenc 2013 *Elementary Differential Equations*, Books and Monographs, Trinity University.

Κεφάλαιο 7

Μετασχηματισμός Laplace

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη μέθοδο του *μετασχηματισμού Laplace*, η οποία αποτελεί μία από τις βασικές τεχνικές μαθηματικών προβλημάτων: μετασχηματίζει δύσκολα προβλήματα σε απλούστερα που χρησιμοποιούνται για την επίλυση του αρχικού προβλήματος. Η μέθοδος που θα παρουσιάσουμε σε αυτό το κεφάλαιο μετασχηματίζει ΠΑΤ με γραμμικές ΔΕ με σταθερούς συντελεστές (και μη σε ορισμένες των περιπτώσεων) σε αλγεβρικές εξισώσεις (ή ΔΕ μικρότερης τάξης) των οποίων η λύση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσουμε το αρχικό ΠΑΤ. Θα μπορούσε κάποιος να ισχυριστεί ότι η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace, αποτελεί μία εναλλακτική μέθοδο για την επίλυση των ίδιων προβλημάτων που συζητήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Παρόλα αυτά σε ορισμένες των περιπτώσεων η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace είναι πιο αποτελεσματική από ότι οι άλλες μέθοδοι, π.χ. σε φυσικά προβλήματα με ασυνεχείς συναρτήσεις εξωτερικής δύναμης.

Η δομή του κεφαλαίου είναι η ακόλουθη: Στο εδάφιο 7.1 ορίζουμε τον Μετασχηματισμό Laplace και αναπτύσσουμε τις βασικές ιδιότητες του, Στο εδάφιο 7.2 ορίζουμε τον αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace Στο εδάφιο 7.3 θα παρουσιάσουμε την επίλυση μίας ΔΕ με σταθερούς συντελεστές με χρήση του Μετασχηματισμού Laplace στο $(0, \infty)$. Στο εδάφιο 7.4 ορίζουμε τη Συνάρτηση Βήματος (Heaviside) Στο εδάφιο 7.4.1 θα ασχοληθούμε με την επίλυση ΔΕ με σταθερούς συντελεστές και με κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις δύναμης με χρήση συναρτήσεων βήματος. Στο εδάφιο 7.5 διατυπώνουμε το Θεώρημα Συνέλιξης. Στο εδάφιο 7.6 ορίζονται οι συναρτήσεις Dirac.

Στο τέλος του βιβλίου στο Παράρτημα Α' παραθέτουμε το βασικό Τυπολόγιο του Μετασχηματισμού Laplace.

7.1 Εισαγωγή στον μετασχηματισμό Laplace

Ορισμός του μετασχηματισμού Laplace

Για να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace, υπενθυμίζουμε τον ορισμό του γενικευμένου (ή καταχρηστικού) ολοκληρώματος, (βλ. Β. Ρόθος & Χ. Σφυράκης, 2011). Αν g είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a, T]$ για κάθε $T > a$, τότε το *γενικευμένο ολοκλήρωμα της g στο $[a, \infty)$* ορίζεται ως:

$$\int_a^\infty g(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_a^T g(t) dt. \quad (7.1)$$

Θα λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα *συγκλίνει*, αν το όριο στην (7.1) υπάρχει, διαφορετικά θα λέμε ότι *αποκλίνει* ή *δεν υπάρχει*. Δίνουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace της f .

Ορισμός 7.1.1 Έστω f που ορίζεται για $t \geq 0$ και s πραγματικός αριθμός. Τότε ο *μετασχηματισμός Laplace* της f είναι η συνάρτηση F ορισμένη ως

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad (7.2)$$

για εκείνες τις τιμές του s για τις οποίες το γενικευμένο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Σημειώνουμε ότι η μεταβλητή ολοκλήρωσης στην (7.2) είναι t , αφού s είναι παράμετρον ανεξάρτητη της t . Χρησιμοποιούμε την t ως ανεξάρτητη μεταβλητή για την f , διότι στις εφαρμογές ο μετασχηματισμός Laplace δρα σε συναρτήσεις του χρόνου t_0 .

Ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να θεωρηθεί ο τελεστής \mathcal{L} που μετασχηματίζει τη συνάρτηση $f = f(t)$ στη συνάρτηση $F = F(s)$. Έτσι, η (7.2) μπορεί να γραφεί ως

$$F = \mathcal{L}(f).$$

Οι συναρτήσεις f και F αποτελούν *ζεύγος μετασχηματισμού*, το οποίο μερικές φορές δηλώνεται από

$$f(t) \leftrightarrow F(s).$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν $F(s)$ ορίζεται για $s = s_0$, τότε ορίζεται για όλα $s > s_0$.

Υπολογισμός Μετασχηματισμού Laplace ορισμένων συναρτήσεων

Παράδειγμα 7.1.1 Βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace της $f(t) = 1$.

Λύση Από (7.2) με $f(t) = 1$,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} dt.$$

Αν $s \neq 0$, τότε

$$\int_0^T e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^T = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (7.3)$$

Οπότε

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} dt = \begin{cases} \frac{1}{s}, & s > 0, \\ \infty, & s < 0. \end{cases} \quad (7.4)$$

Αν $s = 0$, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι 1, και

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T 1 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} T = \infty.$$

Συνεπώς $F(0)$ είναι απροσδιόριστη, και

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γραφεί με τον τελεστικό συμβολισμό

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}, \quad s > 0,$$

ή ως ζεύγος μετασχηματισμού

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Είναι βολικό να συντομεύσουμε τους υπολογισμούς μας ολοκληρώνοντας από 0 έως T και παίρνοντας το όριο $T \rightarrow \infty$. Οπότε αντί για (7.3) και (7.4) ως ξεχωριστά βήματα μπορούμε να γράψουμε

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{s}, & s > 0, \\ \infty, & s < 0. \end{cases}$$

Θα ακολουθήσουμε αυτήν την τακτική στο υπόλοιπο του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 7.1.2 Βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace της $f(t) = t$.

Λύση Από (7.2) με $f(t) = t$,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt. \quad (7.5)$$

Αν $s \neq 0$, η ολοκλήρωση κατά παράγοντες δίνει

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-st} t dt &= -\frac{te^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\left[\frac{t}{s} + \frac{1}{s^2} \right] e^{-st} \Big|_0^{\infty} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s^2}, & s > 0, \\ \infty, & s < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Αν $s = 0$, το ολοκλήρωμα στην (7.5) γράφεται

$$\int_0^{\infty} t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^{\infty} = \infty.$$

Οπότε $F(0)$ απροσδιόριστο και

$$F(s) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

Το αποτέλεσμα γράφεται ως

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0,$$

Παράδειγμα 7.1.3 Βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace της $f(t) = e^{at}$, όπου a σταθερά.

Λύση Από (7.2) με $f(t) = e^{at}$,

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt.$$

Γνωρίζουμε από το Παράδειγμα 7.1.1 ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Αντικαθιστώντας s με $s - a$ έχουμε

$$F(s) = \frac{1}{s - a}, \quad s > a.$$

Το οποίο μπορεί να γραφεί

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s - a}, \quad s > a.$$

Παράδειγμα 7.1.4 Βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace της $f(t) = \sin \omega t$ και $g(t) = \cos \omega t$, με ω σταθερά.

Λύση Ορίζουμε

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin \omega t dt \tag{7.6}$$

και

$$G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t dt. \tag{7.7}$$

Αν $s > 0$, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες της (7.6) έχουμε

$$F(s) = -\frac{e^{-st}}{s} \sin \omega t \Big|_0^{\infty} + \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos \omega t dt,$$

οπότε

$$F(s) = \frac{\omega}{s}G(s). \quad (7.8)$$

Αν $s > 0$, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες της (7.7) έχουμε

$$G(s) = -\frac{e^{-st} \cos \omega t}{s} \Big|_0^\infty - \frac{\omega}{s} \int_0^\infty e^{-st} \sin \omega t dt,$$

οπότε

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{\omega}{s}F(s).$$

Αντικαθιστώντας από την (7.8) στην προηγούμενη σχέση

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{\omega^2}{s^2}G(s).$$

Επιλύοντας ως προς $G(s)$, έχουμε

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0.$$

Αυτό και (7.8) συνεπάγεται ότι

$$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0.$$

Πίνακας με τους μετασχηματισμούς Laplace

Στο Παράρτημα Α' παραθέτουμε πλήρες τυπολόγιο για τον μετασχηματισμό Laplace.

Παράδειγμα 7.1.5 Με χρήση του τυπολογίου να υπολογίσετε τον μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}(t^3 e^{4t})$.

Λύση Από το τυπολόγιο έχουμε

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

Θέτοντας $n = 3$ και $a = 4$ προκύπτει

$$\mathcal{L}(t^3 e^{4t}) = \frac{3!}{(s-4)^4} = \frac{6}{(s-4)^4}. \quad \blacksquare$$

Γραμμική Ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace

Όπως φαίνεται από το επόμενο θεώρημα ο μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός.

Θεώρημα 7.1.1 [Γραμμική Ιδιότητα] Υποθέτουμε ότι $\mathcal{L}(f_i)$ ορίζεται για $s > s_i$, $1 \leq i \leq n$. Έστω $s_0 = \max\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ και c_1, c_2, \dots, c_n σταθερές. Τότε

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n) = c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2) + \dots + c_n \mathcal{L}(f_n) \quad \text{για } s > s_0.$$

Απόδειξη Παραθέτουμε την απόδειξη για $n = 2$. Αν $s > s_0$, τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) &= \int_0^{\infty} e^{-st} (c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)) dt \\ &= c_1 \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt \\ &= c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2). \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.1.6 Με χρήση του Θεωρήματος 7.1.1 και του τυπολογίου

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$$

να βρείτε $\mathcal{L}(\cosh bt)$ ($b \neq 0$).

Λύση Εξ ορισμού,

$$\cosh bt = \frac{e^{bt} + e^{-bt}}{2}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cosh bt) &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{2}e^{bt} + \frac{1}{2}e^{-bt}\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{bt}) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-bt}) \quad (\text{γραμμική ιδιότητα}) \quad (7.9) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{s-b} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+b}, \end{aligned}$$

όπου ο πρώτος μετασχηματισμός ισχύει για $s > b$ και ο δεύτερος για $s > -b$ και οι δύο ορίζονται για $s > |b|$. Απλοποιώντας την σχέση (7.9) έχουμε

$$\mathcal{L}(\cosh bt) = \frac{s}{s^2 - b^2}, \quad s > |b|.$$

Θεώρημα Μετατόπισης

Θεώρημα 7.1.2 [Θεώρημα Μετατόπισης]

Αν

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (7.10)$$

είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t)$ για $s > s_0$, τότε $F(s-a)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της $e^{at} f(t)$ για $s > s_0 + a$.

ΑΠÓΔΕΙΞΗ. Αντικαθιστώντας s με $s - a$ στην (7.10) έχουμε

$$F(s - a) = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt \quad (7.11)$$

αν $s - a > s_0$. Όμως, η (7.11) μπορεί να γραφεί ως

$$F(s - a) = \int_0^{\infty} e^{-st} (e^{at} f(t)) dt,$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Παράδειγμα 7.1.7 Με χρήση του Θεωρήματος 7.1.2 και του τυπολογίου, υπολογίστε

$$\mathcal{L}(e^{at}), \quad \mathcal{L}(te^{at}), \quad \mathcal{L}(e^{\lambda t} \sin \omega t), \text{ and } \mathcal{L}(e^{\lambda t} \cos \omega t).$$

Λύση Με χρήση του τυπολογίου και του Θεωρήματος 7.1.2 προκύπτουν οι ζητούμενοι μετασχηματισμοί Laplace.

$f(t) \leftrightarrow F(s)$	$e^{at} f(t) \leftrightarrow F(s - a)$
$1 \leftrightarrow \frac{1}{s}, \quad s > 0$	$e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{(s - a)}, \quad s > a$
$t \leftrightarrow \frac{1}{s^2}, \quad s > 0$	$te^{at} \leftrightarrow \frac{1}{(s - a)^2}, \quad s > a$
$\sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$	$e^{\lambda t} \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}, \quad s > \lambda$
$\cos \omega t \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad s > 0$	$e^{\lambda t} \cos \omega t \leftrightarrow \frac{s - \lambda}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}, \quad s > \lambda$

Θεώρημα Υπαρξης μετασχηματισμού Laplace.

Κάθε συνάρτηση δεν επιδέχεται μετασχηματισμό Laplace. Για παράδειγμα, μπορεί να αποδειχθεί ότι (Άσκηση 3)

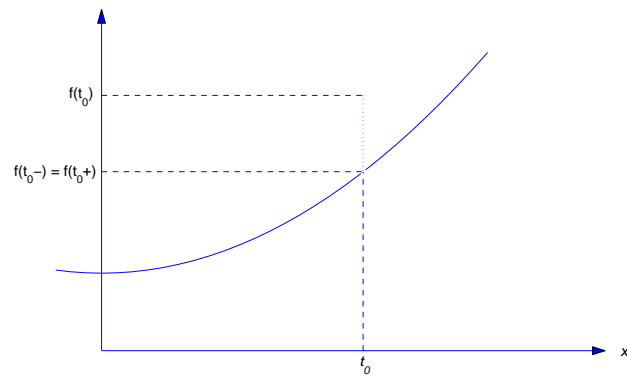
$$\int_0^{\infty} e^{-st} e^{t^2} dt = \infty$$

για όλους τους s . Δηλαδή, η συνάρτηση $f(t) = e^{t^2}$ δεν έχει μετασχηματισμό Laplace.

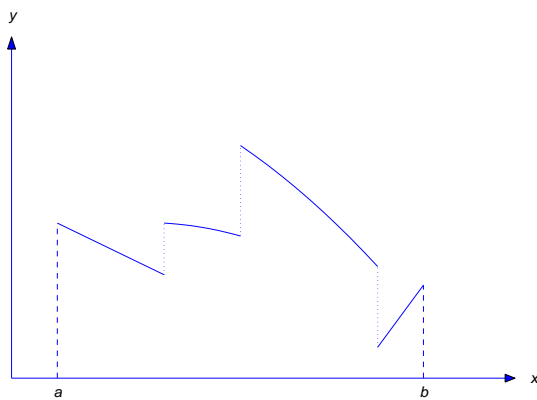
Στόχος μας είναι να διατυπώσουμε συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί μία συνάρτηση για να δέχεται μετασχηματισμό Laplace.

Ορισμός 7.1.2

- (i) μία συνάρτηση f καλείται *κατά τμήματα συνεχής* σε ένα πεπερασμένο κλειστό διάστημα $[0, T]$ εάν $f(0+)$ και $f(T-)$ είναι πεπερασμένα και η f είναι συνεχής στο ανοικτό $(0, T)$ με εξαίρεση σε πεπερασμένο αριθμό σημείων, όπου η f μπορεί να έχει ασυνέχειες.



Σχήμα 7.1: Συνεχής συνάρτηση

Σχήμα 7.2: Κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$.

- (ii) μία συνάρτηση f καλείται *κατά τμήματα συνεχής* σε άπειρο διάστημα $[0, \infty)$ εάν είναι κατά τμήματα συνεχής σε διάστημα $[0, T]$ για κάθε $T > 0$.

Στο Σχήμα 7.2 δείχνουμε γραφικά μία κατά τμήματα συνεχή συνάρτηση.

Θυμίζουμε από τον Λογισμό συναρτήσεων μίας μεταβλητής ότι εάν μία συνάρτηση είναι κατά τμήματα συνεχής σε πεπερασμένο κλειστό διάστημα τότε είναι και ολοκληρώσιμη σε αυτό το διάστημα (βλ. Ρόθος & Σφυράκης, 2011). Αλλά εάν η f είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[0, \infty)$, τότε και η $e^{-st}f(t)$, συνεπώς

$$\int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

υπάρχει για κάθε $T > 0$. Επισημαίνουμε όμως ότι η κατά τμήματα συνέχεια δεν εξασφαλίζει ότι το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} f(t) dt \quad (7.12)$$

συγκλίνει για s σε κάποιο διάστημα (s_0, ∞) . Για παράδειγμα έχουμε αναφέρει πιο πάνω ότι (7.12) αποκλίνει για όλα τα s εάν $f(t) = e^{t^2}$. Αυτό συμβαίνει, διότι η e^{t^2} αυξάνει γρήγορα καθώς $t \rightarrow \infty$. Με τον επόμενο ορισμό παρέχουμε έναν περιορισμό που πρέπει να ικανοποιεί η f έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η σύγκλιση του μετασχηματισμού Laplace της f για $s \in (s_0, \infty)$.

Ορισμός 7.1.3 Η συνάρτηση f καλείται *of εκθετικής τάξης s_0* , εάν υπάρχουν σταθερές M and t_0 έτσι ώστε

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t}, \quad t \geq t_0. \quad (7.13)$$

Στην περίπτωση που η συγκεκριμένη τιμή της s_0 είναι ασήμαντη, θα λέμε απλά ότι η f είναι *εκθετικής τάξης*.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει ικανές συνθήκες για να έχει μία συνάρτηση f μετασχηματισμό Laplace.

Θεώρημα 7.1.3 Αν f είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξης s_0 , τότε $\mathcal{L}(f)$ ορίζεται για $s > s_0$.

Παρατήρηση: Επισημαίνουμε ότι οι συνθήκες του Θεωρήματος 7.1.3 είναι ικανές, αλλά όχι αναγκαίες, για να έχει η συνάρτηση f μετασχηματισμό Laplace. Ενδέχεται μία συνάρτηση f να έχει μετασχηματισμό Laplace, ακόμα και όταν η f δεν είναι εκθετικής τάξης.

Παράδειγμα 7.1.8 Αν η f είναι φραγμένη σε διάστημα $[t_0, \infty)$, δηλαδή

$$|f(t)| \leq M, \quad t \geq t_0,$$

τότε η (7.13) ισχύει με $s_0 = 0$, οπότε η f είναι εκθετικής τάξης μηδέν. Έτσι για παράδειγμα, $\sin \omega t$ και $\cos \omega t$ είναι εκθετικής τάξης μηδέν, και το Θεώρημα 7.1.3 συνεπάγεται ότι

$\mathcal{L}(\sin \omega t)$ and $\mathcal{L}(\cos \omega t)$ υπάρχει για $s > 0$. Αυτό ερμηνεύει το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.1.4.

Παράδειγμα 7.1.9 Μπορεί να αποδειχθεί ότι εάν $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s_0 t} f(t)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε η f είναι εκθετικής τάξης s_0 (Άσκηση 6). Αν α είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός και $s_0 > 0$ τότε η $f(t) = t^\alpha$ είναι εκθετικής τάξης s_0 , αφού

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s_0 t} t^\alpha = 0,$$

από κανόνα L'Hôpital. Αν $\alpha \geq 0$, f είναι επίσης συνεχής στο $[0, \infty)$. Αποδεικνύεται από την Άσκηση 6 και το Θεώρημα 7.1.3 ότι $\mathcal{L}(t^\alpha)$ υπάρχει για $s \geq s_0$. Όμως, έχουμε ότι $\mathcal{L}(t^\alpha)$ υπάρχει για όλα $s > 0$. (Βλ. Παράδειγμα 7.1.2).

Παράδειγμα 7.1.10 Αναφέραμε νωρίτερα,

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{t^2} dt = \infty$$

για όλα s , από Θεώρημα 7.1.3 έπεται ότι $f(t) = e^{t^2}$ δεν είναι εκθετικής τάξης, αφού

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{t^2}}{M e^{s_0 t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{M} e^{t^2 - s_0 t} = \infty,$$

οπότε

$$e^{t^2} > M e^{s_0 t}$$

για αρκετά μεγάλες τιμές του t , και για οποιαδήποτε επιλογή των M και s_0 (Άσκηση 3).

7.1 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$.

(a) t (b) $t e^{-t}$ (c) $\sinh bt$

(d) $e^{2t} - 3e^t$ (e) t^2

2. Με χρήση του τυπολογίου του μετασχηματισμού Laplace να βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων:

(a) $\cosh t \sin t$ (b) $\sin^2 t$ (c) $\cos^2 2t$

(d) $\cosh^2 t$ (e) $t \sinh 2t$ (f) $\sin t \cos t$

(g) $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ (h) $\cos 2t - \cos 3t$ (i) $\sin 2t + \cos 4t$

3. Δείξτε ότι

$$\int_0^\infty e^{-st} e^{t^2} dt = \infty$$

για όλους τους $s \in \mathbb{R}$.

4. Αποδείξτε ότι αν $f(t) \leftrightarrow F(s)$, τότε $t^k f(t) \leftrightarrow (-1)^k F^{(k)}(s)$.
5. Με χρήση των μετασχηματισμών Laplace

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t} \sin \omega t) = \frac{\omega}{(s - \lambda)^2 + \omega^2} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}(e^{\lambda t} \cos \omega t) = \frac{s - \lambda}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}$$

και την Άσκηση 4 να υπολογίσετε $\mathcal{L}(te^{\lambda t} \cos \omega t)$ και $\mathcal{L}(te^{\lambda t} \sin \omega t)$.

6. (α') Δείξτε ότι αν $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-s_0 t} f(t)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε η f είναι εκθετικής τάξης s_0 .
- (β') Δείξτε ότι αν f είναι εκθετικής τάξης s_0 , τότε $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$ για όλους $s > s_0$.
- (γ') Δείξτε ότι αν f είναι εκθετικής τάξης s_0 και $g(t) = f(t + \tau)$ όπου $\tau > 0$, τότε g είναι, επίσης, εκθετικής τάξης s_0 .
7. Αποδείξτε ότι: Αν f είναι κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξης, τότε $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$.
8. Αποδείξτε ότι: Αν f είναι συνεχής στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξης $s_0 > 0$, τότε

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f), \quad s > s_0.$$

9. Υποθέτουμε ότι f είναι κατά τμήματα συνεχής και εκθετικής τάξης, και ότι το $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)/t$ υπάρχει. Δείξτε ότι

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^\infty F(r) dr.$$

10. Με χρήση του τυπολογίου του μετασχηματισμού Laplace και της Άσκησης 9 να βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace των ακόλουθων συναρτήσεων:

(a) $\frac{\sin \omega t}{t}$ ($\omega > 0$) (b) $\frac{\cos \omega t - 1}{t}$ ($\omega > 0$) (c) $\frac{e^{at} - e^{bt}}{t}$

(d) $\frac{\cosh t - 1}{t}$ (e) $\frac{\sinh^2 t}{t}$

11. Υποθέτουμε ότι f είναι συνεχής στο $[0, T]$ και $f(t + T) = f(t)$ για όλα $t \geq 0$, (δηλαδή η f είναι *περιοδική με περίοδο T* .)

(α') Από το Θεώρημα 7.1.3 προκύπτει ότι ο μετασχηματισμός Laplace της f ορίζεται για $s > 0$. Υπόδειξη: Αφού f είναι συνεχής στο $[0, T]$ και περιοδική με περίοδο T , είναι και φραγμένη στο $[0, \infty)$.

(β') Δείξτε ότι

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt, \quad s > 0.$$

Υπόδειξη: Γράψτε

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t) dt.$$

Τότε δείξτε ότι

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t) dt = e^{-nsT} \int_0^T e^{-st} f(t) dt,$$

και θυμηθείτε τον τύπο για το άθροισμα γεωμετρικής σειράς.

12. Με χρήση του τύπου από την Άσκηση 11(β) να βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace των ακόλουθων περιοδικών συναρτήσεων:

$$\text{(α')} \quad f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2, \end{cases} \quad f(t+2) = f(t), \quad t \geq 0$$

$$\text{(β')} \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1, \end{cases} \quad f(t+1) = f(t), \quad t \geq 0$$

$$\text{(γ')} \quad f(t) = |\sin t|$$

$$\text{(δ')} \quad f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi, \\ 0, & \pi \leq t < 2\pi, \end{cases} \quad f(t+2\pi) = f(t)$$

7.2 Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Ορισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

Στο προηγούμενο εδάφιο, ορίσαμε τον μετασχηματισμό Laplace της f με

$$F(s) = \mathcal{L}(f) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Θα λέμε ότι η f είναι ένας *αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace* της F , και γράφουμε

$$f = \mathcal{L}^{-1}(F).$$

Πρέπει να είμαστε σε θέση να βρίσκουμε την f από τον μετασχηματισμό της F . Υπάρχει μία μέθοδος της μιγαδικής ανάλυσης αλλά στο βιβλίο αυτό θα χρησιμοποιούμε τον τυπολόγιο του μετασχηματισμού Laplace για την εύρεση του αντιστρόφου. Ας δούμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 7.2.1 Με χρήση του τυπολογίου του μετασχηματισμού Laplace βρείτε:

$$\text{(a)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - 1}\right) \quad \text{and} \quad \text{(b)} \quad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 9}\right).$$

Λύση (α) Θέτοντας $b = 1$ στο ζεύγος μετασχηματισμού

$$\sinh bt \leftrightarrow \frac{b}{s^2 - b^2},$$

έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - 1}\right) = \sinh t.$$

(β) Θέτοντας $\omega = 3$ στο ζεύγος μετασχηματισμού

$$\cos \omega t \leftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega^2},$$

έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 9}\right) = \cos 3t. \blacksquare$$

Το επόμενο θεώρημα μας επιτρέπει να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace γραμμικών συνδυασμών μετασχηματισμών από το τυπολόγιο. Θα παραλείψουμε την απόδειξη.

Θεώρημα 7.2.1 [Γραμμική Ιδιότητα] Αν F_1, F_2, \dots, F_n είναι μετασχηματισμοί Laplace και c_1, c_2, \dots, c_n είναι σταθερές, τότε

$$\mathcal{L}^{-1}(c_1 F_1 + c_2 F_2 + \dots + c_n F_n) = c_1 \mathcal{L}^{-1}(F_1) + c_2 \mathcal{L}^{-1}(F_2) + \dots + c_n \mathcal{L}^{-1}(F_n).$$

Παράδειγμα 7.2.2 Βρείτε

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8}{s+5} + \frac{7}{s^2+3}\right).$$

Λύση Από το τυπολόγιο του μετασχηματισμού Laplace,

$$e^{at} \leftrightarrow \frac{1}{s-a} \quad \text{and} \quad \sin \omega t \leftrightarrow \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

Θεώρημα 7.2.1 με $a = -5$ και $\omega = \sqrt{3}$ δίνει

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{8}{s+5} + \frac{7}{s^2+3}\right) &= 8\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+5}\right) + 7\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+3}\right) \\ &= 8\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+5}\right) + \frac{7}{\sqrt{3}}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{s^2+3}\right) \\ &= 8e^{-5t} + \frac{7}{\sqrt{3}}\sin \sqrt{3}t. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.2.3 Βρείτε

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+8}{s^2+2s+5}\right).$$

Λύση Με συμπλήρωση τετραγώνου στον παρονομαστή έχουμε

$$\frac{3s+8}{s^2+2s+5} = \frac{3s+8}{(s+1)^2+4}.$$

Λόγω της μορφής του παρανομαστή μπορούμε να θεωρήσουμε τα ζεύγη των μετασχηματισμών:

$$e^{-t} \cos 2t \leftrightarrow \frac{s+1}{(s+1)^2+4} \quad \text{and} \quad e^{-t} \sin 2t \leftrightarrow \frac{2}{(s+1)^2+4},$$

και γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+8}{(s+1)^2+4}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3s+3}{(s+1)^2+4}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{(s+1)^2+4}\right) \\ &= 3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right) + \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+4}\right) \\ &= e^{-t}\left(3\cos 2t + \frac{5}{2}\sin 2t\right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace ρητών συναρτήσεων

Αρκετές φορές χρειάζεται να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace ρητών συναρτήσεων

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

όπου P και Q είναι πολυώνυμα ως προς s χωρίς κοινούς παράγοντες. Μπορεί να αποδειχθεί ότι $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$, εαν F είναι ο μετασχηματισμός Laplace, μπορούμε να θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση $\text{degree}(P) < \text{degree}(Q)$. Για να υπολογίσουμε τον $\mathcal{L}^{-1}(F)$, αναλύουμε σε απλά κλάσματα την F και προσδιορίζουμε τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace με χρήση του τυπολογίου. Στα επόμενα παραδείγματα παρουσιάζουμε την συγκεκριμένη μέθοδο.

Παράδειγμα 7.2.4 Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2-3s+2}. \quad (7.14)$$

Λύση Παραγοντοποιώντας τον παρανομαστή στην (7.14), έχουμε

$$F(s) = \frac{3s+2}{(s-1)(s-2)}. \quad (7.15)$$

Η ανάλυση σε απλά κλάσματα δίνει

$$\frac{3s+2}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}. \quad (7.16)$$

όπου $A = -5$, $B = 8$,

$$F(s) = -\frac{5}{s-1} + \frac{8}{s-2}$$

και

$$\mathcal{L}^{-1}(F) = -5\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + 8\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) = -5e^t + 8e^{2t}.$$

■

Παράδειγμα 7.2.5 Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της

$$F(s) = \frac{6 + (s+1)(s^2 - 5s + 11)}{s(s-1)(s-2)(s+1)}. \quad (7.17)$$

Λύση Με ανάλυση σε απλά κλάσματα της (7.17) έχουμε

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-2} + \frac{D}{s+1}. \quad (7.18)$$

Οπότε

$$F(s) = \frac{17}{2} \frac{1}{s} - \frac{10}{s-1} + \frac{7}{2} \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+1}$$

και

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(F) &= \frac{17}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - 10\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) + \frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) \\ &= \frac{17}{2} - 10e^t + \frac{7}{2}e^{2t} - e^{-t}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.2.6 Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της

$$F(s) = \frac{8 - (s+2)(4s+10)}{(s+1)(s+2)^2}. \quad (7.19)$$

Λύση Η ανάλυση σε απλά κλάσματα για την περίπτωση που ο παρανομαστής έχει διπλή ρίζα δίνει

$$F(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}. \quad (7.20)$$

Οπότε

$$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{6}{s+2} - \frac{8}{(s+2)^2}$$

και

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(F) &= 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - 6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) - 8\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2}\right) \\ &= 2e^{-t} - 6e^{-2t} - 8te^{-2t}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.2.7 Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της

$$F(s) = \frac{1 - s(5+3s)}{s[(s+1)^2 + 1]}. \quad (7.21)$$

Λύση Η ανάλυση σε απλά κλάσματα για την F είναι

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{(s+1)^2 + 1}. \quad (7.22)$$

Παρατηρούμε από το τυπολόγιο του μετασχηματισμού Laplace, ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός για το δεύτερο κλάσμα στη σχέση (7.22) θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των αντίστροφων μετασχηματισμών

$$e^{-t} \cos t \quad \text{και} \quad e^{-t} \sin t$$

των

$$\frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} \quad \text{και} \quad \frac{1}{(s+1)^2 + 1}$$

αντίστοιχα. Οπότε, αντί της (7.22) μπορούμε να γραψουμε

$$F(s) = \frac{A}{s} + \frac{B(s+1) + C}{(s+1)^2 + 1}. \quad (7.23)$$

Οπότε μετά από πράξεις στην (7.23),

$$F(s) = \frac{1}{2s} - \frac{7}{2} \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} - \frac{5}{2} \frac{1}{(s+1)^2 + 1}.$$

Δηλαδή

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(F) &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) - \frac{7}{2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2 + 1}\right) - \frac{5}{2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2 + 1}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{7}{2} e^{-t} \cos t - \frac{5}{2} e^{-t} \sin t. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

7.2 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Με χρήση του τυπολογίου του μετασχηματισμού Laplace βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

(a) $\frac{3}{(s-7)^4}$	(b) $\frac{2s-4}{s^2-4s+13}$	(c) $\frac{1}{s^2+4s+20}$
(d) $\frac{2}{s^2+9}$	(e) $\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$	(f) $\frac{1}{(s-2)^2-4}$
(g) $\frac{12s-24}{(s^2-4s+85)^2}$	(h) $\frac{2}{(s-3)^2-9}$	(i) $\frac{s^2-4s+3}{(s^2-4s+5)^2}$

2. Με χρήση του Θεωρήματος 7.2.1 του τυπολογίου του μετασχηματισμού Laplace βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \frac{2s+3}{(s-7)^4} & \text{(b)} \frac{s^2-1}{(s-2)^6} & \text{(c)} \frac{s+5}{s^2+6s+18} \\
 \text{(d)} \frac{2s+1}{s^2+9} & \text{(e)} \frac{s}{s^2+2s+1} & \text{(f)} \frac{s+1}{s^2-9} \\
 \text{(g)} \frac{s^3+2s^2-s-3}{(s+1)^4} & \text{(h)} \frac{2s+3}{(s-1)^2+4} & \text{(i)} \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \\
 \text{(j)} \frac{3s+4}{s^2-1} & \text{(k)} \frac{3}{s-1} + \frac{4s+1}{s^2+9} & \text{(l)} \frac{3}{(s+2)^2} - \frac{2s+6}{s^2+4}
 \end{array}$$

3. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \frac{2+3s}{(s^2+1)(s+2)(s+1)} & \text{(b)} \frac{3s^2+2s+1}{(s^2+1)(s^2+2s+2)} \\
 \text{(c)} \frac{3s+2}{(s-2)(s^2+2s+5)} & \text{(d)} \frac{3s^2+2s+1}{(s-1)^2(s+2)(s+3)} \\
 \text{(e)} \frac{2s^2+s+3}{(s-1)^2(s+2)^2} & \text{(f)} \frac{3s+2}{(s^2+1)(s-1)^2}
 \end{array}$$

4. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \frac{17s-15}{(s^2-2s+5)(s^2+2s+10)} & \text{(b)} \frac{8s+56}{(s^2-6s+13)(s^2+2s+5)} \\
 \text{(c)} \frac{s+9}{(s^2+4s+5)(s^2-4s+13)} & \text{(d)} \frac{3s-2}{(s^2-4s+5)(s^2-6s+13)} \\
 \text{(e)} \frac{3s-1}{(s^2-2s+2)(s^2+2s+5)} & \text{(f)} \frac{20s+40}{(4s^2-4s+5)(4s^2+4s+5)}
 \end{array}$$

5. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \frac{1}{s(s^2+1)} & \text{(b)} \frac{1}{(s-1)(s^2-2s+17)} \\
 \text{(c)} \frac{3s+2}{(s-2)(s^2+2s+10)} & \text{(d)} \frac{34-17s}{(2s-1)(s^2-2s+5)} \\
 \text{(e)} \frac{s+2}{(s-3)(s^2+2s+5)} & \text{(f)} \frac{2s-2}{(s-2)(s^2+2s+10)}
 \end{array}$$

6. Βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \frac{2s+1}{(s^2+1)(s-1)(s-3)} & \text{(b)} \frac{s+2}{(s^2+2s+2)(s^2-1)} \\
 \text{(c)} \frac{2s-1}{(s^2-2s+2)(s+1)(s-2)} & \text{(d)} \frac{s-6}{(s^2-1)(s^2+4)} \\
 \text{(e)} \frac{2s-3}{s(s-2)(s^2-2s+5)} & \text{(f)} \frac{5s-15}{(s^2-4s+13)(s-2)(s-1)}
 \end{array}$$

7.3 Επίλυση Προβλημάτων Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ)

Μετασχηματισμός Laplace παραγώγων συναρτήσεων

Στη συνέχεια του κεφαλαίου θα μας απασχολήσει το θέμα επίλυσης ΠΑΤ με χρήση του μετασχηματισμού Laplace, γι' αυτό θα παρουσιάσουμε μερικούς βασικούς τύπους που συνδέουν τον μετασχηματισμό Laplace των f' , $f^{(n)}$ με τον μετασχηματισμό Laplace της f .

Θεώρημα 7.3.1 Έστω f είναι συνεχής στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξης s_0 , και f' είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[0, \infty)$. Τότε f and f' έχουν μετασχηματισμό Laplace για $s > s_0$ και

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0). \quad (7.24)$$

Απόδειξη

Από το Θεώρημα 8.1.6 έχουμε ότι ο $\mathcal{L}(f)$ ορίζεται για $s > s_0$. Θεωρούμε την περίπτωση που η f' είναι συνεχής στο $[0, \infty)$. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} f'(t) dt &= e^{-st} f(t) \Big|_0^T + s \int_0^T e^{-st} f(t) dt \\ &= e^{-sT} f(T) - f(0) + s \int_0^T e^{-st} f(t) dt \end{aligned} \quad (7.25)$$

για κάθε $T > 0$. Αφού f είναι εκθετικής τάξης s_0 , $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-sT} f(T) = 0$ το τελευταίο ολοκλήρωμα στην (7.25) συγκλίνει καθώς, $T \rightarrow \infty$ αν $s > s_0$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt &= -f(0) + s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}(f), \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει την (7.24). Υποθέτουμε τώρα ότι $T > 0$ και f' είναι μόνο κατά τμήματα συνεχής στο $[0, T]$, με ασυνέχειες στα $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1}$. Για διευκόλυνση, έστω $t_0 = 0$ και $t_n = T$. Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες

$$\begin{aligned} \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-st} f'(t) dt &= e^{-st} f(t) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} + s \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-st} f(t) dt \\ &= e^{-st_i} f(t_i) - e^{-st_{i-1}} f(t_{i-1}) + s \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Αθροίζοντας τα δύο μέρη της προηγούμενης σχέσης από $i = 1$ έως n

$$\begin{aligned} (e^{-st_1} f(t_1) - e^{-st_0} f(t_0)) + (e^{-st_2} f(t_2) - e^{-st_1} f(t_1)) + \dots + (e^{-st_N} f(t_N) - e^{-st_{N-1}} f(t_{N-1})) \\ = e^{-st_N} f(t_N) - e^{-st_0} f(t_0) = e^{-sT} f(T) - f(0) \end{aligned}$$

καταλήγουμε στην (7.25), οπότε η (7.24) ισχύει όπως και στην προηγούμενη περίπτωση.

Θεώρημα 7.3.2 Έστω f και f' είναι συνεχείς στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξης s_0 , και ότι f'' είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[0, \infty)$. Τότε f , f' , και f'' δέχονται μετασχηματισμό Laplace

για $s > s_0$,

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0), \quad (7.26)$$

και

$$\mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - f'(0) - sf(0). \quad (7.27)$$

Επίλυση ΔΕ δεύτερης τάξης με τον μετασχηματισμό Laplace

Θα παρουσιάσουμε τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση ΠΑΤ με δεύτερης τάξης ΔΕ με σταθερούς συντελεστές.

Παράδειγμα 7.3.1 Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace να επιλυθεί το ΠΑΤ

$$y'' - 6y' + 5y = 3e^{2t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3. \quad (7.28)$$

Λύση Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της ΔΕ (7.28), έχουμε

$$\mathcal{L}(y'' - 6y' + 5y) = \mathcal{L}(3e^{2t}) = \frac{3}{s-2},$$

που γράφεται

$$\mathcal{L}(y'') - 6\mathcal{L}(y') + 5\mathcal{L}(y) = \frac{3}{s-2}. \quad (7.29)$$

Θεωρούμε $\mathcal{L}(y) = Y(s)$. Το Θεώρημα 7.3.2 και οι αρχικές συνθήκες στην (7.28) δίνουν

$$\mathcal{L}(y') = sY(s) - y(0) = sY(s) - 2$$

και

$$\mathcal{L}(y'') = s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) = s^2Y(s) - 3 - 2s.$$

Αντικαθιστώντας τις δύο τελευταίες στην εξίσωση (7.29) προκύπτει

$$(s^2Y(s) - 3 - 2s) - 6(sY(s) - 2) + 5Y(s) = \frac{3}{s-2}.$$

Οπότε

$$(s^2 - 6s + 5)Y(s) = \frac{3}{s-2} + (3 + 2s) + 6(-2), \quad (7.30)$$

$$(s-5)(s-1)Y(s) = \frac{3 + (s-2)(2s-9)}{s-2},$$

και

$$Y(s) = \frac{3 + (s-2)(2s-9)}{(s-2)(s-5)(s-1)}.$$

Αναλύοντας το δεξί μέρος σε απλά κλάσματα έχουμε

$$Y(s) = -\frac{1}{s-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-5} + \frac{5}{2} \frac{1}{s-1},$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνει

$$y = -e^{2t} + \frac{1}{2}e^{5t} + \frac{5}{2}e^t$$

ως λύση της (7.28). ■

Θα δούμε πώς εφαρμόζουμε τη μέθοδο του Παραδείγματος 7.3.1 στην γενική περίπτωση

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1. \quad (7.31)$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της ΔΕ (7.31), έχουμε

$$a\mathcal{L}(y'') + b\mathcal{L}(y') + c\mathcal{L}(y) = F(s). \quad (7.32)$$

Θέτοντας $Y(s) = \mathcal{L}(y)$. Το Θεώρημα 7.3.2 και οι αρχικές συνθήκες στην (7.31) δίνουν

$$\mathcal{L}(y') = sY(s) - k_0 \quad \text{and} \quad \mathcal{L}(y'') = s^2Y(s) - k_1 - k_0s.$$

Αντικαθιστώντας στην (7.32) προκύπτει

$$a(s^2Y(s) - k_1 - k_0s) + b(sY(s) - k_0) + cY(s) = F(s). \quad (7.33)$$

Ο συντελεστής του $Y(s)$ στο αριστερό μέρος είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$p(s) = as^2 + bs + c$$

της ομογενούς ΔΕ (7.31). Οπότε επιλύοντας ως προς $Y(s)$

$$p(s)Y(s) = F(s) + a(k_1 + k_0s) + bk_0, \quad (7.34)$$

η οποία αντιστοιχεί στην (7.30) του Παραδείγματος 7.3.1.

Παράδειγμα 7.3.2 Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace να επιλυθεί το ΠΑΤ

$$2y'' + 3y' + y = 8e^{-2t}, \quad y(0) = -4, \quad y'(0) = 2. \quad (7.35)$$

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της ομογενούς ΔΕ είναι

$$p(s) = 2s^2 + 3s + 1 = (2s + 1)(s + 1)$$

και

$$F(s) = \mathcal{L}(8e^{-2t}) = \frac{8}{s + 2},$$

οπότε η (7.34) γίνεται

$$(2s + 1)(s + 1)Y(s) = \frac{8}{s + 2} + 2(2 - 4s) + 3(-4).$$

Επιλύοντας ως προς $Y(s)$, έχουμε

$$Y(s) = \frac{4(1 - (s+2)(s+1))}{(s+1/2)(s+1)(s+2)}.$$

και με ανάλυση σε απλά κλάσματα προκύπτει

$$Y(s) = \frac{4}{3} \frac{1}{s+1/2} - \frac{8}{s+1} + \frac{8}{3} \frac{1}{s+2},$$

οπότε η λύση της (7.35) είναι

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \frac{4}{3}e^{-t/2} - 8e^{-t} + \frac{8}{3}e^{-2t}. \quad \blacksquare$$

Επίλυση ΔΕ δεύτερης τάξης με μη σταθερούς συντελεστές με τον μετασχηματισμό Laplace

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace για επίλυση γραμμικών ΔΕ με μη σταθερούς συντελεστές. Αυτό είναι ένα δύσκολο πρόβλημα, αλλά σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε.

Πρόταση 7.3.1 *Έστω f είναι συνεχής στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξης s_0 , Τότε*

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f) = F(s) = 0. \quad (7.36)$$

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.3.3 Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace να επιλυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 3ty' - 6y = 2 \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (7.37)$$

Λύση Αυτό που χρειάζεται να υπενθυμίσουμε είναι ο ακόλουθος τύπος από το τυπολόγιο του μετασχηματισμού Laplace

$$\mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n F^{(n)}(s). \quad (7.38)$$

Στην συγκεκριμένη περίπτωση, εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στα δύο μέρη της ΔΕ (7.37) χρειάζεται να υπολογίσουμε την σχέση $\mathcal{L}(ty')$, εφαρμόζοντας την (7.38) για $n = 1$ έχουμε

$$\mathcal{L}(ty') = -\frac{d}{ds}(\mathcal{L}(y')) = -\frac{d}{ds}(sY(s) - y(0)) = -sY'(s) - Y(s)$$

Η ΔΕ (7.37) γράφεται

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3(-sY'(s) - Y(s)) - 6Y(s) = \frac{2}{s},$$

δηλαδή,

$$Y'(s) + \left(\frac{3}{s} - \frac{s}{3}\right)Y(s) = -\frac{2}{3s^2}$$

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα παραδείγματα η χρήση του μετασχηματισμού Laplace μας οδηγεί σε μία ΔΕ 1ης τάξης για την οποία ο ολοκληρωτικός παράγοντας είναι

$$\mu(s) = s^3 e^{-\frac{s^2}{6}}$$

Συνεπώς, η γραμμική 1ης τάξης ΔΕ δέχεται ως λύση τη συνάρτηση

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} + c \frac{e^{\frac{s^2}{6}}}{s^3} \quad (7.39)$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.3.1, πρέπει $c = 0$, ώστε $Y(s) \rightarrow 0$, καθώς $s \rightarrow \infty$. Συνεπώς, η (7.39) γράφεται

$$Y(s) = \frac{2}{s^3}, \quad y(t) = t^2. \quad \blacksquare$$

7.3 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-31 με χρήση του μετασχηματισμού Laplace να επιλυθούν τα αντίστοιχα ΠΑΤ.

1. $y'' + 3y' + 2y = e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -6$
2. $y'' - y' - 6y = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
3. $y'' + y' - 2y = 2e^{3t}, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 4$
4. $y'' - 4y = 2e^{3t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
5. $y'' + y' - 2y = e^{3t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
6. $y'' + 3y' + 2y = 6e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
7. $y'' + y = \sin 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
8. $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
9. $y'' - 3y' + 2y = e^{4t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2$
10. $y'' - 3y' + 2y = e^{3t}, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -4$
11. $y'' + 3y' + 2y = 2e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$
12. $y'' + y' - 2y = -4, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3$
13. $y'' + 4y = 4, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
14. $y'' - y' - 6y = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
15. $y'' + 3y' + 2y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
16. $y'' - y = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

17. $y'' + 4y = 3 \sin t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
18. $y'' + y' = 2e^{3t}, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 4$
19. $y'' + y = 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0$
20. $y'' + y = t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
21. $y'' + y = t - 3 \sin 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -3$
22. $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$
23. $y'' + 2y' + y = 6 \sin t - 4 \cos t, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$
24. $y'' - 2y' - 3y = 10 \cos t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 7$
25. $y'' + y = 4 \sin t + 6 \cos t, \quad y(0) = -6, \quad y'(0) = 2$
26. $y'' + 4y = 8 \sin 2t + 9 \cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
27. $y'' - 5y' + 6y = 10e^t \cos t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$
28. $y'' + 2y' + 2y = 2t, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -7$
29. $y'' - 2y' + 2y = 5 \sin t + 10 \cos t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
30. $y'' + 4y' + 13y = 10e^{-t} - 36e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -16$
31. $ty'' - ty' + y = 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -4$
32. Υποθέτουμε ότι $a, b,$ και c είναι σταθερές και $a \neq 0$. Έστω

$$y_1 = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{as + b}{as^2 + bs + c} \right) \quad \text{and} \quad y_2 = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{a}{as^2 + bs + c} \right).$$

Δείξτε ότι

$$y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0 \quad \text{and} \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό Laplace για την επίλυση των ΠΑΤ

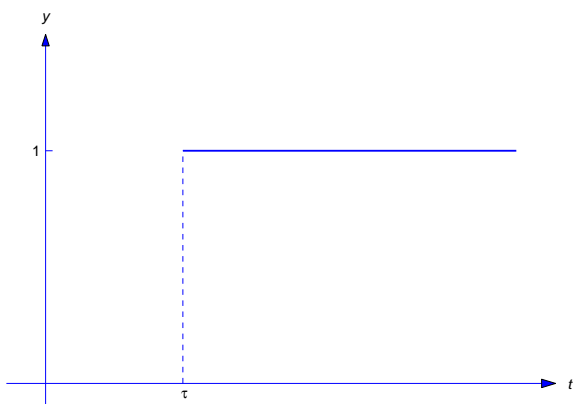
$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= 0, & y(0) &= 1, & y'(0) &= 0 \\ ay'' + by' + cy &= 0, & y(0) &= 0, & y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

7.4 Συνάρτηση μοναδιαίου βήματος (Heaviside)

Στις επόμενες παραγράφους θα μελετήσουμε ΠΑΤ

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1,$$

όπου $a, b,$ και c είναι σταθερές και f είναι κατά τμήματα συνεχής. Για το σκοπό αυτό θα εισάγουμε την έννοια της συνάρτησης μοναδιαίου βήματος (Heaviside) και πως υπολογίζεται ο μετασχηματισμός Laplace αυτής.



Σχήμα 7.3: $y = u(t - \tau)$

Μετασχηματισμός Laplace κατά τμήματα συνεχών συναρτήσεων

Ορίζουμε τη *συνάρτηση βήματος*, ως εξής

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (7.40)$$

Αντικαθιστώντας το t με $t - \tau$ στην (7.40), τότε

$$u(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ 1, & t \geq \tau \end{cases} ;$$

έτσι το βήμα εμφανίζεται για $t = \tau$ (Σχήμα 7.3).

Η συνάρτηση βήματος μας επιτρέπει να παρουσιάζουμε μία κατά τμήματα συνεχή συνάρτηση με πιο βολικό τρόπο. Συγκεκριμένα, θεωρούμε ως παράδειγμα τη συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & 0 \leq t < t_1, \\ f_1(t), & t \geq t_1, \end{cases} \quad (7.41)$$

όπου f_0 και f_1 ορίζονται στο $[0, \infty)$, οπότε η (7.41) γράφεται ως

$$f(t) = f_0(t) + u(t - t_1) (f_1(t) - f_0(t)). \quad (7.42)$$

Για επιβεβαίωση, αν $t < t_1$ τότε $u(t - t_1) = 0$ και η (7.42) γίνεται

$$f(t) = f_0(t) + (0) (f_1(t) - f_0(t)) = f_0(t).$$

Αν $t \geq t_1$ τότε $u(t - t_1) = 1$ και η (7.42) γράφεται

$$f(t) = f_0(t) + (1) (f_1(t) - f_0(t)) = f_1(t).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο Θεώρημα για να δείξουμε τη χρησιμότητα της (7.42) στον υπολογισμό του $\mathcal{L}(f)$.

Θεώρημα 7.4.1 Έστω g ορισμένη στο $[0, \infty)$. Υποθέτουμε $\tau \geq 0$ και $\mathcal{L}(g(t + \tau))$ υπάρχει για $s > s_0$. Τότε $\mathcal{L}(u(t - \tau)g(t))$ υπάρχει για $s > s_0$, και

$$\mathcal{L}(u(t - \tau)g(t)) = e^{-s\tau} \mathcal{L}(g(t + \tau)).$$

Απόδειξη Εξ ορισμού

$$\mathcal{L}(u(t - \tau)g(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t - \tau)g(t) dt$$

και από τον ορισμό της $u(t - \tau)$,

$$\mathcal{L}(u(t - \tau)g(t)) = \int_0^{\tau} e^{-st}(0) dt + \int_{\tau}^{\infty} e^{-st}g(t) dt.$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέρος είναι μηδέν, εισάγοντας την νέα μεταβλητή $x = t - \tau$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα δίνει

$$\mathcal{L}(u(t - \tau)g(t)) = \int_0^{\infty} e^{-s(x+\tau)}g(x + \tau) dx = e^{-s\tau} \int_0^{\infty} e^{-sx}g(x + \tau) dx.$$

Αλλάζοντας την μεταβλητή από x σε t , έχουμε

$$\mathcal{L}(u(t - \tau)g(t)) = e^{-s\tau} \int_0^{\infty} e^{-st}g(t + \tau) dt = e^{-s\tau} \mathcal{L}(g(t + \tau)). \blacksquare$$

Παράδειγμα 7.4.1 Υπολογίστε

$$\mathcal{L}(u(t - 1)(t^2 + 1)).$$

Λύση Έχουμε $\tau = 1$ και $g(t) = t^2 + 1$, οπότε

$$g(t + 1) = (t + 1)^2 + 1 = t^2 + 2t + 2.$$

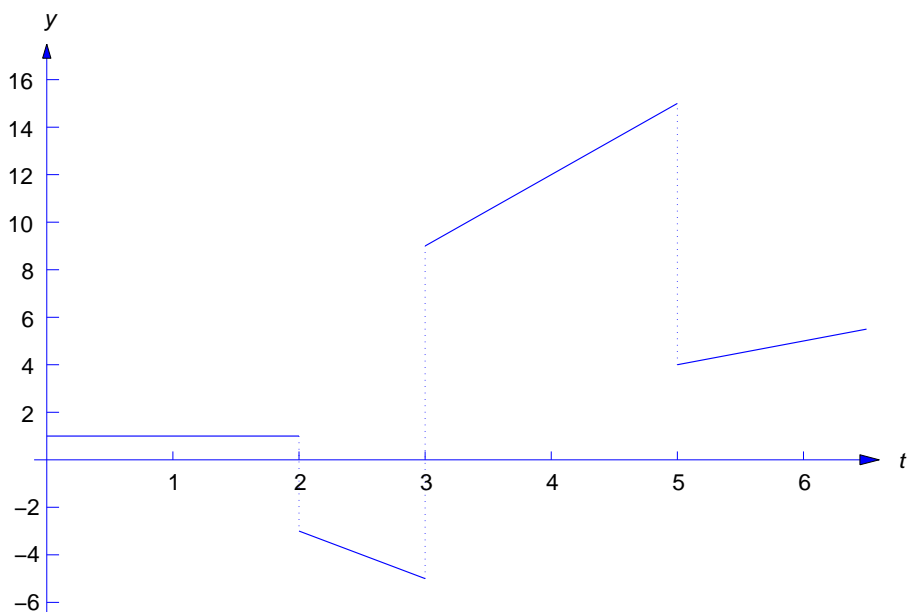
Αφού

$$\mathcal{L}(g(t + 1)) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s},$$

Από το Θεώρημα 7.4.1 συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{L}(u(t - 1)(t^2 + 1)) = e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s} \right).$$

Η σχέση (7.42) μπορεί να επεκταθεί σε μία γενικότερη κατά τμήματα συνεχή συνάρτηση.



Σχήμα 7.4: Η κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση (7.43).

Για παράδειγμα μπορούμε να θεωρήσουμε

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & 0 \leq t < t_1, \\ f_1(t), & t_1 \leq t < t_2, \\ f_2(t), & t \geq t_2, \end{cases}$$

οπότε

$$f(t) = f_0(t) + u(t - t_1)(f_1(t) - f_0(t)) + u(t - t_2)(f_2(t) - f_1(t)),$$

αν f_0 , f_1 , και f_2 ορίζονται στο $[0, \infty)$.

Παράδειγμα 7.4.2 Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace της (βλ. Σχήμα 7.4).

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2, \\ -2t + 1, & 2 \leq t < 3, \\ 3t, & 3 \leq t < 5, \\ t - 1, & t \geq 5 \end{cases} \quad (7.43)$$

Λύση Γράφουμε τη συνάρτηση με τη βοήθεια των συναρτήσεων βήματος:

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 + u(t - 2)(-2t + 1 - 1) + u(t - 3)(3t + 2t - 1) \\ &\quad + u(t - 5)(t - 1 - 3t), \end{aligned}$$

ή

$$f(t) = 1 - 2u(t-2)t + u(t-3)(5t-1) - u(t-5)(2t+1).$$

Το Θεώρημα 7.4.1 συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \mathcal{L}(1) - 2e^{-2s}\mathcal{L}(t+2) + e^{-3s}\mathcal{L}(5(t+3)-1) - e^{-5s}\mathcal{L}(2(t+5)+1) \\ &= \mathcal{L}(1) - 2e^{-2s}\mathcal{L}(t+2) + e^{-3s}\mathcal{L}(5t+14) - e^{-5s}\mathcal{L}(2t+11) \\ &= \frac{1}{s} - 2e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right) + e^{-3s}\left(\frac{5}{s^2} + \frac{14}{s}\right) - e^{-5s}\left(\frac{2}{s^2} + \frac{11}{s}\right). \blacksquare \end{aligned}$$

Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad (7.44)$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad (7.45)$$

είναι χρήσιμες σε προβλήματα που περιέχουν μετατόπιση ορίσματος τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Εφαρμογή αυτών φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 7.4.3 Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace της (βλ. Σχήμα 7.5)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ \cos t - 3 \sin t, & \frac{\pi}{2} \leq t < \pi, \\ 3 \cos t, & t \geq \pi \end{cases} \quad (7.46)$$

Λύση Η συνάρτηση γράφεται ως εξής με χρήση της συνάρτησης βήματος,

$$f(t) = \sin t + u(t - \pi/2)(\cos t - 4 \sin t) + u(t - \pi)(2 \cos t + 3 \sin t).$$

Το Θεώρημα 7.4.1 συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \mathcal{L}(\sin t) + e^{-\frac{\pi}{2}s}\mathcal{L}(\cos(t + \frac{\pi}{2}) - 4 \sin(t + \frac{\pi}{2})) \\ &\quad + e^{-\pi s}\mathcal{L}(2 \cos(t + \pi) + 3 \sin(t + \pi)). \end{aligned} \quad (7.47)$$

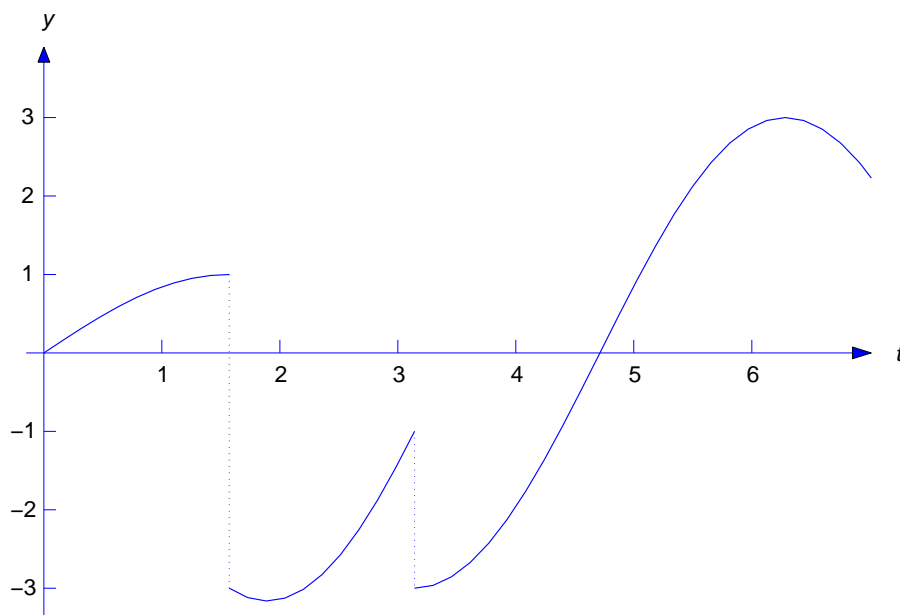
Επίσης

$$\begin{aligned} \cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) - 4 \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin t - 4 \cos t \\ 2 \cos(t + \pi) + 3 \sin(t + \pi) &= -2 \cos t - 3 \sin t, \end{aligned}$$

Από την (7.47) έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= \mathcal{L}(\sin t) - e^{-\pi s/2}\mathcal{L}(\sin t + 4 \cos t) - e^{-\pi s}\mathcal{L}(2 \cos t + 3 \sin t) \\ &= \frac{1}{s^2 + 1} - e^{-\frac{\pi}{2}s}\left(\frac{1 + 4s}{s^2 + 1}\right) - e^{-\pi s}\left(\frac{3 + 2s}{s^2 + 1}\right). \blacksquare \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το $g(t)$ με $g(t - \tau)$ στο Θεώρημα 7.4.1, έχουμε τον ακόλουθο χρήσιμο



Σχήμα 7.5: Η κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση (7.46).

τύπο.

Θεώρημα 7.4.2 [Δεύτερο Θεώρημα Μετατόπισης] Αν $\tau \geq 0$ και $\mathcal{L}(g)$ υπάρχει για $s > s_0$ τότε $\mathcal{L}(u(t - \tau)g(t - \tau))$ υπάρχει για $s > s_0$ και

$$\mathcal{L}(u(t - \tau)g(t - \tau)) = e^{-s\tau} \mathcal{L}(g(t)). \quad (7.48)$$

Παράδειγμα 7.4.4 Με χρήση της (7.48) υπολογίστε

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-2s}}{s^2} \right).$$

Λύση Για να εφαρμόσουμε την (7.48) θεωρούμε $\tau = 2$ και $G(s) = 1/s^2$. Τότε $g(t) = t$ και (7.48) συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{e^{-2s}}{s^2} \right) = u(t - 2)(t - 2). \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 7.4.5 Υπολογίστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της

$$H(s) = \frac{2s}{s^2 + 4} - e^{-\frac{\pi}{2}s} \frac{3s + 1}{s^2 + 9} + e^{-\pi s} \frac{s + 1}{s^2 + 6s + 10}.$$

Λύση Έστω

$$G_0(s) = \frac{2s}{s^2 + 4}, \quad G_1(s) = -\frac{(3s + 1)}{s^2 + 9},$$

και

$$G_2(s) = \frac{s + 1}{s^2 + 6s + 10} = \frac{(s + 3) - 2}{(s + 3)^2 + 1}.$$

Τότε

$$g_0(t) = 2 \cos 2t, \quad g_1(t) = -3 \cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t, \quad g_2(t) = e^{-3t}(\cos t - 2 \sin t).$$

Οπότε η (7.48) και η γραμμικότητα του \mathcal{L}^{-1} δίνουν

$$\begin{aligned} h(t) = & 2 \cos 2t - u(t - \pi/2) \left[3 \cos 3(t - \pi/2) + \frac{1}{3} \sin 3 \left(t - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ & + u(t - \pi) e^{-3(t-\pi)} [\cos(t - \pi) - 2 \sin(t - \pi)]. \end{aligned}$$

Με χρήση των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων (7.44) και (7.45), η προηγούμενη σχέση γράφεται ως

$$\begin{aligned} h(t) = & 2 \cos 2t + u(t - \pi/2) \left(3 \sin 3t - \frac{1}{3} \cos 3t \right) \\ & - u(t - \pi) e^{-3(t-\pi)} (\cos t - 2 \sin t). \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (7.49)$$

7.4 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-12 να εκφράσετε την f με όρους συναρτήσεων βήματος και να υπολογίσετε τον $\mathcal{L}(f)$. Να γίνει, επίσης, η γραφική παράσταση της f .

$$1. \quad f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ t^2 + 3t, & t \geq 2. \end{cases} \quad 2. \quad f(t) = \begin{cases} t^2 + 2, & 0 \leq t < 1, \\ t, & t \geq 1. \end{cases}$$

$$3. \quad f(t) = \begin{cases} te^t, & 0 \leq t < 1, \\ e^t, & t \geq 1. \end{cases} \quad 4. \quad f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & 0 \leq t < 1, \\ e^{-2t}, & t \geq 1. \end{cases}$$

$$5. \quad f(t) = \begin{cases} -t, & 0 \leq t < 2, \\ t - 4, & 2 \leq t < 3, \\ 1, & t \geq 3. \end{cases} \quad 6. \quad f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ t, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & t \geq 2. \end{cases}$$

$$7. \quad f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ t^2, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & t \geq 2. \end{cases} \quad 8. \quad f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2, \\ 6, & t > 2. \end{cases}$$

$$9. f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ 2 \sin t, & \frac{\pi}{2} \leq t < \pi, \\ \cos t, & t \geq \pi. \end{cases}$$

$$10. f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 1, \\ -2t + 2, & 1 \leq t < 3, \\ 3t, & t \geq 3. \end{cases}$$

$$11. f(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 2, \\ 3t + 2, & 2 \leq t < 4, \\ 4t, & t \geq 4. \end{cases}$$

$$12. f(t) = \begin{cases} (t+1)^2, & 0 \leq t < 1, \\ (t+2)^2, & t \geq 1. \end{cases}$$

Στις Ασκήσεις 13-22 να υπολογίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, και να σχεδιάσετε γραφικά τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$13. H(s) = \frac{e^{-2s}}{s-2}. \quad 14. H(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}.$$

$$15. H(s) = \frac{e^{-s}}{s^3} + \frac{e^{-2s}}{s^2}.$$

$$16. H(s) = \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right) + e^{-s} \left(\frac{3}{s} - \frac{1}{s^2}\right) + e^{-3s} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right).$$

$$17. H(s) = \left(\frac{5}{s} - \frac{1}{s^2}\right) + e^{-3s} \left(\frac{6}{s} + \frac{7}{s^2}\right) + \frac{3e^{-6s}}{s^3}.$$

$$18. H(s) = \frac{e^{-\pi s}(1-2s)}{s^2+4s+5}.$$

$$19. H(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right) + e^{-\frac{\pi}{2}s} \left(\frac{3s-1}{s^2+1}\right).$$

$$20. H(s) = e^{-2s} \left[\frac{3(s-3)}{(s+1)(s-2)} - \frac{s+1}{(s-1)(s-2)} \right].$$

$$21. H(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + e^{-s} \left(\frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}\right) + e^{-3s} \left(\frac{4}{s} + \frac{3}{s^2}\right).$$

$$22. H(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3} + e^{-2s} \left(\frac{3}{s} - \frac{1}{s^3}\right) + \frac{e^{-4s}}{s^2}.$$

23. Έστω $\{t_m\}_{m=0}^{\infty}$ είναι μία ακολουθία σημείων, τέτοια ώστε $t_0 = 0$, $t_{m+1} > t_m$, και $\lim_{m \rightarrow \infty} t_m = \infty$. Για κάθε μη αρνητικό ακέραιο m , έστω f_m είναι συνεχής στο

$[t_m, \infty)$ και έστω f ορίζεται στο $[0, \infty)$ με

$$f(t) = f_m(t), \quad t_m \leq t < t_{m+1} \quad (m = 0, 1, \dots).$$

Δείξτε ότι f είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[0, \infty)$ και έχει την ακόλουθη μορφή με τη χρήση των συναρτήσεων βήματος

$$f(t) = f_0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} u(t - t_m) (f_m(t) - f_{m-1}(t)), \quad 0 \leq t < \infty.$$

Αποδείξτε ότι η σειρά στο δεξί μέρος συγκλίνει για t στο $[0, \infty)$.

7.4.1 ΔΕ με σταθερούς συντελεστές και με ασυνεχή μη ομογενή όρο

Θεωρούμε το ΠΑΤ της μορφής

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1, \quad (7.50)$$

όπου a, b , και c είναι σταθερές ($a \neq 0$) και η f είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[0, \infty)$. Ένας σημαντικός αριθμός μηχανικών και ηλεκτρικών φαινομένων, περιγράφεται από γραμμικές ΔΕ με ασυνεχή τον μη ομογενή όρο.

Η ΔΕ (7.50) δεν έχει λύσεις σε ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το σημείο ασυνέχειας της f . Πρέπει λοιπόν να ορίσουμε τι εννοούμε με τον όρο λύση της (7.50) στο $[0, \infty)$ στην περίπτωση που η f έχει ασυνέχειες.

Θεώρημα 7.4.3 *Υποθέτουμε ότι a, b , και c είναι σταθερές ($a \neq 0$), και f είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[0, \infty)$. με σημεία ασυνέχειας στα t_1, \dots, t_n , όπου*

$$0 < t_1 < \dots < t_n.$$

Έστω k_0 και k_1 είναι αυθαίρετοι σταθεροί αριθμοί. Τότε υπάρχει μοναδική συνάρτηση y ορισμένη στο $[0, \infty)$ με τις εξής ιδιότητες:

(α') $y(0) = k_0$ και $y'(0) = k_1$.

(β') y και y' είναι συνεχείς στο $[0, \infty)$.

(γ') y'' ορίζεται σε κάθε ανοικτό υποδιάστημα του $[0, \infty)$ το οποίο δεν περιέχει κανένα από τα σημεία t_1, \dots, t_n , και

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

σε κάθε υποδιάστημα

(δ') y'' έχει όρια από δεξιά και αριστερά στα t_1, \dots, t_n .

Ορίζουμε τη συνάρτηση y του Θεωρήματος 7.4.3 να είναι η λύση του ΠΑΤ (7.50).

Θεωρούμε τα ΠΑΤ της μορφής

$$ay'' + by' + cy = \begin{cases} f_0(t), & 0 \leq t < t_1, \\ f_1(t), & t \geq t_1, \end{cases} \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1, \quad (7.51)$$

όπου ο μη ομογενής όρος έχει ένα σημείο ασυνέχειας στο t_1 .

Επιλύουμε το ΠΑΤ (7.51) με τα εξής βήματα:

Βήμα 1. Προσδιορίζουμε την λύση y_0 του ΠΑΤ

$$ay'' + by' + cy = f_0(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1.$$

Βήμα 2. Υπολογίζουμε $c_0 = y_0(t_1)$ και $c_1 = y'_0(t_1)$.

Βήμα 3. Προσδιορίζουμε την λύση y_1 του ΠΑΤ

$$ay'' + by' + cy = f_1(t), \quad y(t_1) = c_0, \quad y'(t_1) = c_1.$$

Βήμα 4. Προσδιορίζουμε την λύση y του (7.51) ως

$$y = \begin{cases} y_0(t), & 0 \leq t < t_1 \\ y_1(t), & t \geq t_1. \end{cases}$$

Η y' υπάρχει και είναι συνεχής στο σημείο t_1 . Στο επόμενο παράδειγμα παρουσιάζουμε τη μέθοδο.

Παράδειγμα 7.4.6 Λύστε το ΠΑΤ

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad (7.52)$$

όπου

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ -1, & t \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Λύση Το ΠΑΤ στο Βήμα 1 είναι

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

Εύκολα ο αναγνώστης μπορεί να υπολογίσει ότι η αντίστοιχη λύση είναι

$$y_0 = 1 + \cos t - \sin t.$$

Το Βήμα 2 δίνει $y_0(\pi/2) = 0$ and $y'_0(\pi/2) = -1$, και το δεύτερο ΠΑΤ έχει τη μορφή

$$y'' + y = -1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

με λύση

$$y_1 = -1 + \cos t + \sin t.$$

Η λύση του (7.52) είναι

$$y = \begin{cases} 1 + \cos t - \sin t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ -1 + \cos t + \sin t, & t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}. \quad (7.53)$$

■

Αν f_0 και f_1 ορίζονται στο $[0, \infty)$, μπορούμε να γράψουμε την (7.51) ως

$$ay'' + by' + cy = f_0(t) + u(t - t_1)(f_1(t) - f_0(t)), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1,$$

και να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Θα λύσουμε το Παράδειγμα 7.4.6 με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

Παράδειγμα 7.4.7 Με χρήση του μετασχηματισμού Laplace να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1, \quad (7.54)$$

όπου

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ -1, & t \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Λύση Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε

$$f(t) = 1 - 2u\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

το Θεώρημα 7.4.1 (με $g(t) = 1$) συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1 - 2e^{-\pi s/2}}{s}.$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στην (7.54), προκύπτει

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{1 - 2e^{-\pi s/2}}{s} - 1 + 2s,$$

οπότε

$$Y(s) = (1 - 2e^{-\pi s/2})G(s) + \frac{2s - 1}{s^2 + 1}, \quad G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)}. \quad (7.55)$$

Με ανάλυση σε απλά κλάσματα της G έχουμε

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 1}. \quad (7.56)$$

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}, \quad g(t) = 1 - \cos t.$$

Συνεπώς, η (7.55), και το Θεώρημα 7.4.2,

$$y = 1 - \cos t - 2u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\left(1 - \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\right) + 2\cos t - \sin t.$$

δηλ.

$$y = 1 + \cos t - \sin t - 2u\left(t - \frac{\pi}{2}\right)(1 - \sin t),$$

ή ισοδύναμα

$$y = \begin{cases} 1 + \cos t - \sin t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ -1 + \cos t + \sin t, & t \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

το οποίο συμπίπτει με το αποτέλεσμα του Παραδείγματος 7.4.6. ■

7.4 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-13 με χρήση του μετασχηματισμού Laplace να λυθούν τα ΠΑΤ, να γίνει γραφική παράσταση της λύσης.

1. $y'' + y = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 4, \\ 2t - 5, & t > 4, \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
2. $y'' - 3y' + 2y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & 1 \leq t < 2, \\ -1, & t \geq 2, \end{cases} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1.$
3. $y'' + 4y = \begin{cases} |\sin t|, & 0 \leq t < 2\pi, \\ 0, & t \geq 2\pi, \end{cases} \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 1.$
4. $y'' + 9y = \begin{cases} \cos t, & 0 \leq t < \frac{3\pi}{2}, \\ \sin t, & t \geq \frac{3\pi}{2}, \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$
5. $y'' + 4y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2}, \\ \pi, & t \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$
6. $y'' - 3y' + 2y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2, \\ 2t - 4, & t \geq 2, \end{cases}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$
7. $y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2\pi, \\ -2t, & t \geq 2\pi, \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$
8. $y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2, \\ -1, & t \geq 2, \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

$$9. \quad y'' + 2y' + y = \begin{cases} e^t, & 0 \leq t < 1, \\ e^t - 1, & t \geq 1, \end{cases} \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -1.$$

$$10. \quad y'' - 4y' + 4y = \begin{cases} e^{2t}, & 0 \leq t < 2, \\ -e^{2t}, & t \geq 2, \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

$$11. \quad y'' = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 1, \\ -t, & 1 \leq t < 2, \\ t + 1, & t \geq 2, \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$12. \quad y'' + 2y' + 2y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2\pi, \\ t, & 2\pi \leq t < 3\pi, \\ -1, & t \geq 3\pi, \end{cases} \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

13. Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

όπου

$$f(t) = m + 1, \quad m \leq t < m + 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

7.5 Συνέλιξη

Στο εδάφιο αυτό θα θεωρήσουμε το πρόβλημα εύρεσης του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace $H(s) = F(s)G(s)$, όπου F και G είναι μετασχηματισμοί Laplace γνωστών συναρτήσεων f και g . Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε το ΠΑΤ

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace, έχουμε

$$(as^2 + bs + c)Y(s) = F(s),$$

οπότε

$$Y(s) = F(s)G(s), \quad G(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}. \quad (7.57)$$

Για να μελετήσουμε πιο συγκεκριμένα τη σχέση για $\mathcal{L}^{-1}(FG)$, θεωρούμε το ΠΑΤ

$$y' - ay = f(t), \quad y(0) = 0, \quad (7.58)$$

το οποίο επιλύουμε χωρίς τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace Αναζητώντας λύσεις για την (7.58) της μορφής $y = ue^{at}$ όπου $u' = e^{-at}f(t)$. Ολοκληρώνοντας από 0 έως t και λαμβάνοντας υπόψη την αρχική συνθήκη $u(0) = y(0) = 0$ έχουμε $u = \int_0^t e^{-a\tau} f(\tau) d\tau$.

Οπότε

$$y(t) = e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} f(\tau) d\tau = \int_0^t e^{a(t-\tau)} f(\tau) d\tau. \quad (7.59)$$

Τώρα με χρήση του μετασχηματισμού Laplace επιλύουμε το (7.58) και συγκρίνουμε το αποτέλεσμα (7.59). Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace στην (7.58), έχουμε ($s -$

α) $Y(s) = F(s)$, δηλαδή, $Y(s) = F(s) \frac{1}{s-a}$, το οποίο συνεπάγεται

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(F(s) \frac{1}{s-a} \right). \quad (7.60)$$

Αν τώρα θεωρήσουμε $g(t) = e^{at}$, έτσι ώστε $G(s) = \frac{1}{s-a}$, τότε (7.59) και (7.60) γράφονται ως εξής: $y(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau$ και $y = \mathcal{L}^{-1}(FG)$, αντίστοιχα. Οπότε

$$\mathcal{L}^{-1}(FG) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \quad (7.61)$$

στην περίπτωση μας.

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στον ορισμό.

Ορισμός 7.5.1 Η *συνέλιξη* $f * g$ δύο συναρτήσεων f και g ορίζεται ως εξής:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι $f * g = g * f$;

Η σχέση (7.61) δείχνει ότι $\mathcal{L}^{-1}(FG) = f * g$ στην ειδική περίπτωση όπου $g(t) = e^{at}$. Το επόμενο θεώρημα γενικεύει την παρατήρησή μας.

Θεώρημα 7.5.1 [Θεώρημα Συνέλιξης] Αν $\mathcal{L}(f) = F$ και $\mathcal{L}(g) = G$, τότε

$$\mathcal{L}(f * g) = FG.$$

Ο τύπος για τη λύση ενός ΠΑΤ

Το Θεώρημα της συνέλιξης μας παρέχει έναν τύπο για τη λύση ενός ΠΑΤ για μία γραμμική ΔΕ με σταθερούς συντελεστές και το μη ομογενές μέρος είναι αυθαίρετη συνάρτηση. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 7.5.1 Βρείτε τον τύπο για τη λύση του ΠΑΤ

$$y'' - 2y' + y = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1. \quad (7.62)$$

Λύση Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην (7.62) έχουμε

$$(s^2 - 2s + 1)Y(s) = F(s) + (k_1 + k_0s) - 2k_0.$$

Οπότε

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} F(s) + \frac{k_1 + k_0s - 2k_0}{(s-1)^2} \\ &= \frac{1}{(s-1)^2} F(s) + \frac{k_0}{s-1} + \frac{k_1 - k_0}{(s-1)^2}. \end{aligned}$$

Από το τυπολόγιο του μετασχηματισμού Laplace,

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{k_0}{s-1} + \frac{k_1 - k_0}{(s-1)^2} \right) = e^t (k_0 + (k_1 - k_0)t), \quad \frac{1}{(s-1)^2} \leftrightarrow te^t \quad \text{and} \quad F(s) \leftrightarrow f(t),$$

Από το θεώρημα συνέλιξης έχουμε

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s-1)^2} F(s) \right) = \int_0^t \tau e^\tau f(t-\tau) d\tau.$$

Η λύση του (7.62) είναι

$$y(t) = e^t (k_0 + (k_1 - k_0)t) + \int_0^t \tau e^\tau f(t-\tau) d\tau. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 7.5.2 Βρείτε τον τύπο για τη λύση του ΠΑΤ

$$y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1. \quad (7.63)$$

Λύση Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην (7.63) έχουμε

$$(s^2 + 4)Y(s) = F(s) + k_1 + k_0s.$$

Οπότε

$$Y(s) = \frac{1}{(s^2 + 4)} F(s) + \frac{k_1 + k_0s}{s^2 + 4}, \quad \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{k_1 + k_0s}{s^2 + 4} \right) = k_0 \cos 2t + \frac{k_1}{2} \sin 2t.$$

Αφού

$$\frac{1}{(s^2 + 4)} \leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2t \quad \text{and} \quad F(s) \leftrightarrow f(t),$$

Το θεώρημα συνέλιξης δίνει

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{(s^2 + 4)} F(s) \right) = \frac{1}{2} \int_0^t f(t-\tau) \sin 2\tau d\tau.$$

Η λύση για το ΠΑΤ (7.63) είναι

$$y(t) = k_0 \cos 2t + \frac{k_1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} \int_0^t f(t-\tau) \sin 2\tau d\tau. \quad \blacksquare$$

Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων Συνέλιξης

Θα λέμε ότι ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_0^t u(\tau)v(t-\tau) d\tau$ είναι ένα *ολοκλήρωμα συνέλιξης*. Το Θεώρημα συνέλιξης μας επιτρέπει να υπολογίζουμε ολοκληρώματα συνέλιξης.

Παράδειγμα 7.5.3 Υπολογίστε το ολοκλήρωμα συνέλιξης

$$h(t) = \int_0^t (t - \tau)^5 \tau^7 d\tau.$$

Λύση Το ολοκλήρωμα είναι η συνέλιξη των συναρτήσεων $f(t) = t^5$ και $g(t) = t^7$. Αφού

$$t^5 \leftrightarrow \frac{5!}{s^6} \quad \text{and} \quad t^7 \leftrightarrow \frac{7!}{s^8},$$

Το θεώρημα συνέλιξης δίνει

$$h(t) \leftrightarrow \frac{5!7!}{s^{14}} = \frac{5!7!}{13!} \frac{13!}{s^{14}},$$

δίότι

$$\frac{13!}{s^{14}} \leftrightarrow t^{13}.$$

Οπότε,

$$h(t) = \frac{5!7!}{13!} t^{13}. \quad \blacksquare$$

Το επόμενο θεώρημα μας παρέχει έναν γενικό τύπο για το ΠΑΤ

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1,$$

όπου η f είναι συνεχής στο $[0, \infty)$ ώστε ο $\mathcal{L}(f)$ να ορίζεται, ο τύπος ισχύει και κάτω από ασθενέστερες συνθήκες για την f .

Θεώρημα 7.5.2 Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο $[0, \infty)$ και έχει μετασχηματισμό Laplace. Τότε η λύση του ΠΑΤ

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1, \quad (7.64)$$

είναι

$$y(t) = k_0 y_1(t) + k_1 y_2(t) + \int_0^t w(\tau) f(t - \tau) d\tau, \quad (7.65)$$

όπου y_1 και y_2 ικανοποιούν

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0, \quad y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0, \quad (7.66)$$

και

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1, \quad (7.67)$$

και

$$w(t) = \frac{1}{a} y_2(t). \quad (7.68)$$

Απόδειξη Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στην (7.64), έχουμε

$$p(s)Y(s) = F(s) + a(k_1 + k_0s) + bk_0, \quad p(s) = as^2 + bs + c.$$

Οπότε

$$Y(s) = W(s)F(s) + V(s) \quad (7.69)$$

με

$$W(s) = \frac{1}{p(s)} \quad (7.70)$$

και

$$V(s) = \frac{a(k_1 + k_0s) + bk_0}{p(s)}. \quad (7.71)$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στις (7.66) και (7.67) έχουμε ότι

$$p(s)Y_1(s) = as + b \quad \text{και} \quad p(s)Y_2(s) = a.$$

Οπότε

$$Y_1(s) = \frac{as + b}{p(s)}$$

και

$$Y_2(s) = \frac{a}{p(s)}. \quad (7.72)$$

Έτσι, η (7.71) γράφεται ως εξής

$$V(s) = k_0Y_1(s) + k_1Y_2(s).$$

Αντικαθιστώντας στην (7.69), έχουμε

$$Y(s) = k_0Y_1(s) + k_1Y_2(s) + \frac{1}{a}Y_2(s)F(s).$$

Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό και το θεώρημα της συνέλιξης έχουμε (7.65). Τελικά, (7.70) και (7.72) συνεπάγει (7.68). \square

7.5 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Εκφράστε τον αντίστροφο μετασχηματισμό ως ολοκλήρωμα

(a) $\frac{1}{s^2(s^2 + 4)}$

(b) $\frac{s}{(s + 2)(s^2 + 9)}$

(c) $\frac{s}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)}$

(d) $\frac{s}{(s^2 + 1)^2}$

(e) $\frac{1}{s(s - a)}$

(f) $\frac{1}{(s + 1)(s^2 + 2s + 2)}$

(g) $\frac{1}{(s + 1)^2(s^2 + 4s + 5)}$

(h) $\frac{1}{(s - 1)^3(s + 2)^2}$

$$(i) \frac{s-1}{s^2(s^2-2s+2)} \quad (j) \frac{s(s+3)}{(s^2+4)(s^2+6s+10)}.$$

2. Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Laplace.

$$\begin{aligned} (a) \int_0^t \sin a\tau \cos b(t-\tau) d\tau & \quad (b) \int_0^t e^\tau \sin a(t-\tau) d\tau \\ (c) \int_0^t \sinh a\tau \cosh a(t-\tau) d\tau & \quad (d) \int_0^t \tau(t-\tau) \sin \omega\tau \cos \omega(t-\tau) d\tau \\ (e) e^t \int_0^t \sin \omega\tau \cos \omega(t-\tau) d\tau & \quad (f) e^t \int_0^t \tau^2(t-\tau)e^\tau d\tau \\ (g) e^{-t} \int_0^t e^{-\tau} \tau \cos \omega(t-\tau) d\tau & \quad (h) e^t \int_0^t e^{2\tau} \sinh(t-\tau) d\tau \\ (i) \int_0^t \tau e^{2\tau} \sin 2(t-\tau) d\tau & \quad (j) \int_0^t (t-\tau)^3 e^\tau d\tau. \end{aligned}$$

3. Βρείτε ένα τύπο για τη λύση του ΠΑΤ.

$$\begin{aligned} (a) y'' + 3y' + y &= f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \\ (b) y'' + 4y &= f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \\ (c) y'' + 2y' + y &= f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \\ (d) y'' + k^2y &= f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \\ (e) y'' + 6y' + 9y &= f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -2 \\ (f) y'' - 4y &= f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \\ (g) y'' - 5y' + 6y &= f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3 \\ (h) y'' + \omega^2y &= f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1. \end{aligned}$$

4. Με χρήση του θεωρήματος συνέλιξης υπολογίστε τα ολοκληρώματα.

$$\begin{aligned} (a) \int_0^t (t-\tau)^7 \tau^8 d\tau & \quad (b) \int_0^t (t-\tau)^{13} \tau^7 d\tau \\ (c) \int_0^t (t-\tau)^6 \tau^7 d\tau & \quad (d) \int_0^t e^{-\tau} \sin(t-\tau) d\tau \\ (e) \int_0^t \sin \tau \cos 2(t-\tau) d\tau. & \end{aligned}$$

5. Δείξτε ότι αν $p(s) = as^2 + bs + c$ έχει διακριτές r_1 και r_2 , τότε η λύση της ΔΕ

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1$$

είναι

$$\begin{aligned} y(t) &= k_0 \frac{r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}}{r_2 - r_1} + k_1 \frac{e^{r_2 t} - e^{r_1 t}}{r_2 - r_1} \\ &+ \frac{1}{a(r_2 - r_1)} \int_0^t (e^{r_2 \tau} - e^{r_1 \tau}) f(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

6. Δείξτε ότι αν $p(s) = as^2 + bs + c$ έχει διπλή ρίζα r_1 , τότε η λύση της τ

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1$$

είναι

$$y(t) = k_0(1 - r_1 t)e^{r_1 t} + k_1 t e^{r_1 t} + \frac{1}{a} \int_0^t \tau e^{r_1 \tau} f(t - \tau) d\tau.$$

7. Δείξτε ότι αν $p(s) = as^2 + bs + c$ έχει μιγαδικές συζυγείς ρίζες $\lambda \pm i\omega$, τότε η λύση της

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1$$

είναι

$$y(t) = e^{\lambda t} \left[k_0 \left(\cos \omega t - \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right) + \frac{k_1}{\omega} \sin \omega t \right] + \frac{1}{a\omega} \int_0^t e^{\lambda t} f(t - \tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

7.6 ΠΑΤ με Συναρτήσεις Dirac

Υπάρχει σημαντικός αριθμός φυσικών και βιολογικών φαινομένων, όπου η εξωτερική δύναμη αρκετά μεγάλου μεγέθους ασκεί επίδραση για πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Η μελέτη τέτοιου είδους φαινομένων οδηγεί στη διαμόρφωση διαφορικών εξισώσεων της μορφής

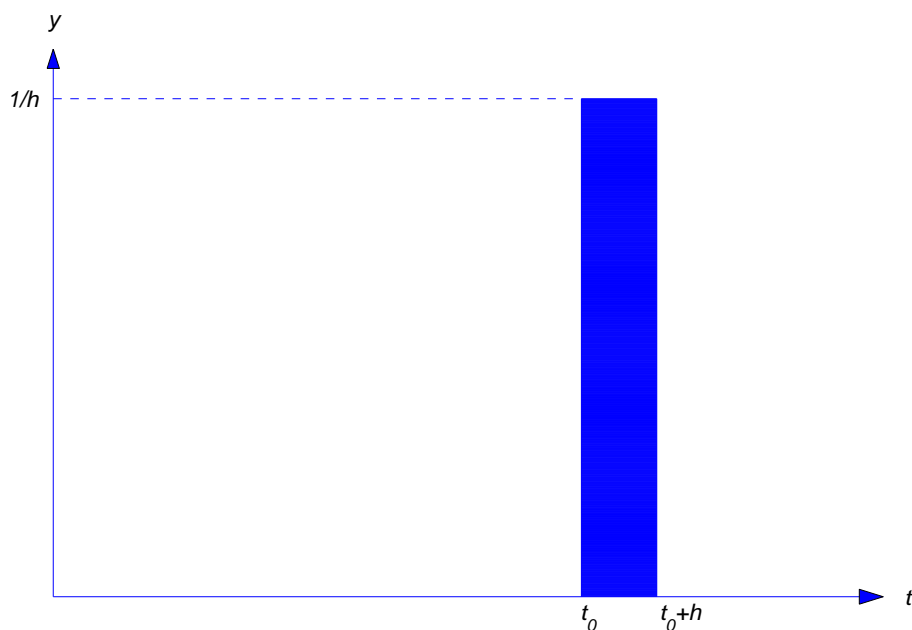
$$ay'' + by' + cy = f(t),$$

όπου η f είναι συνεχής ή κατά τμήματα συνεχής στο $[0, \infty)$. Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε ΠΑΤ όπου η f είναι εξωτερική δύναμη αρκετά μεγάλου μεγέθους για μικρό χρονικό διάστημα και μηδέν αλλού. Οι δυνάμεις αυτές καλούνται *ωθήσεις*.

Αν η f είναι μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $f(t) = 0$ για t εκτός του διαστήματος $[t_0, t_0 + h]$, τότε $\int_{t_0}^{t_0+h} f(t) dt$ καλείται *ολική ώθηση* της f . Ενδιαφερόμαστε για μία ιδεατή κατάσταση όπου το h είναι τόσο μικρό, ώστε η ολική ώθηση μπορεί να θεωρηθεί ότι εφαρμόζεται στιγμιαία για $t = t_0$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f είναι μία *συνάρτηση ώθησης*. Πιο συγκεκριμένα δηλώνουμε με $\delta(t - t_0)$ συνάρτηση ώθησης με ολική ώθηση ίση με μονάδα τη στιγμή $t = t_0$. (Η συνάρτηση ώθησης $\delta(t)$ προκύπτει θέτοντας $t_0 = 0$ στην *Dirac δ συνάρτηση*.) Πρέπει να τονίσουμε ότι η $\delta(t - t_0)$ δεν είναι συνάρτηση με τη συνηθισμένη έννοια, αφού από τον “ορισμό” μας έχουμε $\delta(t - t_0) = 0$, αν $t \neq t_0$, αφού

$$\int_{t_0}^{t_0} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

Από τον λογισμό συναρτήσεων γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση με αυτές τις ιδιότητες; παρόλα αυτά υπάρχει ένας κλάδος των μαθηματικών γνωστός ως *θεωρία κατανομών* όπου ο ορισμός μπορεί να διατυπωθεί με αυστηρότητα αλλά ξεφεύγει από τους στόχους του παρόντος βιβλίου.

Σχήμα 7.6: $y = f_h(t)$

Πρώτος μας στόχος είναι να διευκρινίσουμε τι εννοούμε λύση του ΠΑΤ:

$$ay'' + by' + cy = \delta(t - t_0), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

όπου t_0 είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός.

Θεώρημα 7.6.1 Υποθέτουμε ότι $t_0 \geq 0$. Για κάθε θετικό αριθμό h , έστω y_h είναι λύση του ΠΑΤ

$$ay_h'' + by_h' + cy_h = f_h(t), \quad y_h(0) = 0, \quad y_h'(0) = 0, \quad (7.73)$$

όπου

$$f_h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0, \\ 1/h, & t_0 \leq t < t_0 + h, \\ 0, & t \geq t_0 + h, \end{cases} \quad (7.74)$$

η f_h έχει μοναδική ολική ώθηση ίση με το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου στο Σχήμα 7.6. Τότε

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} y_h(t) = u(t - t_0)w(t - t_0), \quad (7.75)$$

όπου

$$w = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{as^2 + bs + c} \right).$$

Απόδειξη Θεωρώντας τον μετασχηματισμό Laplace στην (7.73), έχουμε

$$(as^2 + bs + c)Y_h(s) = F_h(s), \quad Y_h(s) = \frac{F_h(s)}{as^2 + bs + c}.$$

Από το θεώρημα της συνέλιξης έχουμε

$$y_h(t) = \int_0^t w(t - \tau)f_h(\tau) d\tau.$$

Συνεπώς, η (7.74) συνεπάγεται ότι

$$y_h(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0, \\ \frac{1}{h} \int_{t_0}^t w(t - \tau) d\tau, & t_0 \leq t \leq t_0 + h, \\ \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} w(t - \tau) d\tau, & t > t_0 + h. \end{cases} \quad (7.76)$$

Αφού $y_h(t) = 0$ για όλα h αν $0 \leq t \leq t_0$, συνεπάγεται

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} y_h(t) = 0 \quad \text{αν} \quad 0 \leq t \leq t_0. \quad (7.77)$$

Θα δείξουμε τώρα

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} y_h(t) = w(t - t_0) \quad \text{αν} \quad t > t_0. \quad (7.78)$$

Υποθέτουμε ότι t είναι σταθερό και $t > t_0$. Από (7.76),

$$y_h(t) = \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} w(t - \tau) d\tau \quad \text{if} \quad h < t - t_0. \quad (7.79)$$

Αφού

$$\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} d\tau = 1, \quad (7.80)$$

μπορούμε να γράψουμε

$$w(t - t_0) = \frac{1}{h} w(t - t_0) \int_{t_0}^{t_0+h} d\tau = \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} w(t - t_0) d\tau.$$

Από την οποία και (7.79),

$$y_h(t) - w(t - t_0) = \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} (w(t - \tau) - w(t - t_0)) d\tau.$$

Έχουμε

$$|y_h(t) - w(t - t_0)| \leq \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} |w(t - \tau) - w(t - t_0)| d\tau. \quad (7.81)$$

Έστω τώρα M_h είναι η μέγιστη τιμή της $|w(t - \tau) - w(t - t_0)|$ καθώς τ μεταβάλλεται στο $[t_0, t_0 + h]$. (Υπενθυμίζουμε ότι t και t_0 είναι σταθεροί.) Τότε από τις (7.80) και (7.81), έχουμε ότι

$$|y_h(t) - w(t - t_0)| \leq \frac{1}{h} M_h \int_{t_0}^{t_0+h} d\tau = M_h. \quad (7.82)$$

Αλλά $\lim_{h \rightarrow 0+} M_h = 0$, αφού η w είναι συνεχής. Συνεπώς, η (7.82) δίνει την (7.78). Αυτό και η (7.77) συνεπάγεται την (7.75). \square

Το Θεώρημα 7.6.1 χρησιμοποιεί τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 7.6.1 Αν $t_0 > 0$, τότε η λύση του ΠΑΤ

$$ay'' + by' + cy = \delta(t - t_0), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (7.83)$$

ορίζεται από

$$y = u(t - t_0)w(t - t_0),$$

όπου

$$w = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{as^2 + bs + c} \right).$$

Στις φυσικές εφαρμογές όπου η συνάρτηση εισόδου f και η εξόδου y σχετίζονται με τη ΔΕ

$$ay'' + by' + cy = f(t),$$

w καλείται *απόκριση ώθησης* του συστήματος. Όπου w είναι λύση του ΠΑΤ

$$aw'' + bw' + cw = 0, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 1/a, \quad (7.84)$$

όπως μπορεί να επιβεβαιώσει κάποιος με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

Από την άλλη μεριά, μπορούμε να λύσουμε την (7.84) με τις μεθόδους του Κεφαλαίου 5.2 και δείχνουμε ότι η w ορίζεται στο $(-\infty, \infty)$ από

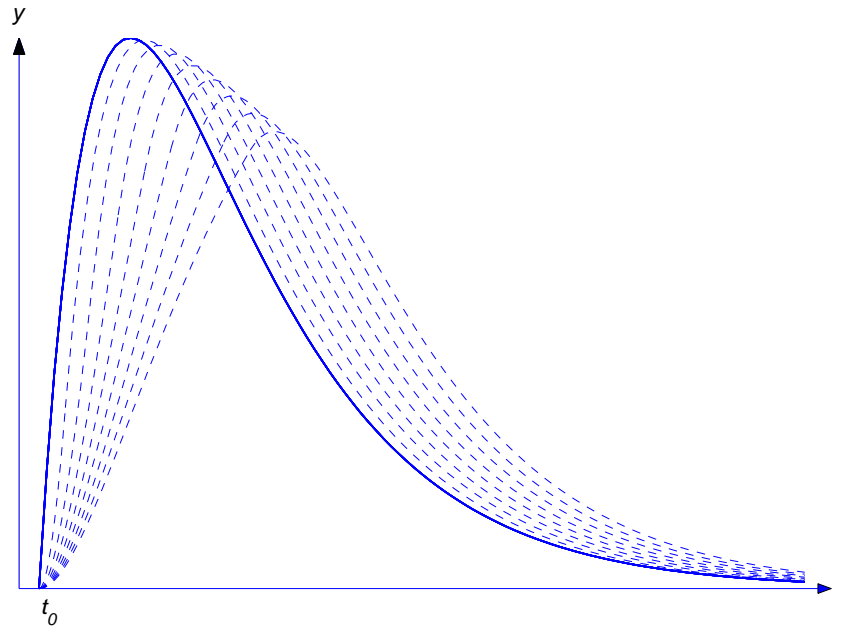
$$w = \frac{e^{r_2 t} - e^{r_1 t}}{a(r_2 - r_1)}, \quad w = \frac{1}{a} t e^{r_1 t}, \quad \text{or} \quad w = \frac{1}{a\omega} e^{\lambda t} \sin \omega t, \quad (7.85)$$

στην περίπτωση που το πολυώνυμο $p(r) = ar^2 + br + c$ έχει διακριτές πραγματικές ρίζες r_1 και r_2 , διπλή ρίζα στο r_1 , ή συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\lambda \pm i\omega$. (Στις περισσότερες εφαρμογές, οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$.) Αυτό σημαίνει ότι η $y = u(t - t_0)w(t - t_0)$ ορίζεται στο $(-\infty, \infty)$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$y(t) = 0, \quad t < t_0, \\ ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{on} \quad (-\infty, t_0) \quad \text{and} \quad (t_0, \infty),$$

και

$$y'_-(t_0) = 0, \quad y'_+(t_0) = 1/a \quad (7.86)$$



Σχήμα 7.7: μία εικονογράφηση του Θεωρήματος 7.6.1

(θυμίζουμε ότι $y'_-(t_0)$ και $y'_+(t_0)$ είναι παράγωγοι από δεξιά και αριστερά, αντίστοιχα) και η $y'(t_0)$ δεν υπάρχει. Συνεπώς ορίζουμε την $y = u(t - t_0)w(t - t_0)$ ως λύση του (7.83), αυτή η συνάρτηση *δεν ικανοποιεί* την ΔΕ στην (7.83) στο t_0 , αφού δεν είναι διαφορίσιμη εκεί. Πράγματι η (7.86) συνιστά ότι μία ώθηση έχει ένα κενό ασυνέχειας στην ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι το ΠΑΤ (7.83) δεν έχει έννοια για $t_0 = 0$, αφού $y'(0)$ δεν υπάρχει στην περίπτωση αυτή. Όμως $y = u(t)w(t)$ μπορεί να οριστεί ως λύση του τροποποιημένου ΠΑΤ

$$ay'' + by' + cy = \delta(t), \quad y(0) = 0, \quad y'_-(0) = 0,$$

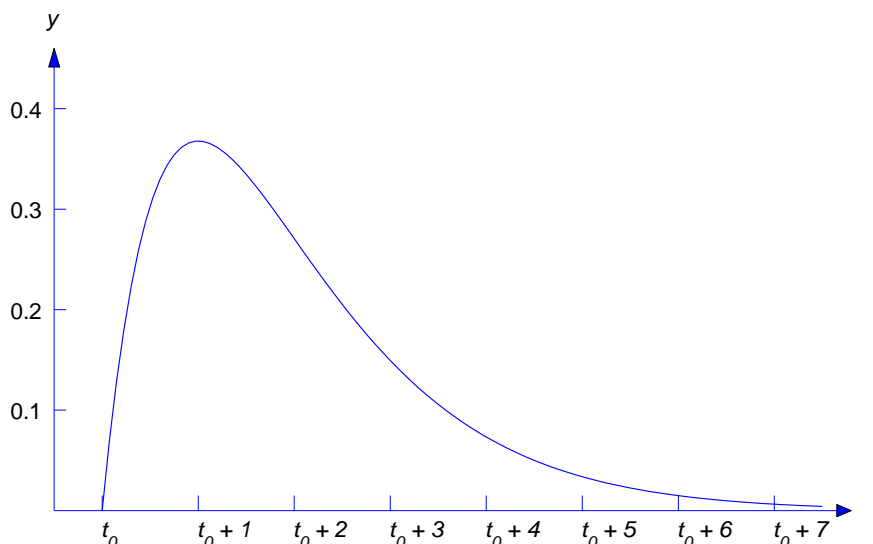
όπου η συνθήκη για την παράγωγο στο $t = 0$ έχει αντικατασταθεί από την συνθήκη για την από αριστερά παράγωγο.

Το Σχήμα 7.7 σκιαγραφεί το Θεώρημα 7.6.1 για την περίπτωση που η απόκριση ώθησης w στην πρώτη σχέση στην (7.85) και r_1 και r_2 είναι διακριτές και αρνητικές. Η συμπαγής καμπύλη στο σχήμα είναι το γράφημα της w . Οι διακεκομμένες καμπύλες είναι οι λύσεις του (7.73) για διάφορες τιμές του h . Καθώς η h τείνει στο 0 το γράφημα της y_h μετακινείται προς τα αριστερά στο γράφημα της w .

Παράδειγμα 7.6.1 Βρείτε τη λύση του ΠΑΤ

$$y'' - 2y' + y = \delta(t - t_0), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (7.87)$$

όπου $t_0 > 0$. Ερμηνεύστε τη λύση για $t_0 = 0$.



Σχήμα 7.8: $y = u(t - t_0)(t - t_0)e^{-(t-t_0)}$

Λύση Έχουμε

$$w = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - 2s + 1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) = te^{-t},$$

ο Ορισμός 7.6.1 δίνει

$$y = u(t - t_0)(t - t_0)e^{-(t-t_0)}$$

ως λύση του (7.87) αν $t_0 > 0$. Αν $t_0 = 0$, τότε η (7.87) δεν έχει λύση, όμως $y = u(t)te^{-t}$ (την οποία γράφουμε $y = te^{-t}$) είναι λύση του τροποποιημένου ΠΑΤ

$$y'' - 2y' + y = \delta(t), \quad y(0) = 0, \quad y'_-(0) = 0.$$

Το γράφημα της $y = u(t - t_0)(t - t_0)e^{-(t-t_0)}$ φαίνεται στο Σχήμα 7.8

Ο Ορισμός 7.6.1 και η αρχή της υπέρθεσης χρησιμοποιούνται στον ακόλουθο ορισμό. ■

Ορισμός 7.6.2 Υποθέτουμε α είναι μη μηδενική σταθερά και f είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[0, \infty)$. Αν $t_0 > 0$, τότε η λύση του ΠΑΤ

$$ay'' + by' + cy = f(t) + \alpha\delta(t - t_0), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1$$

ορίζεται από

$$y(t) = \hat{y}(t) + \alpha u(t - t_0)w(t - t_0),$$

όπου \hat{y} είναι λύση της

$$ay'' + by' + cy = f(t), \quad y(0) = k_0, \quad y'(0) = k_1.$$

Αυτός ο ορισμός επίσης, εφαρμόζεται αν $t_0 = 0$ και η αρχική συνθήκη $y'(0) = k_1$ αντικαθίσταται από $y'_-(0) = k_1$.

Παράδειγμα 7.6.2 Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + 6y' + 5y = 3e^{-2t} + 2\delta(t-1), \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 2. \quad (7.88)$$

Λύση Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει ότι η λύση του ΠΑΤ

$$y'' + 6y' + 5y = 3e^{-2t}, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 2$$

είναι

$$\hat{y} = -e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-5t} - \frac{5}{2}e^{-t}.$$

Αφού

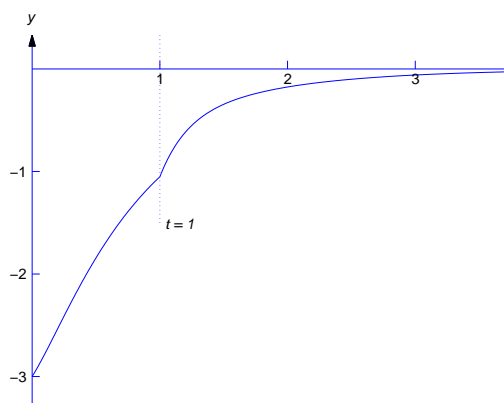
$$\begin{aligned} w(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 6s + 5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)(s+5)}\right) \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+5}\right) = \frac{e^{-t} - e^{-5t}}{4}, \end{aligned}$$

η λύση του (7.88) είναι

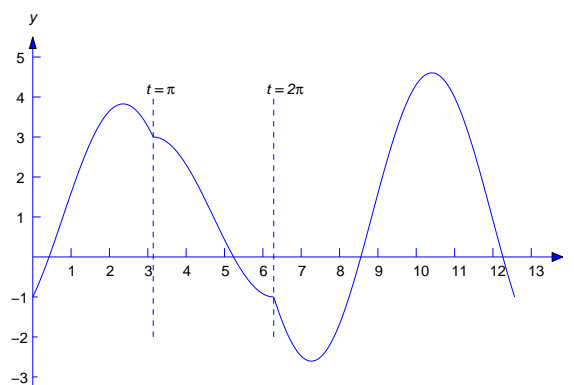
$$y = -e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-5t} - \frac{5}{2}e^{-t} + u(t-1)\frac{e^{-(t-1)} - e^{-5(t-1)}}{2} \quad (7.89)$$

(Figure 7.9)

■.



Σχήμα 7.9: Το γράφημα της (7.89).



Σχήμα 7.10: Το γράφημα της (7.91).

Ο Ορισμός 7.6.2 μπορεί να επεκταθεί και στην προφανή περίπτωση όπου η συνάρτηση δύναμης περιέχει περισσότερες από μία ωθήσεις.

Παράδειγμα 7.6.3 Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'' + y = 1 + 2\delta(t - \pi) - 3\delta(t - 2\pi), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2. \quad (7.90)$$

Λύση Εύκολα κανείς μπορεί να επιβεβαιώσει ότι

$$\hat{y} = 1 - 2 \cos t + 2 \sin t$$

είναι η λύση του

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2.$$

Αφού

$$w = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right) = \sin t,$$

η λύση της (7.90) είναι

$$\begin{aligned} y &= 1 - 2 \cos t + 2 \sin t + 2u(t - \pi) \sin(t - \pi) - 3u(t - 2\pi) \sin(t - 2\pi) \\ &= 1 - 2 \cos t + 2 \sin t - 2u(t - \pi) \sin t - 3u(t - 2\pi) \sin t, \end{aligned}$$

ή

$$y = \begin{cases} 1 - 2 \cos t + 2 \sin t, & 0 \leq t < \pi, \\ 1 - 2 \cos t, & \pi \leq t < 2\pi, \\ 1 - 2 \cos t - 3 \sin t, & t \geq 2\pi \end{cases} \quad (7.91)$$

(Σχήμα 7.10). ■

7.6 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-10 να λυθούν τα ΠΑΤ.

1. $y'' + 3y' + 2y = 6e^{2t} + 2\delta(t - 1), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -6$
2. $y'' + y' - 2y = -10e^{-t} + 5\delta(t - 1), \quad y(0) = 7, \quad y'(0) = -9$
3. $y'' - 4y = 2e^{-t} + 5\delta(t - 1), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$
4. $y'' + y = \sin 3t + 2\delta(t - \pi/2), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$
5. $y'' + 4y = 4 + \delta(t - 3\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
6. $y'' - y = 8 + 2\delta(t - 2), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$
7. $y'' + y' = e^t + 3\delta(t - 6), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 4$
8. $y'' + 4y = 8e^{2t} + \delta(t - \pi/2), \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 0$
9. $y'' + 3y' + 2y = 1 + \delta(t - 1), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

$$10. \quad y'' + 2y' + y = e^t + 2\delta(t-2), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$$

Στις Ασκήσεις 11-13, να λυθούν τα ΠΑΤ

$$ay''_h + by'_h + cy_h = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0, \\ 1/h, & t_0 \leq t < t_0 + h, \\ 0, & t \geq t_0 + h, \end{cases} \quad y_h(0) = 0, \quad y'_h(0) = 0,$$

όπου $t_0 > 0$ και $h > 0$. Τότε βρείτε

$$w = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{as^2 + bs + c} \right)$$

και επιβεβαιώστε το Θεώρημα 7.6.1 σχεδιάζοντας την w και y_h στους ίδιους άξονες, για μικρές θετικές τιμές του h .

$$11. \quad y'' + 2y' + 2y = f_h(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$12. \quad y'' + 2y' + y = f_h(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$13. \quad y'' + 3y' + 2y = f_h(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Βιβλιογραφία

- N. Αλικάκος, & Γ.Η.Καλογερόπουλος, 2003. *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα.
- N. Σταυρακάκης, 2011 *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις: γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή*, Παπασωτηρίου, Αθήνα.
- B. M. Ρόθος, X. A. Σφυράκης, 2011 *Λογισμός μιας Μεταβλητής* Εκδόσεις Αφοι Βλάσσοι, Αθήνα.
- L. Brand, 1984 *Μαθηματική Ανάλυση*, Ε.Μ.Ε.
- W.E Boyce, & R.C. DiPrima, 2001 *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th edn. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- J. E. Marsden & M. J. Hoffman, 1993 *Elementary Classical Analysis*, 2nd Ed., W. H. Freeman, New York.
- W. F. Trenc, 2013 *Elementary Differential Equations*, Books and Monographs, Trinity University.
- P. Waltman, 1986, *A second Course in Elementary Differential Equations*, Academic Press, Inc. NY.

Κεφάλαιο 8

Γραμμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

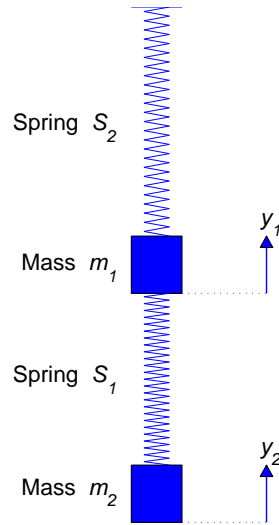
Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε συστήματα διαφορικών εξισώσεων με περισσότερες από μία άγνωστες συναρτήσεις. Τέτοια συστήματα εμφανίζονται σε πολλά φυσικά προβλήματα. Η δομή του κεφαλαίου είναι η ακόλουθη:

Στο εδάφιο 8.1, παρουσιάζουμε βασικά παραδείγματα από φυσικά προβλήματα που μοντελοποιούνται από συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Στο εδάφιο 8.2, μελετάμε γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων. Στο εδάφιο 8.3, ασχολούμαστε με τη βασική θεωρία ομογενών γραμμικών συστημάτων. Στο εδάφιο 8.4, παρουσιάζεται η θεωρία των ομογενών συστημάτων με σταθερούς συντελεστές και η γεωμετρική περιγραφή λύσεων συστημάτων ΔΕ στο επίπεδο. Στο εδάφιο 8.6, παρουσιάζονται βασικά στοιχεία της θεωρίας πινάκων για την επίλυση γραμμικών συστημάτων και η μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων για την επίλυση μη ομογενών γραμμικών συστημάτων. Στο εδάφιο 8.7, παρουσιάζεται η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση μη ομογενών γραμμικών συστημάτων.

8.1 Εισαγωγή στα γραμμικά συστήματα ΔΕ

Πολλά φυσικά προβλήματα μοντελοποιούνται από συστήματα n διαφορικών εξισώσεων (ΔΕ) με n άγνωστες συναρτήσεις, $n \geq 2$. Στα επόμενα παραδείγματα θα παρουσιάσουμε φυσικά προβλήματα που οδηγούν σε συστήματα ΔΕ. Σε όλο το κεφάλαιο η ανεξάρτητη μεταβλητή δηλώνεται με t . Το επόμενο παράδειγμα αναφέρεται στη χρήση των συστημάτων ΔΕ στη συμπεριφορά ενός μηχανικού συστήματος.

Παράδειγμα 8.1.1 Θεωρούμε ότι ένα ελατήριο S_1 , του οποίου η μία άκρη συνδέεται με μία μάζα m_2 και η άλλη με μια δεύτερη μάζα m_1 , συνδέεται με ένα ελατήριο S_2 , του οποίου η άλλη άκρη στερεώνεται σε σταθερό σημείο. (Σχήμα 8.1). Τα ελατήρια ακολουθούν



Σχήμα 8.1: Συζευγμένα Ελατήρια

τον νόμο Hooke με σταθερές k_1 και k_2 . Η εσωτερική τριβή που αναπτύσσεται στα ελατήρια ασκεί δυνάμεις απόσβεσης ανάλογες του ρυθμού μεταβολής του μήκους τους, με συντελεστές απόσβεσης c_1 και c_2 . Έστω $y_1 = y_1(t)$ και $y_2 = y_2(t)$ είναι οι μετατοπίσεις των δύο μαζών από την θέση ηρεμίας τη χρονική στιγμή t , με θετική κατεύθυνση προς τα επάνω. Να διατυπώσετε το σύστημα ΔΕ για τις y_1 και y_2 , υποθέτοντας ότι οι μάζες των ελατηρίων είναι αμελητέες και οι κατακόρυφες εξωτερικές δυνάμεις F_1 και F_2 επιδρούν στα αντικείμενα.

Λύση Στη θέση ηρεμίας, το ελατήριο S_1 υποστηρίζει και τις δύο μάζες m_1 και m_2 και το S_2 την m_2 . Οπότε, αν $\Delta\ell_1$ και $\Delta\ell_2$ είναι οι επιμηκύνσεις των ελατηρίων στην ηρεμία,

$$(m_1 + m_2)g = k_1\Delta\ell_1 \quad \text{και} \quad m_2g = k_2\Delta\ell_2. \quad (8.1)$$

Έστω H_1 η δύναμη Hooke που δρα στη m_1 , και D_1 η δύναμη απόσβεση στη m_1 . Ομοίως, H_2 και D_2 η δύναμη Hooke και η δύναμη απόσβεσης στην m_2 . Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Newton,

$$\begin{aligned} m_1 y_1'' &= -m_1 g + H_1 + D_1 + F_1, \\ m_2 y_2'' &= -m_2 g + H_2 + D_2 + F_2. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Όπου οι απομακρύνσεις y_1 και y_2 , η αλλαγή του μήκους του S_1 είναι $-y_1 + \Delta\ell_1$ και η αλλαγή του μήκους του S_2 είναι $-y_2 + y_1 + \Delta\ell_2$. Και τα δύο ελατήρια ασκούν δυνάμεις Hooke στη m_1 , αφού μόνο το S_2 ασκεί δύναμη Hooke στο m_2 . Αυτές οι δυνάμεις είναι στην κατεύθυνση κατά την οποία τείνουν να επαναφέρουν τα ελατήρια στο φυσικό τους

μήκος. Οπότε

$$H_1 = k_1(-y_1 + \Delta\ell_1) - k_2(-y_2 + y_1 + \Delta\ell_2) \quad \text{και} \quad H_2 = k_2(-y_2 + y_1 + \Delta\ell_2). \quad (8.3)$$

Όπου y'_1 και y'_2 είναι οι ταχύτητες, τα ελατήρια S_1 και S_2 αλλάζουν μήκος σύμφωνα με το ρυθμό $-y'_1$ και $-y'_2 + y'_1$, αντίστοιχα. Και τα δύο ελατήρια ασκούν δυνάμεις απόσβεσης στη m_1 , αφού μόνο το S_2 ασκεί δύναμη στο m_2 . Λόγω του ότι η δύναμη απόσβεσης είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής τους μήκους του ελατηρίου και κατά την αντίθετη κατεύθυνση έχουμε

$$D_1 = -c_1y'_1 + c_2(y'_2 - y'_1) \quad \text{και} \quad D_2 = -c_2(y'_2 - y'_1). \quad (8.4)$$

Από (8.2), (8.3), και (8.4),

$$\begin{aligned} m_1y''_1 &= -m_1g + k_1(-y_1 + \Delta\ell_1) - k_2(-y_2 + y_1 + \Delta\ell_2) \\ &\quad - c_1y'_1 + c_2(y'_2 - y'_1) + F_1 \\ &= -(m_1g - k_1\Delta\ell_1 + k_2\Delta\ell_2) - k_1y_1 + k_2(y_2 - y_1) \\ &\quad - c_1y'_1 + c_2(y'_2 - y'_1) + F_1 \end{aligned} \quad (8.5)$$

και

$$\begin{aligned} m_2y''_2 &= -m_2g + k_2(-y_2 + y_1 + \Delta\ell_2) - c_2(y'_2 - y'_1) + F_2 \\ &= -(m_2g - k_2\Delta\ell_2) - k_2(y_2 - y_1) - c_2(y'_2 - y'_1) + F_2. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Από την (8.1),

$$m_1g - k_1\Delta\ell_1 + k_2\Delta\ell_2 = -m_2g + k_2\Delta\ell_2 = 0.$$

Οι εξισώσεις (8.5) και (8.6) μπορούν να γραφούν ως

$$\begin{aligned} m_1y''_1 &= -(c_1 + c_2)y'_1 + c_2y'_2 - (k_1 + k_2)y_1 + k_2y_2 + F_1 \\ m_2y''_2 &= c_2y'_1 - c_2y'_2 + k_2y_1 - k_2y_2 + F_2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

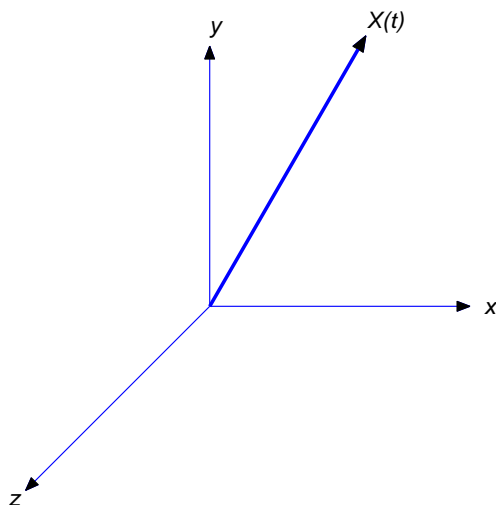
Παράδειγμα 8.1.2 Έστω $\mathbf{X} = \mathbf{X}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ το διάνυσμα θέσης ενός υλικού σημείου μάζας m τη χρονική στιγμή t , σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με αρχή το κέντρο της Γης (Σχήμα 8.2). Σύμφωνα με τον νόμο της βαρύτητας του Newton, η βαρυτική δύναμη $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z)$ στο υλικό σημείο είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης του υλικού σημείου από το κέντρο της Γης, και με κατεύθυνση το κέντρο, έτσι,

$$\mathbf{F} = \frac{K}{\|\mathbf{X}\|^2} \left(-\frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|} \right) = -K \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (8.7)$$

όπου K είναι σταθερά. Για να προσδιορίσουμε το K , παρατηρούμε ότι το μέτρο της \mathbf{F} είναι

$$\|\mathbf{F}\| = K \frac{\|\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|^3} = \frac{K}{\|\mathbf{X}\|^2} = \frac{K}{(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

Έστω R είναι η ακτίνα της Γης. Λόγω του $\|\mathbf{F}\| = mg$ όταν το υλικό σημείο είναι στην



Σχήμα 8.2: Διάνυσμα θέσης υλικού σημείου

επιφάνεια της Γης

$$mg = \frac{K}{R^2}, \quad \text{οπότε} \quad K = mgR^2.$$

Μπορούμε να γράψουμε την (8.7) ως

$$\mathbf{F} = -mgR^2 \frac{x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι \mathbf{F} είναι η μόνη δύναμη που επιδρά στο υλικό σημείο. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{X}''$, οπότε

$$m(x'' \mathbf{i} + y'' \mathbf{j} + z'' \mathbf{k}) = -mgR^2 \frac{x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Με απαλοιφή των κοινών όρων έχουμε

$$\begin{aligned} x'' &= -\frac{gR^2 x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ y'' &= -\frac{gR^2 y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ z'' &= -\frac{gR^2 z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \quad \blacksquare \end{aligned} \tag{8.8}$$

Ανώτερης τάξης συστήματα εκφράζονται με συστήματα πρώτης τάξης

Ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned} y_1' &= g_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= g_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= g_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (8.9)$$

καλείται *πρώτης τάξης σύστημα*, αφού οι μόνες παράγωγοι που εμφανίζονται είναι πρώτης τάξης. Η παράγωγος καθεμιάς από τις άγνωστες μπορεί να εξαρτάται όσον αφορά την ανεξάρτητη μεταβλητή και όλες τις άγνωστες, αλλά όχι στις παραγώγους των άγνωστων. Όταν θέλουμε να εστιάσουμε στον αριθμό των άγνωστων συναρτήσεων στην (8.9) θα λέμε ότι η (8.9) είναι ένα $n \times n$ σύστημα.

Συστήματα που περιέχουν ανώτερης τάξης παραγώγους μπορούν εύκολα να γραφτούν ως συστήματα με πρώτης τάξης παραγώγους. Στα δύο επόμενα παραδείγματα περιγράψουμε τον τρόπο.

Παράδειγμα 8.1.3 Ξαναγράψτε το σύστημα

$$\begin{aligned} m_1 y_1'' &= -(c_1 + c_2)y_1' + c_2 y_2' - (k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2 + F_1 \\ m_2 y_2'' &= c_2 y_1' - c_2 y_2' + k_2 y_1 - k_2 y_2 + F_2. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Βλέπε Παράδειγμα 8.1.1 ως σύστημα ΔΕ πρώτης τάξης.

Λύση Αν ορίσουμε $v_1 = y_1'$ και $v_2 = y_2'$, τότε $v_1' = y_1''$ και $v_2' = y_2''$, και οι εξισώσεις (8.10) γίνονται

$$\begin{aligned} m_1 v_1' &= -(c_1 + c_2)v_1 + c_2 v_2 - (k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2 + F_1 \\ m_2 v_2' &= c_2 v_1 - c_2 v_2 + k_2 y_1 - k_2 y_2 + F_2. \end{aligned}$$

Οπότε $\{y_1, y_2, v_1, v_2\}$ ικανοποιεί ένα 4×4 πρώτης τάξης σύστημα

$$\begin{aligned} y_1' &= v_1 \\ y_2' &= v_2 \\ v_1' &= \frac{1}{m_1} [-(c_1 + c_2)v_1 + c_2 v_2 - (k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2 + F_1] \\ v_2' &= \frac{1}{m_2} [c_2 v_1 - c_2 v_2 + k_2 y_1 - k_2 y_2 + F_2]. \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (8.11)$$

Παράδειγμα 8.1.4 Ξαναγράψτε το σύστημα

$$\begin{aligned} x'' &= f(t, x, x', y, y', y'') \\ y''' &= g(t, x, x', y, y', y'') \end{aligned}$$

ως σύστημα πρώτης τάξης.

Λύση Θεωρούμε x, x', y, y' και y'' ως άγνωστες συναρτήσεις, και τις μετονομάζουμε ως

$$x = x_1, \quad x' = x_2, \quad y = y_1, \quad y' = y_2, \quad y'' = y_3.$$

Οι άγνωστες συναρτήσεις ικανοποιούν

$$\begin{aligned}x'_1 &= x_2 \\x'_2 &= f(t, x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) \\y'_1 &= y_2 \\y'_2 &= y_3 \\y'_3 &= g(t, x_1, x_2, y_1, y_2, y_3).\end{aligned}\quad \blacksquare$$

Ανώτερης τάξης ΔΕ εκφράζονται ως συστήματα ΔΕ.

ΔΕ που περιέχουν παραγώγους μιας μόνο άγνωστης συνάρτησης καλούνται *βαθμωτές* ΔΕ. Οι βαθμωτές ΔΕ μπορούν να γραφούν ως συστήματα ΔΕ πρώτης τάξης, ακολουθώντας την μέθοδο που παρουσιάζεται στα επόμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.1.5 (α') Να γραφεί η ΔΕ 4ης τάξης

$$y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0 \quad (8.12)$$

ως σύστημα 4×4 πρώτης τάξης.

(β') Να γράψετε τη ΔΕ

$$x''' = f(t, x, x', x'')$$

ως σύστημα ΔΕ πρώτης τάξης.

Λύση (α) Θεωρούμε $y, y', y'',$ και y''' ως άγνωστες και τις μετονομάζουμε ως εξής

$$y = y_1, \quad y' = y_2, \quad y'' = y_3, \quad \text{και} \quad y''' = y_4.$$

Τότε $y^{(4)} = y'_4$, οπότε η (8.12) μπορεί να γραφεί

$$y'_4 + 4y_4 + 6y_3 + 4y_2 + y_1 = 0.$$

Συνεπώς $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ικανοποιεί το σύστημα

$$\begin{aligned}y'_1 &= y_2 \\y'_2 &= y_3 \\y'_3 &= y_4 \\y'_4 &= -4y_4 - 6y_3 - 4y_2 - y_1.\end{aligned}\quad \blacksquare$$

(β) Θεωρούμε $x, x',$ και x'' ως άγνωστες και τις μετονομάζουμε ως εξής

$$x = y_1, \quad x' = y_2, \quad \text{και} \quad x'' = y_3.$$

Τότε

$$y'_1 = x' = y_2, \quad y'_2 = x'' = y_3, \quad \text{και} \quad y'_3 = x'''. \quad \blacksquare$$

Οπότε $\{y_1, y_2, y_3\}$ ικανοποιούν ένα σύστημα ΔΕ πρώτης τάξης

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\y_2' &= y_3 \\y_3' &= f(t, y_1, y_2, y_3). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Ενδέχεται όμως συστήματα ΔΕ να περιέχουν και ανώτερης τάξης παραγώγους, τα οποία μπορούν να γραφούν ως συστήματα ΔΕ πρώτης τάξης (όπως φαίνεται και στα Παραδείγματα 8.1.4 -8.1.5, θα μελετήσουμε διεξοδικά συστήματα ΔΕ πρώτης τάξης.)

8.1 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να γραφούν τα παρακάτω συστήματα ως συστήματα ΔΕ πρώτης τάξης

$$\begin{aligned}(\text{a}) \quad x''' &= f(t, x, y, y') & u' &= f(t, u, v, v', w') \\y'' &= g(t, y, y') & (\text{b}) \quad v'' &= g(t, u, v, v', w) \\& & w'' &= h(t, u, v, v', w, w')\end{aligned}$$

$$(\text{c}) \quad y''' = f(t, y, y', y'') \quad (\text{d}) \quad y^{(4)} = f(t, y)$$

$$(\text{e}) \quad \begin{aligned}x'' &= f(t, x, y) \\y'' &= g(t, x, y)\end{aligned}$$

8.2 Γραμμικά συστήματα ΔΕ 1ης τάξης

Ένα σύστημα ΔΕ 1ης τάξης που μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \cdots + a_{1n}(t)y_n + f_1(t) \\y_2' &= a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + \cdots + a_{2n}(t)y_n + f_2(t) \\&\vdots \\y_n' &= a_{n1}(t)y_1 + a_{n2}(t)y_2 + \cdots + a_{nn}(t)y_n + f_n(t)\end{aligned} \tag{8.13}$$

και θα καλείται *γραμμικό*.

Το γραμμικό σύστημα (8.13) μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix},$$

ή για συντομία.

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \tag{8.14}$$

όπου

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας A καλείται *πίνακας συντελεστών* για το (8.14) και \mathbf{f} ο *μη ομογενής όρος*. Θα λέμε ότι A και \mathbf{f} είναι *συνεχείς (αντ. παραγωγίσιμοι)* αν τα αντίστοιχα στοιχεία του είναι συνεχή (αντ. παραγωγίσιμα). Αν $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, τότε (8.14) είναι *ομογενές*; διαφορετικά (8.14) καλείται *μη ομογενές*.

Το ΠΑΤ για το (8.14) ορίζεται με την εύρεση μιας λύσης του (8.14) για δοσμένο σταθερό διάνυσμα.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}.$$

την αρχική στιγμή t_0 . Μπορούμε να γράψουμε το ΠΑΤ ως

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{k}. \quad (8.15)$$

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη λύσεων ΠΑΤ (8.15) (βλ. **r13**).

Θεώρημα 8.2.1 *Υποθέτουμε ότι ο πίνακας των συντελεστών A και το μη ομογενές μέρος \mathbf{f} είναι συνεχείς στο (a, b) , έστω $t_0 \in (a, b)$, και \mathbf{k} είναι αυθαίρετο σταθερό n -διάνυσμα. Τότε, το ΠΑΤ*

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{k}$$

έχει μοναδική λύση στο (a, b) .

Παράδειγμα 8.2.1

(α') Να γραφεί το σύστημα

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 + 2e^{4t} \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 + e^{4t} \end{aligned} \quad (8.16)$$

σε μορφή πινάκων και από το Θεώρημα 8.2.1 να συμπεράνετε ότι το ΠΑΤ (8.16) έχει μοναδική λύση στο $(-\infty, \infty)$.

(β') Επιβεβαιώστε ότι

$$\mathbf{y} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} e^{4t} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} \quad (8.17)$$

είναι μια λύση για το (8.16) για όλες τις τιμές των σταθερών c_1 και c_2 .

(γ') Να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}, \quad \mathbf{y}(0) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 22 \end{bmatrix}. \quad (8.18)$$

Λύση (α) Το σύστημα (8.16) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}.$$

Ένα ΠΑΤ για το (8.16) γράφεται στη μορφή

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}, \quad \mathbf{y}(t_0) = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}.$$

Αφού ο πίνακας των συντελεστών και το μη ομογενές μέρος είναι συνεχείς στο $(-\infty, \infty)$, το Θεώρημα 8.2.1 συνεπάγεται ότι το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση στο $(-\infty, \infty)$.

(β) Αν \mathbf{y} δίνεται από την (8.17), τότε

$$\begin{aligned} A\mathbf{y} + \mathbf{f} &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} e^{4t} + c_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} \\ &\quad + c_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 22 \\ 23 \end{bmatrix} e^{4t} + c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 32 \\ 28 \end{bmatrix} e^{4t} + 3c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} - c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} = \mathbf{y}'. \end{aligned}$$

(γ) Θα πρέπει να διαλέξουμε c_1 και c_2 στην (8.17), ώστε

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 22 \end{bmatrix},$$

ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Λύνοντας το σύστημα, προσδιορίζουμε $c_1 = 1$, $c_2 = -2$, οπότε

$$\mathbf{y} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} e^{4t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

είναι λύση του (8.18). ■

Παρατήρηση: Η θεωρία των $n \times n$ γραμμικών συστημάτων ΔΕ είναι ανάλογη με τη

θεωρία των βαθμωτών n -τάξης ΔΕ

$$P_0(t)y^{(n)} + P_1(t)y^{(n-1)} + \dots + P_n(t)y = F(t), \quad (8.19)$$

όπως την παρουσιάσαμε στο εδάφιο 5.2.2.

Για παράδειγμα γράφοντας την (8.19) ισοδύναμα ως ένα γραμμικό σύστημα, μπορεί να αποδειχθεί ότι το Θεώρημα 8.2.1 συνεπάγεται το Θεώρημα 5.2.4

8.2 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Να γραφούν τα συστήματα σε μορφή πινάκων και να επιβεβαιώσετε ότι η δοσμένη διανυσματική συνάρτηση ικανοποιεί το σύστημα για οποιαδήποτε επιλογή των c_1 , c_2 και c_3 .

$$(α') \quad \begin{cases} y_1' = 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 2y_2; \end{cases} \quad \mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$(β') \quad \begin{cases} y_1' = -2y_1 - 2y_2 \\ y_2' = -5y_1 + y_2; \end{cases} \quad \mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$(γ') \quad \begin{cases} y_1' = -4y_1 - 10y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 7y_2; \end{cases} \quad \mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$$

$$(δ') \quad \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2; \end{cases} \quad \mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t$$

$$(ε') \quad \begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ y_2' = y_2 + 6y_3 \\ y_3' = -2y_3; \end{cases}$$

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

$$(ς') \quad \begin{cases} y_1' = 2y_2 + 2y_3 \\ y_2' = 2y_1 + 2y_3 \\ y_3' = 2y_1 + 2y_2; \end{cases}$$

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$$

$$(ζ') \quad \begin{cases} y_1' = -y_1 + 2y_2 + 2y_3 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 + 2y_3 \\ y_3' = 2y_1 + 2y_2 - y_3; \end{cases}$$

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$$

$$(η') \quad \begin{cases} y_1' = -3y_1 + 2y_2 + 3 - 2t \\ y_2' = -5y_1 + 3y_2 + 6 - 3t \end{cases}$$

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \cos t \\ 3 \cos t - \sin t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \sin t \\ 3 \sin t + \cos t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$$

$$(θ') \quad \begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + y_2 - 5e^t \\ y_2' &= -y_1 + y_2 + e^t \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1+t \\ -t \end{bmatrix} e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^t$$

$$(ι') \quad \begin{aligned} y_1' &= -y_1 - 4y_2 + 4e^t + 8te^t \\ y_2' &= -y_1 - y_2 + e^{3t} + (4t+2)e^t \end{aligned}$$

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2te^t \end{bmatrix}$$

2. Επιβεβαιώστε ότι $Y' = AY$.

$$(α') \quad Y = \begin{bmatrix} e^{6t} & e^{-2t} \\ e^{6t} & -e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(β') \quad Y = \begin{bmatrix} e^{-4t} & -2e^{3t} \\ e^{-4t} & 5e^{3t} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(γ') \quad Y = \begin{bmatrix} -5e^{2t} & 2e^t \\ 3e^{2t} & -e^t \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(δ') \quad Y = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^t \\ e^{3t} & -e^t \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(ε') \quad Y = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} & e^{-2t} \\ e^t & 0 & -2e^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Υποθέτουμε ότι

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{bmatrix}$$

είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}, \quad (\text{A})$$

και ορίζουμε

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}.$$

(α') Δείξτε ότι $Y' = AY$.

(β') Δείξτε ότι αν \mathbf{c} είναι ένα σταθερό διάνυσμα, τότε $\mathbf{y} = Y\mathbf{c}$ είναι λύση του (A).

(γ') Διατυπώστε τις γενικεύσεις των (α) και (β) για $n \times n$ συστήματα.

4. Υποθέτουμε ότι Y είναι διαφορίσιμος τετραγωνικός πίνακας (όλα τα στοιχεία του είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις).
- (α') Προσδιορίστε τον τύπο για την παράγωγο του Y^2 .
- (β') Προσδιορίστε τον τύπο για την παράγωγο του Y^n , όπου n είναι θετικός ακέραιος.
- (γ') Εξηγήστε πώς τα αποτελέσματα των (α) και (β) είναι ανάλογα με τα αποτελέσματα για βαθμωτές συναρτήσεις.
5. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν Y είναι διαφορίσιμος και αντιστρέψιμος τετραγωνικός πίνακας συνάρτησης, τότε Y^{-1} είναι διαφορίσιμος.
- (α') Δείξτε ότι $(Y^{-1})' = -Y^{-1}Y'Y^{-1}$. (Υποδ: Διαφορίστε την ισότητα $Y^{-1}Y = I$.)
- (β') Βρείτε την παράγωγο του $Y^{-n} = (Y^{-1})^n$, όπου n θετικός ακέραιος.
- (γ') Εξηγήστε πώς τα αποτελέσματα των (α) και (β) είναι ανάλογα με τα αποτελέσματα για βαθμωτές συναρτήσεις.
6. Υποθέτουμε ότι \mathbf{y} είναι μια λύση του $n \times n$ συστήματος $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b) , και ο $n \times n$ πίνακας P είναι αντιστρέψιμος και διαφορίσιμος στο (a, b) . Βρείτε ένα πίνακα B έτσι ώστε η συνάρτηση $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ είναι λύση του $\mathbf{x}' = B\mathbf{x}$ στο (a, b) .

8.3 Βασική Θεωρία Ομογενών Γραμμικών Συστημάτων

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε ομογενή γραμμικά συστήματα $\Delta E \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, όπου $A = A(t)$ είναι ένας συνεχής $n \times n$ πίνακας συναρτήσεων στο διάστημα (a, b) . Η θεωρία γραμμικών ομογενών συστημάτων έχει πολλά κοινά στοιχεία με την αντίστοιχη θεωρία των βαθμωτών ΔΕ.

Όταν αναφέρουμε λύσεις της $\Delta E \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ θα εννοούμε λύσεις στο (a, b) . Η $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$ είναι μια προφανής λύση του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, η οποία καλείται *τετριμμένη* λύση. Κάθε άλλη λύση είναι *μη τετριμμένη*.

Αν $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ είναι διανυσματικές συναρτήσεις ορισμένες στο (a, b) και c_1, c_2, \dots, c_n είναι σταθερές, τότε

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \dots + c_n\mathbf{y}_n \quad (8.20)$$

είναι ένας *γραμμικός συνδυασμός των* $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ είναι λύσεις του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b) , τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ είναι επίσης λύση (Άσκηση 1). Θα λέμε ότι $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ είναι ένα *θεμελιώδες σύνολο λύσεων του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b)* αν κάθε λύση του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b) μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$, όπως στην (8.20). Σε αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι η (8.20) είναι μια *γενική λύση του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b)* .

Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν A είναι συνεχής στο (a, b) τότε $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ έχει άπειρο θεμελιώδες σύνολο λύσεων στο (a, b) (Άσκηση 5). Λύση της $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ καλείται κάθε C^1 -διαφορίσιμη συνάρτηση $\mathbf{y} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$: $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}, \forall t \in (a, b)$.

Η λύση $\mathbf{y}(t)$ ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $(t_0, \mathbf{y}_0) \in (a, b) \times \mathbb{R}^n$, αν και μόνο αν $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$. Ο επόμενος ορισμός χαρακτηρίζει το θεμελιώδες σύνολο λύσεων του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$.

Θα λέμε ότι το σύνολο $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ των n -διανυσματικών συναρτήσεων είναι *γραμμικά ανεξάρτητο* στο (a, b) , αν οι μόνες σταθερές c_1, c_2, \dots, c_n τέτοιες ώστε

$$c_1\mathbf{y}_1(t) + c_2\mathbf{y}_2(t) + \dots + c_n\mathbf{y}_n(t) = 0, \quad a < t < b, \quad (8.21)$$

είναι $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Αν (8.21) ισχύει για κάποιο σύνολο σταθερών c_1, c_2, \dots, c_n που δεν είναι όλες μηδέν, τότε $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ είναι *γραμμικά εξαρτημένες* στο (a, b) .

Θεώρημα 8.3.1 *Υποθέτουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας $A = A(t)$ είναι συνεχής στο (a, b) . Τότε το σύνολο $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ των n λύσεων του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b) είναι ένα θεμελιώδες σύνολο, αν και μόνο αν τα στοιχεία του είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο (a, b) .*

Παράδειγμα 8.3.1 Δείξτε ότι οι διανυσματικές συναρτήσεις

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε κάθε διάστημα (a, b) .

Λύση Υποθέτουμε

$$c_1 \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a < t < b.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Έχουμε

$$\begin{bmatrix} e^t & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{3t} & e^{3t} \\ e^{-t} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a < t < b.$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα των συντελεστών παρατηρούμε ότι ισούται με $-2e^{4t} \neq 0$, συνεπώς $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. ■

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να γράψουμε έναν γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ με διαφορετικό τρόπο. Θεωρούμε

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{y}_n = \begin{bmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{bmatrix}.$$

Αν

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \dots + c_n\mathbf{y}_n$$

τότε

$$c_1 \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2 + \cdots + c_n \mathbf{y}_n = Y \mathbf{c}, \quad (8.22)$$

όπου

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

και

$$Y = [\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_n] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}; \quad (8.23)$$

οι στήλες του Y είναι οι διανυσματικές συναρτήσεις $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$.

Σημειώνουμε, επίσης,

$$\begin{aligned} Y' &= [\mathbf{y}'_1 \ \mathbf{y}'_2 \ \cdots \ \mathbf{y}'_n] \\ &= [A\mathbf{y}_1 \ A\mathbf{y}_2 \ \cdots \ A\mathbf{y}_n] \\ &= A[\mathbf{y}_1 \ \mathbf{y}_2 \ \cdots \ \mathbf{y}_n] = AY; \end{aligned}$$

Y ικανοποιεί την ΔΕ με την μορφή πινάκων $Y' = AY$.

Η ορίζουσα του Y ,

$$W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n] = \det(Y) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \quad (8.24)$$

καλείται *ορίζουσα Wronski* των $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$.

Μπορεί να δειχθεί ότι οι ορισμοί των Wronskian οριζουσών για βαθμωτές συναρτήσεις (βλ. εδάφιο 5.1.1) είναι ανάλογοι και για διανυσματικές συναρτήσεις.

Θεώρημα 8.3.2 [*Τύπος του Abel*] Υποθέτουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας $A = A(t)$ είναι συνεχής στο (a, b) , έστω $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ είναι λύσεις της ΔΕ $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b) , και έστω $t_0 \in (a, b)$. Τότε η ορίζουσα Wronski των $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ δίνεται από τη σχέση

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t [a_{11}(s) + a_{22}(s) + \cdots + a_{nn}(s)] ds \right), \quad a < t < b. \quad (8.25)$$

όπου, είτε η W δεν έχει ρίζες στο (a, b) ή $W \equiv 0$ στο (a, b) .

Παρατήρηση: Για την απόδειξη παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην βιβλιογραφία (Ν. Σταυρακάκης, 2011 και W.E. Boyce, & R.C. DiPrima, 2001). Θυμίζουμε ότι το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων ενός τετραγωνικού πίνακα A καλείται *ίχνος* του A και συμβολί-

ζεται με $\text{tr}(A)$. Έτσι, για έναν $n \times n$ πίνακα A ,

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn},$$

η (8.25) γράφεται ως

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \text{tr}(A(s)) ds \right), \quad a < t < b.$$

Θεώρημα 8.3.3 Υποθέτουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας $A = A(t)$ είναι συνεχής στο (a, b) και έστω $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ είναι λύσεις της $\Delta E \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b) . Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- (α') Η γενική λύση της $\Delta E \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b) είναι $\mathbf{y} = c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n$, όπου c_1, c_2, \dots, c_n είναι αυθαίρετες σταθερές.
- (β') $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για την $\Delta E \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b) .
- (γ') $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο (a, b) .
- (δ') Η ορίζουσα Wronski του $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ είναι μη μηδενική σε κάποιο σημείο του (a, b) .
- (ε') Η ορίζουσα Wronski του $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ είναι μη μηδενική σε όλα τα σημεία του (a, b) .

Θα λέμε ότι Y στην (8.23) είναι ένας θεμελιώδης πίνακας για $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ αν ικανοποιούνται μια ή όλες οι προτάσεις (α) – (ε) του Θεωρήματος 8.3.2 για τις στήλες του Y . Σε αυτήν την περίπτωση, η (8.22) συνεπάγεται ότι η γενική λύση της $\Delta E \mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\mathbf{y} = Y\mathbf{c}$, όπου \mathbf{c} αυθαίρετο σταθερό n -διάνυσμα.

Παράδειγμα 8.3.2 Οι διανυσματικές συναρτήσεις

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

είναι λύσεις του συστήματος

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{y} \quad (8.26)$$

στο $(-\infty, \infty)$. Υπολογίστε την ορίζουσα Wronski των $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$. Επιβεβαιώστε τον τύπο του Abel (8.25) για την ορίζουσα Wronski των $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$. Βρείτε τη γενική λύση του (8.26). Να λύσετε το ΠΑΤ

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}. \quad (8.27)$$

Λύση

Από (8.24)

$$W(t) = \begin{vmatrix} -e^{2t} & -e^{-t} \\ 2e^{2t} & e^{-t} \end{vmatrix} = e^{2t}e^{-t} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = e^t. \quad (8.28)$$

Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix},$$

οπότε $\text{tr}(A) = -4 + 5 = 1$. Αν t_0 είναι αυθαίρετος πραγματικός αριθμός, η (8.25) δίνει

$$W(t) = W(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t 1 \, ds \right) = \begin{vmatrix} -e^{2t_0} & -e^{-t_0} \\ 2e^{2t_0} & e^{-t_0} \end{vmatrix} e^{(t-t_0)} = e^{t_0} e^{t-t_0} = e^t,$$

το οποίο ταυτίζεται με την (8.28).

Αφού $W(t) \neq 0$, το Θεώρημα 8.3.3 συνεπάγεται ότι $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για την (8.26) και

$$Y = \begin{bmatrix} -e^{2t} & -e^{-t} \\ 2e^{2t} & e^{-t} \end{bmatrix}$$

είναι θεμελιώδης πίνακας του (8.26). Η γενική λύση του (8.26) είναι

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{y}_1 + c_2 \mathbf{y}_2 = c_1 \begin{bmatrix} -e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{2t} & -e^{-t} \\ 2e^{2t} & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}. \quad (8.29)$$

Θέτοντας $t = 0$ στην (8.29) και εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες στην (8.27) έχουμε

$$c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} -c_1 - c_2 &= 4 \\ 2c_1 + c_2 &= -5. \end{aligned}$$

Επιλύοντας το σύστημα έχουμε, $c_1 = -1$, $c_2 = -3$. Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στο (8.29), έχουμε

$$\mathbf{y} = - \begin{bmatrix} -e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} + 3e^{-t} \\ -2e^{2t} - 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

είναι η λύση του (8.27). ■

8.3 Ασκήσεις προς επίλυση

1. Αποδείξτε: Αν $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ είναι λύσεις του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b) , τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n$ είναι, επίσης, λύση του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b) .
2. Στο εδάφιο 5.1.1, η ορίζουσα Wronski δύο λύσεων y_1 και y_2 μιας βαθμωτής δεύτερης τάξης ΔΕ

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \quad (\text{A})$$

ορίστηκε από

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

Γράψτε τη ΔΕ (A) ως σύστημα ΔΕ 1ης τάξης και δείξτε ότι W είναι η ορίζουσα Wronski (όπως την ορίσαμε σε αυτό το εδάφιο) των δύο λύσεων του συστήματος. Εφαρμόστε τη σχέση (8.25) στο σύστημα ΔΕ 1ης τάξης και δείξτε ότι

$$W(x) = W(x_0) \exp \left\{ - \int_{x_0}^x \frac{P_1(s)}{P_0(s)} ds \right\},$$

η οποία είναι ο τύπος Abel.

3. Στο εδάφιο 5.1.2, η ορίζουσα Wronski των n λύσεων y_1, y_2, \dots, y_n της n -οστής τάξης ΔΕ

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \dots + P_n(x)y = 0 \quad (\text{A})$$

ορίστηκε από

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Γράψτε τη ΔΕ (A) ως σύστημα ΔΕ 1ης τάξης και δείξτε ότι W είναι η ορίζουσα Wronski (όπως την ορίσαμε σε αυτό το εδάφιο) των n λύσεων του συστήματος. Εφαρμόστε τη σχέση (8.25) στο σύστημα ΔΕ 1ης τάξης και δείξτε ότι

$$W(x) = W(x_0) \exp \left\{ - \int_{x_0}^x \frac{P_1(s)}{P_0(s)} ds \right\},$$

η οποία είναι ο τύπος Abel που συζητήθηκε στο Θεώρημα 9.1.3.

4. Υποθέτουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας A είναι συνεχής στο (a, b) και $t_0 \in (a, b)$. Έστω Y είναι ένας θεμελιώδης πίνακας του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b) .

(α') Δείξτε ότι $Y(t_0)$ είναι αντιστρέψιμος.

(β') Δείξτε ότι αν \mathbf{k} είναι ένα αυθαίρετο n -διάνυσμα, τότε η λύση του ΠΑΤ

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{k}$$

δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{y} = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{k}.$$

(γ') Εφαρμόστε τη σχέση από το (β) για την εξής περίπτωση

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} e^{6t} \\ e^{6t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

(δ') Εφαρμόστε τη σχέση από το (β) για την εξής περίπτωση

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -3e^{-t} \\ 7e^{-t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

5. Υποθέτουμε ότι οι στήλες του $n \times n$ πίνακα Y είναι λύσεις του $n \times n$ συστήματος $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ και C είναι ένας $n \times n$ σταθερός πίνακας.

(α') Δείξτε ότι ο πίνακας $Z = YC$ ικανοποιεί την ΔΕ $Z' = AZ$.

(β') Δείξτε ότι Z είναι ένας θεμελιώδης πίνακας για $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ αν και μόνο αν ο C είναι αντιστρέψιμος και Y είναι ο θεμελιώδης πίνακας του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$.

6. Δείξτε ότι Y είναι ένας θεμελιώδης πίνακας της $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ αν και μόνο αν ο Y^{-1} είναι ένας θεμελιώδης πίνακας της $\mathbf{y}' = -A^T(t)\mathbf{y}$, όπου A^T δηλώνει τον ανάστροφο του A .

7. Έστω Z είναι ένας θεμελιώδης πίνακας του συστήματος με σταθερούς συντελεστές $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ έτσι ώστε $Z(0) = I$.

(α') Δείξτε ότι $Z(t)Z(s) = Z(t+s)$ για όλα s και t . Υπόδειξη: Για σταθερό s έστω $\Gamma_1(t) = Z(t)Z(s)$ και $\Gamma_2(t) = Z(t+s)$. Δείξτε ότι Γ_1 και Γ_2 είναι και οι δύο λύσεις του ΠΑΤ $\Gamma' = A\Gamma$, $\Gamma(0) = Z(s)$. Συνεπώς, από το Θεώρημα 8.2.1 έχουμε $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

(β') Δείξτε ότι $(Z(t))^{-1} = Z(-t)$.

(γ') Ο πίνακας Z , ο οποίος, ορίστηκε παραπάνω μερικές φορές συμβολίζεται e^{tA} . Θα επανέλθουμε στον πίνακα e^{tA} σε επόμενα εδάφια.

8.4 Ομογενή Συστήματα ΔΕ με σταθερούς συντελεστές

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη ενός ομογενούς συστήματος με σταθερούς συντελεστές

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \tag{8.30}$$

όπου A είναι ένας $n \times n$ σταθερός πίνακας. Αφού ο A είναι συνεχής στο $(-\infty, \infty)$, το Θεώρημα 8.2.1 συνεπάγεται ότι όλες οι λύσεις του (8.30) ορίζονται στο $(-\infty, \infty)$. Επιπλέον, όταν μιλάμε για λύσεις του $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, θα εννοούμε λύσεις στο $(-\infty, \infty)$. Έτσι αναζητούμε

λύσεις της 8.30 στη μορφή

$$y = ue^{\lambda t} \quad (8.31)$$

όπου ο εκθέτης λ και το σταθερό διάνυσμα u είναι προσδιοριστέα. Αντικαθιστώντας την 8.31 στην (8.30), λαμβάνουμε

$$\lambda ue^{\lambda t} = Aue^{\lambda t}$$

απαλοίφοντας τον μη μηδενικό βαθμωτό παράγοντα $e^{\lambda t}$, λαμβάνουμε τις ισοδύναμες σχέσεις

$$Au = \lambda u \Leftrightarrow (A - \lambda I)u = 0 \quad (8.32)$$

όπου I είναι ο $n \times n$ μοναδιαίος πίνακας. Έτσι για να επιλύσουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων 8.30, πρέπει να επιλύσουμε το σύστημα των αλγεβρικών εξισώσεων 8.32. Το τελευταίο πρόβλημα είναι ακριβώς αυτό που προσδιορίζει τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A , βρίσκοντας τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα A , $p(\lambda) = |A - \lambda I|$. Επομένως, το διάνυσμα y που δίνεται από την εξίσωση 8.31 είναι λύση της εξίσωσης 8.30, υπό τον όρο ότι το λ είναι μια ιδιοτιμή και το u ένα αντίστοιχο (της ιδιοτιμής) ιδιοδιάνυσμα του πίνακα των συντελεστών A .

8.4.1 Περίπτωση Πίνακα με πραγματικές ιδιοτιμές που διαγωνοποιείται

Στην αρχή θεωρούμε την περίπτωση που όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι πραγματικές και ο A έχει ένα σύνολο n γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τις περιπτώσεις μιγαδικών ιδιοτιμών και πολλαπλών ιδιοτιμών για τον πίνακα A .

Στο Παράδειγμα 8.3.2 δείξαμε ότι οι διανυσματικές συναρτήσεις

$$y_1 = \begin{bmatrix} -e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad y_2 = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για το σύστημα

$$y' = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} y, \quad (8.33)$$

αλλά δεν παρουσιάσαμε πώς υπολογίστηκαν οι λύσεις y_1 και y_2 . Για να δούμε πώς οι λύσεις αυτές προέκυψαν, γράφουμε το (8.33) ως

$$\begin{aligned} y_1' &= -4y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= 6y_1 + 5y_2 \end{aligned} \quad (8.34)$$

και αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$y_1 = x_1 e^{\lambda t} \quad \text{και} \quad y_2 = x_2 e^{\lambda t}, \quad (8.35)$$

όπου x_1, x_2 και λ είναι σταθερές που θα προσδιορίσουμε. Παραγωγίζοντας την (8.35) και

αντικαθιστώντας τις (8.35) στην (8.34) και με απλοποίηση του παράγοντα $e^{\lambda t}$, έχουμε

$$\begin{aligned} -4x_1 - 3x_2 &= \lambda x_1 \\ 6x_1 + 5x_2 &= \lambda x_2. \end{aligned}$$

Για δοσμένο λ , το ομογενές αλγεβρικό σύστημα γράφεται στην μορφή

$$\begin{aligned} (-4 - \lambda)x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 6x_1 + (5 - \lambda)x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{8.36}$$

Αγνοούμε την τετριμμένη μηδενική λύση και αναζητούμε εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες το (8.36) έχει μη μηδενική λύση. Οι τιμές του λ για τις οποίες η ορίζουσα του (8.36) είναι μηδέν, δηλαδή

$$\begin{vmatrix} -4 - \lambda & -3 \\ 6 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0,$$

η οποία έχει λύσεις $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -1$.

Θεωρούμε $\lambda = 2$ στην (8.36) και έχουμε

$$\begin{aligned} -6x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 6x_1 + 3x_2 &= 0, \end{aligned}$$

που συνεπάγεται ότι $x_1 = -x_2/2$, όπου x_2 αυθαίρετος αριθμός. Επιλέγοντας $x_2 = 2$ δίνει τη λύση $y_1 = -e^{2t}$, $y_2 = 2e^{2t}$ του (8.34). Μπορούμε να γράψουμε τη λύση σε διανυσματική μορφή:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2t}. \tag{8.37}$$

Θεωρούμε $\lambda = -1$ στην (8.36) και έχουμε

$$\begin{aligned} -3x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 6x_1 + 6x_2 &= 0, \end{aligned}$$

οπότε $x_1 = -x_2$. Επιλέγοντας $x_2 = 1$ έχουμε ως λύση $y_1 = -e^{-t}$, $y_2 = e^{-t}$ για (8.34). Γράφουμε τη λύση σε διανυσματική μορφή

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}. \tag{8.38}$$

Στις (8.37) και (8.38) οι σταθεροί συντελεστές στα ορίσματα των εκθετικών όρων είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα των συντελεστών στην (8.33), και τα διανύσματα συντελεστές των εκθετικών συναρτήσεων είναι τα αντιστοιχα ιδιοδιανύσματα.

Θεωρούμε το σύστημα ΔΕ με σταθερούς συντελεστές (8.30), όπου ο πίνακας A έχει n διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές και είναι διαγωνοποιήσιμος. Τότε, υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, τέτοια ώστε, αν $P = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]$, ισχύει

ότι

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n],$$

όπου οι ιδιοτιμές λ_i δεν είναι πάντα διακεκριμένες. Θέτουμε $\mathbf{y}(t) = P\mathbf{u}(t)$, οπότε η εξίσωση (8.30) γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} P\mathbf{u}' &= P\mathbf{u} \Leftrightarrow \mathbf{u}'(t) = P^{-1}P\mathbf{u} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{pmatrix} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow u_i'(t) = \lambda_i u_i(t), i = 1, 2, \dots, n \\ &\Leftrightarrow u_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}, i = 1, 2, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= P\mathbf{u}(t) = [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{x}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{x}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{x}_n. \end{aligned}$$

Θεώρημα 8.4.1 *Υποθέτουμε ότι ο $n \times n$ σταθερός πίνακας A έχει n πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (διακεκριμένες) με αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$. Τότε οι συναρτήσεις*

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 e^{\lambda_1 t}, \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, \mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n e^{\lambda_n t}$$

αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων του συστήματος ΔΕ $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ και η γενική λύση του συστήματος είναι

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{x}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{x}_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \mathbf{x}_n e^{\lambda_n t}.$$

Παράδειγμα 8.4.1

(α') Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}. \quad (8.39)$$

(β') Να λυθεί το ΠΑΤ

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}. \quad (8.40)$$

Λύση (α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A στην (8.39) είναι

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & -1 \\ -2 & 3 - \lambda & 2 \\ 4 & -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, και $\lambda_3 = -1$. Προσδιορίζουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, επιλύοντας το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda & -1 & -1 \\ -2 & 3 - \lambda & 2 \\ 4 & -1 & -2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.41)$$

με $\lambda = 2, 3, -1$. Για $\lambda = 2$, η αντίστοιχη λύση είναι

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

είναι μια λύση του (8.39). Για $\lambda = 3$, ο επαυξημένος πίνακας του (8.41) είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \vdots & 0 \\ -2 & 0 & 2 & \vdots & 0 \\ 4 & -1 & -5 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

ο οποίος είναι γραμμο-ισοδύναμος με

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Όπου, $x_1 = x_3$ και $x_2 = -x_3$. Για $x_3 = 1$ έχουμε

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t},$$

είναι μια λύση του (8.39). Για $\lambda = -1$,

$$\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} e^{-t}$$

είναι μια λύση του (8.39). Από το Θεώρημα 8.4.1, η γενική λύση του (8.39) δίνεται

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} e^{-t},$$

η οποία ισοδύναμα μπορεί να γραφεί:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} & e^{-t} \\ 0 & -e^{3t} & -3e^{-t} \\ e^{2t} & e^{3t} & 7e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}. \quad (8.42)$$

(β) Για να ικανοποιείται η αρχική συνθήκη (8.40) πρέπει να επιλέξουμε τις σταθερές c_1, c_2, c_3 στην (8.42), έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Λύνοντας το σύστημα, έχουμε $c_1 = 3, c_2 = -2, c_3 = 1$. Οπότε η λύση του (8.40) είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} & e^{-t} \\ 0 & -e^{3t} & -3e^{-t} \\ e^{2t} & e^{3t} & 7e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} e^{-t}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Παράδειγμα 8.4.2 Βρείτε τη γενική λύση του συστήματος ΔΕ

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}. \quad (8.43)$$

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A στην (8.43) είναι

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 2 & 2 \\ 2 & -3 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda + 5)^2.$$

όπου $\lambda_1 = 1$ είναι ιδιοτιμή με πολλαπλότητα 1, και $\lambda_2 = -5$ είναι ιδιοτιμή με πολλαπλότητα

τα 2. Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ είναι λύσεις του συστήματος με επαυξημένο πίνακα

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & -4 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & -4 & \vdots & 0 \end{bmatrix},$$

ο οποίος είναι γραμμο-ισοδύναμος με

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Επιλέγοντας $x_1 = x_2 = x_3$, και $x_3 = 1$, η αντίστοιχη λύση του (8.43) είναι

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t. \quad (8.44)$$

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -5$ είναι λύσεις του συστήματος με επαυξημένο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Ισοδύναμα

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

όπου x_2 και x_3 αυθαίρετοι αριθμοί. Επιλέγουμε $x_2 = 0$ και $x_3 = 1$, και μια άλλη επιλογή $x_2 = 1$ και $x_3 = 0$, και στις δύο περιπτώσεις $x_1 = -1$. Οπότε

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -5$, και οι αντίστοιχες λύσεις του (8.43) είναι

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t} \quad \text{και} \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-5t}.$$

Λόγω της τελευταίας σχέσης, της (8.44), Θεώρημα 8.4.1, έπεται ότι η γενική λύση του

(8.43) είναι

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t} + c_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-5t}. \quad \blacksquare$$

Γεωμετρικές Ιδιότητες των λύσεων για $n = 2$

Θα θεωρήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες των λύσεων ενός 2×2 συστήματος με σταθερούς συντελεστές

$$x' = Ax, \quad x = [x_1, x_2]^t, \quad A = [a_{ij}], \quad a_{ij} \in \mathbb{R} \quad i, j = 1, 2 \quad (8.45)$$

Εάν $n = 1$, ο A πίνακας στοιχείο, τότε το σύστημα ανάγεται σε μια απλή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (8.46)$$

της οποίας η λύση είναι $x(t) = ce^{at}$. Θυμηθείτε από τη μελέτη ΔΕ 1ης τάξης, ότι $x = 0$ είναι η μόνη λύση (σημείο) ισορροπίας (εάν $x \neq 0$) και ότι οι άλλες λύσεις προσεγγίζουν την $x = 0$ αν $a < 0$, ενώ απομακρύνονται από αυτήν αν $a > 0$. Για συστήματα ανώτερης τάξης η κατάσταση είναι κατά κάποιον τρόπο ανάλογη αλλά πιο περίπλοκη.

Καλούμε *επίπεδο φάσης* το x_1, x_2 -επίπεδο. Η κάθε λύση $x(t)$ της (8.45) μπορεί να θεωρηθεί ως καμπύλη στο επίπεδο φάσης. Καλούμε *διάγραμμα φάσης* το σύνολο όλων των τροχιών της (8.45).

Λύσεις ισορροπίας βρίσκονται με την επίλυση της $Ax = 0$, και αν $\det A \neq 0$, τότε η $x = 0$ είναι η μοναδική λύση ισορροπίας. Ένα σημαντικό ερώτημα είναι κατά πόσον άλλες λύσεις προσεγγίζουν αυτή τη λύση ισορροπίας ή απομακρύνονται από αυτήν καθώς το t αυξάνει.

Εστω λ_1, λ_2 οι ιδιοτιμές του A . Γνωρίζουμε ότι οι λ_1, λ_2 επιλύουν τη χαρακτηριστική εξίσωση που στην περίπτωση των 2×2 πινάκων παίρνει τη μορφή:

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}A\lambda + \det A = 0$$

όπου $\operatorname{tr}A = a_{11} + a_{22}$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1. Πραγματικές Ιδιοτιμές

Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση που ο πίνακας A έχει δύο πραγματικές ιδιοτιμές λ_1, λ_2 με $\lambda_2 < \lambda_1$. Εστω u_1 και u_2 τα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις λ_1 και λ_2 . Η γενική λύση της (8.45) δίνεται από την

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} u_2, \quad (8.47)$$

όπου c_1, c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Θεωρούμε πρώτα τις ευθείες L_1 και L_2 που ορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα u_1 και u_2 . Παρατηρούμε ότι αν $x(0) = c_i u_i$ για $i = 1$ ή 2 τότε $x(t) = c_i e^{\lambda_i t} u_i$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}$. Η ιδιότητα αυτή μεταφράζεται γεωμετρικά στο ότι οι ευθείες L_1 και L_2 είναι *αναλλοίωτες*,

δηλαδή αν η αρχική συνθήκη είναι επί της ευθείας, τότε η λύση παραμένει επί της ευθείας για όλα τα $t \in \mathbb{R}$. Η ποιοτική κατανόηση της συμπεριφοράς των λύσεων είναι, συνήθως, δυνατή μέσω του πεδίου διευθύνσεων.

Θεωρούμε ακόμη το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στην καμπύλη $x(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{x'(t)}{|x(t)|} &= \frac{c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} u_2}{|c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} u_1 + c_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} u_2|} \\ &= \frac{e^{\lambda_1 t} (c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} u_2)}{|e^{\lambda_1 t} (c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} u_2)|} \\ &= \frac{(c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} u_2)}{|(c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} u_2)|}, \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι

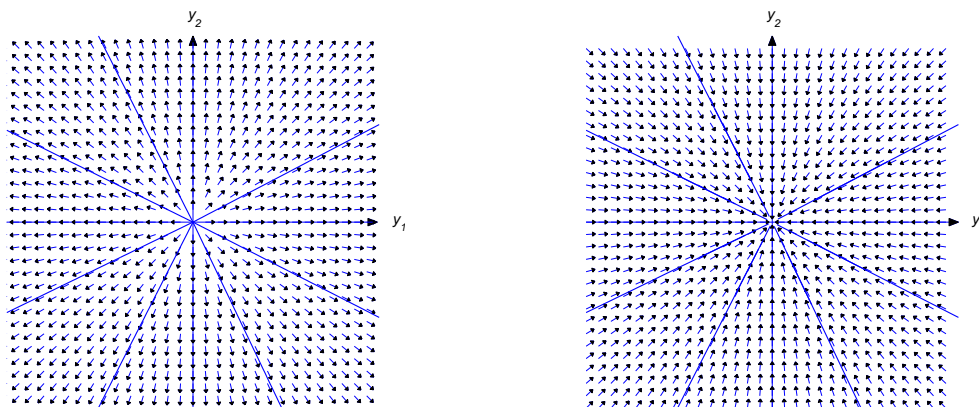
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x'(t)}{|x(t)|} = \frac{c_1 \lambda_1}{|c_1 \lambda_1|} u_1. \quad (8.48)$$

Παρόμοια, βγάζοντας κοινό παράγοντα το $e^{\lambda_2 t}$ υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{x'(t)}{|x(t)|} = \frac{c_2 \lambda_2}{|c_2 \lambda_2|} u_2. \quad (8.49)$$

Η γεωμετρική ερμηνεία των (8.48), (8.49) είναι ότι η τροχιά της λύσης προσεγγίζει ένα διάνυσμα παράλληλο στο u_1 καθώς το $t \rightarrow +\infty$ ενώ προσεγγίζει ένα διάνυσμα παράλληλο στο u_2 καθώς το $t \rightarrow -\infty$. Θα γίνουμε πιο συγκεκριμένοι παίρνοντας τις ακόλουθες υποπεριπτώσεις:

Η κατεύθυνση της κίνησης καθώς απομακρυνόμαστε από την αρχή των αξόνων αν $\lambda_1 > 0$ (Σχήμα 8.3), καθώς πλησιάζουμε αυτή για $\lambda_1 < 0$ (Σχήμα 8.4), (L. Perko, 2001)



Σχήμα 8.3: Τροχίες ενός 2×2 συστήματος με θετικές ιδιοτιμές. Σχήμα 8.4: Τροχίες ενός 2×2 συστήματος με αρνητικές ιδιοτιμές.

1α: ΕΥΣΤΑΘΗΣ ΚΟΜΒΟΣ (Αρνητικές ιδιοτιμές, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$)

Από την (8.47) προκύπτει ότι όλες οι λύσεις τείνουν στο $[0, 0]^t$, καθώς το t τείνει στο $+\infty$, και η παραπάνω πληροφορία για τις ασυμπτωτικές κατευθύνσεις επιτρέπει τον σχεδιασμό των τροχιών. Στην περίπτωση αυτή η αρχή των αξόνων λέγεται *ευσταθής κόμβος*.

Μια λεπτομερής εξήγηση είναι εφικτή μέσω της γραφής του αρχικού συστήματος (8.45) στην μορφή

$$y' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y \quad (8.50)$$

όπου

$$x = Py, \quad PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Είναι απλό να σχεδιάσουμε το διάγραμμα φάσης για το σύστημα (8.50). Η (8.50) γράφεται

$$y_1' = \lambda_1 y_1, \quad y_2' = \lambda_2 y_2$$

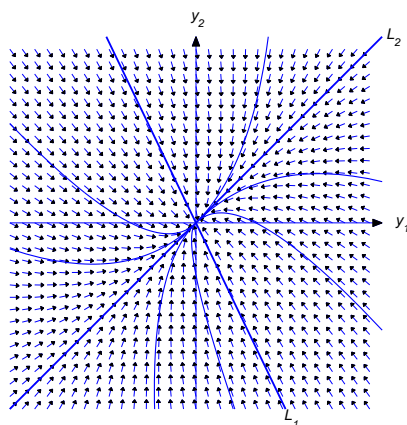
απαλείφοντας το t έχουμε

$$\frac{dy_2}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{dy_1}{y_1} \Rightarrow \ln |y_2| = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln |y_1| + \ln |C| \Rightarrow \ln |y_2| = \ln \left(|y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} C \right),$$

ή ισοδύναμα

$$|y_2| = |y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} C, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 1, \quad (8.51)$$

όπου C σταθερά. Το διάγραμμα φάσης στο y_1, y_2 -επίπεδο συνίσταται από *παραβολοειδές* καμπύλες που αντιστοιχούν σε διαφορετικές σταθερές C .



Σχήμα 8.5: Δύο αρνητικές ιδιοτιμές, κίνηση προς την αρχή των αξόνων.

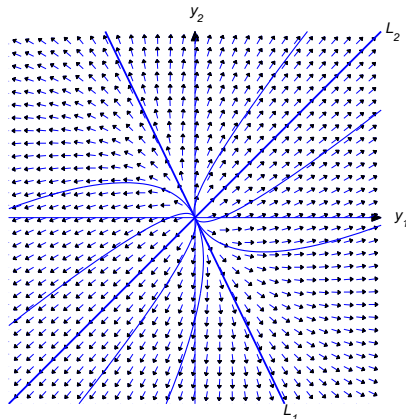
1β: ΑΣΤΑΘΗΣ ΚΟΜΒΟΣ Θετικές ιδιοτιμές, $0 < \lambda_2 < \lambda_1$

Αυτή η περίπτωση ανάγεται στην προηγούμενη, αλλάζοντας τη φορά του χρόνου. Πράγ-

ματι, αν $t = -\tau$, τότε η λύση x ικανοποιεί την

$$\frac{dx}{d\tau} = -\frac{dx}{dt} = -Ax$$

Οι ιδιοτιμές του $-A$ είναι οι $-\lambda_1 < -\lambda_2 < 0$. Το σημείο $(0, 0)$ καλείται ασταθής κόμβος (Σχήμα 8.6)



Σχήμα 8.6: Δύο ιδιοτιμές θετικές, απομάκρυνση από την αρχή των αξόνων.

1γ: ΣΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ-Ετερόσημες ιδιοτιμές, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$

Από την (8.49), οι τροχιές που βρίσκονται πάνω στην ευθεία ε_2 , τείνουν στο $(0, 0)$ καθώς το $t \rightarrow +\infty$, ενώ εκείνες που βρίσκονται πάνω στην ευθεία ε_1 τείνουν στο $(0, 0)$ καθώς το $t \rightarrow -\infty$. Όλες οι τροχιές έχουν $c_1 \neq 0$ και $c_2 \neq 0$, συνεπώς δεν είναι φραγμένες ούτε όταν το $t \rightarrow +\infty$ ούτε καθώς το $t \rightarrow -\infty$. Η ευθεία ε_1 λέγεται ασταθής πολλαπλότητα, ενώ η ευθεία ε_2 λέγεται ευσταθής πολλαπλότητα. Το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ είναι ασταθές και λέγεται σαγματικό. Στην περίπτωση σαγματικού σημείου, βλέπουμε ότι η ασταθής πολλαπλότητα ως σύνολο είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, διότι $e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$ καθώς το $t \rightarrow +\infty$.

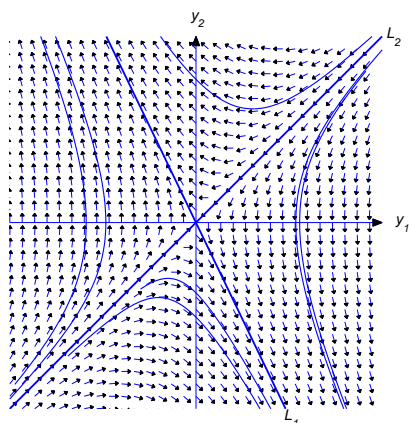
Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία που περιγράψαμε στην περίπτωση 1α, μπορούμε να εξηγήσουμε λεπτομερώς το διάγραμμα φάσης για την περίπτωση ετερόσημων ιδιοτιμών. Στο y_1, y_2 -επίπεδο οι τροχιές δίνονται από την

$$|y_2| = C |y_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0,$$

όπου C σταθερά. Στην περίπτωση αυτή έχουμε υπερβολοειδείς καμπύλες (Σχήμα 8.7).

8.4.2 Πολλαπλές Πραγματικές ιδιοτιμές

Προηγουμένως μελετήσαμε την περίπτωση όπου όταν ένας $n \times n$ σταθερός πίνακας A έχει n πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ με αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύ-



Σχήμα 8.7: Ετερόσημες ιδιοτιμές.

σμάτα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, τότε η γενική λύση του $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ είναι

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{x}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{x}_2e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n\mathbf{x}_ne^{\lambda_n t}.$$

Στο σημείο αυτό θα θεωρήσουμε την περίπτωση που ο πίνακας A έχει n πραγματικές ιδιοτιμές, αλλά όχι n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Θεώρημα 8.4.2 *Υποθέτουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας A έχει μια ιδιοτιμή λ_1 πολλαπλότητας 2 και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος έχει διάσταση 1 είναι, όλα λ_1 -ιδιοδιανύσματα του A . Υπάρχουν άπειρα τέτοια διανύσματα \mathbf{u} , τέτοια ώστε*

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{u} = \mathbf{x}. \quad (8.52)$$

Επιπλέον, αν \mathbf{u} είναι ένα τέτοιο ιδιοδιάνυσμα

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}e^{\lambda_1 t} \quad \text{και} \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{u}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{x}te^{\lambda_1 t} \quad (8.53)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Η πλήρης απόδειξη του θεωρήματος είναι εκτός του σκοπού αυτού του βιβλίου, (βλ. L. Perko, 2001). Η δυσκολία έγκειται στην απόδειξη ύπαρξης ενός διανύσματος \mathbf{u} που ικανοποιεί (8.52), αφού $\det(A - \lambda_1 I) = 0$.

Γνωρίζουμε ότι \mathbf{y}_1 στην (8.53) είναι λύση του $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Για να δείξουμε ότι \mathbf{y}_2 είναι, επίσης, μια λύση, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_2 - A\mathbf{y}_2 &= \lambda_1 \mathbf{u}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{x}e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \mathbf{x}te^{\lambda_1 t} - A\mathbf{u}e^{\lambda_1 t} - A\mathbf{x}te^{\lambda_1 t} \\ &= (\lambda_1 \mathbf{u} + \mathbf{x} - A\mathbf{u})e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 \mathbf{x} - A\mathbf{x})te^{\lambda_1 t}. \end{aligned}$$

Αφού $A\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}$, μπορεί να γραφεί

$$\mathbf{y}'_2 - A\mathbf{y}_2 = -((A - \lambda_1 I)\mathbf{u} - \mathbf{x})e^{\lambda_1 t},$$

και τώρα (8.52) συνεπάγεται $\mathbf{y}'_2 = A\mathbf{y}_2$.

Για να δούμε ότι \mathbf{y}_1 και \mathbf{y}_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, υποθέτουμε c_1 και c_2 είναι σταθεροί τέτοιοι ώστε

$$c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 = c_1\mathbf{x}e^{\lambda_1 t} + c_2(\mathbf{u}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{x}te^{\lambda_1 t}) = \mathbf{0}. \quad (8.54)$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $c_1 = c_2 = 0$. Πολλαπλασιάζοντας την (8.54) με $e^{-\lambda_1 t}$ έχουμε

$$c_1\mathbf{x} + c_2(\mathbf{u} + \mathbf{x}t) = \mathbf{0}. \quad (8.55)$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς t , βλέπουμε $c_2\mathbf{x} = \mathbf{0}$, το οποίο σημαίνει $c_2 = 0$, διότι $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Αντικαθιστώντας $c_2 = 0$ στην (8.55), έχουμε $c_1\mathbf{x} = \mathbf{0}$, το οποίο συνεπάγεται ότι $c_1 = 0$, διότι $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Παράδειγμα 8.4.3 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 11 & -25 \\ 4 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{y}. \quad (8.56)$$

Λύση Εύκολα υπολογίζουμε ότι $\lambda_1 = 1$ είναι μια ιδιοτιμή με πολλαπλότητα 2 του πίνακα των σταθερών όρων A στην (8.56) και όλα τα ιδιοδιανύσματα του A είναι πολλαπλάσια του

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Οπότε

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} e^t$$

είναι μια λύση του (8.56). Από το Θεώρημα 8.4.2, μια δεύτερη λύση δίνεται από $\mathbf{y}_2 = \mathbf{u}e^t + \mathbf{x}te^t$, όπου $(A - I)\mathbf{u} = \mathbf{x}$. Ο επαυξημένος πίνακας του αλγεβρικού συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} 10 & -25 & \vdots & 5 \\ 4 & -10 & \vdots & 2 \end{bmatrix},$$

ο οποίος είναι γραμμο-ισοδύναμος με

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Οπότε οι συνιστώσες του \mathbf{u} ικανοποιούν

$$u_1 - \frac{5}{2}u_2 = \frac{1}{2},$$

όπου u_2 είναι αυθαίρετο. Επιλέγουμε $u_2 = 0$, οπότε $u_1 = 1/2$ και

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι,

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{e^t}{2} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} te^t.$$

Αφού \mathbf{y}_1 και \mathbf{y}_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις από το Θεώρημα 8.4.2, συνθέτουν τη γενική λύση του (8.56). Η γενική λύση του (8.56) είναι

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} e^t + c_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{e^t}{2} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} te^t \right). \blacksquare$$

Παράδειγμα 8.4.4 Βρείτε τη γενική λύση του

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -10 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{y}. \quad (8.57)$$

Λύση Το χαρακτηριστικό πολύωνμο του A στην (8.57) είναι $p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$. Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 1$ με πολλαπλότητα 1 και $\lambda_2 = -1$ με πολλαπλότητα 2.

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ ικανοποιούν την $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Συνεπώς, εργαζόμαστε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα και έχουμε

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$$

είναι μια λύση του (8.57).

Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ ικανοποιούν τη σχέση $(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και η αντίστοιχη λύση του (8.57) είναι

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Επειδή όλα τα ιδιοδιανύσματα του A σχετικά με την ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ παράγονται από το \mathbf{x}_2 , χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 8.4.2 για να βρούμε μια τρίτη λύση του συστήματος (8.57) στη μορφή

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{u}e^{-t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} te^{-t}, \quad (8.58)$$

όπου \mathbf{u} είναι λύση του $(A + I)\mathbf{u} = \mathbf{x}_2$. Με απλές πράξεις, όπως σε προηγούμενα παραδείγ-

ματα, βρίσκουμε την

$$\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{e^{-t}}{2} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} te^{-t}$$

ως λύση του συστήματος (8.57).

Επειδή η ορίζουσα Wronski των $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ στο $t = 0$ ισούται με $1/2$, $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων του (8.57). Οπότε η γενική λύση του (8.57) είναι

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + c_3 \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{e^{-t}}{2} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} te^{-t} \right). \quad \blacksquare$$

Θεώρημα 8.4.3 Υποθέτουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας A έχει μια ιδιοτιμή λ_1 πολλαπλότητας 3 και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι μονο-διάστατος έτσι, όλα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα της λ_1 παράγονται από το ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x} . Τότε, υπάρχουν άπειρα ιδιοδιανύσματα \mathbf{u} , τέτοια ώστε

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{u} = \mathbf{x}, \quad (8.59)$$

και αν \mathbf{u} είναι ένα τέτοιο διάνυσμα, υπάρχουν άπειρα τέτοια διανύσματα \mathbf{v} , τέτοια ώστε

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{v} = \mathbf{u}. \quad (8.60)$$

Αν \mathbf{u} ικανοποιεί την (8.59) και \mathbf{v} ικανοποιεί την (8.60), τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{x}e^{\lambda_1 t}, \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{u}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{x}te^{\lambda_1 t}, \text{ και} \\ \mathbf{y}_3 &= \mathbf{v}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{u}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{x}\frac{t^2 e^{\lambda_1 t}}{2} \end{aligned}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος $\Delta E \mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Παράδειγμα 8.4.5 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔE

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}. \quad (8.61)$$

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A στην (8.61) είναι $p(\lambda) = -(\lambda - 2)^3$. Αφού, $\lambda_1 = 2$ είναι μια ιδιοτιμή πολλαπλότητας 3. Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ικανοποιεί την $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, οπότε η

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$$

είναι μια λύση της ΔE (8.61).

Θα βρούμε τώρα μια δεύτερη λύση για τη ΔΕ (8.61) στη μορφή

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{u}e^{2t} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} te^{2t},$$

όπου \mathbf{u} ικανοποιεί $(A - 2I)\mathbf{u} = \mathbf{x}_1$,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{e^{2t}}{2} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} te^{2t}$$

είναι μια λύση της (8.61).

Υπολογίζουμε μια τρίτη λύση της ΔΕ (8.61) στη μορφή

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{v}e^{2t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{te^{2t}}{2} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{t^2e^{2t}}{2}$$

όπου \mathbf{v} ικανοποιεί $(A - 2I)\mathbf{v} = \mathbf{u}$,

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Συνοπώς

$$\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{e^{2t}}{2} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{te^{2t}}{2} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{t^2e^{2t}}{2}$$

είναι μια λύση της ΔΕ (8.61). Επειδή \mathbf{y}_1 , \mathbf{y}_2 , και \mathbf{y}_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητες από το Θεώρημα 8.4.3, συνθέτουν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων για τη ΔΕ (8.61). Οπότε η γενική λύση της ΔΕ (8.61) είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{y} = & c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{e^{2t}}{2} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} te^{2t} \right) \\ & + c_3 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{e^{2t}}{2} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{te^{2t}}{2} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{t^2e^{2t}}{2} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Θεώρημα 8.4.4 Υποθέτουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας A έχει μια ιδιοτιμή λ_1 πολλαπλότητας 3 και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι 2-διάστατος, όλα τα ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_1 είναι γραμμικός συνδυασμός δύο γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων \mathbf{x}_1 και \mathbf{x}_2 . Τότε, υπάρχουν σταθερές α και β (μη μηδενικές), έτσι ώστε, αν

$$\mathbf{x}_3 = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \quad (8.62)$$

υπάρχουν άπειρα διανύσματα \mathbf{u} , τέτοια ώστε

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{u} = \mathbf{x}_3. \quad (8.63)$$

Αν \mathbf{u} ικανοποιεί (8.63), τότε

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= \mathbf{x}_1 e^{\lambda_1 t}, \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{x}_2 e^{\lambda_1 t}, \text{ και} \\ \mathbf{y}_3 &= \mathbf{u} e^{\lambda_1 t} + \mathbf{x}_3 t e^{\lambda_1 t}, \end{aligned} \quad (8.64)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος $\Delta E \mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Παράδειγμα 8.4.6 Να βρεθεί η γενική λύση του

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}. \quad (8.65)$$

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A , είναι $p(\lambda) = -(\lambda - 1)^3$. Η ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$ is πολλαπλότητας 3. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ικανοποιούν την $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και δίνονται από τη σχέση

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Τα διανύσματα

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.66)$$

αποτελούν μια βάση του ιδιόχωρου και

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t \quad \text{και} \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ΔΕ (8.65).

Για να βρούμε μια τρίτη γραμμικά ανεξάρτητη λύση της ΔΕ (8.65), πρέπει να βρούμε τις σταθερές α και β (μη μηδενικές), έτσι ώστε το σύστημα

$$(A - I)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 \quad (8.67)$$

έχει μια λύση \mathbf{u} . Το σύστημα (8.67) έχει μια λύση αν και μόνο αν $\beta = \alpha$, όπου α είναι

αυθαίρετη. Αν $\alpha = \beta = 1$ τότε (8.62) και (8.66) έχουμε

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

συνεπώς $u_1 = -1 + u_3$, αφού u_2 και u_3 είναι αυθαίρετοι. Επιλέγοντας $u_2 = u_3 = 0$ έχουμε

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Η (8.64) συνεπάγεται ότι

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{u}e^t + \mathbf{x}_3te^t = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^t$$

είναι μια λύση της ΔΕ (8.65). Επειδή $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$, και \mathbf{y}_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, από το Θεώρημα 8.4.4, έπεται ότι αποτελούν το θεμελιώδες σύνολο λύσεων για τη ΔΕ (8.65). Συνεπώς, η γενική λύση της ΔΕ (8.65) είναι

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + c_3 \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^t + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} te^t \right). \blacksquare$$

Γεωμετρικές ιδιότητες των λύσεων για $n = 2$

Θα θεωρήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες των λύσεων ενός 2×2 συστήματος με σταθερούς όρους

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (8.68)$$

με την υπόθεση ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

έχει διπλή ιδιοτιμή λ_1 και ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι μονοδιάστατος. Στην περίπτωση αυτή, από το Θεώρημα 8.4.2 έχουμε ότι η γενική λύση του (8.68) δίνεται από

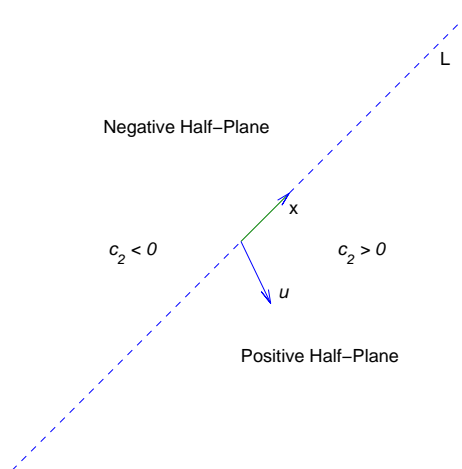
$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{x}e^{\lambda_1 t} + c_2 (\mathbf{u}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{x}te^{\lambda_1 t}), \quad (8.69)$$

όπου \mathbf{x} είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A και \mathbf{u} είναι το αντίστοιχο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα

$$(A - \lambda_1 I)\mathbf{u} = \mathbf{x}. \quad (8.70)$$

Υποθέτουμε ότι $\lambda_1 \neq 0$.

Έστω L είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη



Σχήμα 8.8: Θετικά και αρνητικά ημι-επίπεδα.

προς το \mathbf{x} . Με τον όρο *ημιευθεία* της L εννοούμε οποιαδήποτε από τις γραμμές που προκύπτουν από την μετακίνηση της αρχής από την L . Η εξίσωση (8.69) είναι μια παραμετρική εξίσωση ημιευθείας της L κατά τη διεύθυνση του \mathbf{x} αν $c_1 > 0$, ή ημιευθεία της L κατά τη διεύθυνση $-\mathbf{x}$ αν $c_1 < 0$. Η αρχή είναι η τροχιά της τετριμμένης λύσης $\mathbf{y} \equiv \mathbf{0}$.

Υποθέτουμε ότι $c_2 \neq 0$. Σε αυτή την περίπτωση, η τροχιά (8.69) δεν τέμνει την L , καθώς κάθε σημείο της L είναι στην τροχιά που προκύπτει θέτοντας $c_2 = 0$. Η τροχιά (8.69) πρέπει να ανήκει εξ ολοκλήρου σε ένα από τα ημιεπίπεδα που φράσσονται από την L , αλλά δεν περιέχει κανένα σημείο στην L . Αφού το αρχικό σημείο $(y_1(0), y_2(0))$ ορίζεται από $\mathbf{y}(0) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{u}$ είναι πάνω στην τροχιά, μπορούμε να προσδιορίσουμε ποιο ημιεπίπεδο περιέχει την τροχιά από το πρόσημο της c_2 , όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.8. Για ευκολία καλούμε το ημιεπίπεδο όπου $c_2 > 0$ *θετικό ημιεπίπεδο*. Ομοίως το ημιεπίπεδο με $c_2 < 0$ καλείται *αρνητικό ημιεπίπεδο*. Στην προκειμένη περίπτωση, ο σχετικός προσανατολισμός του \mathbf{x} και \mathbf{u} είναι σημαντικός, αν το θετικό ημιεπίπεδο είναι στο δεξί μέρος του παρατηρητή ως προς την κατεύθυνση του \mathbf{x} (Βλ. Σχήμα 8.9 και 8.12) ή στο αριστερό μέρος του παρατηρητή (βλ. Σχήμα 8.10 και 8.11).

Πολλαπλασιάζοντας την (8.69) με $e^{-\lambda_1 t}$, έχουμε

$$e^{-\lambda_1 t} \mathbf{y}(t) = c_1 \mathbf{x} + c_2 \mathbf{u} + c_2 t \mathbf{x}.$$

Λόγω του ότι ο τελευταίος όρος στο δεξί μέρος είναι κυρίαρχος καθώς $|t|$ είναι αρκετά μεγάλο, έχουμε τις ακόλουθες πληροφορίες στην κατεύθυνση $\mathbf{y}(t)$:

- (α') Κατά μήκος των τροχιών στο θετικό ημιεπίπεδο ($c_2 > 0$), η κατεύθυνση του $\mathbf{y}(t)$ προσεγγίζει την κατεύθυνση του \mathbf{x} , καθώς $t \rightarrow \infty$ και την κατεύθυνση του $-\mathbf{x}$, καθώς $t \rightarrow -\infty$.
- (β') Κατά μήκος των τροχιών στο αρνητικό ημιεπίπεδο ($c_2 < 0$), η κατεύθυνση του $\mathbf{y}(t)$ προσεγγίζει την κατεύθυνση του $-\mathbf{x}$, καθώς $t \rightarrow \infty$ και την κατεύθυνση του \mathbf{x} , καθώς $t \rightarrow -\infty$.

$t \rightarrow -\infty$.

Αφού

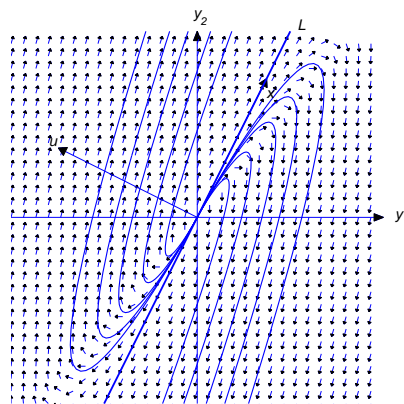
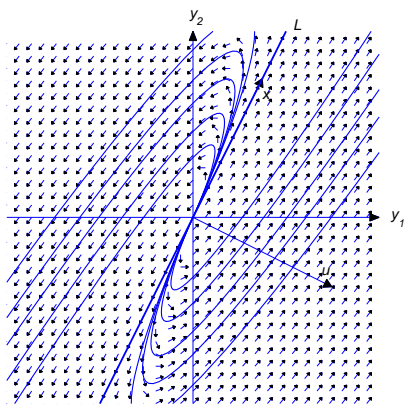
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t)\| = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \quad \text{if} \quad \lambda_1 > 0,$$

ή

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\mathbf{y}(t)\| = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = \mathbf{0} \quad \text{if} \quad \lambda_1 < 0,$$

υπάρχουν τέσσερα μοτίβα για τις τροχιές του (8.68), που εξαρτώνται από τα πρόσημα των c_2 και λ_1 . Τα Σχήματα 8.9-8.12 διευκρινίζουν αυτά τα μοτίβα και αποκαλύπτουν την ακόλουθη αρχή:

Αν λ_1 και c_2 έχουν το ίδιο πρόσημο, τότε η κατεύθυνση της τροχιάς προσεγγίζει την κατεύθυνση του $-\mathbf{x}$, καθώς $\|\mathbf{y}\| \rightarrow 0$ και την κατεύθυνση του \mathbf{x} , καθώς $\|\mathbf{y}\| \rightarrow \infty$. Αν λ_1 και c_2 έχουν αντίθετα πρόσημα, τότε η κατεύθυνση της τροχιάς προσεγγίζει την κατεύθυνση του \mathbf{x} , καθώς $\|\mathbf{y}\| \rightarrow 0$ και την κατεύθυνση του $-\mathbf{x}$, καθώς $\|\mathbf{y}\| \rightarrow \infty$.



Σχήμα 8.9: Θετική ιδιοτιμή; οι τροχιές απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων. Σχήμα 8.10: Θετική ιδιοτιμή, οι τροχιές απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων.

8.4.3 Μιγαδικές Ιδιοτιμές

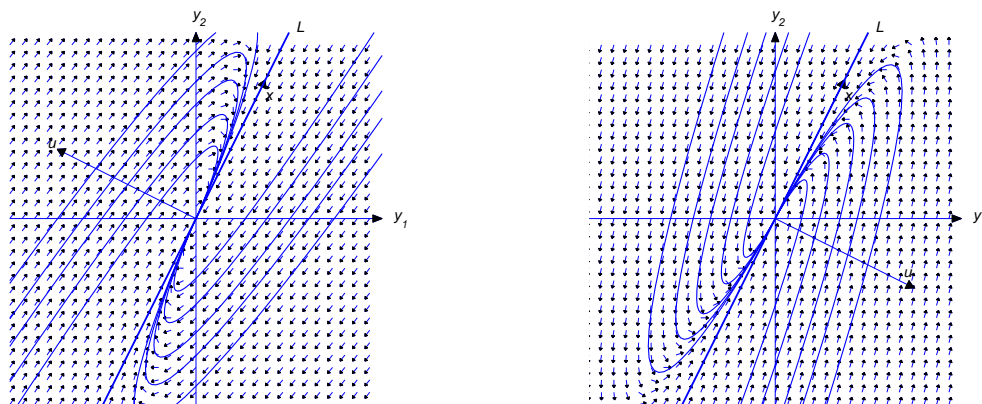
Θεωρούμε τώρα το σύστημα $\Delta E \mathbf{y}' = A \mathbf{y}$, όπου A έχει μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda = \alpha + i\beta$, α, β πραγματικοί με $\beta \neq 0$. Υποθέτουμε όπως και πριν, ότι ο A έχει πραγματικά στοιχεία, οπότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A έχει πραγματικούς συντελεστές, αυτό συνεπάγεται ότι $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$, είναι επίσης, ιδιοτιμή του A .

Ένα ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x} του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = \alpha + i\beta$ θα έχει μιγαδικές συνιστώσες, οπότε

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$$

όπου \mathbf{u} και \mathbf{v} έχουν πραγματικές συνιστώσες και, \mathbf{u} και \mathbf{v} είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος του \mathbf{x} . Αφού $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$,

$$A(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (\alpha + i\beta)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}). \quad (8.71)$$



Σχήμα 8.11: Αρνητική ιδιοτιμή, οι τροχιές πλησιάζουν την αρχή των αξόνων. Σχήμα 8.12: Αρνητική ιδιοτιμή, οι τροχιές πλησιάζουν την αρχή των αξόνων.

Θεωρώντας το συζυγές μέρος της προηγούμενης σχέσης και θυμίζοντας ότι ο A έχει πραγματικά στοιχεία, έχουμε

$$A(\mathbf{u} - i\mathbf{v}) = (\alpha - i\beta)(\mathbf{u} - i\mathbf{v}),$$

το οποίο δείχνει ότι $\mathbf{x} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Οι συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές λ και $\bar{\lambda}$ μπορούν να συσχετιστούν χωριστά με γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, όμως δεν θα ακολουθήσουμε την προσέγγιση αυτή διότι οι λύσεις που θα προκύψουν θα είναι μιγαδικές συναρτήσεις. Αντ' αυτού θα μελετήσουμε λύσεις της $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ στη μορφή

$$\mathbf{y} = f_1\mathbf{u} + f_2\mathbf{v} \quad (8.72)$$

όπου f_1 και f_2 είναι βαθμωτές πραγματικές συναρτήσεις. Το επόμενο θεώρημα μας δείχνει τον τρόπο.

Θεώρημα 8.4.5 Έστω A είναι ένας $n \times n$ πίνακας με πραγματικά στοιχεία. Έστω $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) είναι μια μιγαδική ιδιοτιμή του A και έστω $\mathbf{x} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, όπου \mathbf{u} και \mathbf{v} έχουν πραγματικές συνιστώσες. Τότε, \mathbf{u} και \mathbf{v} είναι μη μηδενικά και

$$\mathbf{y}_1 = e^{\alpha t}(\mathbf{u} \cos \beta t - \mathbf{v} \sin \beta t) \quad \text{και} \quad \mathbf{y}_2 = e^{\alpha t}(\mathbf{u} \sin \beta t + \mathbf{v} \cos \beta t),$$

τα οποία είναι τα πραγματικά και φανταστικά μέρη του και είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος $\Delta E \mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Παράδειγμα 8.4.7 Βρείτε τη γενική λύση του

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}. \quad (8.73)$$

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A στην (8.73) είναι $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 + 16$. Αφού, $\lambda = 1 + 4i$ είναι μια ιδιοτιμή του A το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα ικανοποιεί την

$(A - (1 + 4i)I) \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία που περιγράψαμε σε προηγούμενα παραδείγματα, έχουμε

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 + 4i \\ 5 \end{bmatrix}$$

είναι το ιδιοδιάνυσμα. Το φανταστικό και πραγματικό μέρος της σχέσης

$$e^t(\cos 4t + i \sin 4t) \begin{bmatrix} 3 + 4i \\ 5 \end{bmatrix}$$

είναι

$$\mathbf{y}_1 = e^t \begin{bmatrix} 3 \cos 4t - 4 \sin 4t \\ 5 \cos 4t \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{y}_2 = e^t \begin{bmatrix} 3 \sin 4t + 4 \cos 4t \\ 5 \sin 4t \end{bmatrix},$$

οι οποίες αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος (8.73). Η γενική λύση του (8.73) είναι

$$\mathbf{y} = c_1 e^t \begin{bmatrix} 3 \cos 4t - 4 \sin 4t \\ 5 \cos 4t \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 3 \sin 4t + 4 \cos 4t \\ 5 \sin 4t \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 8.4.8 Βρείτε τη γενική λύση του

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -5 & 5 & 4 \\ -8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}. \quad (8.74)$$

Λύση Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A στην (8.74) είναι $p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)$. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = i$, και $\lambda_3 = -i$. Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα και η λύση της (8.74) δίνονται από

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = i$, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} i \\ -1 + i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Το πραγματικό και φανταστικό μέρος της λύσης

$$(\cos t + i \sin t) \begin{bmatrix} i \\ -1 + i \\ 1 \end{bmatrix}$$

είναι

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \\ \sin t \end{bmatrix},$$

οι οποίες αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (8.74). Η γενική λύση της (8.74) θα δίνεται από

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t - \sin t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \\ \sin t \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Γεωμετρικές Ιδιότητες των λύσεων για $n = 2$

Θα θεωρήσουμε τις γεωμετρικές ιδιότητες των λύσεων ενός συστήματος 2×2 σταθερών συντελεστών

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (8.75)$$

υπό την προϋπόθεση ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

να έχει μια μιγαδική ιδιοτιμή $\lambda = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) και $\mathbf{x} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, όπου \mathbf{u} και \mathbf{v} έχουν πραγματικές συνιστώσες. Για τη γεωμετρική περιγραφή των τροχιών είναι απαραίτητο να εισάγουμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων στο y_1 - y_2 επίπεδο. Αυτή η ιδιαιτερότητα δεν είχε παρουσιαστεί στις δυο προηγούμενες γεωμετρικές περιγραφές: είναι δυνατό να επιλέξουμε το \mathbf{x} έτσι ώστε $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Πρέπει να προσέξουμε διότι κάθε ιδιοδιάνυσμα δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Πιο συγκεκριμένα, αν γνωρίζουμε ένα ιδιοδιάνυσμα που δεν έχει την ιδιότητα αυτή, μπορούμε να το πολλαπλασιάσουμε με έναν σταθερό μιγαδικό αριθμό και να την αποκτήσει. Σημειώνουμε, αν \mathbf{x} είναι ένα λ -ιδιοδιάνυσμα του A και k είναι αυθαίρετος πραγματικός αριθμός, τότε

$$\mathbf{x}_1 = (1 + ik)\mathbf{x} = (1 + ik)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) = (\mathbf{u} - k\mathbf{v}) + i(\mathbf{v} + k\mathbf{u})$$

είναι επίσης ένα λ -ιδιοδιάνυσμα του A , διότι

$$A\mathbf{x}_1 = A((1 + ik)\mathbf{x}) = (1 + ik)A\mathbf{x} = (1 + ik)\lambda\mathbf{x} = \lambda((1 + ik)\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}_1.$$

Τα πραγματικά και φανταστικά μέρη του \mathbf{x}_1 είναι

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u} - k\mathbf{v} \quad \text{και} \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + k\mathbf{u}, \quad (8.76)$$

οπότε

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) = (\mathbf{u} - k\mathbf{v}, \mathbf{v} + k\mathbf{u}) = -[(\mathbf{u}, \mathbf{v})k^2 + (\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2)k - (\mathbf{u}, \mathbf{v})].$$

Οπότε $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) = 0$ αν

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})k^2 + (\|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u}\|^2)k - (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0. \quad (8.77)$$

Αν $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια τετραγωνική έκφραση για να υπολογίσουμε τις δύο πραγματικές τιμές του k έτσι ώστε $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) = 0$.

Θα υποθέσουμε ότι $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Έστω \mathbf{U} και \mathbf{V} είναι μοναδιαία διανύσματα στις κατευθύνσεις των \mathbf{u} και \mathbf{v} , αντίστοιχα, $\mathbf{U} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ και $\mathbf{V} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. Το νέο σύστημα συντεταγμένων θα έχει την ίδια αρχή με το y_1 - y_2 σύστημα. Οι συντεταγμένες του σημείου στο νέο σύστημα θα είναι (z_1, z_2) , όπου z_1 και z_2 είναι οι μετακινήσεις στις κατευθύνσεις των \mathbf{U} και \mathbf{V} , αντίστοιχα.

Οι λύσεις του (8.75) δίνονται από

$$\mathbf{y} = e^{\alpha t} [(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t)\mathbf{u} + (-c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t)\mathbf{v}]. \quad (8.78)$$

Για ευκολία, καλούμε την καμπύλη εγκάρσια από $e^{-\alpha t}\mathbf{y}(t)$ ως *σκιώδη τροχιά* του (8.75). Πολλαπλασιάζοντας την (8.78) με $e^{-\alpha t}$, έχουμε

$$e^{-\alpha t}\mathbf{y}(t) = z_1(t)\mathbf{U} + z_2(t)\mathbf{V},$$

όπου

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \|\mathbf{u}\|(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \\ z_2(t) &= \|\mathbf{v}\|(-c_1 \sin \beta t + c_2 \cos \beta t). \end{aligned}$$

Οπότε

$$\frac{(z_1(t))^2}{\|\mathbf{u}\|^2} + \frac{(z_2(t))^2}{\|\mathbf{v}\|^2} = c_1^2 + c_2^2$$

που σημαίνει ότι οι σκιώδεις τροχιές του (8.75) είναι ελλείψεις με κέντρο την αρχή των αξόνων και άξονες συμμετρίας παράλληλους με τα \mathbf{U} \mathbf{V} . Αφού

$$z_1' = \frac{\beta\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{v}\|}z_2 \quad \text{και} \quad z_2' = -\frac{\beta\|\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{u}\|}z_1,$$

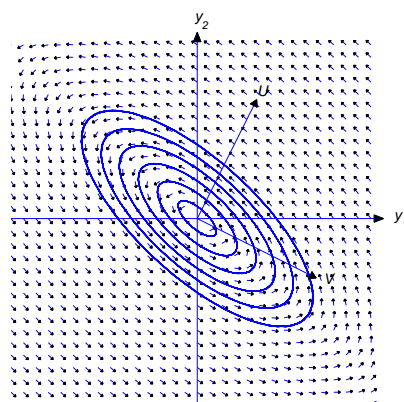
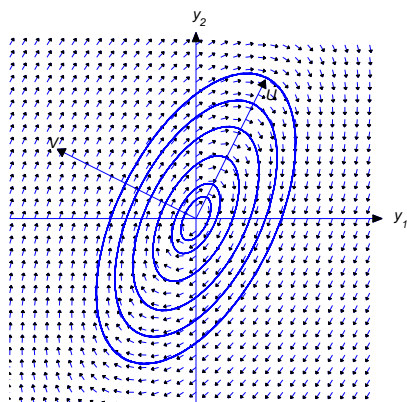
το διάνυσμα από την αρχή ως ένα σημείο στην σκιώδη έλλειψη περιστρέφεται στην ίδια διεύθυνση ώστε το \mathbf{V} θα μπορούσε να περιστραφεί κατά $\pi/2$ για να ταυτιστεί με το \mathbf{U} (Σχήματα 8.13 και 8.14).

Αν $\alpha = 0$, τότε κάθε τροχιά του (8.75) είναι σκιώδης τροχιά του (8.75); οπότε αν λ είναι φανταστικές ιδιοτιμές, οι τροχιές του (8.75) είναι ελλείψεις εγκάρσια περιοδικές όπως φαίνεται στα Σχήματα 8.13 και 8.14. Το σημείο $(0, 0)$ καλείται *κέντρο*.

Αν $\alpha > 0$, τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t)\| = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{y}(t) = 0,$$

η τροχιά είναι σπείρα που απομακρύνεται από την αρχή των αξόνων καθώς t μεταβάλλεται από $-\infty$ έως ∞ . Η κατεύθυνση της σπείρας εξαρτάται από τον σχετικό προσανατολισμό των \mathbf{U} και \mathbf{V} , όπως φαίνεται στα Σχήματα 8.15 και 8.16. Το σημείο $(0, 0)$ καλείται *ασταθής*



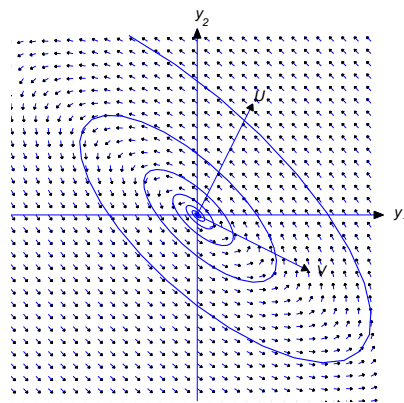
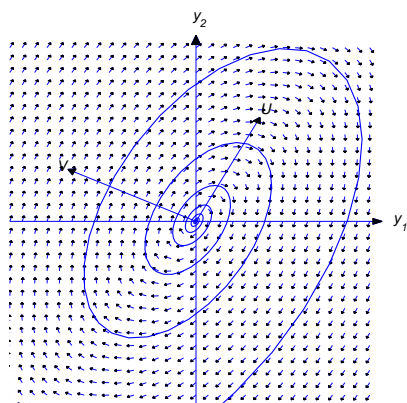
Σχήμα 8.13: Τροχιές εγκάρσια δεξιοστρό- Σχήμα 8.14: Τροχιές εγκάρσια αριστερο-
στροφως.

εστία.

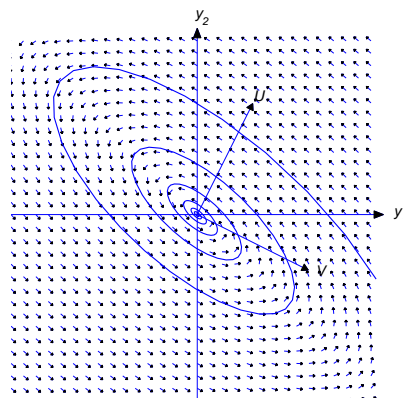
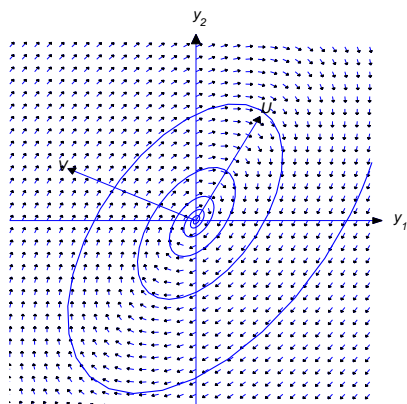
Αν $\alpha < 0$, τότε

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \|\mathbf{y}(t)\| = \infty \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = 0,$$

η τροχιά είναι σπείρα που έλκεται από την αρχή των αξόνων καθώς t μεταβάλλεται από $-\infty$ έως ∞ . Η κατεύθυνση της σπείρας εξαρτάται από τον σχετικό προσανατολισμό των \mathbf{U} και \mathbf{V} , όπως φαίνεται στα Σχήματα 8.17 και 8.18. Το σημείο $(0, 0)$ καλείται *ευσταθής εστία*.



Σχήμα 8.15: $\alpha > 0$, σκιδώδη τροχιά απομα- Σχήμα 8.16: $\alpha > 0$, σκιδώδη τροχιά απομα-
κρύνεται σπειρωειδώς από την αρχή των αξό- κρύνεται σπειρωειδώς από την αρχή των α-
νων. ξόνων.



Σχήμα 8.17: $\alpha < 0$, σκιάδη τροχιά έλκεται σπειρωειδώς από την αρχή των αξόνων. Σχήμα 8.18: $\alpha < 0$, σκιάδη τροχιά έλκεται σπειρωειδώς από την αρχή των αξόνων.

8.4 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-36 βρείτε την γενική λύση του συστήματος ΔΕ.

$$1. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} \quad 2. \mathbf{y}' = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$3. \mathbf{y}' = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -11 \end{bmatrix} \mathbf{y} \quad 4. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$5. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y} \quad 6. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$7. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -6 & -4 & -8 \\ -4 & 0 & -4 \\ -8 & -4 & -6 \end{bmatrix} \mathbf{y} \quad 8. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$9. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -6 \\ 2 & 6 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y} \quad 10. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & 7 & -2 \\ -10 & 10 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$11. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$12. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{y} \quad 13. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

14. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -1 & -11 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

15. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

16. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ -3 & -8 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

17. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -10 & 9 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

18. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -13 & 16 \\ -9 & 11 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

19. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

20. $\mathbf{y}' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -4 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

21. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

22. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

23. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

24. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -2 & -12 & 10 \\ 2 & -24 & 11 \\ 2 & -24 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

25. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & -12 & 8 \\ 1 & -9 & 4 \\ 1 & -6 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

26. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

27. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -8 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

28. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

29. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

30. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -11 & 4 \\ -26 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

31. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

32. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

33. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

34. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -3 \\ -3 & 7 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

35. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

36. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$

Στις Ασκήσεις 37-56 να λυθεί το ΠΑΤ.

$$37. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$38. \mathbf{y}' = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$39. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 21 & -12 \\ 24 & -15 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$40. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$41. \mathbf{y}' = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$42. \mathbf{y}' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$43. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -8 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$44. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ -10 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$45. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -7 & 24 \\ -6 & 17 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$46. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$47. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$48. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$49. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ -9 & -5 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$50. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$51. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$52. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 7 & 15 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$53. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 17 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$54. \mathbf{y}' = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$55. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$56. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 8 & 10 & -20 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Στις Ασκήσεις 57- 74 περιγράψτε και σχεδιάστε τις τροχιές του συστήματος ΔΕ.

$$57. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y} \qquad 58. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -11 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$59. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -1 & 11 \end{bmatrix} \mathbf{y} \qquad 60. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & -10 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$61. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} \qquad 62. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$63. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{y} \qquad 64. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$65. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{y} \qquad 66. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$67. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y} \qquad 68. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -15 & 10 \\ -25 & 15 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$69. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y} \qquad 70. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -3 & -15 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$71. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -12 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{y} \qquad 72. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 5 & -12 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

$$73. \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} \qquad 74. \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -4 & 9 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

8.5 Εκθετικός Πίνακας και Γραμμικά Συστήματα ΔΕ

8.5.1 Εκθετικός πίνακας

Πριν προχωρήσουμε στην περιγραφή της θεωρίας γραμμικών συστημάτων, είναι χρήσιμο να αναφέρουμε ορισμένα βασικά στοιχεία από τη θεωρία τελεστών $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ που θα μας φανούν χρήσιμα. Ορίζουμε την νόρμα του τελεστή T :

$$\|T\| = \max_{|x| < 1} |T(x)|$$

όπου $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα του $x \in \mathbb{R}^n$ και καλούμε **σύγκλιση** μιας ακολουθίας τελεστών $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$ (όπου $L(\mathbb{R}^n)$: χώρος γραμμικών τελεστών στο \mathbb{R}^n) σε κάποιον $T \in L(\mathbb{R}^n)$ το όριο

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T$$

αν, $\forall \epsilon > 0$, υπάρχει N , τέτοιο ώστε για $k \geq N$ να ισχύει $\|T - T_k\| < \epsilon$.

Λήμμα 8.5.1

Για $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν:

$$(\alpha') \quad |T(\mathbf{y})| \leq \|T\| |\mathbf{y}|$$

$$(\beta') \quad \|TS\| \leq \|T\| \|S\|$$

$$(\gamma') \quad \|T^k\| \leq \|T\|^k$$

$$(\delta') \quad \|T + S\| \leq \|T\| + \|S\|$$

Απόδειξη Το (α) ισχύει προφανώς για $\mathbf{y} = 0$. Για $\mathbf{y} \neq 0$ ορίσατε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{w} = \mathbf{y}/|\mathbf{y}|$. Τότε, από τον ορισμό της νόρμας τελεστών

$$\|T\| \geq |T(\mathbf{w})| = \frac{1}{|\mathbf{w}|} |T(\mathbf{w})|,$$

άρα η (α) ισχύει. (β) Για $\mathbf{y} \leq 1$, συμπεραίνουμε από το (α) ότι

$$|T(S(\mathbf{y}))| \leq \|T\| |S(\mathbf{y})| \leq \|T\| \|S\| |\mathbf{y}| \leq \|T\| \|S\|.$$

Επομένως,

$$\|TS\| = \max_{|y| \leq 1} |TS(\mathbf{y})| \leq \|T\| \|S\|$$

και η (γ) είναι άμεση συνέπεια της (β) . Τέλος η ιδιότητα (δ) αποδεικνύεται εύκολα κάνοντας χρήση του ορισμού της νόρμας και της τριγωνικής ανισότητας του Schwartz. \square

Θεώρημα 8.5.1

Για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$ και $t_0 > 0$, η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!} \quad (8.79)$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα για όλα τα $|t| \leq t_0$.

Απόδειξη Έστω $\|T\| = \alpha$. Από το Λήμμα 8.5.2 έπεται ότι για όλα τα $|t| \leq t_0$

$$\left\| \frac{T^k t^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|T\|^k |t|^k}{k!} \leq \frac{\alpha^k t_0^k}{k!}.$$

Όμως $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k t_0^k}{k!} = e^{\alpha t_0}$. Άρα από το γνωστό M -test σύγκρισης σειρών του Weierstrass φτάνουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα, ότι δηλαδή η σειρά (8.79) συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα για όλα τα $|t| \leq t_0$ (βλ. Β. Ρόθος & Χ. Σφυράκης, 2011). \square

Μπορούμε να ορίσουμε τον εκθετικό τελεστή

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} \quad (8.80)$$

ο οποίος ικανοποιεί $\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$ λόγω της ιδιότητας (δ) . Ο τελεστής όμως, τον οποίο θα χρειαστούμε παρακάτω, όταν θα μιλήσουμε για τη γενική λύση του συστήματος $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ είναι ο

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}. \quad (8.81)$$

Για να δούμε όμως πώς θα υπολογίσουμε τον τελεστή αυτόν, συναρτήσει των ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων του A , θα αναφέρουμε πρώτα ορισμένες ακόμα ιδιότητες του τελεστή (8.80):

Ιδιότητα 1: Αν P και T είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί στο \mathbb{R}^n και $S = PTP^{-1}$, τότε $e^S = Pe^T P^{-1}$.

Πράγματι, από τον ορισμό του e^S προκύπτει

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(PTP^{-1})^k}{k!} = P \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} P^{-1} = Pe^T P^{-1}$$

Επιπλέον, αν $PAP^{-1} = \text{diag}[\lambda_j]$ τότε $e^{At} = P \text{diag}[\lambda_j] P^{-1}$.

Ιδιότητα 2 : Αν S και T γραμμικοί μετασχηματισμοί στον \mathbb{R}^n που αντιμετατίθενται, δηλαδή ισχύει $ST = TS$, τότε $e^{S+T} = e^S e^T$.

Πράγματι, από το διωνυμικό ανάπτυγμα έχουμε

$$(S + T)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!},$$

κάνοντας χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας $ST = TS$. Επομένως,

$$e^{S+T} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = e^S e^T \quad (8.82)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το γινόμενο δυο απολύτως συγκλινουσών σειρών είναι και αυτό απολύτως συγκλίνουσα σειρά. (B. Ρόθος & X. Σφυράκης, 2011).

Θέτοντας $S = -T$ στην (8.82) λαμβάνουμε και το ακόλουθο αποτέλεσμα: Αν $T \in L(\mathbb{R}^n)$ ο αντίστροφος του γραμμικού μετασχηματισμού e^T είναι:

$$(e^T)^{-1} = e^{-T}.$$

Παράδειγμα 8.5.1 (α') Αν

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

τότε να δειχθεί

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix},$$

(β') Αν $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, τότε $e^A = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Λύση (α) Αρκεί να δείξουμε πρώτα ότι

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda^k) & -\operatorname{Im}(\lambda^k) \\ \operatorname{Im}(\lambda^k) & \operatorname{Re}(\lambda^k) \end{pmatrix}$$

όπου $\lambda = a + ib$ ιδιοτιμή του A .

(β) Μπορούμε να γράψουμε $A = \alpha I + B$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και όπου $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Αποδείξτε ότι $e^A = e^a e^B$. ■

Ως αποτέλεσμα του Παραδείγματος 8.5.1, μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα e^{At} για κάθε 2×2 πίνακα A . Ένας πίνακας 2×2 A ανάγεται πάντα σε μια από τις κάτωθι τρεις κανονικές μορφές **Jordan**: (βλ. L. Perko, 2001)

$$B_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{ή} \quad B_3 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (8.83)$$

Από τα παραπάνω προκύπτει εύκολα ότι,

$$e^{B_1 t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix}, \quad e^{B_2 t} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{B_3 t} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \quad (8.84)$$

για τους τρεις πίνακες B_i της (8.83). Λόγω της Ιδιότητας 1 που αναφέρθηκε πιο πάνω, ο πίνακας e^{At} , τελικά, γράφεται

$$e^{At} = P e^{Bt} P^{-1} \quad (8.85)$$

όπου P πίνακας που προκύπτει από τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A και $B = P^{-1}AP$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η γνώση του πίνακα e^{At} μας επιτρέπει να λύσουμε πλήρως το γραμμικό σύστημα $y' = Ay$.

Λήμμα 8.5.2

Αν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας, τότε

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} \quad (8.86)$$

Απόδειξη Εφόσον ο A αντιμετατίθεται με τον εαυτό του και ισχύουν οι (8.80) και (8.82) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{At} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \frac{e^{Ah} - I}{h} = \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow 0} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \dots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) = A e^{At} \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει και από το Θεώρημα 8.5.1 που αποδείξαμε πιο πάνω για την απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς του e^{Ah} για $|h| \leq 1$, η οποία μας επιτρέπει να ανταλλάξουμε τα δύο όρια. \square

8.5.2 Επίλυση Ομογενών Συστημάτων ΔΕ με Εκθετικό Πίνακα

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεμελιώδες Θεώρημα Γραμμικών Συστημάτων.

Θεώρημα 8.5.2

Αν A είναι ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Τότε για κάθε δοσμένη αρχική συνθήκη $x_0 \in \mathbb{R}^n$ το ΠΑΤ

$$y' = Ay, \quad \text{με } y(0) = y_0 \quad (8.87)$$

έχει τη μοναδική λύση

$$y(t) = e^{At} y_0. \quad (8.88)$$

Απόδειξη

Λόγω του Λήμματος 8.5.2, παραγωγίζοντας την (8.87), λαμβάνουμε

$$\mathbf{y}' = \frac{d}{dt} e^{At} \mathbf{y}_0 = A e^{At} \mathbf{y}_0 = A \mathbf{y}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Επομένως η (8.88) είναι μια λύση του (8.87). Για να δείξουμε ότι είναι και η μοναδική, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\mathbf{z}(t) = e^{-At} \mathbf{y}(t) \quad (8.89)$$

και παραγωγίζοντας, έχουμε

$$\mathbf{z}'(t) = -A e^{-At} \mathbf{y}(t) + e^{-At} \mathbf{y}'(t) = -A e^{-At} \mathbf{y}(t) + e^{-At} A \mathbf{y}(t).$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}$, αφού οι e^{-At} και A αντιμετατίθενται. Άρα, η $\mathbf{z}(t)$ είναι σταθερή διανυσματική συνάρτηση. Θέτοντας τώρα $t = 0$, έχουμε από την (8.89) ότι $\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}_0$ και επομένως η λύση του προβλήματος (8.87) που εξετάζουμε δεν μπορεί να είναι άλλη από την (8.88). \square

Για έναν οποιοδήποτε πίνακα $n \times n$ A και το αντίστοιχο σύστημα ΔΕ $\mathbf{y}' = A \mathbf{y}$, μπορούμε να ορίσουμε τους εξής τρεις υποχώρους του χώρου που παράγουν τα n ιδιοδιανύσματα του (βλ. L. Perko, 2001):

- i. ο ευσταθής υπόχωρος $E^s = \text{span} \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n_s}\}$,
- ii. ο ασταθής υπόχωρος $E^u = \text{span} \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n_u}\}$,
- iii. ο κεντρικός υπόχωρος $E^c = \text{span} \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n_c}\}$,

όπου τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i, \mathbf{w}_i$ έχουν ιδιοτιμές λ_i των οποίων το πραγματικό μέρος είναι αρνητικό, θετικό και μηδέν αντίστοιχα και $n_s + n_u + n_c = n$. Τα ονόματα των ως άνω υποχώρων αναφέρονται στο ότι οι αντίστοιχες λύσεις του $\mathbf{y}' = A \mathbf{y}$ (i) τείνουν εκθετικά στο μηδέν, (ii) τείνουν εκθετικά στο άπειρο (είτε μονοτονικά, είτε ταλαντωτικά) καθώς $t \rightarrow \infty$ και (iii) δεν συμβαίνει ούτε το (i) ούτε το (ii).

Θα διατυπώσουμε τα Θεωρήματα 8.4.1, 8.4.2, 8.4.4, 8.4.5 στη γενική περίπτωση με χρήση του εκθετικού πίνακα, (βλ. L. Perko, 2001).

Περίπτωση Πραγματικών Ιδιοτιμών

Θεώρημα 8.5.3

Αν οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ενός $n \times n$ πίνακα A του συστήματος ΔΕ (8.87) είναι πραγματικές ($\lambda_i \in \mathbb{R}$) και διακριτές μεταξύ τους $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$ τότε κάθε σύνολο αντιστοίχων ιδιοδιανυσμάτων $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ αποτελεί μία βάση του \mathbb{R}^n , ο δε πίνακας

$$P = [\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_n]$$

είναι αντιστρέψιμος και ισχύει

$$P^{-1} A P = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$$

Η πλήρης λύση του (8.87) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\mathbf{y}(t) = P \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}] P^{-1} \mathbf{y}(\mathbf{0}). \quad (8.90)$$

Περίπτωση Μιγαδικών Ιδιοτιμών

Θεώρημα 8.5.4

Αν ο $2n \times 2n$ είναι πραγματικός πίνακας A του συστήματος ΔΕ (8.87) με διακριτές ιδιοτιμές $\lambda_j = a_j + ib_j, \bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$, a_j, b_j πραγματικοί με $b_j \neq 0$ και αντίστοιχα μιγαδικά ιδιοδιανύσματα $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j, \bar{\mathbf{w}}_j = \mathbf{u}_j - i\mathbf{v}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ τότε $\{\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{u}_n\mathbf{v}_n\}$ αποτελεί μία βάση του \mathbb{R}^{2n} . Ο πίνακας

$$P = [\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{v}_n\mathbf{u}_n], \quad (8.91)$$

είναι αντιστρέψιμος και οδηγεί στην κανονική μορφή

$$= P^{-1}AP = \text{diag} \left[\begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix} \right],$$

ενός $2n \times 2n$ πίνακα B με n 2×2 πίνακες κατά μήκος της διαγωνίου του. Η πλήρης λύση του (8.87) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\mathbf{y}(t) = P \text{diag} e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos b_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos a_j t \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{y}(\mathbf{0}). \quad (8.92)$$

Παρατήρηση: Αν, αντί του πίνακα P , είχαμε χρησιμοποιήσει τον

$$Q = [\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{u}_n\mathbf{v}_n], \quad (8.93)$$

τότε απλώς η κανονική μορφή Jordan θα μετατρέπεται σε

$$B = Q^{-1}AQ = \text{diag} \begin{bmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{bmatrix}.$$

Στην περίπτωση που ο A έχει και πραγματικές και μιγαδικές ιδιοτιμές, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα: Έστω ότι τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις πραγματικές ιδιοτιμές λ_j είναι τα \mathbf{v}_j , $j = 1, 2, \dots, k$, ενώ οι μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda_j = a_j + ib_j, \bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ αντιστοιχούν σε ιδιοδιανύσματα $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j, \bar{\mathbf{w}}_j = \mathbf{u}_j - i\mathbf{v}_j$, $j = k + 1, \dots, n$. Τότε ο πίνακας

$$P = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k \mathbf{v}_{k+1} \mathbf{u}_{k+1} \dots \mathbf{v}_n \mathbf{u}_n],$$

είναι αντιστρέψιμος και ισχύει

$$P^{-1}AP = \text{diag} [\lambda_1, \dots, \lambda_k, B_{k+1}, \dots, B_n],$$

όπου

$$B_j = \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix}, j = k + 1, \dots, n$$

είναι οι 2×2 πίνακες που αναφέρθηκαν στο Θεώρημα 8.5.4.

Παράδειγμα 8.5.2 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ (8.87) όπου

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση

Ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1 + i$ και $\lambda_3 = \bar{\lambda}_2 = 1 - i$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_2 + i\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 + i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{w}_3 = \bar{\mathbf{w}}_2.$$

Οι πίνακες $P, P^{-1}, P^{-1}AP$ είναι οι ακόλουθοι:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Επομένως, η πλήρης λύση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= P \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} \cos t & -e^{2t} \sin t \\ 0 & e^{2t} \sin t & e^{2t} \cos t \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0 \\ &= \begin{bmatrix} e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} (\cos t + \sin t) & -2e^{2t} \sin t \\ 0 & e^{2t} \sin t & e^{2t} (\cos t - \sin t) \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (8.94)$$

Ο ευσταθής υπόχωρος του συστήματος είναι ο άξονας y_1 , ενώ ο ασταθής υπόχωρος είναι το επίπεδο y_2, y_3 . Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κανείς, οι τροχιές (8.94) είναι σπειροειδείς γύρω από τον y_1 -άξονα και κατευθύνονται προς το y_2, y_3 -επίπεδο με ακτίνα που συνεχώς αυξάνεται καθώς $t \rightarrow \infty$. ■

Έστω τώρα ότι λ είναι μια ιδιοτιμή του $n \times n$ πίνακα A , πολλαπλότητας $m \leq n$. Τότε, για $j = 1, 2, \dots, m$ κάθε μη μηδενική λύση \mathbf{v} της εξίσωσης

$$(A - \lambda \mathbf{I})^j \mathbf{v} = 0 \quad (8.95)$$

είναι ένα **γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα** του A . Επίσης, ένας $n \times n$ πίνακας N καλείται **μηδενοδύναμος** (nilpotent) τάξης k αν ισχύει: $N, N^2, \dots, N^{k-1} \neq 0, N^k = 0$. Διατυπώνουμε τη γενίκευση του Θεωρήματος 8.4.4. (βλ. L. Perko, 2001).

Θεώρημα 8.5.5

Έστω A ένας πραγματικός $n \times n$ πίνακας με πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ διατεταγμένες ανάλογα με την πολλαπλότητά τους. Υπάρχει, τότε, μια βάση γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων στο \mathbb{R}^n , $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ για την οποία ο πίνακας $P = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n]$ είναι αντιστρέψιμος, ενώ ο

πίνακας A γράφεται

$$A = S + N \quad (8.96)$$

όπου ο πίνακας S είναι διαγωνοποιήσιμος,

$$P^{-1}SP = \text{diag}[\lambda_j]$$

και ο $N = A - S$ είναι μηδενοδύναμος τάξης $k \leq n$. Επιπλέον οι πίνακες S, N αντιμετατίθενται, δηλαδή $SN = NS$. Η πλήρης λύση του (8.87) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\mathbf{y}(t) = P \text{diag}[e^{\lambda_j t}] P^{-1} \left[I + Nt + \dots + \frac{N^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} \right] \mathbf{y}_0. \quad (8.97)$$

Παράδειγμα 8.5.3 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ (8.87) όπου

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, επομένως

$$PSP^{-1} = \text{diag}[2] \quad \text{άρα} \quad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$N = A - S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι $N^2 = 0$ και, επομένως, ότι η λύση του προβλήματος δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{y}(t) = e^{At} \mathbf{y}_0 = e^{2t} [I + Nt] \mathbf{y}_0 = e^{2t} \begin{bmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix} \mathbf{y}_0.$$

■

Παράδειγμα 8.5.4 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ (8.87) όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Λύση Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda = 1$, πολλαπλότητας 4, επομένως ο A ισούται με τον 4×4 μοναδιαίο πίνακα I_4 και

$$N = A - S = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

για τον οποίο έχουμε

$$N^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και $N^3 = 0$. Η λύση του συστήματος λαμβάνει τη μορφή:

$$\mathbf{y}(t) = e^t \left[I + Nt + \frac{N^2 t^2}{2} \right] \mathbf{y}_0. \quad \blacksquare$$

Στην γενική περίπτωση, στην οποία οι ιδιοτιμές του A δεν είναι όλες ίδιες, προσδιορίζουμε πρώτα μια βάση γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων στο \mathbb{R}^n και μετά υπολογίζουμε τους πίνακες $S = P \text{diag}[\lambda_j] P^{-1}$ και $N = A - S$ και, τέλος, βρίσκουμε τη λύση του ΠΑΤ (8.87) όπως στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 8.5.5 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ (8.87) όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Λύση

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

και $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Για την ιδιοτιμή $\lambda_3 = 2$ ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα θα είναι το $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Υπολογίζουμε τους πίνακες

$$S = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad N = A - S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^2 = \mathbf{0}$$

Η γενική λύση του συστήματος δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{y}(t) = P \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1} (I + Nt) \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & 0 \\ -2e^t + (2-t)e^{2t} & te^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix} \mathbf{y}_0$$

βλέπε (8.97). ■

Θεώρημα 8.5.6

Έστω τώρα ότι ο πίνακας A είναι ένας πραγματικός $2n \times 2n$ πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_j =$

$a_j + ib_j, \bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ διατεταγμένες ανάλογα με την πολλαπλότητα τους. Υπάρχει, τότε, μια βάση γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j, \bar{\mathbf{w}}_j = \mathbf{u}_j - i\mathbf{v}_j, j = 1, 2, \dots, n$ για τον χώρο \mathbb{C}^n , ενώ η αντίστοιχη βάση για τον \mathbb{R}^{2n} είναι $\{\mathbf{u}_1\mathbf{v}_1\mathbf{u}_2\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{u}_n\mathbf{v}_n\}$. Για κάθε μια τέτοια βάση ο πίνακας $P = [\mathbf{v}_1\mathbf{u}_1\mathbf{v}_2\mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{v}_n\mathbf{u}_n]$, είναι αντιστρέψιμος και ισχύει

$$A = S + N \quad \text{και} \quad = P^{-1}AP = \text{diag} \begin{bmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{bmatrix},$$

όπου ο πίνακας $N = A - S$ είναι μηδενοδύναμος τάξης $k \leq 2n$, με $SN = NS$. Επιπλέον, υπό τις ως άνω προϋποθέσεις, η πλήρης λύση του (8.87) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\mathbf{y}(t) = P \text{diag} e^{a_j t} \begin{bmatrix} \cos a_j t & -\sin b_j t \\ \sin b_j t & \cos a_j t \end{bmatrix} P^{-1} \left[I + Nt + \dots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!} \right] \mathbf{y}_0. \quad (8.98)$$

Παράδειγμα 8.5.6 Να βρεθεί η γενική λύση του συστήματος ΔΕ (8.87) όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.99)$$

Λύση

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda = i, \bar{\lambda} = -i$ με πολλαπλότητα 2. Από την εξίσωση

$$(A - \lambda I)\mathbf{w} = 0,$$

λαμβάνουμε το πρώτο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{w}_1 = (0 \ 0 \ i \ 1)^\top$, ενώ η εξίσωση

$$(A - \lambda I)^2 \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2i & 0 & 0 \\ -2i & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & -2i \\ -4i & -2 & -2i & -2 \end{bmatrix} \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$$

δίνει ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{w}_2 = (i \ 1 \ 0 \ 1)^\top$. Έτσι, σύμφωνα με το Θεώρημα 8.5.6 κατασκευάζουμε τους πίνακες

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = P \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$N = A - S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ένας μηδενοδύναμος πίνακας τάξης 2, αφού $N^2 = 0$. Επομένως, η λύση του (8.87) με (8.99) είναι

$$\mathbf{y}(t) = P \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} P^{-1} (I + Nt) \mathbf{y}_0$$

ή

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ -t \sin t & \sin t - t \cos t & \cos t & -\sin t \\ \sin t + t \cos t & -t \sin t & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \mathbf{y}_0$$

Παρατήρηση: Η γενικότερη περίπτωση **πραγματικών** και **μιγαδικών** πολλαπλών **ι-διωτιμών** είναι ένας συνδυασμός των Θεωρημάτων 8.5.5 και 8.5.6, παρόμοιος με εκείνον που χρησιμοποιήσαμε στο Παράδειγμα 8.5.2 και περιγράψαμε στα σχόλια πάνω στο παράδειγμα αυτό.

8.5 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-4 να βρείτε μια λύση των ΠΑΤ με εφαρμογή της μεθόδου του εκθετικού πίνακα.

1. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -11 & 8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$
2. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 15 & -9 \\ 16 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$
3. $\mathbf{y}' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -7 \\ 1 & 5 & -5 \\ -4 & 4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$
4. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 11 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}.$

Στις Ασκήσεις 5-8 να λυθεί το σύστημα $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ για τους κάτωθι πίνακες:

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$
6. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$

$$7. \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$8. \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

8.6 Μεταβολή των Παραμέτρων για μη Ομογενή Γραμμικά Συστήματα ΔΕ

Θεωρούμε το μη ομογενές σύστημα ΔΕ

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \quad (8.100)$$

όπου A είναι ένας $n \times n$ πίνακας με στοιχεία συναρτήσεις και \mathbf{f} είναι ένα n -διάνυσμα συνάρτησης που αποτελεί το μη ομογενές μέρος. Ορίζουμε ως *ομογενές σύστημα* $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$.

Υπενθυμίζουμε, ότι η λύση της γραμμικής μη ομογενούς με σταθερούς συντελεστές ΔΕ 1ης τάξης:

$$y' = ay + f(t), y(t_0) = y_0$$

δίνεται από την σχέση:

$$y(t) = e^{a(t-t_0)}y_0 + \int_{t_0}^t e^{a(t-s)}f(s)ds.$$

Στην περίπτωση της (8.100), όπου A είναι ένας $n \times n$ πίνακας με σταθερά στοιχεία, ο αντίστοιχος τύπος γίνεται

$$\mathbf{y}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}\mathbf{f}(s)ds = e^{A(t-t_0)} \left[\mathbf{y}_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-s)}\mathbf{f}(s)ds \right] \quad (8.101)$$

όπου σε αντίθεση με την ομογενή, η παράσταση εντός της αγκύλης εξαρτάται από το t . Εστω $Y(t)$ ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ όπου A πίνακας σταθερός. Ορίζουμε τον εκθετικό πίνακα του A , e^{At} :

$$e^{At} = Y(t)Y^{-1}(0)$$

Το επόμενο Θεώρημα είναι το ανάλογο των Θεωρημάτων 5.3.2 και μας παρουσιάζει τον τρόπο εύρεσης της γενικής λύσης του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$ εάν γνωρίζουμε μια ειδική λύση της ΔΕ $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$ και ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος (αφήνουμε την απόδειξη στον αναγνώστη).

Θεώρημα 8.6.1 Υποθέτουμε ότι $n \times n$ πίνακας συνάρτηση A και η n -διανυσματική συνάρτηση \mathbf{f} είναι συνεχείς στο (a, b) . Έστω \mathbf{y}_p είναι μια ειδική λύση του συστήματος ΔΕ $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$ στο (a, b) , και έστω $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος ΔΕ $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ στο (a, b) . Τότε \mathbf{y} είναι μια λύση του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$ στο (a, b) αν και μόνο αν

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 + \dots + c_n\mathbf{y}_n,$$

όπου c_1, c_2, \dots, c_n είναι σταθερές.

Εύρεση μιας ειδικής λύσης ενός μη ομογενούς συστήματος ΔΕ

Θα συζητήσουμε την επέκταση της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων για γραμμικά μη ομογενή συστήματα ΔΕ. Η μέθοδος αυτή προσδιορίζει μια ειδική λύση του μη ομογενούς συστήματος ΔΕ $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t)$, εάν γνωρίζουμε τον θεμελιώδη πίνακα του ομογενούς συστήματος. Υποθέτουμε ότι Y είναι ένας θεμελιώδης πίνακας του ομογενούς συστήματος, της μορφής

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{bmatrix}, \quad \text{όπου} \quad \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{y}_n = \begin{bmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{bmatrix}$$

$\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_n\}$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος. Έχουμε αναφέρει ότι $Y' = A(t)Y$. Αναζητούμε μια ειδική λύση του

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t) \quad (8.102)$$

της μορφής

$$\mathbf{y}_p = Y\mathbf{u}, \quad (8.103)$$

όπου \mathbf{u} θα προσδιοριστεί. Παραγωγίζοντας την (8.103) έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{y}'_p &= Y'\mathbf{u} + Y\mathbf{u}' \\ &= AY\mathbf{u} + Y\mathbf{u}' \quad (\text{αφού } Y' = AY) \\ &= A\mathbf{y}_p + Y\mathbf{u}' \quad (\text{αφού } Y\mathbf{u} = \mathbf{y}_p). \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας την τελευταία σχέση με την (8.102) αποδεικνύεται ότι $\mathbf{y}_p = Y\mathbf{u}$ είναι μια λύση του (8.102) αν και μόνο αν

$$Y\mathbf{u}' = \mathbf{f}.$$

Από όπου μπορούμε να βρούμε μια ειδική λύση \mathbf{y}_p επιλύοντας την τελευταία εξίσωση ως προς \mathbf{u}' , υπολογίζουμε την ποσότητα $Y\mathbf{u}$. Μπορούμε να θεωρήσουμε όλες τις σταθερές ολοκλήρωσης μηδέν, αφού κάθε ειδική λύση θα ικανοποιείται. Συνεπώς, μια ειδική λύση (8.102) δίνεται

$$\mathbf{y}_p = Y(t) \int Y^{-1}(t)\mathbf{f}(t)dt. \quad (8.104)$$

Υποθέτουμε ότι ο $n \times n$ πίνακας συνάρτηση A και η n -διανυσματική συνάρτηση \mathbf{f} είναι συνεχείς στο (a, b) . Έστω $t_0 \in (a, b)$, και \mathbf{k} ένα αυθαίρετο σταθερό διάνυσμα, και έστω Y είναι ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων του $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$. Αποδεικνύεται ότι η λύση του ΠΑΤ

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{k} \quad (8.105)$$

δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{y}(t) = Y(t) \left(Y^{-1}(t_0)\mathbf{k} + \int_{t_0}^t Y^{-1}(s)\mathbf{f}(s) ds \right). \quad (8.106)$$

Παράδειγμα 8.6.1

(α') Βρείτε μία ειδική λύση του συστήματος

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 2e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix}, \quad (8.107)$$

το οποίο μελετήθηκε στο Παράδειγμα 8.2.1.

(β') Βρείτε τη γενική λύση του (8.107).

Λύση (α) Το ομογενές σύστημα είναι

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}. \quad (8.108)$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda = -1$ και $\lambda = 3$. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο που αναπτύξαμε στο προηγούμενο εδάφιο, έχουμε

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του (8.108). Οπότε

$$Y = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

είναι ένας θεμελιώδης πίνακας του (8.108). Αναζητούμε μια ειδική λύση $\mathbf{y}_p = Y\mathbf{u}$ του (8.107), όπου $Y\mathbf{u}' = \mathbf{f}$. Εφαρμόζοντας τη σχέση (8.104), προκύπτει ότι μια ειδική λύση του (8.107) είναι η

$$\mathbf{y}_p = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 8e^{4t} \\ 7e^{4t} \end{bmatrix}.$$

(β) Από το Θεώρημα 8.6.1, η γενική λύση του (8.107) είναι

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 8e^{4t} \\ 7e^{4t} \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}, \quad (8.109)$$

η οποία μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$\mathbf{y} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 8e^{4t} \\ 7e^{4t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ e^{3t} & -e^{-t} \end{bmatrix} \mathbf{c},$$

όπου \mathbf{c} είναι ένα αυθαίρετο σταθερό διάνυσμα.

Γράφοντας την (8.109) με όρους συντεταγμένων, έχουμε

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{8}{5}e^{4t} + c_1e^{3t} + c_2e^{-t} \\ y_2 &= \frac{7}{5}e^{4t} + c_1e^{3t} - c_2e^{-t}, \end{aligned}$$

τα αποτελέσματά μας συμπίπτουν με αυτά του Παραδείγματος 8.2.1. ■

Στην περίπτωση που A δεν είναι σταθερός πίνακας, συνήθως είναι δύσκολο να βρούμε το θεμελιώδες σύνολο λύσεων του συστήματος $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$, αντικείμενο που είναι εκτός του σκοπού του βιβλίου. Στο επόμενο παράδειγμα και τις Ασκήσεις, θα θεωρήσουμε τέτοιου είδους συστήματα αλλά θα δίνεται ένας θεμελιώδης πίνακας του ομογενούς.

Παράδειγμα 8.6.2 Βρείτε μια ειδική λύση του

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 2e^{-2t} \\ 2e^{2t} & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (8.110)$$

όταν ένας θεμελιώδης πίνακας του ομογενούς συστήματος δίνεται από

$$Y = \begin{bmatrix} e^{4t} & -1 \\ e^{6t} & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Λύση Αναζητούμε μια ειδική λύση $\mathbf{y}_p = Y\mathbf{u}$ του (8.110) όπου $Y\mathbf{u}' = \mathbf{f}$. Εφαρμόζοντας τη σχέση (8.104), προκύπτει ότι μια ειδική λύση του (8.110)

$$\mathbf{y}_p = Y\mathbf{u} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 4e^{-2t} + 12t - 3 \\ -3e^{2t}(4t + 1) - 8 \end{bmatrix}.$$

8.6 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-10 βρείτε μια ειδική λύση.

$$1. \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 21e^{4t} \\ 8e^{-3t} \end{bmatrix} \quad 2. \quad \mathbf{y}' = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -11 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 50e^{3t} \\ 10e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$3. \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \quad 4. \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2e^t \end{bmatrix}$$

$$5. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 4e^{-3t} \\ 4e^{-5t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}$$

$$7. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$9. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-5t} \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$10. \mathbf{y}' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -4 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{bmatrix}$$

Στις Ασκήσεις 11-16 βρείτε μια ειδική λύση, εάν Y είναι ένας θεμελιώδης πίνακας του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος.

$$11. \mathbf{y}' = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + t \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad Y = t \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

$$12. \mathbf{y}' = \frac{1}{t^2 - 1} \begin{bmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{bmatrix} \mathbf{y} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{bmatrix}$$

$$13. \mathbf{y}' = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 2 & e^{-t} \\ e^t & 2 \end{bmatrix}$$

$$14. \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & e^t & e^{2t} \\ e^{-t} & 2 & e^t \\ e^{-2t} & e^{-t} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} e^{5t} & e^{2t} & 0 \\ e^{4t} & 0 & e^t \\ e^{3t} & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$15. \mathbf{y}' = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & -t & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}, \quad Y = t \begin{bmatrix} 1 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \\ 0 & -\cos t & -\sin t \end{bmatrix}$$

$$16. \mathbf{y}' = -\frac{1}{t} \begin{bmatrix} e^{-t} & -t & 1 - e^{-t} \\ e^{-t} & 1 & -t - e^{-t} \\ e^{-t} & -t & 1 - e^{-t} \end{bmatrix} \mathbf{y} + \frac{1}{t} \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{bmatrix}, \quad Y = \frac{1}{t} \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} & t \\ e^t & -e^{-t} & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} & 0 \end{bmatrix}$$

8.7 Μετασχηματισμός Laplace και Συστήματα ΔΕ

Έστω $\mathbf{y}(t)$ μια n -διανυσματική συνάρτηση όπου κάθε συνάρτηση $y_i : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις ύπαρξης του μετασχηματισμού Laplace. Ο μετασχηματισμός Laplace της $\mathbf{y}(t)$ ορίζεται κατά συντεταγμένη και είναι

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}(t)) = [\mathcal{L}(y_1(t)), \mathcal{L}(y_2(t)), \dots, \mathcal{L}(y_n(t))]^t.$$

Οπότε ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου δίνεται:

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}'(t)) = s\mathcal{L}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{y}(0).$$

Θεωρούμε το γραμμικό ομογενές σύστημα

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \quad (8.111)$$

όπου A ένας πίνακας $n \times n$, με αρχική συνθήκη $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη έχουμε ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{y}'(t)) = \mathcal{L}(\mathbf{y}(t)) &\Leftrightarrow s\mathcal{L}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{y}(0) = \mathcal{L}(\mathbf{y}(t)) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{y}(t)) = (sI_n - A)^{-1}\mathbf{y}(0) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}((sI_n - A)^{-1})\mathbf{y}(0), t \geq 0. \end{aligned} \quad (8.112)$$

Επίσης, είναι γνωστό ότι η μοναδική λύση του συγκεκριμένου ΠΑΤ δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{y}_0. \quad (8.113)$$

Οπότε συγκρίνοντας την $\mathbf{y}(t) = \mathcal{L}^{-1}((sI_n - A)^{-1})\mathbf{y}(0)$ με την (8.113) έχουμε έναν άλλο τρόπο για τον υπολογισμό του e^{At} :

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}((sI_n - A)^{-1}). \quad (8.114)$$

Παράδειγμα 8.7.1 Να λυθεί το ΠΑΤ

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

με χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

Λύση

Παίρνοντας τους μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της εξίσωσης του προβλήματος, έχουμε:

$$\begin{aligned} (s-1)Y_1(s) - 4Y_2(s) &= 2 + \frac{1}{s-1}, \\ -Y_1(s) + (s-1)Y_2(s) &= 1 + \frac{1}{s-1}. \end{aligned}$$

Το παραπάνω αλγεβρικό σύστημα έχει τη λύση

$$Y_1(s) = \frac{2s^2 + s + 1}{(s-1)(s-3)(s+1)}$$

$$Y_2(s) = \frac{s^2 + s - 1}{(s-1)(s-3)(s+1)}$$

Αναλύουμε σε απλά κλάσματα, παίρνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και καταλήγουμε στη λύση του ΠΑΤ:

$$y_1(t) = e^{-t} + \frac{11}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t}$$

$$y_2(t) = -\frac{1}{4}e^t + \frac{11}{8}e^{3t} - \frac{1}{8}e^{-t}.$$

8.7 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-6 να βρείτε μια λύση των ΠΑΤ με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace.

1. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -11 & 8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$
2. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 15 & -9 \\ 16 & -9 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}.$
3. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix}.$
4. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}.$
5. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 1 & 15 & -15 \\ -6 & 18 & -22 \\ -3 & 11 & -15 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 15 \\ 17 \\ 10 \end{bmatrix}.$
6. $\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -10 & 3 & 15 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 16 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix}.$

Βιβλιογραφία

Ν. Αλικάκος, & Γ.Η.Καλογερόπουλος, 2003. *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα.

Α. Μπούντης, 2004 *Μη Γραμμικές Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Εκδ. Πνευματικού, Αθήνα.

Ν. Σταυρακάκης, 2011 *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις: γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή*, Παπασωτηρίου, Αθήνα.

Φ. Ξένος 2012 *Γραμμική Άλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία*, Θεσσαλονίκη.

W.E Boyce, & R.C. DiPrima, 2001 *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th edn. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ

- L. Perko, 2001 *Differential Equations and Dynamical Systems*, 3rd Ed., Springer-Verlag, New York.
- G. Strang. 1998 *Linear Algebra and Its Applications*, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, San Diego.
- W. F. Trenc, 2013 *Elementary Differential Equations*, Books and Monographs, Trinity University.
- P. Waltman, 1986, *A second Course in Elementary Differential Equations*, Academic Press, Inc. NY.

Κεφάλαιο 9

Σειρές Fourier και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αναπτύγματα συναρτήσεων σε σειρές Fourier και την εφαρμογή τους στην επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) για δεύτερης τάξης ΣΔΕ. Τα προβλήματα με συνθήκες (δεσμεύσεις) που μελετήσαμε στα πλαίσια της θεωρίας των ΔΕ με συνήθεις παραγώγους, ήταν αυτά των αρχικών τιμών (ΠΑΤ), δηλαδή ΔΕ που συνοδεύονταν από συνθήκη (δέσμευση) σε ένα μόνο σημείο. Στο σημείο αυτό θα ασχοληθούμε με την επίλυση ΔΕ που υποκείνται σε μια ή περισσότερες συνθήκες (δεσμεύσεις) σε δύο ή περισσότερα σημεία. Σημεία, τα οποία εντοπίζονται στο σύνορο του πεδίου, που εξελίσσεται το φυσικό φαινόμενο για αυτό χρησιμοποιείται ο όρος Προβλήματα Συνοριακών Τιμών (ΠΣΤ).

Πιο αναλυτικά στο εδάφιο 9.1.1 θα δώσουμε τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες των **σειρών Fourier**. Η ανισότητα Bessel και η ταυτότητα Parseval θα μελετηθούν στο εδάφιο 9.1.2. Στο εδάφιο 9.1.3 θα ασχοληθούμε με την ολοκλήρωση και παραγωγή σειρών Fourier. Στο εδάφιο 9.2.1 θα συζητήσουμε ΠΣΤ για βαθμωτές δεύτερης τάξης ΔΕ. Στο εδάφιο 9.2.2 θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα ιδιοτιμών για γραμμική ΔΕ με σταθερούς συντελεστές και θα μελετήσουμε μια ειδική κατηγορία ΠΣΤ Sturm-Liouville τα οποία έχουν εφαρμογές σε προβλήματα των φυσικών επιστημών που μοντελοποιούνται από μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ).

9.1 Σειρές Fourier

9.1.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Από τον λογισμό συναρτήσεων μιας μεταβλητής (βλ. Ρόθος & Σφυράκης, 2011) γνωρίζουμε ότι, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, μια συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά

Taylor γύρω από ένα σημείο x_0

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

όπου $|x - x_0| < \delta$ για κάποιο $\delta > 0$. Πολλές φορές επιβάλλεται από τις εφαρμογές, μια συνάρτηση να αναπτυχθεί σε άλλα είδη σειρών, το χρησιμότερο από τα οποία είναι οι τριγωνομετρικές σειρές και ειδικότερα οι σειρές Fourier, τις οποίες θα μελετήσουμε στη συνέχεια. Σειρές τέτοιου τύπου, συναντώνται στις ΔΕ κατά τη μελέτη των *περιοδικών λύσεων* γραμμικών ΔΕ με περιοδικούς μη ομογενείς όρους ή μη γραμμικές ΔΕ. Επίσης παρουσιάζονται κατά την επίλυση ΜΔΕ, καθώς και ΠΣΤ.

Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό των συντελεστών και τις ιδιότητες των σειρών Fourier, θα παρουσιάσουμε ορισμένα στοιχεία της θεωρίας συναρτήσεων.

Ορθογωνιότητα συναρτήσεων

Δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f και g καλούνται *ορθογώνιες* στο διάστημα $[a, b]$, αν

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0.$$

Γενικότερα, οι συναρτήσεις $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ (πεπερασμένο ή άπειρο το πλήθος) καλούνται ορθογώνιες στο $[a, b]$ αν

$$\int_a^b \phi_i(x)\phi_j(x) dx = 0 \quad \text{για} \quad i \neq j.$$

Η σημασία της ορθογωνιότητας συναρτήσεων θα φανεί στη συνέχεια που θα δώσουμε τον ορισμό των σειρών Fourier.

Παράδειγμα 9.1.1 Δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L}, \dots \quad (9.1)$$

είναι ορθογώνιες στο $[-L, L]$.

Λύση Πρέπει να δείξουμε

$$\int_{-L}^L f(x)g(x) dx = 0 \quad (9.2)$$

όπου f και g είναι δύο διαφορετικές από τις δοσμένες συναρτήσεις (9.1). Αν r είναι μη μηδενικός ακέραιος, τότε

$$\int_{-L}^L \cos \frac{r\pi x}{L} dx = \frac{L}{r\pi} \sin \frac{r\pi x}{L} \Big|_{-L}^L = 0. \quad (9.3)$$

και

$$\int_{-L}^L \sin \frac{r\pi x}{L} dx = -\frac{L}{r\pi} \cos \frac{r\pi x}{L} \Big|_{-L}^L = 0.$$

Συνεπώς η (9.2) ισχύει αν $f \equiv 1$ και g οποιαδήποτε συνάρτηση από τις (9.1).

Αν $f(x) = \cos(m\pi x/L)$ και $g(x) = \cos(n\pi x/L)$ όπου m και n είναι θετικοί ακέραιοι, τότε

$$\int_{-L}^L f(x)g(x) dx = \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (9.4)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

με $A = m\pi x/L$ και $B = n\pi x/L$. Τότε η (9.4) γίνεται

$$\int_{-L}^L f(x)g(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} dx + \int_{-L}^L \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} dx \right].$$

Αφού $m - n$ και $m + n$ μη μηδενικοί ακέραιοι, η (9.3) συνεπάγεται ότι τα ολοκληρώματα είναι μηδέν. Συνεπώς, η (9.2) είναι αληθής.

Αν $f(x) = \sin(m\pi x/L)$ και $g(x) = \sin(n\pi x/L)$ όπου m και n είναι θετικοί ακέραιοι $m \neq n$, τότε

$$\int_{-L}^L f(x)g(x) dx = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (9.5)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

με $A = m\pi x/L$ και $B = n\pi x/L$. Τότε η (9.5) γίνεται

$$\int_{-L}^L f(x)g(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} dx - \int_{-L}^L \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} dx \right] = 0.$$

Αν $f(x) = \sin(m\pi x/L)$ και $g(x) = \cos(n\pi x/L)$ όπου m και n είναι θετικοί ακέραιοι (όχι απαραίτητα διαφορετικοί), τότε

$$\int_{-L}^L f(x)g(x) dx = \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

■

Θεώρημα 9.1.1 Έστω ότι οι συναρτήσεις $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$, είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[a, b]$ και

$$\int_a^b \phi_n^2(x) dx \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.6)$$

Εστω c_1, c_2, c_3, \dots είναι σταθερές ώστε τα μερικά αθροίσματα $f_N(x) = \sum_{m=1}^N c_m \phi_m(x)$ ικανοποιούν τις ανισότητες

$$|f_N(x)| \leq M, \quad a \leq x \leq b, \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

για κάποια σταθερά $M < \infty$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι η σειρά

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m(x) \quad (9.7)$$

συγκλίνουν και είναι ολοκληρώσιμες στο $[a, b]$. Τότε

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x) \phi_n(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2(x) dx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.8)$$

Απόδειξη Πολλαπλασιάζοντας την (9.7) με ϕ_n και ολοκληρώνοντας, έχουμε

$$\int_a^b f(x) \phi_n(x) dx = \int_a^b \phi_n(x) \left(\sum_{m=1}^{\infty} c_m \phi_m(x) \right) dx. \quad (9.9)$$

Λόγω της σύγκλισης των σειρών, μπορούμε να εναλλάξουμε τη θέση του ολοκληρώματος και του αθροίσματος, οπότε η (9.9) γράφεται ως

$$\int_a^b f(x) \phi_n(x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) dx. \quad (9.10)$$

Αφού

$$\int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \quad \text{αν} \quad m \neq n,$$

η (9.10) γίνεται

$$\int_a^b f(x) \phi_n(x) dx = c_n \int_a^b \phi_n^2(x) dx.$$

Τώρα η σχέση (9.6) συνεπάγεται την (9.8). ■

Το Θεώρημα 9.1.1 μας δίνει τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 9.1.1 Έστω $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$, είναι ορθογώνιες συναρτήσεις στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b \phi_n^2(x) dx \neq 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Έστω f είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[a, b]$, και ορίζουμε

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x) dx}{\int_a^b \phi_n^2(x) dx}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.11)$$

Τότε, η άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)$ καλείται *ανάπτυγμα Fourier της f ως προς το ορθογώνιο σύνολο $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$* , και $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ καλούνται *συντελεστές Fourier της f αναφορικά $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$* . Δηλώνουμε την σχέση της f και του αντίστοιχου αναπτύγματος Fourier με

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (9.12)$$

Θα πρέπει να αναρωτηθούμε γιατί δεν γράφουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x), \quad a \leq x \leq b,$$

αντί την (9.12). Δυστυχώς, δεν συμβαίνει πάντα στην πράξη. Η σειρά στο δεξί μέρος μπορεί να αποκλίνει για μερικές τιμές ή και για όλες τις τιμές του x στο $[a, b]$, ή μπορεί να συγκλίνει στην $f(x)$ για μερικές τιμές του x και όχι για άλλες. Προς το παρόν, θα θεωρούμε τη σειρά σχετιζόμενη με την f λόγω του ορισμού των συντελεστών $\{c_n\}$, και αυτή η σχέση θα δίνεται άτυπα με τη σχέση (9.12).

Σειρές Fourier

Θα μελετήσουμε το ανάπτυγμα Fourier ως προς τις ορθογώνιες συναρτήσεις

$$1, \cos \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L}, \dots$$

Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-L, L]$, το ανάπτυγμα Fourier της f ως προς τις παραπάνω ορθογώνιες συναρτήσεις, καλείται *σειρά Fourier της f στο $[-L, L]$* . Αφού

$$\int_{-L}^L 1^2 dx = 2L,$$

$$\int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 + \cos \frac{2n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{L}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L = L,$$

και

$$\int_{-L}^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{L}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{L}\right) \Big|_{-L}^L = L,$$

έχουμε από την (9.11) ότι η σειρά Fourier της f στο $[-L, L]$ είναι

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad \text{και} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1.$$

Ορισμός 9.1.2 Εστω $f(x)$ μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα $[-L, L]$. Ονομάζουμε σειρά ή ανάπτυγμα Fourier της $f(x)$ στο διάστημα $[-L, L]$ την έκφραση

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right], \quad (9.13)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.14)$$

Το $[-L, L]$ ονομάζεται *θεμελειώδες διάστημα*, οι αριθμοί $a_n, b_n, n = 0, 1, 2, \dots$ αποτελούν τους συντελεστές Fourier και οι σχέσεις (9.14) τους τύπους Fourier για το ανάπτυγμα (9.13).

Σύγκλιση Σειρών Fourier

Το ερώτημα της σύγκλισης σειρών Fourier μιας αυθαίρετης ολοκληρώσιμης συνάρτησης είναι εκτός του σκοπού του βιβλίου, αλλά θα παρουσιάσουμε με απλό και κατανοητό τρόπο το θεώρημα το οποίο μας βοηθάει στις εφαρμογές.

Ορισμός 9.1.3 Μια συνάρτηση f καλείται *τμηματικά ομαλή* στο $[a, b]$ αν:

(α') f έχει πεπερασμένα σημεία ασυνέχειας στο (a, b) .

(β') f' υπάρχει και είναι συνεχής εκτός από πεπερασμένα σημεία στο (a, b) .

(γ') $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ και $f'(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+} f'(x)$ υπάρχει αν $a \leq x_0 < b$.

(δ') $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ και $f'(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-} f'(x)$ υπάρχει αν $a < x_0 \leq b$.

Αφού οι f και f' απαιτούνται να είναι συνεχείς σε πεπερασμένα το πλήθος σημεία στο $[a, b]$, $f(x_0+) = f(x_0-)$ και $f'(x_0+) = f'(x_0-)$ για όλες τις πεπερασμένες το πλήθος τιμές του x_0 στο (a, b) . Θα λέμε ότι η f έχει ένα *σημείο ασυνέχειας* στο x_0 αν $f(x_0+) \neq f(x_0-)$.

Το επόμενο θεώρημα δίνει τις ικανές συνθήκες για την σύγκλιση των σειρών Fourier, για την απόδειξη του οποίου παραπέμπουμε στα βιβλία (J.W. Brawn & d R. Churchill 1993, W.E Boyce & R.C. DiPrima, 2001)

Θεώρημα 9.1.2 Αν f είναι τμηματικά ομαλή συνάρτηση στο $[-L, L]$, τότε η σειρά Fourier,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (9.15)$$

της f στο $[-L, L]$ συγκλίνει για όλα τα x στο $[-L, L]$ επιπλέον ,

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{αν } -L < x < L \text{ και } f \text{ είναι συνεχής στο } x \\ \frac{f(x-) + f(x+)}{2} & \text{αν } -L < x < L \text{ και } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x \\ \frac{f(-L+) + f(L-)}{2} & \text{αν } x = L \text{ ή } x = -L. \end{cases}$$

Αφού $f(x+) = f(x-)$, αν f είναι συνεχής στο x , μπορούμε ισοδύναμα να γράψουμε

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x+) + f(x-)}{2} & \text{αν } -L < x < L, \\ \frac{f(L-) + f(-L+)}{2} & \text{αν } x = \pm L. \end{cases}$$

Σημειώνουμε, ότι η F είναι τμηματικά ομαλή στο $[-L, L]$ και $F(x) = f(x)$ σε όλα τα σημεία του ανοικτού διαστήματος $(-L, L)$ όπου η f είναι συνεχής. Αφού η σειρά στην (9.15) συγκλίνει στην $F(x)$ για όλα τα x in $[-L, L]$, μπορούμε να θεωρήσουμε το σφάλμα

$$E_N(x) = \left| F(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \right|$$

ώστε να γίνει όσο πιο μικρό θέλουμε για όλα τα x στο $[-L, L]$ επιλέγοντας το N αρκετά μεγάλο. Αυτό όμως δεν είναι σωστό αν η f έχει ασυνέχεια κάπου στο $(-L, L)$, ή αν $f(-L+) \neq f(L-)$. Δηλ.

Αν f έχει ασυνέχεια στο σημείο $\alpha \in (-L, L)$, θα υπάρχει ακολουθία σημείων $\{u_N\}$ και $\{v_N\}$ στο $(-L, \alpha)$ και (α, L) , αντίστοιχα, έτσι ώστε

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_N = \lim_{N \rightarrow \infty} v_N = \alpha$$

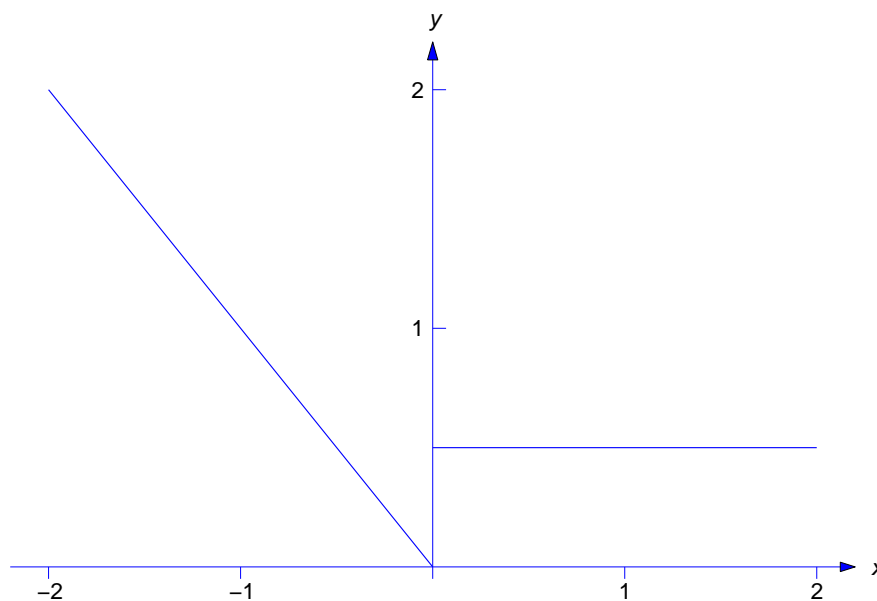
και

$$E_N(u_N) \approx .09|f(\alpha-) - f(\alpha+)| \quad \text{και} \quad E_N(v_N) \approx .09|f(\alpha-) - f(\alpha+)|.$$

Έτσι, η μέγιστη τιμή της συνάρτησης σφάλματος $E_N(x)$ κοντά στο α δεν πλησιάζει το μηδέν καθώς $N \rightarrow \infty$, αλλά ίσα που εμφανίζεται όσο και πιο κοντά στο (και από τις δύο μεριές) α , και είναι ανεξάρτητο του N .

Αν $f(-L+) \neq f(L-)$, τότε θα υπάρχουν ακολουθίες σημείων $\{u_N\}$ και $\{v_N\}$ in $(-L, L)$ έτσι ώστε

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_N = -L, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} v_N = L,$$



Σχήμα 9.1: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f του Παραδείγματος 9.1.2.

$$E_N(u_N) \approx .09|f(-L+) - f(L-)| \quad \text{και} \quad E_N(v_N) \approx .09|f(-L+) - f(L-)|.$$

Αυτό που περιγράψαμε παραπάνω με απλό τρόπο είναι γνωστό και ως *φαινόμενο Gibbs*, βλ. Σχήματα 9.2-9.4, και θα δώσουμε μερικά παραδείγματα στη συνέχεια του εδαφίου.

Παράδειγμα 9.1.2 Να βρεθεί η σειρά Fourier της τμηματικά συνεχούς συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 < x < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

στο $[-2, 2]$ και οποιεσδήποτε τιμές στα σημεία 0 και ± 2 (Σχήμα 9.1). Καθορίστε το άθροισμα της σειράς Fourier για $-2 \leq x \leq 2$.

Λύση Η f είναι τμηματικά ομαλή στο $[-2, 2]$ και οι συντελεστές της σειράς Fourier

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \right)$$

δεν επηρεάζονται από τις τιμές στο 0 και ± 2 . Σε κάθε περίπτωση το Θεώρημα 9.1.2 συνεπάγεται ότι $F(x) = f(x)$ στο $(-2, 0)$ και $(0, 2)$, όπου η f είναι συνεχής, αφού

$$F(-2) = F(2) = \frac{f(-2+) + f(2-)}{2} = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{4}$$

και

$$F(0) = \frac{f(0^-) + f(0^+)}{2} = \frac{1}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}.$$

Συνοψίζοντας,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{5}{4}, & x = -2 \\ -x, & -2 < x < 0, \\ \frac{1}{4}, & x = 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 < x < 2, \\ \frac{5}{4}, & x = 2. \end{cases}$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές της σειράς Fourier ως εξής:

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{4} \left[\int_{-2}^0 (-x) dx + \int_0^2 \frac{1}{2} dx \right] = \frac{3}{4}.$$

Αν $n \geq 1$, τότε

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-2}^0 (-x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_0^2 \frac{1}{2} \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right] \\ &= \frac{2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1), \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-2}^0 (-x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx + \int_0^2 \frac{1}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right] \\ &= \frac{1}{2n\pi} (1 + 3 \cos n\pi) = \frac{1}{2n\pi} (1 + 3(-1)^n), \end{aligned}$$

όπου $\cos n\pi = (-1)^n$. Συνεπώς

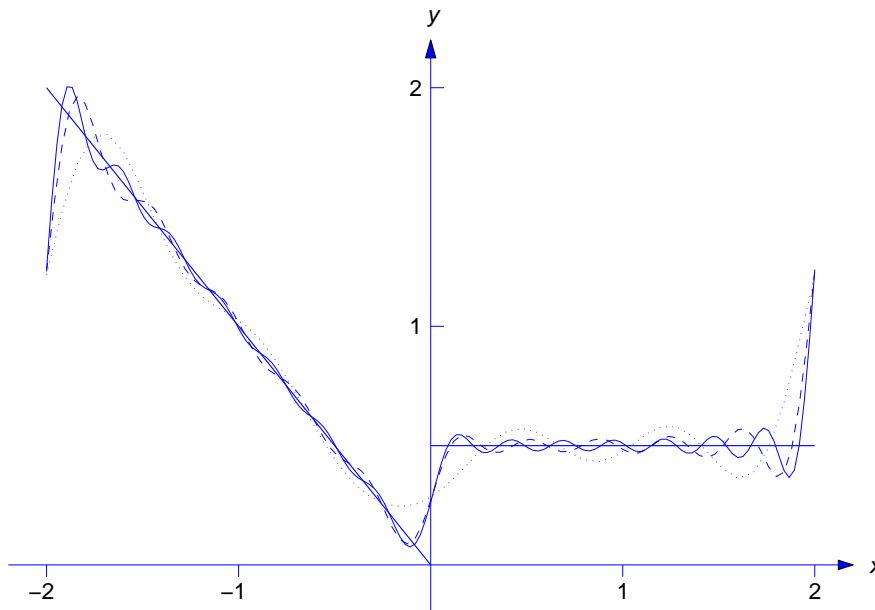
$$F(x) = \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

Το Σχήμα 9.2 δείχνει ότι το μερικό άθροισμα

$$F_m(x) = \frac{3}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^m \frac{1 + 3(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

προσεγγίζει την $f(x)$ για $m = 5$ (καμπύλη με τελείες), $m = 10$ (διακεκομμένη καμπύλη), και $m = 15$ (συμπαγής καμπύλη).

Άρτιες και Περιττές Συναρτήσεις



Σχήμα 9.2: Προσέγγιση της $f(x)$ με μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier στο $[-2, 2]$.

Ο υπολογισμός των συντελεστών της σειράς Fourier για την f απλοποιείται σημαντικά, όταν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή. Έστω u και v ορισμένες στο $[-L, L]$ και

$$u(-x) = u(x) \quad \text{και} \quad v(-x) = -v(x), \quad -L \leq x \leq L.$$

Τότε, η u είναι *άρτια* συνάρτηση και η v είναι *περιττή* συνάρτηση. Ισχύει:

Θεώρημα 9.1.3 *Υποθέτουμε ότι u είναι άρτια και v είναι περιττή στο $[-L, L]$. Τότε:*

$$(a) \quad \int_{-L}^L u(x) dx = 2 \int_0^L u(x) dx, \quad (b) \quad \int_{-L}^L v(x) dx = 0,$$

$$(c) \quad \int_{-L}^L u(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 2 \int_0^L u(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$(d) \quad \int_{-L}^L v(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 2 \int_0^L v(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx,$$

$$(e) \quad \int_{-L}^L u(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0 \quad \text{και} \quad (f) \quad \int_{-L}^L v(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

Το άθροισμα (διαφορά) και το γινόμενο (πηλίκο) δύο άρτιων συναρτήσεων είναι άρτια συνάρτηση.

Το άθροισμα (διαφορά) δύο περιττών συναρτήσεων, είναι περιττή. Ενώ το γινόμενο (πηλίκο) δύο περιττών συναρτήσεων είναι άρτια.

Το άθροισμα (διαφορά) μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης, δεν είναι πάντα, ούτε άρτια, ούτε περιττή, ενώ το γινόμενο (πηλίκο) δύο τέτοιων συναρτήσεων, είναι περιττή συνάρτηση.

Παράδειγμα 9.1.3 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = x^2 - x$ στο $[-2, 2]$, και καθορίστε το άθροισμα της στο $-2 \leq x \leq 2$.

Λύση Αφού $L = 2$,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{2} + b_n \sin \frac{n\pi x}{2} \right)$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 (x^2 - x) dx, \quad (9.16)$$

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (x^2 - x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.17)$$

και

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 (x^2 - x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.18)$$

Απλοποιούμε τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων με χρήση του Θεωρήματος 9.1.3 με $u(x) = x^2$ και $v(x) = x$. Έτσι, από την (9.16),

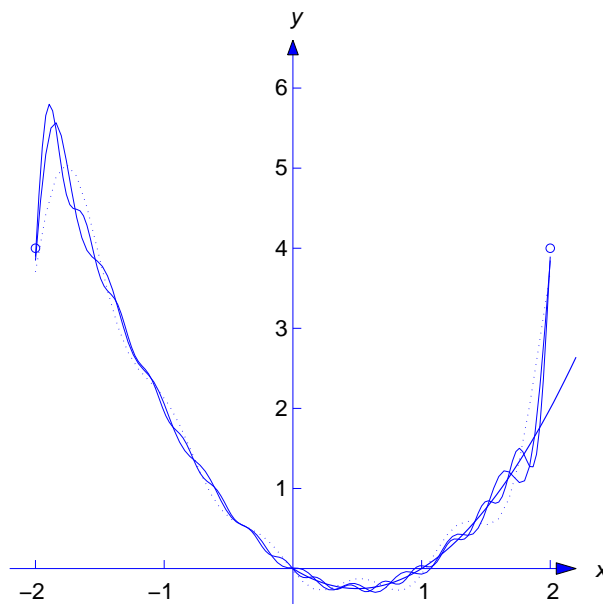
$$a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{6} \Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Από την (9.17),

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} \left[x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - 2 \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx \right] \\ &= \frac{8}{n^2\pi^2} \left[x \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right] \\ &= \frac{8}{n^2\pi^2} \left[2 \cos n\pi - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 \right] = (-1)^n \frac{16}{n^2\pi^2}. \end{aligned}$$

Από (9.18),

$$\begin{aligned} b_n &= - \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2}{n\pi} \left[x \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - \int_0^2 \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right] \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[2 \cos n\pi - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 \right] = (-1)^n \frac{4}{n\pi}. \end{aligned}$$



Σχήμα 9.3: Προσέγγιση της $f(x) = x^2 - x$ με μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier στο $[-2, 2]$

Συνεπώς

$$F(x) = \frac{4}{6} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

Το Θεώρημα 9.1.2 μας δίνει

$$F(x) = \begin{cases} 4, & x = -2, \\ x^2 - x, & -2 < x < 2, \\ 4, & x = 2. \end{cases}$$

Στο Σχήμα 9.3 φαίνεται ότι το μερικό άθροισμα

$$F_m(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

προσεγγίζει την $f(x)$ για $m = 5$ (καμπύλη με τελείες), $m = 10$ (διακεκομμένη καμπύλη), και $m = 15$ (συμπαγής καμπύλη). ■

Από το Θεώρημα 9.1.3 έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 9.1.4 Υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-L, L]$.

(α') Αν f είναι άρτια συνάρτηση, η σειρά Fourier της f στο $[-L, L]$ είναι

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L},$$

όπου

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad \text{και} \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1.$$

(β') Αν f είναι περιττή συνάρτηση, η σειρά Fourier της f στο $[-L, L]$ είναι

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

όπου

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Παράδειγμα 9.1.4 Βρείτε τη σειρά Fourier της $f(x) = x$ στο $[-\pi, \pi]$ και καθορίστε το άθροισμα της στο $-\pi \leq x \leq \pi$.

Λύση Αφού η f είναι περιττή συνάρτηση και $L = \pi$,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

όπου

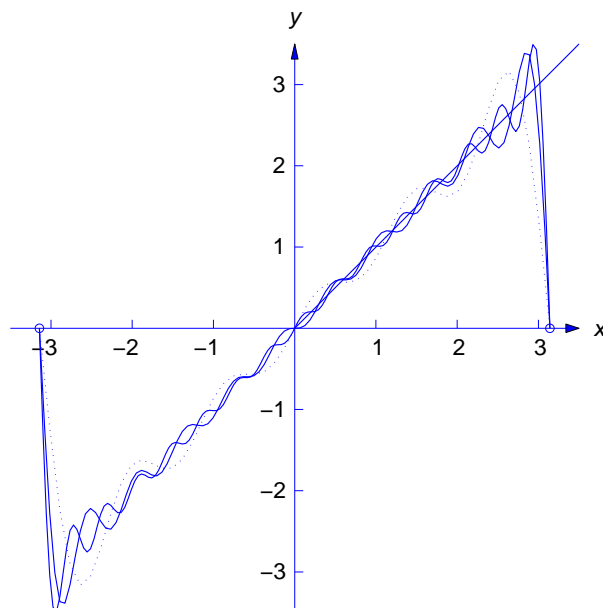
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} \left[x \cos nx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos nx dx \right] \\ &= -\frac{2}{n} \cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi} \sin nx \Big|_0^{\pi} = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Οπότε

$$F(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx.$$

Το Θεώρημα 9.1.2 δίνει

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = -\pi, \\ x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = \pi. \end{cases}$$



Σχήμα 9.4: Προσέγγιση της $f(x) = x$ με μερικά άθροισμα της σειράς Fourier στο $[-\pi, \pi]$

Στο Σχήμα 9.4 φαίνεται καθαρά πως το μερικό άθροισμα

$$F_m(x) = -2 \sum_{n=1}^m \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$$

προσεγγίζει την $f(x)$ για $m = 5$ (καμπύλη με τελείες), $m = 10$ (διακεκομμένη καμπύλη), και $m = 15$ (συμπαγής καμπύλη).

Παράδειγμα 9.1.5 Βρείτε τη σειρά Fourier για τη συνάρτηση $f(x) = |x|$ στο $[-\pi, \pi]$ και καθορίστε το άθροισμα της στο $-\pi \leq x \leq \pi$.

Λύση Αφού η f είναι άρτια και $L = \pi$,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Επίσης $f(x) = x$ αν $x \geq 0$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{x^2}{2\pi} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

και, αν $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx \, dx = \frac{2}{n\pi} \left[x \sin nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin nx \, dx \right] \\ &= \frac{2}{n^2\pi} \cos nx \Big|_0^\pi = \frac{2}{n^2\pi} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2\pi} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$F(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx. \quad (9.19)$$

Όμως

$$(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 2m, \\ -2 & \text{αν } n = 2m + 1, \end{cases}$$

οι όροι στην (9.19) για $n = 2m$ είναι όλοι μηδέν. Συνεπώς, θεωρούμε μόνο όρους για τους οποίους $n = 2m + 1$, μπορούμε να γράψουμε την (9.19) ως

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)x.$$

Αντικαθιστούμε τον δείκτη m με n , και έχουμε

$$F(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x.$$

Αφού $|x|$ είναι συνεχής για όλα τα x και $|- \pi| = |\pi|$, από το Θεώρημα 9.1.2 συνεπάγεται ότι $F(x) = |x|$ για όλα τα x στο $[-\pi, \pi]$.

Παράδειγμα 9.1.6 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x) = x(x^2 - L^2)$ στο $[-L, L]$ και να καθορίστε το άθροισμα της στο $-L \leq x \leq L$.

Λύση Αφού η f είναι περιττή,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

όπου

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L x(x^2 - L^2) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
 &= -\frac{2}{n\pi} \left[x(x^2 - L^2) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \int_0^L (3x^2 - L^2) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\
 &= \frac{2L}{n^2\pi^2} \left[(3x^2 - L^2) \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - 6 \int_0^L x \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\
 &= \frac{12L^2}{n^3\pi^3} \left[x \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right] = (-1)^n \frac{12L^3}{n^3\pi^3}.
 \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$F(x) = \frac{12L^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Το Θεώρημα 9.1.2 συνεπάγεται ότι $F(x) = x(x^2 - L^2)$ για όλα τα x στο $[-L, L]$.

Παράδειγμα 9.1.7 (Φαινόμενο Gibbs) Η σειρά Fourier της

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < -\frac{1}{2}, \\ 1, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

στο $[-1, 1]$ είναι

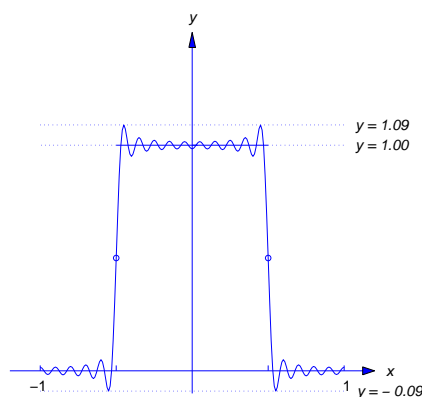
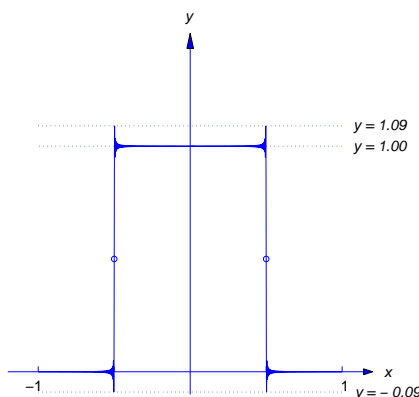
$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos(2n-1)\pi x.$$

(Αφήνεται ως άσκηση στον αναγνώστη!) Σύμφωνα με το Θεώρημα 9.1.2,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & x = -\frac{1}{2}, \\ 1, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & x = \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1; \end{cases}$$

έτσι, F (καθώς και η f) έχει ασύνεχνες στο $x = \pm\frac{1}{2}$. Στο Σχήμα 9.1.1 και Σχήμα 9.7 φαίνονται τα γραφήματα της $y = f(x)$ και

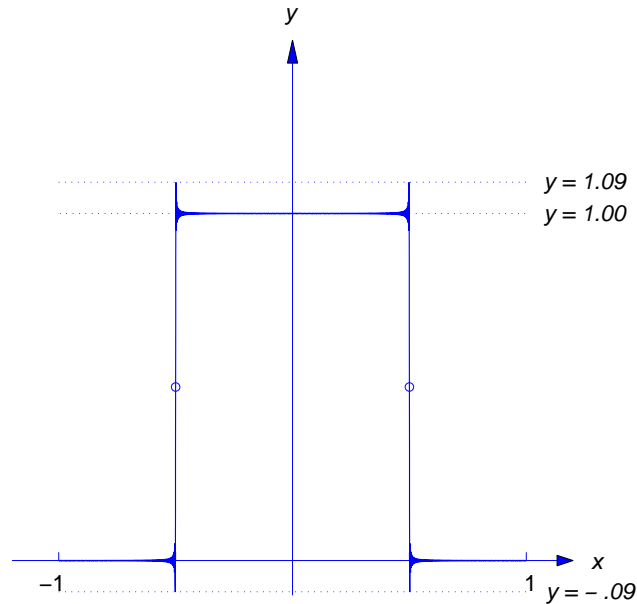
$$y = F_{2N-1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos(2n-1)\pi x$$

Σχήμα 9.5: Φαινόμενο Gibbs: Παράδειγμα 9.1.7, $N = 10$.Σχήμα 9.6: Φαινόμενο Gibbs : Παράδειγμα 9.1.7, $N = 20$.

για $N = 10, 20$, και 30 . Μπορείτε να δείτε καθώς F_{2N-1} προσεγγίζει καλώς την F (και την f) στο μεγαλύτερο διάστημα καθώς N αυξάνεται, η μέγιστη απόλυτη τιμή για τη συνάρτηση σφάλματος παραμένει κατά προσέγγιση στο $.09$, αλλά εμφανίζεται κοντά στις ασυνέχειες $x = \pm \frac{1}{2}$, καθώς N αυξάνεται.

Πολλές φορές, κατά την επίλυση προβλημάτων ΔΕ (συνήθων ή μερικών) εμφανίζεται η ανάγκη, μια συνάρτηση $f(x)$ που είναι ορισμένη σ' ένα διάστημα $[0, L]$, να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier. Για να γίνει αυτό, θα πρέπει πρώτα η συνάρτηση να επεκταθεί στο διάστημα $[-L, L]$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τα ακόλουθα.

- Ορισμός 9.1.4**
1. Η συνάρτηση $h(x)$ ονομάζεται *επέκταση* της $f(x)$, αν το πεδίο ορισμού της $h(x)$, περικλείει αυτό της $f(x)$ και ισχύει $h(x) = f(x)$, για κάθε x στο κοινό πεδίο ορισμού.
 2. Έστω ότι, η f είναι ορισμένη στο διάστημα $[0, L]$. Τότε ονομάζουμε *άρτια επέκταση* (βλ. Σχήμα 9.8) της $f(x)$ την



Σχήμα 9.7: Φαινόμενο Gibbs : Παράδειγμα 9.1.7, $N = 30$

$$f_a(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για } 0 < x < L \\ f(0), & \text{για } x = 0 \\ +f(-x), & \text{για } -L < x < 0 \end{cases} \quad (9.20)$$

και περιττή επέκταση αυτής (βλ. Σχήμα 9.9), την

$$f_\pi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για } 0 < x < L \\ f(0), & \text{για } x = 0 \\ -f(-x), & \text{για } -L < x < 0 \end{cases} \quad (9.21)$$

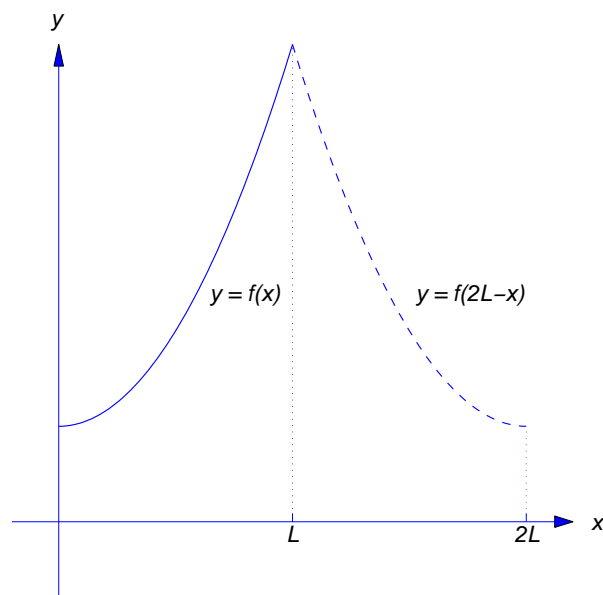
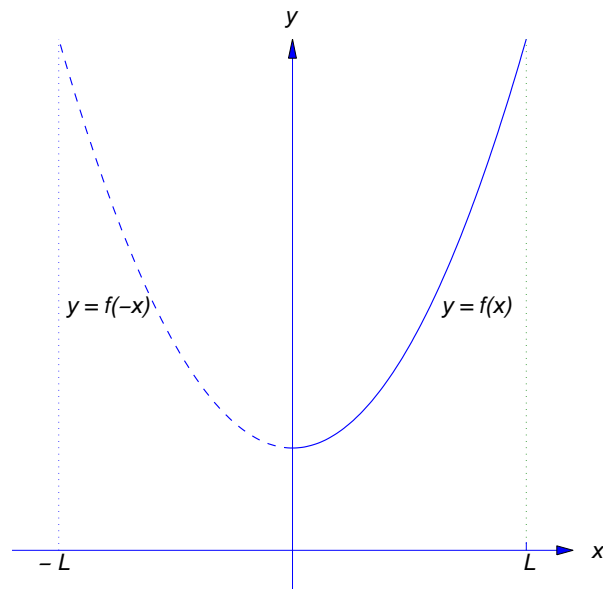
3. Ονομάζουμε *περιοδική επέκταση* μιας συνάρτησης $f(x)$ ορισμένης σ'ένα διάστημα $[-L, L]$, τη συνάρτηση \hat{f} , που ορίζεται από τη σχέση $\hat{f}(x + 2kL) = f(x)$, για κάθε $x \in [-L, L]$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. (Βλ. Σχήματα 9.10, 9.11).

Θεώρημα 9.1.5 Έστω ότι, η συνάρτηση $f(x)$ είναι τμηματικά συνεχής και $2L$ -περιοδική. Τότε:

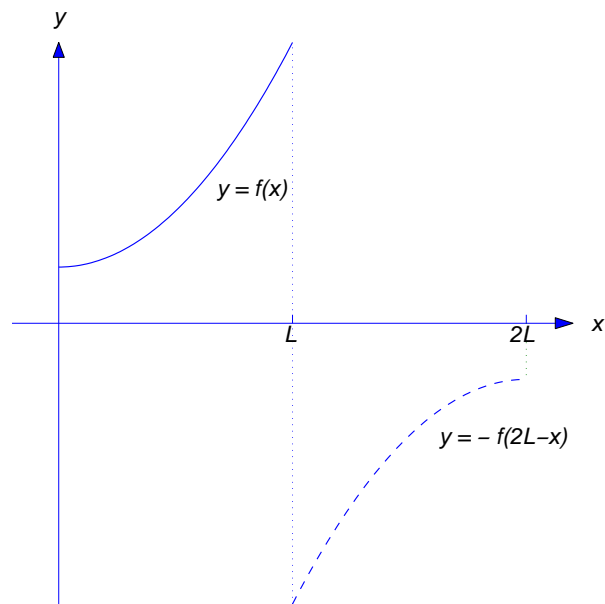
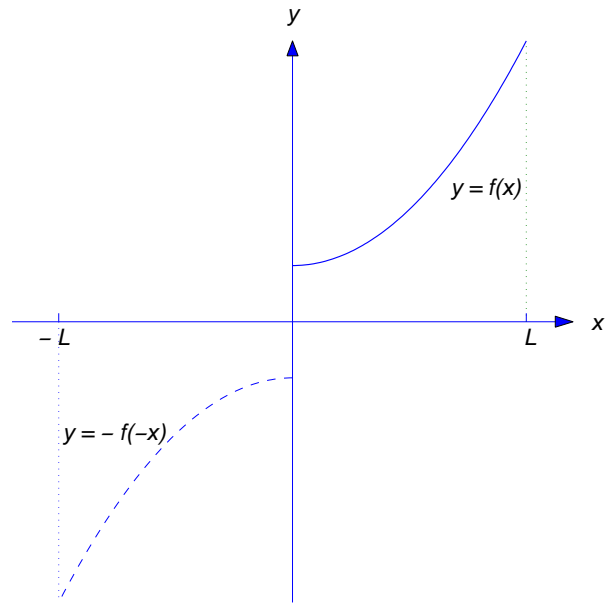
- (a) Αν η $f(x)$ είναι άρτια, η σειρά Fourier αυτής περιέχει μόνο συνημιτονικούς όρους με συντελεστές

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n = 0, 1, 2, \dots, \quad b_n = 0, n = 1, 2, \dots$$

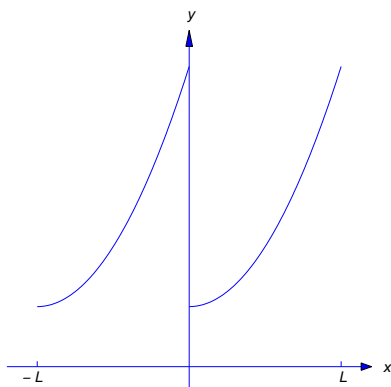
- (b) Αν η $f(x)$ είναι περιττή, η σειρά Fourier αυτής περιέχει μόνο ημιτονικούς όρους με



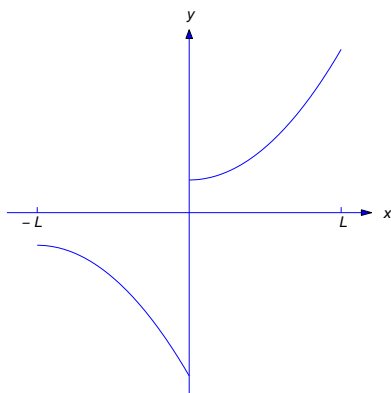
Σχήμα 9.8: Άρτια επέκταση της $f(x)$.



Σχήμα 9.9: Περιστή επέκταση της $f(x)$.



Σχήμα 9.10: $y = f(x)$, όπου $f(x + L) = f(x)$, $-L < x < 0$



Σχήμα 9.11: $y = f(x)$, όπου $f(x + L) = -f(x)$, $-L < x < 0$

συντελεστές

$$a_n = 0, n = 0, 1, 2, \dots, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, n = 1, 2, \dots,$$

Παράδειγμα 9.1.8 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier ημιτόνων η $f(x) = x$ στο $[0, L]$.

Λύση Εύκολα μπορούμε να σχεδιάσουμε την περιττή περιοδική επέκταση της $f(x)$ στο $[-L, L]$. Οι συντελεστές θα δίνονται από

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L x \sin \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{2}{n\pi} \left[x \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2L}{n\pi} + \frac{2L}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L = (-1)^{n+1} \frac{2L}{n\pi}. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$f(x) = -\frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Στην επίλυση ΠΣΤ για ΔΕ (με συνήθεις ή μερικές παραγώγους) συχνά χρειάζεται να εφαρμόσουμε τροποποιημένες εκφράσεις για τις σειρές Fourier. Στο παρακάτω Θεώρημα δίνουμε μερικά χρήσιμα εργαλεία τα οποία θα συναντήσουμε στο επόμενο εδάφιο.

Θεώρημα 9.1.6

(a) Αν $f'(0) = f'(L) = 0$, f'' είναι συνεχής, και f''' είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, L]$, τότε

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (9.22)$$

με

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad \text{και} \quad a_n = \frac{2L^2}{n^3 \pi^3} \int_0^L f'''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (9.23)$$

Τώρα υποθέτουμε ότι η f' είναι συνεχής και η f'' είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, L]$.

(b) Αν $f(0) = f(L) = 0$, τότε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L,$$

με

$$b_n = -\frac{2L}{n^2 \pi^2} \int_0^L f''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (9.24)$$

(c) Αν $f'(0) = f(L) = 0$, τότε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad 0 \leq x \leq L,$$

με

$$c_n = -\frac{8L}{(2n-1)^2 \pi^2} \int_0^L f''(x) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx. \quad (9.25)$$

(d) Αν $f(0) = f'(L) = 0$, τότε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad 0 \leq x \leq L,$$

με

$$d_n = -\frac{8L}{(2n-1)^2 \pi^2} \int_0^L f''(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx. \quad (9.26)$$

Απόδειξη Θα αποδείξουμε το (α) και το υπόλοιπο θεώρημα το αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη. Λόγω της συνέχειας της f στο $[0, L]$, το Θεώρημα 9.1.2 συνεπάγεται την (9.22) με a_0, a_1, a_2, \dots όπως ορίστηκαν στο Θεώρημα 9.1.2. Γνωρίζουμε τον συντελεστή a_0 από τη σχέση (9.23). Αν $n \geq 1$, με ολοκλήρωση κατά μέλη δύο φορές και με χρήση της υπόθεσης $f'(0) = f'(L) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \int_0^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= -\frac{2}{n\pi} \int_0^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2L}{n^2\pi^2} \left[f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \int_0^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= -\frac{2L}{n^2\pi^2} \int_0^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= -\frac{2L^2}{n^3\pi^3} \left[f''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \int_0^L f'''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= \frac{2L^2}{n^3\pi^3} \int_0^L f'''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 9.1.9 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier συνημιτόνων η $f(x) = x^2(3L - 2x)$ στο $[0, L]$.

Λύση Έχουμε

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L (3Lx^2 - 2x^3) dx = \frac{1}{L} \left(Lx^3 - \frac{x^4}{2} \right) \Big|_0^L = \frac{L^3}{2}$$

και

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L (3Lx^2 - 2x^3) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1.$$

Επίσης $f'(x) = 6Lx - 6x^2$, έχουμε $f'(0) = f'(L) = 0$. Αφού $f'''(x) = -12$, από τη σχέση (9.23) αν $n \geq 1$ τότε

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{24L^2}{n^3\pi^3} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{24L^3}{n^4\pi^4} \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L = \frac{24L^3}{n^4\pi^4} [(-1)^n - 1] \\ &= \begin{cases} -\frac{48L^3}{(2m-1)^4\pi^4} & \text{αν } n = 2m-1, \\ 0 & \text{αν } n = 2m. \end{cases} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$F(x) = \frac{L^3}{2} - \frac{48L^3}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L}.$$

Παράδειγμα 9.1.10 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier ημιτόνων η $f(x) = x(x^2 - 3Lx + 2L^2)$ στο $[0, L]$.

Λύση Από $f(0) = f(L) = 0$ και $f''(x) = 6(x - L)$, η σχέση (9.24) δίνει

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{12L}{n^2\pi^2} \int_0^L (x-L) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{12L^2}{n^3\pi^3} \left[(x-L) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L - \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= \frac{12L^2}{n^3\pi^3} \left[L - \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L \right] = \frac{12L^3}{n^3\pi^3}. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$F(x) = \frac{12L^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Παράδειγμα 9.1.11 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = 3x^3 - 4Lx^2 + L^3$ στο $[0, L]$.

Λύση Λόγω $f'(0) = f(L) = 0$ και $f''(x) = 2(9x - 4L)$, από τη σχέση (9.25) έχουμε

$$\begin{aligned} c_n &= -\frac{16L}{(2n-1)^2\pi^2} \int_0^L (9x-4L) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx \\ &= -\frac{32L^2}{(2n-1)^3\pi^3} \left[(9x-4L) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \Big|_0^L - 9 \int_0^L \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx \right] \\ &= -\frac{32L^2}{(2n-1)^3\pi^3} \left[(-1)^{n+1}5L + \frac{18L}{(2n-1)\pi} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \Big|_0^L \right] \\ &= \frac{32L^3}{(2n-1)^3\pi^3} \left[(-1)^n 5 + \frac{18}{(2n-1)\pi} \right]. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$F(x) = \frac{32L^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \left[(-1)^n 5 + \frac{18}{(2n-1)\pi} \right] \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}.$$

Παράδειγμα 9.1.12 Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier ημιτόνων η

$$f(x) = x(2x^2 - 9Lx + 12L^2)$$

στο $[0, L]$.

Λύση Λόγω $f(0) = f'(L) = 0$, και $f''(x) = 6(2x - 3L)$, η σχέση (9.26) δίνει

$$\begin{aligned} d_n &= -\frac{48L}{(2n-1)^2\pi^2} \int_0^L (2x-3L) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx \\ &= \frac{96L^2}{(2n-1)^3\pi^3} \left[(2x-3L) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \Big|_0^L - 2 \int_0^L \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx \right] \\ &= \frac{96L^2}{(2n-1)^3\pi^3} \left[3L - \frac{4L}{(2n-1)\pi} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \Big|_0^L \right] \\ &= \frac{96L^3}{(2n-1)^3\pi^3} \left[3 + (-1)^n \frac{4}{(2n-1)\pi} \right]. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$F(x) = \frac{96L^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \left[3 + (-1)^n \frac{4}{(2n-1)\pi} \right] \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}.$$

9.1.2 Ανισότητα Bessel και η ταυτότητα Parseval

Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g ορισμένες στο διάστημα $[a, b]$. Η ποσότητα

$$p^2(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx$$

ονομάζεται μέση τετραγωνική απόκλιση των f, g . Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$$

συγκλίνει κατά τον μέσο (ή μέσο τετραγωνικό) στη συνάρτηση $S(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^k a_n(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

έχει μηδενική τετραγωνική απόκλιση από την $S(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, δηλαδή

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p^2(S, S_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b |S(x) - S_k(x)|^2 dx = 0.$$

Θα προσδιορίσουμε την οικογένεια των συναρτήσεων $f(x)$, των οποίων τα αναπτύγματα Fourier συγκλίνουν κατά τον μέσο όρο σ'αυτές (βλ. W.E Boyce, R.C. DiPrima, 2001 και

Ν. Σταυρακάκης, 2011)

Θεώρημα 9.1.7 [Ανισότητα Bessel] Έστω μια $2L$ -περιοδική συνάρτηση $f(x)$ με την $f^2(x)$ ολοκληρώσιμη. Αν a_n, b_n είναι οι συντελεστές Fourier της $f(x)$, τότε ισχύει η ανισότητα Bessel:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx < +\infty \quad (9.27)$$

Απόδειξη

Έστω $S_k(x)$ τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της $f(x)$, δηλαδή

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}$$

Θεωρούμε το μη αρνητικό τετραγωνικό ολοκλήρωμα

$$0 \leq \int_{-L}^L (f(x) - S_k(x))^2 dx = \int_{-L}^L f^2(x) dx - 2 \int_{-L}^L f(x) S_k(x) dx + \int_{-L}^L (S_k(x))^2 dx. \quad (9.28)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθογωνιότητας που παρουσιάσαμε στο εδάφιο 9.1.1, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L (S_k(x))^2 dx &= \int_{-L}^L \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \right)^2 dx \\ &= 2 \left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \end{aligned}$$

Επιπλέον ισχύει

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) S_k(x) dx &= \int_{-L}^L f(x) \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \right) dx = \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^k \left\{ a_n \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\} \\ &= L \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \right) \end{aligned}$$

Έτσι η (9.28) γίνεται:

$$0 \leq \int_{-L}^L (f(x) - S_k(x))^2 dx = \int_{-L}^L f^2(x) dx - L \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \right) \quad (9.29)$$

Επειδή η (9.29) ισχύει για κάθε k , θα ισχύει προφανώς η ανισότητα Bessel. \square

Αν η $f(x)$ πληρεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9.1.7, τότε ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (9.30)$$

Πράγματι από την ανισότητα Bessel προκύπτει ότι, $a_n^2 + b_n^2 \rightarrow 0$, καθώς το $n \rightarrow \infty$. Επομένως θα ισχύει $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$, δηλαδή η (9.30).

Από την (9.29) συνεπάγεται ότι, η σειρά Fourier της $f(x)$ συγκλίνει κατά μέσο όρο στην $f(x)$, αν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα Parseval.

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx. \quad (9.31)$$

9.1.3 Παραγωγή και Ολοκλήρωση σειρών Fourier

Έστω $f(x)$ μια τμηματικά συνεχής, $2L$ -περιοδική συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{-L}^x f(t) dt, \quad (9.32)$$

είναι συνεχής προς x . Η $F(x)$ θα είναι $2L$ -περιοδική, αν ικανοποιεί τη συνθήκη $F(-L) = F(L)$. Επειδή $F(-L) = 0$, θα πρέπει να ισχύει

$$F(L) = \int_{-L}^L f(t) dt = La_0 = 0 \quad (9.33)$$

δηλαδή θα πρέπει να είναι $a_0 = 0$. Έχουμε αποδείξει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 9.1.8 [Ολοκλήρωση] Έστω $f(t)$ μια $2L$ -περιοδική, τμηματικά συνεχής συνάρτηση. Τότε, το ολοκλήρωμα (9.32) ορίζει μια $2L$ -περιοδική συνάρτηση, αν και μόνο αν $a_0 = 0$. Επιπλέον, σ' αυτή την περίπτωση η $F(x)$ είναι τμηματικά λεία.

Θεώρημα 9.1.9 [Αόριστο ολοκλήρωμα: $a_0 = 0$] Αν $f(x)$ είναι μια $2L$ -περιοδική τμηματικά συνεχής συνάρτηση με ανάπτυγμα Fourier

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} \quad (9.34)$$

τότε κάθε μέρος της (9.34), μπορεί να ολοκληρωθεί, οπότε προκύπτει

$$\int_{-L}^x f(t)dt \sim -\frac{1}{L} \int_{-L}^L x f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L}{n\pi}\right) \left\{ a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - b_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}. \quad (9.35)$$

Τέλος, η σειρά (9.34), συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη

Αν η $F(x)$ είναι περιοδική, τότε έχει ένα συγκλίνον ανάπτυγμα Fourier

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\} dx.$$

Για $n \geq 1$, η ολοκλήρωση κατά παράγοντες δίνει

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \left[\frac{L}{n\pi} F(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]_{-L}^L \\ &= -\frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L F'(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx - \frac{L}{n\pi} \left\{ \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right\} \end{aligned}$$

Επομένως, ισχύει $A_n = -(L/n\pi) b_n$, όπου b_n οι ημιτονικοί συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(x)$. Ομοίως αποδεικνύεται ότι $B_n = (L/n\pi) a_n$, όπου a_n οι συνημιτονικοί συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(x)$. Επίσης, ισχύει:

$$A_0 = -\frac{1}{L} \int_{-L}^L x f(x) dx \quad (9.36)$$

Παράδειγμα 9.1.13 Με τη χρήση του αναπτύγματος σε σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{για } -1 < x < 0. \end{cases} \quad (9.37)$$

Να δειχθεί ότι συνάρτηση $f(x) = |x|$, ορισμένη στο διάστημα $(-1, 1)$ και 2-περιοδική, έχει το ακόλουθο ανάπτυγμα στο \mathbb{R}

$$|x| \sim \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{4}{\pi^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x \right\}. \quad (9.38)$$

Λύση Εύκολα αποδεικνύεται ότι το ανάπτυγμα Fourier της (9.37) είναι

$$f(x) \sim \left(\frac{4}{\pi}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\pi x \right\}.$$

Για $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt = |x| - 1, \quad \text{αφού} \quad F(1) = 0$$

Επομένως, στο διάστημα $(-1, 1)$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} |x| - 1 &\sim \frac{A_0}{2} - \left(\frac{4}{\pi^2}\right) \left\{ \cos(\pi x) + \left(\frac{1}{9}\right) \cos(3\pi x) + \left(\frac{1}{25}\right) \cos(5\pi x) + \dots \right\} \\ &= \frac{A_0}{2} - \left(\frac{4}{\pi^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x \right\}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$|x| \sim \left(\frac{A_0}{2} + 1\right) - \left(\frac{4}{\pi^2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\pi x \right\}. \quad (9.39)$$

Ο όρος $\left(\frac{A_0}{2} + 1\right)$ μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους:

(i) Με χρήση της (9.36)

$$\frac{A_0}{2} + 1 = 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x f(x) dx = 1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |x| dx = \frac{1}{2}.$$

(ii) Μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί το ήμισυ του μηδενικού συντελεστή Fourier της συνάρτησης $|x|$, ορισμένης στο διάστημα $(-1, 1)$. Δηλαδή ισχύει,

$$\frac{A_0}{2} + 1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 |x| dx = \frac{1}{2}.$$

Επομένως η συνάρτηση $f(x) = |x|$, ορισμένη στο διάστημα $(-1, 1)$ και 2-περιοδική, έχει το ακόλουθο ανάπτυγμα στο \mathbb{R} (9.38).

Το παραπάνω αποτέλεσμα γενικεύεται στην περίπτωση, που η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x)$ είναι μη μηδενική.

Θεώρημα 9.1.10 [Ορισμένο ολοκλήρωμα: $a_0 \neq 0$]

Έστω ότι $f(x)$ είναι μια $2L$ -περιοδική, τμηματικά συνεχής συνάρτηση. Τότε, για κάθε $c, d \in \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα

$$\int_c^d f(x) dx,$$

μπορεί να υπολογισθεί ολοκληρώνοντας τη σειρά Fourier της $f(x)$ όρο προς όρο.

Απόδειξη Αν η $f(x)$ έχει μη μηδενική μέση τιμή, δηλαδή $a_0 \neq 0$, τότε η συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - \frac{a_0}{2}$$

πληρεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 9.1.9. Για κάθε $c, d \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\int_c^d f(x)dx = \int_{-L}^d f(x)dx - \int_{-L}^c f(x)dx = \int_{-L}^d h(x)dx - \int_{-L}^c h(x)dx - \int_c^d \frac{a_0}{2}dx$$

Άρα, έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα, το οποίο είναι

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^d \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}.$$

■

Παράδειγμα 9.1.14 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$, $-\pi < x < \pi$. Με τη χρήση του αναπτύγματος σε σειρά Fourier της f να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση x^2 .

Λύση Πράγματι, το ανάπτυγμα σε σειρά Fourier της f είναι

$$f(x) \equiv x = 2 \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right].$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ολοκληρώνοντας όρο προς όρο την τελευταία σειρά από c έως το x , προκύπτει

$$\frac{x^2 - c^2}{4} = - \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right) + \left(\cos c - \frac{\cos 2c}{2^2} + \frac{\cos 3c}{3^2} - \dots \right).$$

Για να προσδιορίσουμε το άθροισμα των σταθερών γράφουμε το παραπάνω ανάπτυγμα στη μορφή

$$\frac{x^2}{4} = C - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2}$$

όπου C προσδιορίσιμη σταθερά. Επειδή η σειρά στα δεξιά είναι μια ομοιόμορφα συγκλίνοσα σειρά Fourier, μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο από $-\pi$ έως π , οπότε προκύπτει

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{2} dx = 2 \left[\int_{-\pi}^{\pi} C dx - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n^2} dx \right],$$

ή

$$\frac{\pi^3}{3} = 4\pi C, \quad \text{δηλαδή} \quad C = \frac{\pi^2}{12}$$

Επομένως η ολοκλήρωση της σειράς Fourier της $f(x)$, δίνει το ανάπτυγμα Fourier της x^2 το οποίο είναι

$$x^2 = 4 \left[\frac{\pi^2}{12} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos nx}{n^2} \right].$$

Παράδειγμα 9.1.15 Από τα προηγούμενα είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ ορισμένη στο διάστημα $[0, L]$, δέχεται το ακόλουθο ημιτονικό ανάπτυγμα Fourier

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad \text{για } 0 \leq x \leq L.$$

Αν παραγωγίσουμε όρο προς όρο τη σειρά προκύπτει

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos \frac{n\pi x}{L}$$

η οποία είναι μεν συνημιτονική σειρά, όχι όμως αυτή που αποτελεί το συνημιτονικό ανάπτυγμα της $f(x) = 1$ (αφού το συνημιτονικό ανάπτυγμα της 1 είναι η 1).

Θεώρημα 9.1.11 [Παραγωγή] Έστω $f(x)$ μια $2L$ -περιοδική συνεχής συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι, υπάρχει $f'(x)$ σχεδόν παντού στο $[-L, L]$ και ότι, η $f'(x)$ είναι τμηματικά λεία. Τότε, η σειρά Fourier της $f'(x)$ προκύπτει από την σειρά Fourier της $f(x)$, με όρο προς όρο παραγωγή.

Απόδειξη

Επειδή η $f(x)$ είναι τμηματικά λεία, θα δέχεται ανάπτυγμα Fourier της μορφής

$$f'(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\}.$$

Επίσης, η $f(x)$ είναι $2L$ -περιοδική

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) dx = \frac{1}{L} [f(L) - f(-L)] = 0$$

Επομένως

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\}. \quad (9.40)$$

Επειδή δε

$$\int_{-L}^x f'(t) dt = f(x) - f(-L)$$

η προηγούμενη σχέση και το Θεώρημα 9.1.9 δίνουν ότι

$$f'(x) \sim [f(-L) + C] + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{L}{n\pi} a_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) - \frac{L}{n\pi} b_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right\}.$$

Είναι φανρό, ότι η παραγωγή όρο προς όρο της τελευταίας σειράς δίνει την (9.40). \square

Παράδειγμα 9.1.16 Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - \pi^2)^2 = (x - \pi)^2(x + \pi)^2$ ορισμένη

στο $[-\pi, \pi]$ με $f(x + 2\pi) = f(x)$. Αποδεικνύεται ότι

$$f'(x) \sim \frac{48\pi^4}{90} + 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Επίσης ισχύει $f'(x) = 4x(x^2 - \pi^2)$ για $x \in [-\pi, \pi]$ και η $f'(x)$ είναι τμηματικά λεία. Επομένως θα ισχύει

$$f'(x) = 4x(x^2 - \pi^2) \sim 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Ακόμα ισχύει $f''(x) = 12x^2 - 4\pi^2$ για $x \in [-\pi, \pi]$ και η $f''(x)$ είναι τμηματικά λεία. Επομένως, έχουμε

$$f''(x) = 12x^2 - 4\pi^2 \sim 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Τέλος $f'''(x) = 24x$ για $x \in [-\pi, \pi]$ ενώ δεν ορίζεται η $f'''(x)$ για $x = \pm\pi$. Εντούτοις, η f''' είναι τμηματικά λεία και ισχύει

$$f'''(x) = 24x \sim 48 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

9.1 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-15 να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση f στο $[-L, L]$ και να προσδιορίσετε το αντίστοιχο άθροισμα για $-L \leq x \leq L$. Σχεδιάστε στους ίδιους άξονες την f και

$$F_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

για διάφορες τιμές του m .

1. $L = 1$; $f(x) = 2 - x$
2. $L = \pi$; $f(x) = 2x - 3x^2$
3. $L = 1$; $f(x) = 1 - 3x^2$
4. $L = \pi$; $f(x) = |\sin x|$
5. $L = \pi$; $f(x) = x \cos x$
6. $L = \pi$; $f(x) = |x| \cos x$
7. $L = \pi$; $f(x) = x \sin x$
8. $L = \pi$; $f(x) = |x| \sin x$

9. $L = 1$; $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < \frac{1}{2}, \\ \cos \pi x, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$
10. $L = 1$; $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < \frac{1}{2}, \\ x \cos \pi x, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$
11. $L = 1$; $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < \frac{1}{2}, \\ \sin \pi x, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$
12. $L = 1$; $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < \frac{1}{2}, \\ |\sin \pi x|, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$
13. $L = 1$; $f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < \frac{1}{2}, \\ x \sin \pi x, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$
14. $L = 4$; $f(x) = \begin{cases} 0, & -4 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 4 \end{cases}$
15. $L = 1$; $f(x) = \begin{cases} x^2, & -1 < x < 0, \\ 1 - x^2, & 0 < x < 1 \end{cases}$
16. Από το Παράδειγμα 9.1.5 να αποδείξετε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

17. (α') Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = e^x$ στο $[-\pi, \pi]$.
 (β') Από το (α) δείξτε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi \coth \pi - 1}{2}.$$

18. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = (x - \pi) \cos x$ στο $[-\pi, \pi]$.
 19. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = (x - \pi) \sin x$ στο $[-\pi, \pi]$.
 20. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = \sin kx$ ($k \neq$ ακέραιος) στο $[-\pi, \pi]$.
 21. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η $f(x) = \cos kx$ ($k \neq$ ακέραιος) στο $[-\pi, \pi]$.

22. (α') Υποθέτουμε ότι $f(-L) = f(L)$, $f'(-L) = f'(L)$, f' είναι συνεχής και f'' τμηματικά συνεχής στο $[-L, L]$. Με χρήση του Θεωρήματος 9.1.2 και με παραγοντική ολοκλήρωση δείξτε ότι

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad -L \leq x \leq L,$$

με

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = -\frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad \text{και} \quad b_n = -\frac{L}{n^2\pi^2} \int_{-L}^L f''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n \geq 1.$$

- (β') Δείξτε ότι αν, επιπροσθέτως στο (α), η f'' είναι συνεχής και η f''' τμηματικά συνεχής στο $[-L, L]$, τότε

$$a_n = \frac{L^2}{n^3\pi^3} \int_{-L}^L f'''(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

23. Δείξτε ότι αν f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-L, L]$ και

$$f(x+L) = f(x), \quad -L < x < 0$$

(Σχήμα 9.10), τότε η σειρά Fourier της f στο $[-L, L]$ έχει τη μορφή

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2n\pi x}{L} + B_n \sin \frac{2n\pi x}{L} \right)$$

όπου

$$A_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx,$$

και

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{2n\pi x}{L} dx,$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{2n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

24. Δείξτε ότι αν f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-L, L]$ και

$$f(x+L) = -f(x), \quad -L < x < 0$$

(Σχήμα 9.11), τότε η σειρά Fourier της f στο $[-L, L]$ έχει τη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} + B_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L} \right),$$

όπου

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{L} dx$$

και

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Στις Ασκήσεις 25-29 να βρείτε το ανάπτυγμα σε συνημιτονική σειρά Fourier για τη συνάρτηση f .

25. $f(x) = x^2; \quad [0, L]$
26. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} < x < L; \end{cases} \quad [0, L]$
27. $f(x) = e^x; \quad [0, \pi]$
28. $f(x) = x(L-x); \quad [0, L]$
29. $f(x) = x(x-2L); \quad [0, L]$

Στις Ασκήσεις 30-34 να βρείτε το ανάπτυγμα σε ημιτονική σειρά Fourier για τη συνάρτηση f .

30. $f(x) = 1; \quad [0, L]$
31. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} < x < L; \end{cases} \quad [0, L]$
32. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2}, \\ L-x, & \frac{L}{2} \leq x \leq L; \end{cases} \quad [0, L].$
33. $f(x) = x \sin x; \quad [0, \pi]$
34. $f(x) = e^x; \quad [0, \pi]$

Στις Ασκήσεις 35-39 να βρείτε το ανάπτυγμα σε συνημιτονική σειρά Fourier για τη συνάρτηση f .

35. $f(x) = 1; \quad [0, L]$
36. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} < x < L; \end{cases} \quad [0, L]$
37. $f(x) = \cos x; \quad [0, \pi]$
38. $f(x) = \sin x; \quad [0, \pi]$
39. $f(x) = x(L-x); \quad [0, L]$

Στις Ασκήσεις 40-44 να βρείτε το ανάπτυγμα σε ημιτονική σειρά Fourier για τη συνάρτηση f

40. $f(x) = 1; \quad [0, L]$

41. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0, & \frac{L}{2} < x < L; \end{cases} \quad [0, L]$

42. $f(x) = \cos x; \quad [0, \pi]$

43. $f(x) = \sin x; \quad [0, \pi]$

44. $f(x) = x(L - x); \quad [0, L].$

Στις Ασκήσεις 45-48 με χρήση του Θεωρήματος 9.1.6(a) να βρείτε το ανάπτυγμα σε συνημιτονική σειρά Fourier για τη συνάρτηση f στο $[0, L]$.

45. $f(x) = 3x^2(x^2 - 2L^2)$

46. $f(x) = x^3(3x - 4L)$

47. $f(x) = x^2(3x^2 - 8Lx + 6L^2)$

48. $f(x) = x^2(x - L)^2$

49. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0 \\ 2, & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση

$$g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_0^x yf(y)dy.$$

Να δείξετε ότι

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

50. Με τη χρήση της ταυτότητας Parseval και του αναπτύγματος

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad -\pi < x < \pi$$

να υπολογισθεί η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

51. Με τη χρήση της ταυτότητας Parseval και του αναπτύγματος

$$x^2 \sim -\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx), \quad -\pi < x < \pi$$

να υπολογισθεί η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4} \right).$$

52. Έστω $f(x) = \cos ax$, $-\pi < x < \pi$, όπου $a > 0$ σταθερά. Να αποδειχθεί ότι

$$\cos(ax) \sim \frac{a \sin(\pi a)}{\pi} \left(\frac{1}{a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{a^2 - n^2} \cos(nx) \right).$$

Να υπολογισθεί η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a^2 - n^2} \right|.$$

Με τη χρήση της ταυτότητας Parseval να υπολογισθεί η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a^2 - n^2)^{-2}$.

53. Έστω ότι η $f(x) = x$, για $-\pi < x < \pi$ και $f_1(x+2\pi) = f_1(x)$, έτσι ώστε να έχουμε το ανάπτυγμα

$$f_1(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

Να υπολογισθεί με χρήση του παραπάνω στοιχείου η σειρά Fourier των συναρτήσεων $f_2(x) = x^2$, και $f_3(x) = x^4$ για $-\pi < x < \pi$.

54. Έστω $f(x)$ μια 4-περιοδική συνάρτηση της μορφής

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & -2 < x < 0 \\ \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

Έτσι ώστε να ισχύει το ανάπτυγμα

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right) + \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^3} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) - \frac{1}{3}.$$

Επιβεβαιώστε ότι, ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 9.1.11 για την $f(x)$. Να υπολογισθεί η σειρά Fourier της $f'(x)$. Επιβεβαιώστε ότι, δεν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 9.1.11 για τη συνάρτηση $f'(x)$.

9.2 Προβλήματα Συνοριακών Τιμών για ΔΕ 2ης τάξης

9.2.1 Προβλήματα Συνοριακών Τιμών δύο σημείων

Θεωρούμε την ΔΕ 2ης τάξης

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x). \quad (9.41)$$

Υποθέτουμε ότι P_0, P_1, P_2 , και F είναι συνεχείς συναρτήσεις και P_0 δεν μηδενίζεται στο (a, b) . Απο το Θεώρημα 5.3.1, έχουμε ότι αν $x_0 \in (a, b)$ και k_1 και k_2 είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί, τότε η ΔΕ (9.41) έχει μοναδική λύση στο (a, b) , τέτοια ώστε $y(x_0) = k_1$ και $y'(x_0) = k_2$. Θεωρούμε τώρα ένα διαφορετικό πρόβλημα συνδεδεμένο με τη ΔΕ (9.41).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Υποθέτουμε ότι P_0, P_1, P_2 , και F είναι συνεχείς και P_0 δεν μηδενίζεται στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Έστω α, β, ρ , και δ είναι πραγματικοί αριθμοί:

$$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \quad \text{και} \quad \rho^2 + \delta^2 \neq 0, \quad (9.42)$$

και έστω k_1 και k_2 αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί. Το ερώτημα που τίθεται είναι η εύρεση λύσης της ΔΕ

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = F(x) \quad (9.43)$$

στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, έτσι ώστε

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = k_1 \quad (9.44)$$

και

$$\rho y(b) + \delta y'(b) = k_2. \quad (9.45)$$

Τα σημεία a και b καλούνται *συνοριακά σημεία*. Οι συνθήκες (9.47) και (9.45) είναι *συνοριακές συνθήκες*, και το πρόβλημα καλείται *δύο σημείων ΠΣΤ* ή πιο απλά *ΠΣΤ*. Η ΔΕ (9.41) μπορεί να γραφεί εν συντομία ως $Ly = F$, όπου

$$Ly = P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y,$$

και οι συνθήκες ορίζονται

$$B_1(y) = \alpha y(a) + \beta y'(a) \quad \text{και} \quad B_2(y) = \rho y(b) + \delta y'(b).$$

Συνδυάζοντας τις (9.43), (9.47) και (9.45) ως

$$Ly = F, \quad B_1(y) = k_1, \quad B_2(y) = k_2. \quad (9.46)$$

Το ΠΣΤ είναι *ομογενές* αν $F = 0$ και $k_1 = k_2 = 0$ διαφορετικά καλείται *μη ομογενές*. Επίσης, σε μερικές εφαρμογές χρησιμοποιούμε *μεικτές* συνοριακές συνθήκες, της μορφής

$$\begin{aligned} \alpha y(a) + \beta y'(a) + P y(b) + \Delta y'(b) &= k_1 \\ \rho y(b) + \delta y'(b) + A y(a) + B y'(a) &= k_2. \end{aligned} \quad (9.47)$$

Στη συνέχεια δίνουμε χωρίς απόδειξη, ένα θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για ΠΣΤ στην γενική περίπτωση που η ΔΕ (9.41) είναι μη γραμμική. Για την απόδειξη, βλ. J.W. Brawn & d R. Churchill 1993

Θεώρημα 9.2.1 Θεωρούμε το ομογενές μη γραμμικό ΠΣΤ

$$y'' + f(x, y) = 0, \quad (x, y) \in (a, b) \times \mathbb{R}, \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (9.48)$$

Υποθέτουμε ότι η $f(x, y)$ είναι συνεχής στο $[a, b] \times \mathbb{R}$ και Lipschitz ως προς y σταθεράς k , δηλαδή υπάρχει σταθερά $k \in \mathbb{R}^+$, τέτοια ώστε, για κάθε ζεύγος σημείων $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ από το $[a, b] \times \mathbb{R}$, να ικανοποιείται η σχέση

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k |y_1 - y_2|.$$

Αν το $b - a$ είναι αρκετά μικρό, ώστε να ισχύει $k - (b - a)^2 < 4$, τότε το ΠΣΤ (9.48) έχει μοναδική λύση.

Παράδειγμα 9.2.1 Θεωρούμε το ΠΣΤ

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0.$$

Η γενική λύση της ΔΕ $y'' + y = 1$ είναι

$$y = 1 + c_1 \sin x + c_2 \cos x,$$

για $y(0) = 0$, αν και μόνο αν $c_2 = -1$ και $y(\pi/2) = 0$, αν και μόνο αν $c_1 = -1$. Οπότε η

$$y = 1 - \sin x - \cos x$$

είναι μοναδική λύση του ΠΣΤ.

Παράδειγμα 9.2.2 Θεωρούμε το ΠΣΤ

$$y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Η γενική λύση της ΔΕ $y'' + y = 1$ είναι

$$y = 1 + c_1 \sin x + c_2 \cos x,$$

για $y(0) = 0$, αν και μόνο αν $c_2 = -1$, αλλά $y(\pi) = 0$, αν και μόνο αν $c_2 = 1$. Συνεπώς, το ΠΣΤ δεν έχει λύση.

Παράδειγμα 9.2.3 Θεωρούμε το ΠΣΤ

$$y'' + y = \sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Η γενική λύση της ΔΕ (υπολογίζεται με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών) $y'' + y = \sin 2x$ είναι

$$y = -\frac{\sin 2x}{3} + c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Οι συνοριακές συνθήκες $y(0) = 0$ και $y(\pi) = 0$ μας δίνουν $c_2 = 0$, χωρίς περιορισμό για το c_1 . Συνεπώς, το ΠΣΤ έχει άπειρες λύσεις

$$y = -\frac{\sin 2x}{3} + c_1 \sin x,$$

όπου c_1 αυθαίρετη σταθερά.

Θεώρημα 9.2.2 *Αν z_1 και z_2 είναι λύσεις της $Ly = 0$, έτσι ώστε $B_1(z_1) = B_1(z_2) = 0$ ή $B_2(z_1) = B_2(z_2) = 0$, τότε $\{z_1, z_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο λύσεων. Ισοδύναμα, αν $\{z_1, z_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο λύσεων, τότε*

$$B_1^2(z_1) + B_1^2(z_2) \neq 0 \text{ και } B_2^2(z_1) + B_2^2(z_2) \neq 0.$$

Απόδειξη Υπενθυμίζουμε $B_1(z) = \alpha z(a) + \beta z'(a)$ και $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Αν $B_1(z_1) = B_1(z_2) = 0$, τότε (α, β) είναι μια μη τετριμμένη λύση του

$$\begin{aligned} \alpha z_1(a) + \beta z_1'(a) &= 0 \\ \alpha z_2(a) + \beta z_2'(a) &= 0. \end{aligned}$$

Το οποίο συνεπάγεται ότι

$$z_1(a)z_2'(a) - z_1'(a)z_2(a) = 0,$$

οπότε $\{z_1, z_2\}$ είναι γραμμικό ανεξάρτητο σύνολο λύσεων από το Θεώρημα 5.1.6. Αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη την απόδειξη του αν $\{z_1, z_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο λύσεων, τότε $B_2(z_1) = B_2(z_2) = 0$. \square

Θεώρημα 9.2.3 *(P. Waltman, 1986) Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(α') *Υπάρχει ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων $\{z_1, z_2\}$ της ΔΕ $Ly = 0$, τέτοιο ώστε*

$$B_1(z_1)B_2(z_2) - B_1(z_2)B_2(z_1) \neq 0. \quad (9.49)$$

(β') *Αν $\{y_1, y_2\}$ είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων της $Ly = 0$, τότε*

$$B_1(y_1)B_2(y_2) - B_1(y_2)B_2(y_1) \neq 0. \quad (9.50)$$

(γ') *Για κάθε συνεχή συνάρτηση F και ζεύγος σταθερών (k_1, k_2) , το ΠΣΤ*

$$Ly = F, \quad B_1(y) = k_1, \quad B_2(y) = k_2$$

έχει μοναδική λύση.

(δ') *Το ομογενές ΠΣΤ*

$$Ly = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0 \quad (9.51)$$

έχει τετριμμένη λύση την $y = 0$.

(ε') Η ομογενής ΔΕ $Ly = 0$ έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις z_1 και z_2 , έτσι ώστε $B_1(z_1) = 0$ και $B_2(z_2) = 0$.

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να έχουμε στη διάθεση μας έναν τύπο για την λύση ενός ΠΣΤ. Οπως φαίνεται στο επόμενο θεώρημα αυτό είναι εφικτό.

Θεώρημα 9.2.4 Θεωρούμε το ομογενές ΠΣΤ

$$Ly = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0 \quad (9.52)$$

ότι έχει μοναδική λύση. Έστω y_1 και y_2 γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ΔΕ $Ly = 0$ τέτοιες ώστε $B_1(y_1) = 0$ και $B_2(y_2) = 0$ και $W = y_1 y_2' - y_1' y_2$. Τότε η μοναδική λύση του ΠΣΤ

$$Ly = F, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0 \quad (9.53)$$

είναι

$$y(x) = y_1(x) \int_x^b \frac{F(t)y_2(t)}{P_0(t)W(t)} dt + y_2(x) \int_a^x \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)} dt. \quad (9.54)$$

Απόδειξη Στο εδάφιο 5.1 είδαμε ότι αν

$$y = u_1 y_1 + u_2 y_2 \quad (9.55)$$

όπου

$$\begin{aligned} u_1' y_1 + u_2' y_2 &= 0 \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' &= F, \end{aligned}$$

τότε $Ly = F$. Επιλύοντας ως προς u_1' και u_2' , έχουμε

$$u_1' = -\frac{F y_2}{P_0 W} \quad \text{και} \quad u_2' = \frac{F y_1}{P_0 W},$$

που ισχύει αν

$$u_1(x) = \int_x^b \frac{F(t)y_2(t)}{P_0(t)W(t)} dt \quad \text{και} \quad u_2(x) = \int_a^x \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)} dt.$$

Η προηγούμενη σχέση και η (9.55) δείχνουν ότι (9.54) είναι λύση της $Ly = F$. Παραγωγίζοντας την (9.54), έχουμε

$$y'(x) = y_1'(x) \int_x^b \frac{F(t)y_2(t)}{P_0(t)W(t)} dt + y_2'(x) \int_a^x \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)} dt. \quad (9.56)$$

Από τις σχέσεις (9.54) και (9.56),

$$B_1(y) = B_1(y_1) \int_a^b \frac{F(t)y_2(t)}{P_0(t)W(t)} dt = 0$$

διότι $B_1(y_1) = 0$, και

$$B_2(y) = B_2(y_2) \int_a^b \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)} dt = 0$$

διότι $B_2(y_2) = 0$. Η y ικανοποιεί την (9.53). ■

Συνάρτηση Green

Η σχέση (9.54) μπορεί να γραφεί ως

$$y = \int_a^b G(x, t)F(t) dt, \quad (9.57)$$

όπου

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{y_1(t)y_2(x)}{P_0(t)W(t)}, & a \leq t \leq x, \\ \frac{y_1(x)y_2(t)}{P_0(t)W(t)}, & x \leq t \leq b. \end{cases}$$

Η παραπάνω σχέση καλείται *συνάρτηση Green* για το ΠΣΤ (9.53).

Αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη, να αποδείξει ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος 9.2.4 συνεπάγονται ότι το ΠΣΤ

$$Ly = F, \quad B_1(y) = k_1, \quad B_2(y) = k_2$$

έχει μοναδική λύση την

$$y(x) = \int_a^b G(x, t)F(t) dt + \frac{k_2}{B_2(y_1)}y_1 + \frac{k_1}{B_1(y_2)}y_2.$$

Παράδειγμα 9.2.4

Να λυθεί το ΠΣΤ

$$y'' + y = F(x), \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = 0, \quad (9.58)$$

και προσδιορίστε τη συνάρτηση Green για το συγκεκριμένο ΠΣΤ.

Λύση Έχουμε

$$B_1(y) = y(0) + y'(0) \quad \text{και} \quad B_2(y) = y(\pi) - y'(\pi).$$

Έστω $\{z_1, z_2\} = \{\cos x, \sin x\}$, το οποίο είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων για τη ΔΕ $y'' + y = 0$. Τότε

$$\begin{aligned} B_1(z_1) &= (\cos x - \sin x)|_{x=0} = 1 \\ B_2(z_1) &= (\cos x + \sin x)|_{x=\pi} = -1 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} B_1(z_2) &= (\sin x + \cos x)|_{x=0} = 1 \\ B_2(z_2) &= (\sin x - \cos x)|_{x=\pi} = 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$B_1(z_1)B_2(z_2) - B_1(z_2)B_2(z_1) = 2,$$

το Θεώρημα 9.2.3 συνεπάγεται ότι το (9.58) έχει μοναδική λύση. Έστω

$$y_1 = B_1(z_2)z_1 - B_1(z_1)z_2 = \cos x - \sin x$$

και

$$y_2 = B_2(z_2)z_1 - B_2(z_1)z_2 = \cos x + \sin x.$$

Τότε $B_1(y_1) = 0$, $B_2(y_2) = 0$, και η ορίζουσα Wronski του $\{y_1, y_2\}$ είναι $W(x) = 2$. Λόγω $P_0 = 1$, η (9.54) δίνει ως λύση τη

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\cos x - \sin x}{2} \int_x^\pi F(t)(\cos t + \sin t) dt \\ &\quad + \frac{\cos x + \sin x}{2} \int_0^x F(t)(\cos t - \sin t) dt. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση Green είναι

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{(\cos t - \sin t)(\cos x + \sin x)}{2}, & 0 \leq t \leq x, \\ \frac{(\cos x - \sin x)(\cos t + \sin t)}{2}, & x \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Θα θεωρήσουμε την περίπτωση που δεν καλύπτεται από το Θεώρημα 9.2.4.

Θεώρημα 9.2.5 *Θωρούμε ότι το ομογενές ΠΣΤ*

$$Ly = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0 \quad (9.59)$$

έχει μη τετριμμένη λύση την y_1 , και έστω y_2 είναι οποιαδήποτε λύση της ΔΕ $Ly = 0$ που δεν είναι πολλαπλάσια της y_1 . Έστω $W = y_1y_2' - y_1'y_2$. Αν

$$\int_a^b \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)} dt = 0, \quad (9.60)$$

τότε το ομογενές ΠΣΤ

$$Ly = F, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0 \quad (9.61)$$

έχει άπειρες λύσεις, της μορφής $y = y_p + c_1y_1$, όπου

$$y_p = y_1(x) \int_x^b \frac{F(t)y_2(t)}{P_0(t)W(t)} dt + y_2(x) \int_a^x \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)} dt$$

και c_1 είναι αυθαίρετη σταθερά. Αν

$$\int_a^b \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)} dt \neq 0,$$

τότε το ΠΣΤ (9.61) δεν έχει λύση.

Απόδειξη Από την απόδειξη του Θεωρήματος 9.2.4, y_p είναι μια ειδική λύση της ΔΕ $Ly = F$, και

$$y'_p(x) = y'_1(x) \int_x^b \frac{F(t)y_2(t)}{P_0(t)W(t)} dt + y'_2(x) \int_a^x \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)} dt.$$

Συνεπώς, η γενική λύση της (9.59) έχει τη μορφή

$$y = y_p + c_1y_1 + c_2y_2,$$

όπου c_1 και c_2 είναι σταθερές. Τότε

$$\begin{aligned} B_1(y) &= B_1(y_p + c_1y_1 + c_2y_2) = B_1(y_p) + c_1B_1(y_1) + c_2B_1(y_2) \\ &= B_1(y_1) \int_a^b \frac{F(t)y_2(t)}{P_0(t)W(t)} dt + c_1B_1(y_1) + c_2B_1(y_2) \\ &= c_2B_1(y_2) \end{aligned}$$

Αφού $B_1(y_1) = 0$, από το Θεώρημα 9.2.2 συνεπάγεται ότι $B_1(y_2) \neq 0$; $B_1(y) = 0$ αν και μόνο αν $c_2 = 0$. Συνεπώς $y = y_p + c_1y_1$ και

$$\begin{aligned} B_2(y) &= B_2(y_p + c_1y_1) = B_2(y_2) \int_a^b \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)} dt + c_1B_2(y_1) \\ &= B_2(y_2) \int_a^b \frac{F(t)y_1(t)}{P_0(t)W(t)} dt, \end{aligned}$$

αφού $B_2(y_1) = 0$. Από το Θεώρημα 9.2.2, $B_2(y_2) \neq 0$ (διότι $B_2(y_1) = 0$). Συνεπώς, $Ly = 0$ αν και μόνο αν ισχύει η (9.60). \square

Παράδειγμα 9.2.5 Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9.2.5 στο ΠΣΤ

$$y'' + y = F(x), \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \quad (9.62)$$

μπορούμε να επιβεβαιώσουμε το Παραδείγμα 9.2.2 και 9.2.3. Η αντίστοιχη ομογενής ΔΕ $y'' + y = 0$ έχει γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $y_1 = \sin x$ και $y_2 = \cos x$, και y_1 ικανοποιεί και τις δύο συνοριακές συνθήκες. Επίσης, $P_0 = 1$ και $W = |(\sin x, \cos x)| = -1$, η σχέση (9.60) γίνεται

$$\int_0^\pi F(x) \sin x dx = 0.$$

Από το Παράδειγμα 9.2.2, έχουμε $F(x) = 1$ και

$$\int_0^\pi F(x) \sin x \, dx = \int_0^\pi \sin x \, dx = 2,$$

από το Θεώρημα 9.2.4 έχουμε ότι το ΠΣΤ (9.62) δεν έχει λύση. Στο Παράδειγμα 9.2.3, $F(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x$ και

$$\int_0^\pi F(x) \sin x \, dx = 2 \int_0^\pi \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{2}{3} \sin^3 x \Big|_0^\pi = 0,$$

από το Θεώρημα 9.2.4 συνεπάγεται ότι το ΠΣΤ (9.62) έχει άπειρες λύσεις, πολλαπλάσιες της $y_1(x) = \sin x$ κατά μια σταθερά.

9.2.2 ΠΣΤ Sturm-Liouville.

Sturm-Liouville ΠΣΤ-Εισαγωγικά

Στο σημείο αυτό θα θεωρήσουμε το ΠΣΤ ΔΕ 2ης τάξης με την παράμετρο λ

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y + \lambda R(x)y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0, \quad (9.63)$$

όπου

$$B_1(y) = \alpha y(a) + \beta y'(a) \quad \text{και} \quad B_2(y) = \rho y(b) + \delta y'(b).$$

Όπως αναφέρθηκαμε στο εδάφιο 9.2.2, $\alpha, \beta, \rho,$ και δ είναι πραγματικοί αριθμοί, με

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \quad \text{και} \quad \rho^2 + \delta^2 > 0,$$

$P_0, P_1, P_2,$ και R είναι συνεχείς και, P_0 και R είναι θετικά ορισμένες στο $[a, b]$.

Θα λέμε ότι η παράμετρος λ είναι μια *ιδιοτιμή* για το ΠΣΤ (9.63) αν το (9.63) έχει μη τετριμμένη λύση y . Σε αυτή την περίπτωση, η y είναι *ιδιοσυνάρτηση που σχετίζεται με τη* λ ή μια *λ -ιδιοσυνάρτηση*. *Επίλυση* του προβλήματος ιδιοτιμών σημαίνει να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του (9.63).

Παράδειγμα 9.2.6 Να λυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y' + 3y' + 2y + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (9.64)$$

Λύση Η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

όπου

$$r_1 = \frac{-3 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2} \quad \text{και} \quad r_2 = \frac{-3 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}.$$

Αν $\lambda < 1/4$, τότε r_1 και r_2 είναι πραγματικές ρίζες του αντίστοιχου χαρακτηριστικού πολυωνύμου $r^2 + 3r + 2 + \lambda = 0$ και η γενική λύση της (9.64) είναι

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες παρατηρούμε ότι το σύστημα

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 e^{r_1} + c_2 e^{r_2} &= 0. \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση την $c_1 = c_2 = 0$. Συνεπώς, λ δεν είναι ιδιοτιμή του (9.64).

Αν $\lambda = 1/4$, τότε $r_1 = r_2 = -3/2$, οπότε η γενική λύση της ΔΕ (9.64) είναι

$$y = e^{-3x/2}(c_1 + c_2 x).$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες παρατηρούμε ότι $\lambda = 1/4$ δεν είναι ιδιοτιμή του (9.64).

Αν $\lambda > 1/4$, τότε η γενική λύση της (9.64) είναι

$$y = e^{-3x/2}(c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x).$$

όπου

$$\omega = \frac{\sqrt{4\lambda - 1}}{2} \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad \lambda = \frac{1 + 4\omega^2}{4}. \quad (9.65)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες, έχουμε $c_1 = 0$, οπότε $y = c_2 e^{-3x/2} \sin \omega x$, η οποία ισχύει για $c_2 \neq 0$ αν και μόνο αν $\omega = n\pi$, όπου n είναι θετικός ακέραιος. Από την (9.65), οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_n = (1 + 4n^2\pi^2)/4$ και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$y_n = e^{-3x/2} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Για θεωρητικούς λόγους είναι καλό να γράψουμε την ΔΕ του ΠΣΤ (9.63) σε διαφορική μορφή, όπως στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 9.2.6 Αν P_0, P_1, P_2 και R είναι συνεχείς συναρτήσεις, και P_0 και R είναι θετικά ορισμένες στο $[a, b]$, τότε η ΔΕ

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y + \lambda R(x)y = 0 \quad (9.66)$$

μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \quad (9.67)$$

όπου p, p', q και r είναι συνεχείς και p και r είναι θετικά ορισμένες στο $[a, b]$.

Απόδειξη Ξαναγράφουμε τη ΔΕ (9.66) ως

$$y'' + u(x)y' + v(x)y + \lambda R_1(x)y = 0, \quad (9.68)$$

με $u = P_1/P_0$, $v = P_2/P_0$, και $R_1 = R/P_0$. Έστω $p(x) = e^{U(x)}$, όπου U είναι η παράγουσα της u . Τότε p είναι θετικά ορισμένη στο $[a, b]$ και $U' = u$,

$$p'(x) = p(x)u(x) \quad (9.69)$$

είναι συνεχής στο $[a, b]$. Πολλαπλασιάζοντας την (9.68) με $p(x)$ δίνει

$$p(x)y'' + p(x)u(x)y' + p(x)v(x)y + \lambda p(x)R_1(x)y = 0. \quad (9.70)$$

Αφού p είναι θετικά ορισμένη στο $[a, b]$, η ΔΕ έχει την ίδια λύση με τη (9.66). Από (9.69),

$$(p(x)y')' = p(x)y'' + p'(x)y' = p(x)y'' + p(x)u(x)y',$$

έχουμε ότι η (9.70) μπορεί να γραφεί στη μορφή (9.67), με $q(x) = p(x)v(x)$ και $r(x) = p(x)R_1(x)$. ■

Ορισμός 9.2.1 Μια γραμμική ΔΕ 2ης τάξης, θεωρούμε ότι είναι σε αυτοσυζυγή μορφή (self-adjoint), αν και μόνο αν είναι της μορφής

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \quad (9.71)$$

όπου p, p', q και r είναι συνεχείς και p και r είναι θετικά ορισμένες στο $[a, b]$.

Το Θεώρημα 9.2.6 μας λέει ότι μια ΔΕ της μορφής (9.66) μπορεί να αναχθεί σε αυτοσυζυγή μορφή (9.71) αν πολλαπλασιαστεί με τη συνάρτηση

$$\mu(x) = \exp \left[\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx \right] / P_0(x).$$

Στο υπόλοιπο του εδαφίου οι συναρτήσεις p, q , και r έχουν τις ιδιότητες που ισχύουν στο Θεώρημα 9.2.6. Η συνάρτηση $\mu(x)$ ονομάζεται πολλαπλασιαστής αυτοσυζυγοποίησης. Επίσης, όταν γράφουμε τον τελεστή L σε γενική περίπτωση θα εννοούμε

$$L = D(p(x)D) + q(x), \quad \text{όπου} \quad D = \frac{d}{dx}.$$

Έτσι, η ΔΕ (9.71) γράφεται

$$Ly + \lambda r(x)y = 0, \quad (9.72)$$

η συνάρτηση $r(x)$ ονομάζεται *συνάρτηση βάρους* της ΔΕ.

Παράδειγμα 9.2.7 Να τεθεί σε αυτοσυζυγή μορφή η ΔΕ (Bessel)

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - n^2)y = 0, \quad x > 0. \quad (9.73)$$

Λύση Από την σχέση

$$\mu(x) = \exp \left[\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)} dx \right] / P_0(x),$$

με αντικατάσταση έχουμε ότι $\mu(x) = 1/x$, οπότε πολλαπλασιάζοντας την (9.84) με $1/x$, προκύπτει η αντίστοιχη αυτοσυζυγής ΔΕ που είναι

$$xy'' + y' + (\lambda x - n^2 x^{-1})y = 0, \quad x > 0,$$

ή ισοδύναμα

$$(xy')' + (\lambda x - n^2 x^{-1})y = 0, \quad x > 0.$$

Ορισμός 9.2.2 Ο αυτοσυζυγής τελεστής L , ονομάζεται συμμετρικός στο κλειστό διάστημα $[a, b]$, αν και μόνο αν

$$\int_a^b (uLv - vLu) dx = 0, \quad (9.74)$$

για κάθε ζεύγος $C^2[a, b]$ -συναρτήσεων u, v οι οποίες ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν τον L .

Θεώρημα 9.2.7 Έστω ο διαφορικός τελεστής $L = D(p(x)D) + q(x)$, ορισμένος στο διάστημα $[a, b]$ και οι συναρτήσεις $u, v \in C^2[a, b]$, τότε ισχύει ο τύπος

$$\int_a^b (uLv - vLu) dx = p(x)W(u, v|x)|_a^b \quad (9.75)$$

όπου $W(u, v) = uv' - vu'$ είναι η ορίζουσα Wronski των u, v .

Απόδειξη Πράγματι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_a^b (uLv - vLu) dx &= \int_a^b \left\{ u \frac{d}{dx} (pv') + uq(x)v - v \frac{d}{dx} (pu') - vq(x)u \right\} dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx} \{ p(x)v'u - p(x)u'v \} dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx} \{ p(x)W(u, v|x) \} dx = p(x)W(u, v|x)|_a^b. \end{aligned}$$

■

Στο εδάφιο 9.1.1 ορίσαμε την έννοια της ορθογωνιότητας συναρτήσεων, επίσης δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f και g καλούνται ορθογώνιες ως προς μια συνάρτηση βάρους $r(x) > 0$ στο διάστημα $[a, b]$, αν έχουμε

$$\int_a^b r(x)f(x)g(x)dx = 0.$$

Θεώρημα 9.2.8 Έστω L ένας συμμετρικός τελεστής στο διάστημα $[a, b]$, ο οποίος ικανοποιεί την εξίσωση

$$Ly(x) + \lambda r(x)y(x) = 0, \quad x \in (a, b).$$

Αν λ_n και λ_k είναι δύο διαφορετικές ιδιοτιμές του L , με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x)$ και $y_k(x)$, τότε οι $y_n(x)$ και $y_k(x)$, είναι ορθογώνιες ως προς τη συνάρτηση βάρους $r(x)$.

Απόδειξη Για τις ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x)$ και $y_k(x)$, έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις

$$Ly_n(x) = -\lambda_n r(x)y_n(x), \quad Ly_k(x) = -\lambda_k r(x)y_k(x)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο εξισώσεις με $y_k(x)$ και $y_n(x)$ αντίστοιχα ολοκληρώνουμε και αφαιρούμε κατά μέλη, οπότε έχουμε

$$\int_a^b \{y_k(x)Ly_n(x) - y_n(x)Ly_k(x)\} dx = (\lambda_k - \lambda_n) \int_a^b r(x)y_n(x)y_k(x) dx.$$

Επειδή ο L είναι συμμετρικός, το πρώτο μέλος της προηγούμενης σχέσης θα είναι μηδέν. Επομένως, προκύπτει

$$\int_a^b r(x)y_n(x)y_k(x) dx = 0.$$

■

Θεώρημα 9.2.9 Οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού τελεστή είναι όλες πραγματικές και αποτελούν μια άπειρη ακολουθία, διατεταγμένη κατά αύξουσα τιμή, έτσι ώστε

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

όπου το $\lambda_n \rightarrow \infty$, καθώς το $n \rightarrow \infty$.

Ομαλά Sturm-Liouville προβλήματα

Ορισμός 9.2.3 Η ΔΕ (9.67) καλείται *Sturm-Liouville εξίσωση*, και το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$Ly + \lambda r(x)y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0, \quad (9.76)$$

με $Ly = (p(x)y')' + q(x)y$ το οποίο είναι ισοδύναμο με την (9.63), καλείται *Sturm-Liouville πρόβλημα*.

Οι διαχωρισμένες ομογενείς συνοριακές συνθήκες διακρίνονται σε τρεις βασικές κατηγορίες:

(α') Συνοριακές συνθήκες *Dirichlet* οι οποίες είναι της μορφής

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0,$$

(β') Συνοριακές συνθήκες *Neumann* οι οποίες είναι της μορφής

$$y'(a) = 0, \quad y'(b) = 0$$

(γ') Συνοριακές συνθήκες *Robin* ή *μεικτές* οι οποίες είναι της γενικής μορφής

$$k_1 y(a) + y'(a) = 0, \quad k_2 y(b) + y'(b) = 0$$

όπου k_1, k_2 είναι σταθερές με μια τουλάχιστον μη μηδενική.

Αρκετά συχνά στις εφαρμογές μας ενδιαφέρει να επιλύσουμε μια ΔΕ σε ένα πεπερασμένο διάστημα και υπό ορισμένες συνθήκες στα άκρα του διαστήματος :

$$\text{ΠΣΤ 1:} \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

$$\text{ΠΣΤ 2:} \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

$$\text{ΠΣΤ 3:} \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

$$\text{ΠΣΤ 4:} \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

$$\text{ΠΣΤ 5:} \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y(-L) = y(L), \quad y'(-L) = y'(L)$$

Σε καθένα από τα παραπάνω ΠΣΤ η ΔΕ συνοδεύεται από συγκεκριμένες συνθήκες τις αποκαλούμενες *συνοριακές συνθήκες*. Οι συνοριακές συνθήκες για το Πρόβλημα 5, σε αντιδιαστολή με τις συνθήκες των ΠΣΤ 1-4, δεν απαιτούν οι y ή y' αν είναι μηδέν στα άκρα του διαστήματος, μόνο η y έχει την ίδια τιμή στα $x = \pm L$, όπως επίσης η y' έχει την ίδια τιμή στα $x = \pm L$. Οι συνοριακές συνθήκες του Προβλήματος 5 είναι *περιοδικές*. Φυσικά η μηδενική λύση $y = 0$ είναι η τετριμμένη. Το ερώτημα που τίθεται είναι:

Για ποιες τιμές της παραμέτρου λ έχει μη τετριμμένη λύση και ποια είναι η μορφή της;

Η τιμή της παραμέτρου λ για την οποία το πρόβλημα έχει μη τετριμμένη λύση καλείται *ιδιοτιμή* του προβλήματος και η αντίστοιχη μη τετριμμένη λύση είναι λ -ιδιοσυνάρτηση. Τα Προβλήματα 1-5 καλούνται προβλήματα ιδιοτιμών. Σε αυτό το σημείο θα θεωρήσουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι πραγματικοί αριθμοί.

Θεώρημα 9.2.10 *Τα ΠΣΤ 1-5 έχουν μη μηδενικές ιδιοτιμές. Επίσης, $\lambda = 0$ είναι μια ιδιοτιμή των ΠΣΤ 2 και 5, με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $y_0 = 1$, αλλά $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή των ΠΣΤ 1, 3, ή 4.*

Απόδειξη Θεωρούμε τα ΠΣΤ 1-4, και αφήνουμε την απόδειξη για το ΠΣΤ 5 ως άσκηση στον αναγνώστη. Αν $y'' + \lambda y = 0$, τότε $y(y'' + \lambda y) = 0$, οπότε

$$\int_0^L y(x)(y''(x) + \lambda y(x)) dx = 0.$$

$$\lambda \int_0^L y^2(x) dx = - \int_0^L y(x)y''(x) dx. \quad (9.77)$$

Με παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^L y(x)y''(x) dx &= y(x)y'(x) \Big|_0^L - \int_0^L (y'(x))^2 dx \\ &= y(L)y'(L) - y(0)y'(0) - \int_0^L (y'(x))^2 dx. \end{aligned} \quad (9.78)$$

Όμως, αν y ικανοποιεί οποιαδήποτε από τις συνοριακές συνθήκες των ΠΣΤ 1-4, τότε

$$y(L)y'(L) - y(0)y'(0) = 0.$$

δηλ, (9.77) και (9.78) συνεπάγονται ότι

$$\lambda \int_0^L y^2(x) dx = \int_0^L (y'(x))^2 dx.$$

Αν $y \not\equiv 0$, τότε $\int_0^L y^2(x) dx > 0$. Συνεπώς, $\lambda \geq 0$ και, αν $\lambda = 0$, τότε $y'(x) = 0$ για όλα x στο $(0, L)$, και y είναι σταθερή στο $(0, L)$. Οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες του ΠΣΤ 2, οπότε $\lambda = 0$ είναι μια ιδιοτιμή του ΠΣΤ 2 και κάθε μη μηδενική σταθερή συνάρτηση είναι ιδιοσυνάρτηση. Όμως, η μόνη σταθερή συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες των Προβλημάτων 1, 3 ή 4 είναι $y \equiv 0$. Συνεπώς $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή κανενός από αυτά τα προβλήματα. \square

Παράδειγμα 9.2.8 (ΠΣΤ 1) Να λυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0. \quad (9.79)$$

Λύση Από το Θεώρημα 9.2.10, κάθε ιδιοτιμή του (9.79) πρέπει να είναι θετική. Αν y ικανοποιεί την (9.79) με $\lambda > 0$, τότε

$$y = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x,$$

και c_2 είναι σταθερές. Η συνοριακή συνθήκη $y(0) = 0$ δίνει $c_1 = 0$. Οπότε $y = c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$. Η συνοριακή συνθήκη $y(L) = 0$ συνεπάγεται ότι $c_2 \sin \sqrt{\lambda} L = 0$. Για να είναι $c_2 \neq 0$, πρέπει να διαλέξουμε εκείνες τις τιμές του $\sqrt{\lambda} = n\pi/L$, όπου n είναι θετικός ακέραιος. Συνεπώς $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ είναι ιδιοτιμή και

$$y_n = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση. \blacksquare

Διατυπώνουμε το παρακάτω θεώρημα που περιγράφει τις λύσεις των ΠΣΤ 1-5.

Θεώρημα 9.2.11 (i) Το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

έχει άπειρες το πλήθος θετικές ιδιοτιμές $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$y_n = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(ii) Το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

έχει την ιδιοτιμή $\lambda_0 = 0$, με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $y_0 = 1$, άπειρες το πλήθος

θετικές ιδιοτιμές $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$y_n = \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(iii) Το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

έχει άπειρες το πλήθος θετικές ιδιοτιμές $\lambda_n = (2n - 1)^2\pi^2/4L^2$, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$y_n = \sin \frac{(2n - 1)\pi x}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(iv) Το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

έχει άπειρες το πλήθος θετικές ιδιοτιμές $\lambda_n = (2n - 1)^2\pi^2/4L^2$, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$y_n = \cos \frac{(2n - 1)\pi x}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(v) Το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(-L) = y(L), \quad y'(-L) = y'(L),$$

έχει την ιδιοτιμή $\lambda_0 = 0$, με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $y_0 = 1$ και άπειρες το πλήθος θετικές ιδιοτιμές $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις

$$y_{1n} = \cos \frac{n\pi x}{L} \quad \text{και} \quad y_{2n} = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Παράδειγμα 9.2.9 (ΠΣΤ 5) Να λυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(-L) = y(L), \quad y'(-L) = y'(L). \quad (9.80)$$

Λύση Από το Θεώρημα 9.2.10, $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του (9.80) με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $y_0 = 1$, και οποιαδήποτε άλλη ιδιοτιμή πρέπει να είναι θετική. Αν y ικανοποιεί την (9.80) με $\lambda > 0$, τότε

$$y = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x, \quad (9.81)$$

όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές, οι οποίες θα προσδιοριστούν εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες. Η συνοριακή συνθήκη $y(-L) = y(L)$ δίνει μετά από απλές πράξεις:

$$c_2 \sin \sqrt{\lambda} L = 0. \quad (9.82)$$

Παραγωγίζοντας την (9.81) και εφαρμόζοντας τη συνοριακή συνθήκη $y'(-L) = y'(L)$, έχουμε

$$c_1 \sin \sqrt{\lambda} L = 0. \quad (9.83)$$

Οι εξισώσεις (9.82) και (9.83) συνεπάγονται ότι $c_1 = c_2 = 0$, εκτός αν $\sqrt{\lambda} = n\pi/L$ όπου n θετικός ακέραιος. Σε αυτή την περίπτωση οι (9.82) και (9.83) ισχύουν για αυθαίρετο c_1 και c_2 . Η ιδιοτιμή καθορίζεται από $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, και κάθε τέτοια ιδιοτιμή έχει γραμμικά ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις

$$\cos \frac{n\pi x}{L} \quad \text{και} \quad \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 9.2.10 Να γραφεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$y'' + 3y' + (2 + \lambda)y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0 \quad (9.84)$$

του Παραδείγματος 9.2.6 σε μορφή Sturm-Liouville προβλήματος.

Λύση Συγκρίνοντας την (9.84) με την (9.68), έχουμε ότι $u(x) = 3$, θεωρούμε $U(x) = 3x$ και $p(x) = e^{3x}$. Πολλαπλασιάζοντας τη ΔΕ στην (9.84) με e^{3x} έχουμε

$$e^{3x}(y'' + 3y') + 2e^{3x}y + \lambda e^{3x}y = 0, \quad \Leftrightarrow \quad e^{3x}(y'' + 3y') = (e^{3x}y)'$$

η ΔΕ (9.84) είναι ισοδύναμη με το Sturm-Liouville πρόβλημα

$$(e^{3x}y')' + 2e^{3x}y + \lambda e^{3x}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (9.85)$$

■

Παράδειγμα 9.2.11 Να γραφεί το πρόβλημα ιδιοτιμών

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 0 \quad (9.86)$$

σε μορφή Sturm-Liouville προβλήματος.

Λύση Διαιρώντας τη ΔΕ (9.86) με x^2 έχουμε

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{\lambda}{x^2}y = 0.$$

Συγκρίνοντας την τελευταία με τη (9.68) έχουμε ότι $u(x) = 1/x$, θεωρούμε $U(x) = \ln x$ και $p(x) = e^{\ln x} = x$. Πολλαπλασιάζοντας τη ΔΕ με x έχουμε

$$xy'' + y' + \frac{\lambda}{x}y = 0. \quad \Leftrightarrow \quad xy'' + y' = (xy)'$$

η ΔΕ (9.86) είναι ισοδύναμη με το Sturm-Liouville πρόβλημα

$$(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 0. \quad (9.87)$$



Παράδειγμα 9.2.12 Να επιλυθεί το Sturm-Liouville πρόβλημα

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) + y'(0) = 0, \quad y(1) + 3y'(1) = 0. \quad (9.88)$$

Λύση Αν $\lambda = 0$, η ΔΕ στο (9.88) ανάγεται στην $y'' = 0$, με γενική λύση $y = c_1 + c_2x$. Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες, έχουμε $c_1 = c_2 = 0$. Συνεπώς το μηδέν δεν είναι ιδιοτιμή για το (9.88).

Αν $\lambda < 0$, θεωρούμε $\lambda = -k^2$ με $k > 0$ και η ΔΕ στο (9.88) γίνεται $y'' - k^2y = 0$, η γενική λύση της οποίας είναι

$$y = c_1 \cosh kx + c_2 \sinh kx, \quad (9.89)$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$\begin{aligned} c_1 + kc_2 &= 0 \\ (\cosh k + 3k \sinh k)c_1 + (\sinh k + 3k \cosh k)c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.90)$$

Η ορίζουσα του αλγεβρικού συστήματος είναι

$$\begin{aligned} D_N(k) &= \begin{vmatrix} 1 & k \\ \cosh k + 3k \sinh k & \sinh k + 3k \cosh k \end{vmatrix} \\ &= (1 - 3k^2) \sinh k + 2k \cosh k. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το σύστημα (9.90) έχει μη τετριμμένη λύση, αν και μόνο αν $D_N(k) = 0$ ή, ισοδύναμα,

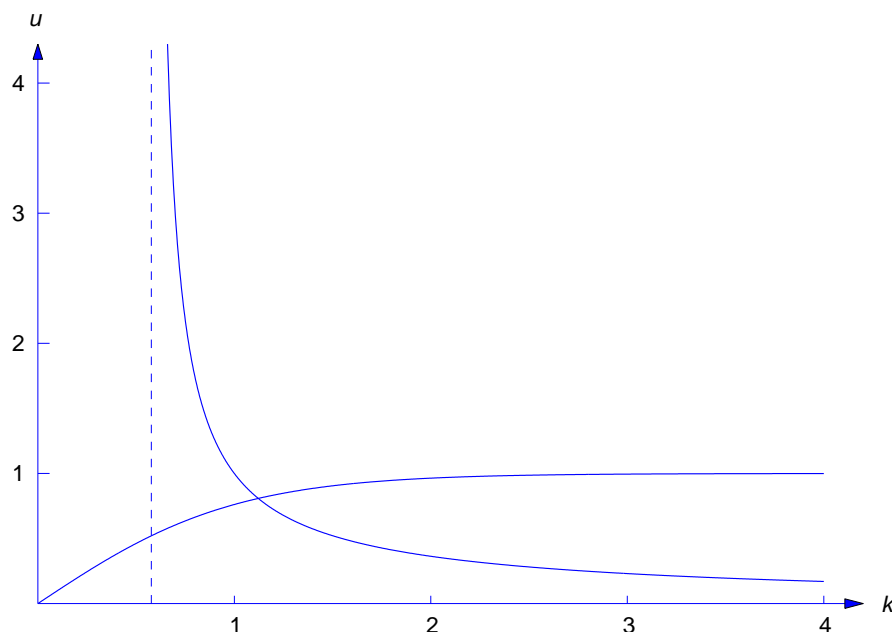
$$\tanh k = -\frac{2k}{1 - 3k^2}. \quad (9.91)$$

Το γράφημα της συνάρτησης στο δεξί μέρος (βλ. Σχήμα 9.12) έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη στο σημείο $k = 1/\sqrt{3}$. Οι συναρτήσεις $\tanh k$, $-\frac{2k}{1 - 3k^2}$ έχουν αντίθετα πρόσημα αν $k < 1/\sqrt{3}$, η υπερβατική εξίσωση δεν έχει λύση στο $(0, 1/\sqrt{3})$. Εύκολα φαίνεται ότι οι δύο καμπύλες τέμνονται κοντά στο $k_0 = 1.2$. Ξεκινώντας από αυτή την εκτίμηση, μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαναληπτική μέθοδο Newton (βλ. Β. Ρόθος & Χ. Σφυράκης 2011, κώδικας σε Maple) από όπου υπολογίζουμε ότι $k_0 \approx 1.1219395$. Συνεπώς $-k_0^2 \approx -1.2587483$ είναι μια ιδιοτιμή του (9.88). Από την (9.89) και την πρώτη εξίσωση της (9.90),

$$y_0 = k_0 \cosh k_0x - \sinh k_0x.$$

Αν $\lambda > 0$, θεωρούμε $\lambda = k^2$ με $k > 0$, και η ΔΕ στο (9.88) γίνεται $y'' + k^2y = 0$, με γενική λύση

$$y = \cos kx + c_2 \sin kx. \quad (9.92)$$



Σχήμα 9.12: $u = \tanh k$ και $u = -2k/(1 - 3k^2)$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες έχουμε ότι

$$\begin{aligned} c_1 + kc_2 &= 0 \\ (\cos k - 3k \sin k)c_1 + (\sin k + 3k \cos k)c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.93)$$

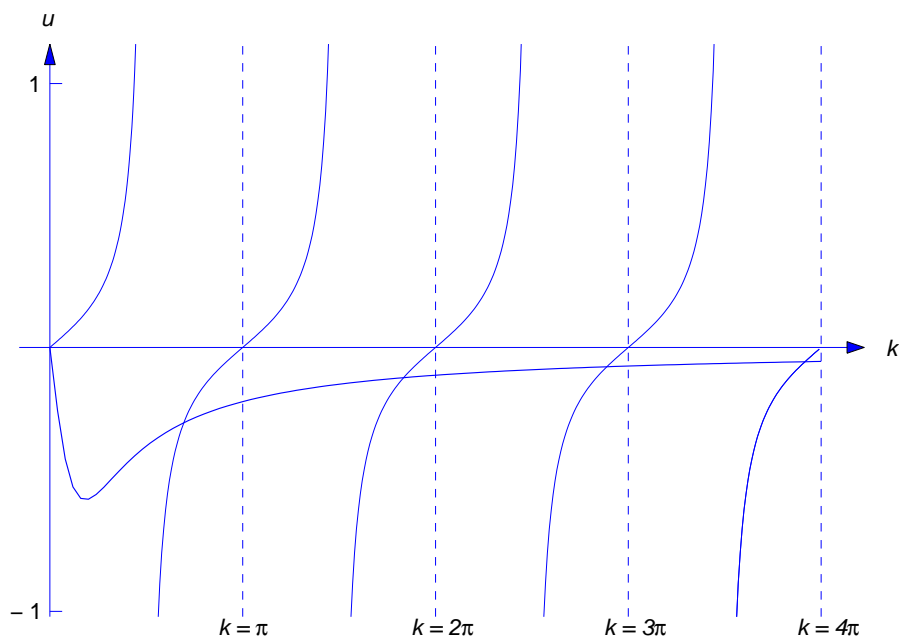
Η ορίζουσα του αλγεβρικού συστήματος είναι

$$\begin{aligned} D_P(k) &= \begin{vmatrix} 1 & k \\ \cos k - 3k \sin k & \sin k + 3k \cos k \end{vmatrix} \\ &= (1 + 3k^2) \sin k + 2k \cos k. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το σύστημα (9.93) έχει μη τετριμμένη λύση, αν και μόνο αν $D_P(k) = 0$ ή, ισοδύναμα,

$$\tan k = -\frac{2k}{1 + 3k^2}.$$

Στο Σχήμα 9.13 δείχνουμε τα γραφήματα των δύο μερών της υπερβατικής εξίσωσης. Όπως φαίνεται και από το σχήμα τα γραφήματα τέμνονται σε άπειρα το πλήθος σημεία $k_n \approx n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), όπου το σφάλμα στην πρόσεγγιση πλησιάζει το μηδέν καθώς $n \rightarrow \infty$. Μπορούμε με χρήση της αριθμητικής μεθόδου Newton (βλ. Β. Ρόθος & Χ. Σφυράκης 2011, κώδικας σε Maple) να υπολογίσουμε τα σημεία k_n με περισσότερη ακρίβεια. Έχουμε



Σχήμα 9.13: $u = \tan k$ και $u = -2k/(1+k)$.

υπολογίσει

$$\begin{aligned} k_1 &\approx 2.9256856, \\ k_2 &\approx 6.1765914, \\ k_3 &\approx 9.3538959, \\ k_4 &\approx 12.5132570. \end{aligned}$$

Οι εκτιμήσεις των αντίστοιχων ιδιοτιμών $\lambda_n = k_n^2$ είναι

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx 8.5596361, \\ \lambda_2 &\approx 38.1502809, \\ \lambda_3 &\approx 87.4953676, \\ \lambda_4 &\approx 156.5815998. \end{aligned}$$

Από τη σχέση (9.92) και την πρώτη εξίσωση της (9.93), έχουμε ότι η

$$y_n = k_n \cos k_n x - \sin k_n x$$

είναι η αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση στην ιδιοτιμή λ_n . ■

Θεώρημα 9.2.12 Αν $Ly = (p(x)y')' + q(x)y$ και u και v είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$ που ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες $B_1(y) = 0$ και $B_2(y) = 0$, τότε ο L είναι

συμμετρικός τελεστής, δηλαδή

$$\int_a^b [u(x)Lv(x) - v(x)Lu(x)] dx = 0. \quad (9.94)$$

Απόδειξη Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b [u(x)Lv(x) - v(x)Lu(x)] dx &= \int_a^b [u(x)(p(x)v'(x))' - v(x)(p(x)u'(x))'] dx \\ &= p(x)[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] \Big|_a^b \\ &\quad - \int_a^b p(x)[u'(x)v'(x) - u'(x)v'(x)] dx. \end{aligned}$$

Τα δύο τελευταία ολοκληρώματα είναι μηδέν

$$\int_a^b [u(x)Lv(x) - v(x)Lu(x)] dx = p(x)[u(x)v'(x) - u'(x)v(x)] \Big|_a^b. \quad (9.95)$$

Από τις υποθέσεις έχουμε, $B_1(u) = B_1(v) = 0$ και $B_2(u) = B_2(v) = 0$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \alpha u(a) + \beta u'(a) = 0 & \quad \text{και} \quad \rho u(b) + \delta u'(b) = 0 \\ \alpha v(a) + \beta v'(a) = 0 & \quad \rho v(b) + \delta v'(b) = 0, \end{aligned}$$

διότι $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ και $\rho^2 + \delta^2 > 0$, οι ορίζουσες των δύο συστημάτων πρέπει να είναι μηδέν,

$$u(a)v'(a) - u'(a)v(a) = u(b)v'(b) - u'(b)v(b) = 0.$$

Από την τελευταία συνθήκη και την (9.95) συνεπάγεται η (9.94). ■

Το επόμενο Θεώρημα αποδεικνύει ότι ένα Sturm-Liouville πρόβλημα δεν έχει μιγαδικές ιδιοτιμές, η απόδειξη απαιτεί να θεωρήσουμε μιγαδικές συναρτήσεις και είναι έξω από τους σκοπούς του παρόντος βιβλίου. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία (J.W. Brawn & d R. Churchill 1993, B. Rai & D. P. Choudhury, 2005)

Θεώρημα 9.2.13 Αν $\lambda = p + qi$ με $q \neq 0$, τότε το ΠΣΤ

$$Ly + \lambda r(x)y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0$$

έχει μοναδική λύση την τετριμμένη.

Θεώρημα 9.2.14 Αν λ_1 και λ_2 είναι διακριτές ιδιοτιμές του Sturm-Liouville προβλήματος

$$Ly + \lambda r(x)y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0 \quad (9.96)$$

με ιδιοσυναρτήσεις u και v αντίστοιχα, τότε

$$\int_a^b r(x)u(x)v(x) dx = 0. \quad (9.97)$$

Απόδειξη Αφού u και v ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες στην (9.96), από το Θεώρημα 9.2.12 συνεπάγεται ότι

$$\int_a^b [u(x)Lv(x) - v(x)Lu(x)] dx = 0.$$

Επίσης, $Lu = -\lambda_1 ru$ και $Lv = -\lambda_2 rv$, δηλαδή

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b r(x)u(x)v(x) dx = 0.$$

Αφού $\lambda_1 \neq \lambda_2$, συνεπάγεται η (9.97). ■

Αν u και v είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b r(x)u(x)v(x) dx = 0,$$

θα λέμε ότι u και v ορθογώνιες στο $[a, b]$ αναφορικά με $r = r(x)$.

Από το Θεώρημα 9.2.2 συνεπάγεται το ακόλουθο Θεώρημα.

Θεώρημα 9.2.15 *Αν $u \neq 0$ και v ικανοποιούν την*

$$Ly + \lambda r(x)y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0,$$

τότε $v = cu$ για κάποια σταθερά c .

Έχουμε αποδείξει ένα μέρος του επόμενου θεωρήματος, για την πλήρη απόδειξη βλέπε σχετική βιβλιογραφία (J.W. Brawn & d R. Churchill 1993, B. Rai & D. P. Choudhury, 2005)

Θεώρημα 9.2.16 *Το σύνολο όλων των ιδιοτιμών ενός Sturm-Liouville προβλήματος*

$$Ly + \lambda r(x)y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0$$

μπορεί να δηλωθεί

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty.$$

Για κάθε n , αν y_n είναι αυθαίρετη λ_n -ιδιοσυνάρτηση, τότε κάθε λ_n -ιδιοσυνάρτηση είναι πολλαπλάσια της y_n με μια σταθερά. Αν $m \neq n$, y_m και y_n είναι ορθογώνιες στο $[a, b]$

αναφορικά με τη συνάρτηση βάρους $r = r(x)$ έτσι είναι,

$$\int_a^b r(x)y_m(x)y_n(x) dx = 0. \quad (9.98)$$

Αφήνουμε ως άσκηση να επιβεβαιώσει ο αναγνώστης την (9.98) για τις ιδιοσυναρτήσεις που υπολογίστηκαν στα Παραδείγματα 9.2.6 και 9.2.10.

Γενικευμένες σειρές Fourier

Οι ιδιοσυναρτήσεις $\{y_n(x)\}$ ενός προβλήματος Sturm-Liouville, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, είναι ορθογώνιες μεταξύ τους σε κάποιο διάστημα I ως προς συγκεκριμένη συνάρτηση βάρους $r(x)$. Αποτελούν δε μια άπειρη ακολουθία συναρτήσεων που αντιστοιχεί στην άπειρη ακολουθία των ιδιοτιμών. Σε μερικές περιπτώσεις παρουσιάζεται η ανάγκη της παράστασης μιας συνάρτησης $f(x)$ ορισμένης στο I στη μορφή

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad x \in I. \quad (9.99)$$

Τα αναπτύγματα αυτά ονομάζονται *Γενικευμένες σειρές Fourier* ή *σειρές Sturm-Liouville*. Οι συντελεστές c_n αποτελούν τους *συντελεστές Sturm-Liouville* του αναπτύγματος. Οι $\{y_n(x)\}$ ικανοποιούν την συνθήκη ορθογωνιότητας:

Το επόμενο Θεώρημα μας δείχνει την μέθοδο να αναπτύσουμε μια τυχαία συνάρτηση σε σειρά ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις ενός Sturm-Liouville προβλήματος, και αποτελεί γενίκευση των σειρών Fourier. Για την απόδειξη του επόμενου Θεωρήματος βλ. (J.W. Brawn & d R. Churchill 1993),

$$\int_I r(x)y_n(x)y_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \neq 0, & m = n \end{cases} \quad (9.100)$$

Αρκετές φορές, είναι χρήσιμο, να γίνεται κατά τέτοιο τρόπο η επιλογή των ιδιοσυναρτήσεων, ώστε να ικανοποιούν συγχρόνως τη σχέση

$$\int_I r(x)y_n^2(x)dx = 1, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (9.101)$$

Η συνθήκη (9.101) αποτελεί τη *συνθήκη κανονικοποίησης* των ιδιοσυναρτήσεων. Τότε λέμε ότι, οι ιδιοσυναρτήσεις $\{y_n(x)\}$ αποτελούν ένα *ορθοκανονικό σύνολο* συναρτήσεων και η σχέση (9.100) γράφεται

$$\int_I r(x)y_n(x)y_m(x)dx = \delta_{n,m}$$

όπου $\delta_{n,m}$ το δ -σύμβολο του *Kronecker*

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Ορισμός 9.2.4 Η μη αρνητική ποσότητα

$$\|y_n(x)\|_I = \left(\int_I r(x) (y_n(x))^2 dx \right)^{1/2} \quad (9.102)$$

ονομάζεται *νόρμα* ή *στάθμη* της $y_n(x)$ ως προς τη συνάρτηση βάρους $r(x)$.

Έτσι, μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο $\{y_n(x)\}$ είναι ορθοκανονικό, αν ισχύει

$$\|y_n(x)\|_I = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Επίσης, αν $\{y_n(x)\}$ είναι ένα τυχαίο ορθογώνιο σύνολο, τότε το σύνολο $\{y_n(x)\} \|y_n(x)\|^{-1}$ αποτελεί το αντίστοιχο ορθοκανονικό σύνολο αυτού.

Παράδειγμα 9.2.13 Να βρεθούν οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις του ΠΣΤ

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0.$$

Λύση Από το Θεώρημα 9.2.11, γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 / L^2, \quad y_n = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Η συνάρτηση βάρους είναι $r(x) = 1$. Επομένως, για να ισχύει η σχέση (9.101), πρέπει να επιλεγούν λ_n , έτσι ώστε

$$\int_0^L \lambda_n^2 \left(\sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right)^2 dx = 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Όμως ισχύει,

$$\lambda_n^2 \int_0^L \left(\sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \right)^2 dx = \lambda_n^2 \frac{L}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Επομένως, θα πρέπει να επιλέξουμε $\lambda_n = \sqrt{2/L}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Άρα, οι ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος θα είναι

$$y_n = \sqrt{2/L} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Όπως και στις σειρές Fourier, για τον υπολογισμό των συντελεστών c_n του αναπτύγματος (9.99), θα κάνουμε χρήση της ορθογωνιότητας των $\{y_n(x)\}$. Για το σκοπό, αυτό πολλαπλασιάζουμε την (9.99) με την παράσταση $r(x) \{y_k(x)\}$ και ολοκληρώνουμε στο I , οπότε προκύπτει

$$\int_I r(x) y_k(x) f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_I r(x) y_k(x) y_n(x) dx = c_k \|y_k(x)\|_I^2,$$

αφού όλοι οι υπόλοιποι όροι ($n \neq k$), είναι μηδέν. Έτσι, έχουμε ότι, οι συντελεστές *Sturm-Liouville* της $f(x)$ δίνονται από τη σχέση:

$$c_n = \frac{\int_I r(x)y_k(x)f(x)dx}{\|y_k(x)\|_I^2}$$

Η θεωρία των γενικευμένων σειρών Fourier αναπτύσσεται αντίστοιχα με αυτή των απλών τριγωνομετρικών σειρών Fourier. Διατυπώνουμε το ακόλουθο θεώρημα σύγκλισης, για την απόδειξη του οποίου ο αναγνώστης παραπέμπεται στη βιβλιογραφία (J.W. Brawn & d R. Churchill 1993)

Θεώρημα 9.2.17 *Αν $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$ είναι ιδιοτιμές του *Sturm-Liouville* προβλήματος*

$$Ly + \lambda r(x)y = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0,$$

με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$. Υποθέτουμε ότι αν η f είναι τμηματικά ομαλή συνάρτηση (Ορισμός 9.1.3) στο $[a, b]$, τότε δέχεται το ακόλουθο ανάπτυγμα:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad x \in (a, b)$$

*όπου οι συντελεστές *Sturm-Liouville* δίνονται από τον τύπο*

$$c_n = \frac{\int_a^b r(x)f(x)y_n(x) dx}{\int_a^b r(x)y_n^2(x) dx}. \quad (9.103)$$

Το ανάπτυγμα συγκλίνει σημειακά στην $f(x)$, σε κάθε σημείο συνέχειας αυτής στο (a, b) και στην τιμή $f(x-) + f(x+)/2$ δηλαδή ισχύει

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x) \quad (9.104)$$

σε κάθε σημείο ασυνέχειας της $f(x)$ στο (a, b) .

Παράδειγμα 9.2.14 Να επιλυθεί το *Sturm-Liouville* πρόβλημα

$$y'' + y' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \quad (9.105)$$

Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = 1, 0 < x < 1$ ως προς τις ιδιοσυναρτήσεις του ΠΣΤ.

Λύση

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ του ΠΣΤ (9.105) είναι $r^2 + r + \lambda = 0$ με ρίζες $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm ik$ όπου $k^2 = \lambda - 1/4$. Έτσι, η γενική λύση της ΔΕ είναι

$$y(x) = e^{-x/2} (c_1 \cos kx + c_2 \sin kx)$$

Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει

$$c_1 = 0, \quad \text{και} \quad c_2 e^{-1/2} \sin k = 0$$

Επομένως, για $c_2 \neq 0$ θα πρέπει $k_n = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις θα είναι

$$y_n(x) = e^{-x/2} \sin(n\pi x), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 9.2.17, θα πρέπει να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση βάρους $r(x)$ ώστε να γράψουμε τη ΔΕ στην μορφή $Ly + \lambda r(x)y = 0$. Παρατηρούμε αν πολλαπλασιάσουμε τη ΔΕ με e^x

$$e^x y'' + e^x y' + \lambda e^x y = 0 \quad (9.106)$$

Έτσι βλέπουμε ότι η συνάρτηση βάρους είναι $r(x) = e^x > 0$. Έχουμε, λοιπόν, από την σχέση (9.103)

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\int_a^b r(x) f(x) y_n(x) dx}{\int_a^b r(x) y_n^2(x) dx} = \frac{\int_0^1 e^x f(x) \sin(n\pi x) dx}{\int_0^1 e^x (e^{-x/2} \sin(n\pi x))^2 dx} \\ &= 2 \int_0^1 e^{-x/2} \sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{2n\pi}{n^2\pi^2 + \frac{1}{4}} [(-1)^{n-1} e^{1/2} + 1], \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9.107)$$

Γι' αυτό το σύνολο ιδιοσυναρτήσεων, το ανάπτυγμα της $f(x)$ θα δίνεται από:

$$f(x) = e^{-x/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n\pi}{4n^2\pi^2 + 1} [(-1)^{n-1} e^{1/2} + 1] \sin(n\pi x), \quad x \in (0, 1)$$

9.2 Ασκήσεις προς επίλυση

Στις Ασκήσεις 1-4 να βρείτε έναν γενικό τύπο για τη λύση του ΠΣΤ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 9.2.4. Υποθέτουμε ότι $a < b$.

1. $y'' - y = F(x), \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0$
2. $y'' - y = F(x), \quad y(a) = 0, \quad y'(b) = 0$

3. $y'' - y = F(x)$, $y'(a) = 0$, $y'(b) = 0$
 4. $y'' - y = F(x)$, $y(a) - y'(a) = 0$, $y(b) + y'(b) = 0$

Στις Ασκήσεις 5-8 να βρείτε όλες τις τιμές του ω για τις οποίες το ΠΣΤ έχει μοναδική λύση, και να λύσετε το ΠΣΤ με τη χρήση του Θεωρήματος 9.2.4. Για άλλες τιμές του ω , να βρείτε τις συνθήκες που πρέπει να πληρεί η F έτσι ώστε το ΠΣΤ να έχει λύση, και να βρείτε τη λύση με χρήση του Θεωρήματος 9.2.5.

5. $y'' + \omega^2 y = F(x)$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$
 6. $y'' + \omega^2 y = F(x)$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$
 7. $y'' + \omega^2 y = F(x)$, $y'(0) = 0$, $y(\pi) = 0$
 8. $y'' + \omega^2 y = F(x)$, $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$
 9. Να βρείτε τη συνάρτηση Green για το ΠΣΤ

$$y'' = F(x), \quad y(0) - 2y'(0) = 0, \quad y(1) + 2y'(1) = 0. \quad (\text{A})$$

Με χρήση της συνάρτησης Green να λυθεί το (A) με **(a)** $F(x) = 1$, **(b)** $F(x) = x$ και **(c)** $F(x) = x^2$.

10. Να βρείτε τη συνάρτηση Green για το ΠΣΤ

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = F(x), \quad y(\pi/2) = 0, \quad y(\pi) = 0, \quad (\text{A})$$

όπου

$$y_1(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \quad \text{και} \quad y_2(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

είναι λύσεις της ομογενούς ΔΕ. Να λυθεί το (A) με χρήση της συνάρτησης Green για **(a)** $F(x) = x^{3/2}$ και **(b)** $F(x) = x^{5/2}$.

11. Να βρείτε τη συνάρτηση Green για το ΠΣΤ

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = F(x), \quad y(1) = 0, \quad y(2) = 0, \quad (\text{A})$$

όπου $\{x, x^2\}$ είναι το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς ΔΕ. Να λυθεί το (A) με χρήση της συνάρτησης Green για **(a)** $F(x) = 2x^3$ και **(b)** $F(x) = 6x^4$.

12. Να βρείτε τη συνάρτηση Green για το ΠΣΤ

$$x^2 y'' + xy' - y = F(x), \quad y(1) - 2y'(1) = 0, \quad y'(2) = 0, \quad (\text{A})$$

όπου $\{x, 1/x\}$ είναι το θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς ΔΕ. Να λυθεί το (A) με χρήση της συνάρτησης Green για **(a)** $F(x) = 1$, **(b)** $F(x) = x^2$, και **(c)** $F(x) = x^3$.

Στις Ασκήσεις 13-15 να βρείτε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για α , β , ρ , και δ έτσι το αντίστοιχο ΠΣΤ να έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε συνάρτηση F , και να βρεθεί η συνάρτηση Green.

13. $y'' = F(x), \quad \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \quad \rho y(1) + \delta y'(1) = 0$
 14. $y'' + y = F(x), \quad \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \quad \rho y(\pi) + \delta y'(\pi) = 0$
 15. $y'' - 2y' + 2y = F(x), \quad \alpha y(0) + \beta y'(0) = 0, \quad \rho y(\pi/2) + \delta y'(\pi/2) = 0$

Στις Ασκήσεις 16-22 να γράψετε την ΔΕ σε Sturm-Liouville μορφή (με $\lambda = 0$). Υποθέτουμε ότι b, c, α , και ν είναι σταθερές.

16. $y'' + by' + cy = 0$
 17. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ (ΔΕ Bessel)
 18. $(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$ (ΔΕ Chebyshev)
 19. $x^2 y'' + bxy' + cy = 0$ (ΔΕ Euler)
 20. $y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$ (ΔΕ Hermite)
 21. $xy'' + (1 - x)y' + \alpha y = 0$ (ΔΕ Laguerre)
 22. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$ (ΔΕ Legendre)
 23. Να λυθεί το Sturm-Liouville πρόβλημα

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) + \delta y'(L) = 0.$$

24. Να λυθεί το Sturm-Liouville πρόβλημα

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) + \alpha y'(0) = 0, \quad y(\pi) + \alpha y'(\pi) = 0,$$

όπου $\alpha \neq 0$.

25. Να λυθεί το Sturm-Liouville πρόβλημα

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) + \alpha y'(0) = 0, \quad y(1) + (\alpha - 1)y'(1) = 0, \quad (\text{A})$$

όπου $0 < \alpha < 1$.

Στις Ασκήσεις 26-30 να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις των ΠΣΤ.

26. $y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$
 27. $y'' 2y' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < L, \quad y'(0) = y'(L) = 0.$
 28. $(xy')' + \lambda x^{-1}y = 0, \quad 1 < x < b, \quad y'(1) = 0, y(b) = 0$
 29. $y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1 \quad y(0) = 0, y'(1) = 0$
 30. $y'' - 2y' + (1 + \lambda)y = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$
 31. Να βρεθούν οι γενικευμένες σειρές Fourier των ακόλουθων συναρτήσεων ως προς τα αντίστοιχα Sturm-Liouville προβλήματα:

$$f(x) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0.$$

$$f(x) = x, \quad 1 \leq x \leq b, \quad (xy')' + \lambda x^{-1}y = 0, \quad y(1) = y(b) = 0.$$

$$f(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (e^x y')' + \lambda e^x y = 0, \quad y(0) = y(a) = 0.$$

$$f(x) = 1 + x, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad y'' + 4\lambda y = 0, \quad y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi).$$

$$f(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y'' - 3y' + 2\lambda y = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = 0.$$

$$f(x) = x^2, \quad 0 < x < L, \quad y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(L) = 0.$$

Βιβλιογραφία

- N. Αλικάκος, & Γ.Η.Καλογερόπουλος, 2003. *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα.
- Π. Σιαφαρίκας, 2002 *Εφαρμογές των Σ.Δ.Ε., Τόμος I*, Πάτρα.
- N. Σταυρακάκης, 2011 *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις: γραμμική και μη γραμμική θεωρία από τη φύση και τη ζωή*, Παπασωτηρίου, Αθήνα.
- W.E Boyce, & R.C. DiPrima, 2001 *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 7th edn. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- B. Μ. Ρόθος, X. Α. Σφυράκης, 2011 *Λογισμός μιας Μεταβλητής* Εκδόσεις Αφοι Βλάσσοι, Αθήνα.
- L. Brand, 1984 *Μαθηματική Ανάλυση*, Ε.Μ.Ε.
- J.W. Brawn & d R. Churchill 1993. *Fourier Series and Boundary Value Problems* (5th edition), McGraw-Hill Int. Ed. NY.
- H. B. Keller (1992). *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value Problems*. New York: Dover.
- J. E. Marsden & M. J. Hoffman, 1993 *Elementary Classical Analysis*, 2nd Ed., W. H. Freeman, New York.
- B. Rai & D. P. Choudhury, 2005 *Ordinary Differential Equations, An introduction*, Alpha Science, International Ltd.
- W. F. Trenc, 2013 *Elementary Differential Equations*, Books and Monographs, Trinity University.
- P. Waltman, 1986, *A second Course in Elementary Differential Equations*, Academic Press, Inc. NY.

Παράρτημα Α΄

Τυπολόγιο Μετασχηματισμού Laplace

$$f(t) \quad \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

$$1 \quad \frac{1}{s} \quad (1)$$

$$e^{at} f(t) \quad F(s-a) \quad (2)$$

$$\mathcal{U}(t-a) \quad \frac{e^{-as}}{s} \quad (3)$$

$$f(t-a)\mathcal{U}_a(t) \quad e^{-as}F(s) \quad (4)$$

$$\delta(t) \quad 1 \quad (5)$$

$$\delta(t-t_0) \quad e^{-st_0} \quad (6)$$

$$t^n f(t) \quad (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n} \quad (7)$$

$$f'(t) \quad sF(s) - f(0) \quad (8)$$

$$f^n(t) \quad s^n F(s) - s^{(n-1)}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (9)$$

$$f \star g \quad F(s)G(s) \quad (10)$$

$$t^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (11)$$

$$t^x \quad (x \geq -1) \quad \frac{\Gamma(x+1)}{s^{x+1}} \quad (12)$$

$$\sin kt \quad \frac{k}{s^2 + k^2} \quad (13)$$

$$\cos kt \quad \frac{s}{s^2 + k^2} \quad (14)$$

$$e^{at} \quad \frac{1}{s-a} \quad (15)$$

$$\sinh kt \quad \frac{k}{s^2 - k^2} \quad (16)$$

$$\cosh kt \quad \frac{s}{s^2 - k^2} \quad (17)$$

$$\frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b} \quad \frac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (18)$$

$$\frac{ae^{at} - be^{bt}}{a-b} \quad \frac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (19)$$

$$te^{at} \quad \frac{1}{(s-a)^2} \quad (20)$$

$$t^n e^{at} \quad \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (21)$$

$$e^{at} \sin kt \quad \frac{k}{(s-a)^2 + k^2} \quad (22)$$

$$e^{at} \cos kt \quad \frac{s-a}{(s-a)^2 + k^2} \quad (23)$$

$$e^{at} \sinh kt \quad \frac{k}{(s-a)^2 - k^2} \quad (24)$$

$$e^{at} \cosh kt \quad \frac{s-a}{(s-a)^2 - k^2} \quad (25)$$

$$t \sin kt \quad \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2} \quad (26)$$

$$t \cos kt \quad \frac{s^2 - k^2}{(s^2 + k^2)^2} \quad (27)$$

$$t \sinh kt \quad \frac{2ks}{(s^2 - k^2)^2} \quad (28)$$

$$t \cosh kt \quad \frac{s^2 - k^2}{(s^2 - k^2)^2} \quad (29)$$

$$\frac{\sin at}{t} \quad \arctan \frac{a}{s} \quad (30)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t} \quad \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \quad (31)$$

$$\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t} \quad e^{-a\sqrt{s}} \quad (32)$$

$$\operatorname{erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right) \quad \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \quad (33)$$

Παράρτημα Β΄

Τυπολόγιο Ολοκληρωμάτων

Βασικοί Τύποι

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (\text{B}' .1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad (\text{B}' .2)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{B}' .3)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad (\text{B}' .4)$$

Ολοκληρώματα Ρητών Συναρτήσεων

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \quad (\text{B}' .5)$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1 \quad (\text{B}' .6)$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{B}' .7)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \quad (\text{B}' .8)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (\text{B}' .9)$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \quad (\text{B}' .10)$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (\text{B}' .11)$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} a^2 \ln |a^2+x^2| \quad (\text{B}' .12)$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \quad (\text{B'.13})$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \frac{a+x}{b+x}, \quad a \neq b \quad (\text{B'.14})$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2} dx = \frac{a}{a+x} + \ln |a+x| \quad (\text{B'.15})$$

$$\int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac - b^2}} \tan^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \quad (\text{B'.16})$$

Ολοκληρώματα με Ριζικά

$$\int \sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} \quad (\text{B'.17})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x \pm a}} dx = 2\sqrt{x \pm a} \quad (\text{B'.18})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}} dx = -2\sqrt{a-x} \quad (\text{B'.19})$$

$$\int x\sqrt{x-a} dx = \frac{2}{3}a(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2} \quad (\text{B'.20})$$

$$\int \sqrt{ax+b} dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3} \right) \sqrt{ax+b} \quad (\text{B'.21})$$

$$\int (ax+b)^{3/2} dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{5/2} \quad (\text{B'.22})$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x \pm a}} dx = \frac{2}{3}(x \mp 2a)\sqrt{x \pm a} \quad (\text{B'.23})$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx = -\sqrt{x(a-x)} - a \tan^{-1} \frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \quad (\text{B'.24})$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}} dx = \sqrt{x(a+x)} - a \ln [\sqrt{x} + \sqrt{x+a}] \quad (\text{B'.25})$$

$$\int x\sqrt{ax+b} dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2 + abx + 3a^2x^2)\sqrt{ax+b} \quad (\text{B'.26})$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)} dx = \frac{1}{4a^{3/2}} \left[(2ax+b)\sqrt{ax(ax+b)} - b^2 \ln |a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}| \right] \quad (\text{B'.27})$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)}dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3} \right] \sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}} \ln \left| a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)} \right| \quad (\text{B'.28})$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \quad (\text{B'.29})$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (\text{B'.30})$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2} \quad (\text{B'.31})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \quad (\text{B'.32})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} \quad (\text{B'.33})$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \quad (\text{B'.34})$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad (\text{B'.35})$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \quad (\text{B'.36})$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}dx = \frac{b + 2ax}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a^{3/2}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| \quad (\text{B'.37})$$

$$\int x\sqrt{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{48a^{5/2}} \left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} \times (-3b^2 + 2abx + 8a(c + ax^2)) + 3(b^3 - 4abc) \ln \left| b + 2ax + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c} \right| \right) \quad (\text{B'.38})$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| \quad (\text{B'.39})$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{a} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \frac{b}{2a^{3/2}} \ln \left| 2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| \quad (\text{B'.40})$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} \quad (\text{B'.41})$$

Ολοκληρώματα με Λογαριθμικές συναρτήσεις

$$\int \ln ax dx = x \ln ax - x \quad (\text{B'.42})$$

$$\int \frac{\ln ax}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln ax)^2 \quad (\text{B'.43})$$

$$\int \ln(ax + b) dx = \left(x + \frac{b}{a} \right) \ln(ax + b) - x, a \neq 0 \quad (\text{B'.44})$$

$$\int \ln(x^2 + a^2) dx = x \ln(x^2 + a^2) + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a} - 2x \quad (\text{B'.45})$$

$$\int \ln(x^2 - a^2) dx = x \ln(x^2 - a^2) + a \ln \frac{x+a}{x-a} - 2x \quad (\text{B'.46})$$

$$\int \ln(ax^2 + bx + c) dx = \frac{1}{a} \sqrt{4ac - b^2} \tan^{-1} \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a} + x \right) \ln(ax^2 + bx + c) \quad (\text{B'.47})$$

$$\int x \ln(ax + b) dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{b^2}{a^2} \right) \ln(ax + b) \quad (\text{B'.48})$$

$$\int x \ln(a^2 - b^2 x^2) dx = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{a^2}{b^2} \right) \ln(a^2 - b^2 x^2) \quad (\text{B'.49})$$

Ολοκληρώματα με Εκθετικές Συναρτήσεις

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} \quad (\text{B'.50})$$

$$\int \sqrt{x} e^{ax} dx = \frac{1}{a} \sqrt{x} e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \operatorname{erf}(i\sqrt{ax}),$$

$$\text{where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (\text{B'.51})$$

$$\int x e^x dx = (x-1)e^x \quad (\text{B'.52})$$

$$\int x e^{ax} dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax} \quad (\text{B'.53})$$

$$\int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2) e^x \quad (\text{B'.54})$$

$$\int x^2 e^{ax} dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) e^{ax} \quad (\text{B'.55})$$

$$\int x^3 e^x dx = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) e^x \quad (\text{B'.56})$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx \quad (\text{B'.57})$$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \Gamma[1+n, -ax],$$

$$\text{where } \Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt \quad (\text{B'.58})$$

$$\int e^{ax^2} dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(ix\sqrt{a}) \quad (\text{B'.59})$$

$$\int e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) \quad (\text{B'.60})$$

$$\int x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \quad (\text{B'.61})$$

$$\int x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \operatorname{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a} e^{-ax^2} \quad (\text{B'.62})$$

Ολοκληρώματα με Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax \quad (\text{B'.63})$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (\text{B'.64})$$

$$\int \sin^n ax dx =$$

$$-\frac{1}{a} \cos ax {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax\right] \quad (\text{B'.65})$$

$$\int \sin^3 ax dx = -\frac{3 \cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \quad (\text{B'.66})$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax \quad (\text{B'.67})$$

$$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \quad (\text{B'.68})$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)} \cos^{1+p} ax \times \\ {}_2F_1 \left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax \right] \quad (\text{B'.69})$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3 \sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \quad (\text{B'.70})$$

$$\int \cos ax \sin bxdx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \quad (\text{B'.71})$$

$$\int \sin^2 ax \cos bxdx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} \\ + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (\text{B'.72})$$

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \quad (\text{B'.73})$$

$$\int \cos^2 ax \sin bxdx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} \\ - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \quad (\text{B'.74})$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax \quad (\text{B'.75})$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bxdx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} \\ + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \quad (\text{B'.76})$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \quad (\text{B'.77})$$

$$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax \quad (\text{B'.78})$$

$$\int \tan^2 ax dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax \quad (\text{B'.79})$$

$$\int \tan^n ax dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax\right) \quad (\text{B'}.80)$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax \quad (\text{B'}.81)$$

$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1}\left(\tan \frac{x}{2}\right) \quad (\text{B'}.82)$$

$$\int \sec^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax \quad (\text{B'}.83)$$

$$\int \sec^3 x dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \quad (\text{B'}.84)$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x \quad (\text{B'}.85)$$

$$\int \sec^2 x \tan x dx = \frac{1}{2} \sec^2 x \quad (\text{B'}.86)$$

$$\int \sec^n x \tan x dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0 \quad (\text{B'}.87)$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \ln |\csc x - \cot x| + C \quad (\text{B'}.88)$$

$$\int \csc^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax \quad (\text{B'}.89)$$

$$\int \csc^3 x dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| \quad (\text{B'}.90)$$

$$\int \csc^n x \cot x dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0 \quad (\text{B'}.91)$$

$$\int \sec x \csc x dx = \ln |\tan x| \quad (\text{B'}.92)$$

Γινόμενα Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων με Μονώνυμο

$$\int x \cos x dx = \cos x + x \sin x \quad (\text{B'}.93)$$

$$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax \quad (\text{B'}.94)$$

$$\int x^2 \cos x dx = 2x \cos x + (x^2 - 2) \sin x \quad (\text{B'}.95)$$

$$\int x^2 \cos ax dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax \quad (\text{B'}.96)$$

$$\int x^n \cos x dx = -\frac{1}{2}(i)^{n+1} [\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)] \quad (\text{B'.97})$$

$$\int x^n \cos ax dx = \frac{1}{2}(ia)^{1-n} [(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, iax)] \quad (\text{B'.98})$$

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x \quad (\text{B'.99})$$

$$\int x \sin ax dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \quad (\text{B'.100})$$

$$\int x^2 \sin x dx = (2-x^2) \cos x + 2x \sin x \quad (\text{B'.101})$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2-a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} \quad (\text{B'.102})$$

$$\int x^n \sin x dx = -\frac{1}{2}(i)^n [\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, ix)] \quad (\text{B'.103})$$

Γινόμενα Τριγωνομετρικών με Εκθετικές Συναρτήσεις

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \quad (\text{B'.104})$$

$$\int e^{bx} \sin ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax) \quad (\text{B'.105})$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \quad (\text{B'.106})$$

$$\int e^{bx} \cos ax dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax) \quad (\text{B'.107})$$

$$\int x e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - x \cos x + x \sin x) \quad (\text{B'.108})$$

$$\int x e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (x \cos x - \sin x + x \sin x) \quad (\text{B'.109})$$

Ολοκληρώματα Υπερβολικών Συναρτήσεων

$$\int \cosh ax dx = \frac{1}{a} \sinh ax \quad (\text{B'.110})$$

$$\int e^{ax} \cosh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cosh bx - b \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} + \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (\text{B'.111})$$

$$\int \sinh ax dx = \frac{1}{a} \cosh ax \quad (\text{B'.112})$$

$$\int e^{ax} \sinh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [-b \cosh bx + a \sinh bx] & a \neq b \\ \frac{e^{2ax}}{4a} - \frac{x}{2} & a = b \end{cases} \quad (\text{B'.113})$$

$$\int e^{ax} \tanh bxdx = \begin{cases} \frac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)} {}_2F_1 \left[1 + \frac{a}{2b}, 1, 2 + \frac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] \\ \quad - \frac{1}{a} e^{ax} {}_2F_1 \left[\frac{a}{2b}, 1, 1E, -e^{2bx} \right] & a \neq b \\ \frac{e^{ax} - 2 \tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \quad (\text{B'.114})$$

$$\int \tanh ax dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax \quad (\text{B'.115})$$

$$\int \cos ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [a \sin ax \cosh bx + b \cos ax \sinh bx] \quad (\text{B'.116})$$

$$\int \cos ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cos ax \cosh bx + a \sin ax \sinh bx] \quad (\text{B'.117})$$

$$\int \sin ax \cosh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [-a \cos ax \cosh bx + b \sin ax \sinh bx] \quad (\text{B'.118})$$

$$\int \sin ax \sinh bxdx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cosh bx \sin ax - a \cos ax \sinh bx] \quad (\text{B'.119})$$

$$\int \sinh ax \cosh ax dx = \frac{1}{4a} [-2ax + \sinh 2ax] \quad (\text{B'.120})$$

$$\int \sinh ax \cosh bxdx = \frac{1}{b^2 - a^2} [b \cosh bx \sinh ax - a \cosh ax \sinh bx] \quad (\text{B'.121})$$

Παράρτημα Γ΄

Πίνακας Συντομεύσεων και Ακρωνυμίων

- Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις ΣΔΕ
- Διαφορικές Εξισώσεις ΔΕ
- Προβλήματα Αρχικών Τιμών ΠΑΤ
- Προβλήματα Συνοριακών Τιμών ΠΣΤ
- Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις ΜΔΕ

Κατάλογος Πινάκων

4.1	Αριθμητική λύση της $y' + 2y = x^3e^{-2x}$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο του Euler .	85
4.2	Σφάλματα της προσεγγιστικής λύσης της $y' + 2y = x^3e^{-2x}$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο του Euler.	86
4.3	Αριθμητική λύση του $y' = -2y^2 + xy + x^2$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο του Euler.	87
4.4	Σφάλματα της προσεγγιστικής λύσης της $y' = -2y^2 + xy + x^2$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο του Euler.	87
4.5	Αριθμητική επίλυση της $y' - 2xy = 1$, $y(0) = 3$, με τη μέθοδο του Euler.	90
4.6	Αριθμητική επίλυση της $y' - 2y = x/(1 + y^2)$, $y(1) = 7$, με τη μέθοδο του Euler.	91
4.7	Αριθμητική επίλυση της $y' + 3x^2y = 1 + y^2$, $y(2) = 2$, με τη μέθοδο του Euler	91
4.8	Αριθμητική επίλυση του $y' + 2y = x^3e^{-2x}$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο του Euler και τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler	98
4.9	Αριθμητική επίλυση του $y' = -2y^2 + xy + x^2$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο του Euler και τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler	98
4.10	Αριθμητική επίλυση του $y' - 2xy = 1$, $y(0) = 3$, με τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler	99
4.11	Αριθμητική επίλυση της $y' - 2xy = 1$, $y(0) = 3$, με τη μέθοδο του Euler.	99
4.12	Αριθμητική λύση του $y' + 2y = x^3e^{-2x}$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο Runge-Kutta και τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler	110
4.13	Αριθμητική λύση του $y' = -2y^2 + xy + x^2$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο Runge-Kutta και τη Βελτιωμένη μέθοδο του Euler	111
4.14	Αριθμητική λύση του $y' - 2xy = 1$, $y(0) = 3$, με τη μέθοδο Runge-Kutta .	111
4.15	Αριθμητική λύση του $y' = y$, $y(0) = 1$, με τη μέθοδο Euler, Βελτιωμένη Euler, Runge-Kutta και με λύση $y = e^x$	115

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για $y' = \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}$	9
1.2	Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για $y' = 1 + xy^2$	10
1.3	Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για $y' = \frac{x - y}{1 + x^2}$	10
2.1	Λύσεις της $xy' + y = 0$ στο $(0, \infty)$ και $(-\infty, 0)$	18
2.2	Λύση του ΠΑΤ $y' + (\cot x)y = x \csc x, y(\pi/2) = 1$	21
2.3	Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για τη ΔΕ $y' = \frac{2x + 1}{5y^4 + 1}$	29
2.4	Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για τη ΔΕ $y' = 2xy^2$	30
2.5	Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για την $y' = \frac{x(1 - y^2)}{2}$	31
2.6	Το πεδίο διευθύνσεων και οι ολοκληρωτικές καμπύλες της $y' - y = xy^2$	34
2.7	Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για την $y' = \frac{y + xe^{-y/x}}{x}$	36
2.8	Το πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για την $x^2y' = y^2 + xy - x^2$	37
2.9	Λύσεις για την $x^2y' = y^2 + xy - x^2, y(1) = 2$	37
2.10	Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για $(4x^3y^3 + 3x^2) dx + (3x^4y^2 + 6y^2) dy = 0$	44
2.11	Πεδίο διευθύνσεων και ολοκληρωτικές καμπύλες για τη ΔΕ $(2xy^3 - 2x^3y^3 - 4xy^2 + 2x) dx + (3x^2y^2 + 4y) dy = 0$	47
2.12	Πεδίο διευθύνσεων και τις ολοκληρωτικές καμπύλες για την $(3xy + 6y^2) dx + (2x^2 + 9xy) dy = 0$	49
2.13	Ορθογώνιες Καμπύλες τέμνονται σε σημείο.	55
2.14	Ορθογώνιες Οικογένειες Κύκλων και ευθειών.	56
2.15	(a) Οι κύκλοι $(x - c)^2 + y^2 = c^2$ (b) Οι κύκλοι $x^2 + (y - h)^2 = h^2$	58
3.1	Σχηματική παράσταση της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1.1.	71
5.1	(a) $y > 0$ (b) $y = 0$, (c) $y < 0$	182
5.2	Σύστημα ελατήριο-μάζα με απώλειες.	182
5.3	Το RLC κύκλωμα.	185
6.1	Προσέγγιση της $y = e^x$ με το πολυώνυμο Taylor στο $x = 0$	199

7.1	Συνεχής συνάρτηση	236
7.2	Κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση στο $[a, b]$	236
7.3	$y = u(t - \tau)$	252
7.4	Η κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση (7.43).	254
7.5	Η κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση (7.46).	256
7.6	$y = f_h(t)$	270
7.7	μία εικονογράφηση του Θεωρήματος 7.6.1	273
7.8	$y = u(t - t_0)(t - t_0)e^{-(t-t_0)}$	274
7.9	Το γράφημα της (7.89).	275
7.10	Το γράφημα της (7.91).	275
8.1	Συζευγμένα Ελατήρια	280
8.2	Διάνυσμα θέσης υλικού σημείου	282
8.3	Τροχιές ενός 2×2 συστήματος με θετικές ιδιοτιμές.	304
8.4	Τροχιές ενός 2×2 συστήματος με αρνητικές ιδιοτιμές.	304
8.5	Δύο αρνητικές ιδιοτιμές, κίνηση προς την αρχή των αξόνων.	305
8.6	Δύο ιδιοτιμές θετικές, απομάκρυνση από την αρχή των αξόνων.	306
8.7	Ετερόσημες ιδιοτιμές.	307
8.8	Θετικά και αρνητικά ημι-επίπεδα.	314
8.9	Θετική ιδιοτιμή; οι τροχιές απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων.	315
8.10	Θετική ιδιοτιμή, οι τροχιές απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων.	315
8.11	Αρνητική ιδιοτιμή, οι τροχιές πλησιάζουν την αρχή των αξόνων.	315
8.12	Αρνητική ιδιοτιμή, οι τροχιές πλησιάζουν την αρχή των αξόνων.	315
8.13	Τροχιές εγκάρσια δεξιοστροφως.	320
8.14	Τροχιές εγκάρσια αριστεροστροφως.	320
8.15	$\alpha > 0$, σκιάδη τροχιά απομακρύνεται σπειρωειδώς από την αρχή των αξόνων.	321
8.16	$\alpha > 0$, σκιάδη τροχιά απομακρύνεται σπειρωειδώς από την αρχή των αξόνων.	321
8.17	$\alpha < 0$, σκιάδη τροχιά έλκεται σπειρωειδώς από την αρχή των αξόνων.	322
8.18	$\alpha < 0$, σκιάδη τροχιά έλκεται σπειρωειδώς από την αρχή των αξόνων.	322
9.1	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f του Παραδείγματος 9.1.2.	352
9.2	Προσέγγιση της $f(x)$ με μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier στο $[-2, 2]$	354
9.3	Προσέγγιση της $f(x) = x^2 - x$ με μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier στο $[-2, 2]$	356
9.4	Προσέγγιση της $f(x) = x$ με μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier στο $[-\pi, \pi]$	358
9.5	Φαινόμενο Gibbs: Παράδειγμα 9.1.7, $N = 10$	361
9.6	Φαινόμενο Gibbs : Παράδειγμα 9.1.7, $N = 20$	361
9.7	Φαινόμενο Gibbs : Παράδειγμα 9.1.7, $N = 30$	362
9.8	Άρτια επέκταση της $f(x)$	363
9.9	Περιττή επέκταση της $f(x)$	364
9.10	$y = f(x)$, όπου $f(x + L) = f(x)$, $-L < x < 0$	365
9.11	$y = f(x)$, όπου $f(x + L) = -f(x)$, $-L < x < 0$	365

9.12	$u = \tanh k$ και $u = -2k/(1 - 3k^2)$	399
9.13	$u = \tan k$ και $u = -2k/(1 + k)$	400

Ευρετήριο

- Euler , 81
- Euler's Method, 81
- Power Series, 193
- Runge-Kutta , 106
- Ορθογώνιες Οικογένειες Καμπυλών, 53
- άρτια συνάρτηση, 354
- συνθήκες Dirichlet, 393
- συνθήκες Neumann, 393
- Cauchy-Euler
 - ε-προσεγγιστική λύση , 69
 - Προσεγγιστική Μέθοδος , 69
- error, 84
- Euler's Method, 82
- Picard
 - Επαναληπτική Μέθοδος, 72
- roundoff errors, 84
- Sturm-Liouville, 389
- truncation errors, 84
- Ακτίνα Σύγκλησης, 193
- Ανοικτό Διάστημα Σύγκλησης, 193
- Αρμονική ταλάντωση, 117
- Βελτιωμένη Μέθοδο του Euler , 102
- Βελτιωμένη μέθοδος του Euler , 95
- Διαφορικές Εξισώσεις
 - Legendre , 191
 - Χωριζομένων Μεταβλητών, 15
 - Bernoulli, 33
 - Bessel , 191
 - Cauchy-Euler, 69
 - Picard, 69
 - Riccati, 34
 - Ακριβείς, 15, 41
- Αυτόνομη, 3
- Βαθμός ΔΕ, 2
- Γενική Λύση Γραμμικής 1ης τάξης, 16
- Γραμμικές 1ης τάξης, 15
- Γραμμική, 2, 15
- Εφαρμογές, 15
 - Ανατοκισμός, 60
 - Διάσπαση Ραδιενεργών Ισοτόπων, 60
 - Νόμος ψύξης του Νεύτωνα, 61
 - Οριακή Ταχύτητα, 61
 - Πληθυσμιακές δυναμικές, 60
 - Ταχύτητα Διαφυγής, 63
- Μη Γραμμικές, 15
- Μη Ομογενείς, 2
- Ολοκληρωτικός Παράγοντας, 15, 44
- Ομογενείς, 2
- Ομογενείς Γραμμικές 1ης τάξης, 17
- Τάξη, 2
- Υπαρξη και Μοναδικότητα Λύσεων, 69
- μεταβολής των σταθερών, 19
- ολοκληρωτική καμπύλη, 4
- πεδίο διευθύνσεων , 8
- χωριζομένων μεταβλητών, 27
- Διαφορική Εξίσωση, 81
 - Chebyshev , 213
 - Hermite , 213
- Δυναμικές Σειρές, 192, 193
- Δυναμική Σειρά, 193
- Εξίσωση Airy, 117
- Εξίσωση Bessel, 117
- Εξίσωση Chebyshev, 117
- Εξίσωση Euler, 117, 145
- Εξίσωση Hermite, 117
- Εξίσωση Legendre, 117
- Εξίσωση του Airy , 191
- Μέθοδος του Heun , 102

- Μέθοδος του μέσου σημείου, 102
- Μετασχηματισμός Laplace, 230
- αντίστροφος, 240
 - εκθετικής τάξης, 237
 - ιδιότητες
 - γραμμικότητα, 233
 - ιδότητες
 - μετατόπισης, 234
 - συνάρτηση Dirac, 269
 - συνάρτηση Heaviside, 251
 - μετατόπιση, 256
 - συνέλιξη, 264
 - ολοκλήρωμα συνέλιξης, 265
- Ομαλά Sturm-Liouville, 393
- Ορίζουσα Wronski, 128
- Πεπλεγμένη μέθοδος του Euler, 94
- Πλαγίως τεμνόμενες οικογένειες καμπυλών, 57
- Προβλήματα Συνοριακών Τιμών, 345
- Πρόβλημα Αρχικών Τιμών, 5, 82
- Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών, 382
- Σ.Δ.Ε., 81
- Σειρά Maclaurin, 195
- Σειρά Taylor, 195
- Σειρές Fourier, 345, 349
- Συνάρτηση Green, 386
- Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, 81
- Συντελεστές Fourier, 349
- Συστήματα ΔΕ, 284
- διάγραμμα φάσης, 303
 - Εκθετικός Πίνακας, 328
 - Μεταβολή των Παραμέτρων, 337
 - Μη Ομογενή, 336
 - Σημείο
 - Ασταθής Εστία, 319
 - Ασταθής Κόμβος, 306
 - Ευσταθής Εστία, 320
 - Ευσταθής Κόμβος, 304
 - Κέντρο, 319
 - Σαγματικό, 306
 - γενική λύση, 290
 - επίπεδο φάσης, 303
 - θεμελιώδης πίνακας, 293
 - θεμελιώδες σύνολο λύσεων, 290
 - κανονικές μορφές Jordan, 328
 - ορίζουσα Wronski, 292
 - χαρακτηριστικό πολυώνυμο, 297
- ανισότητα Bessel, 345, 370
- ανώμαλο σημείο, 209
- αυτοσυζυγή μορφή ΔΕ, 391
- επέκταση συνάρτησης, 361
- άρτια, 361
 - περιοδική, 362
 - περιττή, 362
- θεμελιώδες σύνολο, 122
- ιδιοσυνάρτηση, 389
- ιδιοτιμή, 389
- ομαλό σημείο, 209
- ορίζουσα Wronski, 123
- περιττή συνάρτηση, 354
- σειρές Sturm-Liouville, 403
- συνθήκη Lipschitz, 72, 88
- συνοριακές συνθήκες, 382
- σφάλμα, 84
- σφάλματα αποκοπής, 84
- σφάλματα στρογγυλοποίησης, 84
- τάξη, 89
- ταυτότητα Parseval, 345, 371
- τύπος του Abel, 123
- φαινόμενο Gibbs, 352
- χαρακτηριστικό πολυώνυμο, 132