Σημειώσεις Διαφορικών Εξισώσεων

Οι σημειώσεις αυτές είναι μέρος του βιβλίου Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομολόγους και Μηχανικούς

Χρησιμοποιούμε το ελεύθερο μαθηματικό λογισμικό Geogebra για υπολογισμούς.

Μπορείτε να στείλετε παρατηρήσεις στην ηλεκτρονική διεύθυνση Νίκος Χαλιδιάς.

Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (συνήθης διαφορική εξίσωση). Περιγραφή του Προβλήματος

Το πρόβλημα επίλυσης μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης με αρχική συνθήκη είναι το παρακάτω.

Να βρεθεί μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $y(t)$ τέτοια ώστε

$$y^{'}(t) = f(t, y(t)), \tag{1}$$

όπου f μια δοθείσα συνάρτηση δύο μεταβλητών. Η εξίσωση 1 μαζί με την,

$$y(t_0) = y_0, \tag{2}$$

όπου $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, ορίζουν, όπως λέμε, ένα **πρόβλημα αρχικών τιμών** (Π.Α.Τ.)

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 *Κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $y = \phi(t)$, που ικανοποιεί την εξίσωση 1 και την αρχική συνθήκη 2 για όλα τα t σε κάποιο διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$ το οποίο περιέχει το t_0, καλείται λύση.*

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε το πρόβλημα επίλυσης μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης.

Να βρεθεί μια συνεχής συνάρτηση $y(t)$ τέτοια ώστε

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds, \tag{3}$$

όπου f μια δοθείσα συνάρτηση δύο μεταβλητών. Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται ολοκληρωτική εξίσωση.

Ισοδυναμία των δυο προβλημάτων

Θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(t, y)$ είναι συνεχής ως συνάρτηση δυο μεταβλητών. Ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, όπως οι 1 και 2, είναι ισοδύναμο με μια ολοκληρωτική εξίσωση με την έννοια ότι κάθε λύση του ενός είναι και λύση του άλλου. Πράγματι, ολοκληρώνοντας την 1 στο διάστημα $[t_0, t]$ λαμβάνουμε την εξίσωση

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \tag{4}$$

αφού η $f(t, y(t))$ είναι ολοκληρώσιμη ως συνεχής. Αντίστροφα, αν μια συνεχής συνάρτηση $y(t)$ ικανοποιεί την 4 τότε προφανώς και τα δυο μέλη είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις και επομένως παραγωγίζοντας κατά μέλη προκύπτει η εξίσωση 1.

Υπαρξη και Μοναδικότητα Λύσης

Το πρώτο βασικό ερώτημα για ένα Π.Α.Τ είναι κάτω από ποιες συνθήκες υπάρχει μοναδική λύση $y(t)$, που ικανοποιεί δηλαδή την διαφορική εξίσωση και την αρχική συνθήκη. Για τον σκοπό αυτό θα δώσουμε το παρακάτω θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 *Ένα Π.Α.Τ. επιδέχεται τουλάχιστον μια λύση όταν η $f(t, y)$ είναι συνεχής σε μια περιοχή του (t_0, y_0) η οποία ορίζεται σε μια περιοχή του t_0 ενώ αν επιπλέον η παράγωγος $f_y(t, y)$ είναι φραγμένη σε μια περιοχή του (t_0, y_0) τότε η λύση είναι μοναδική.*

Ένα Π.Α.Τ. μπορεί να έχει δυο λύσεις ή και περισσότερες!

Ένα κλασικό παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης που δεν έχει μοναδική λύση είναι το επόμενο Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} y^{'}(t) &= \sqrt{y(t)}, \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

Προφανώς, μια λύση του Π.Α.Τ. είναι η ταυτοτικά μηδενική συνάρτηση, δηλαδή η $y_1(t) = 0$ ενώ μια ακόμη λύση είναι η

$$y_2(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4}, & \text{όταν } t \geq 0 \\ 0, & \text{όταν } t \leq 0 \end{cases}$$

Το συγκεκριμένο Π.Α.Τ. δεν έχει μοναδική λύση διότι η f_y δεν είναι φραγμένη σε καμία περιοχή της αρχικής συνθήκης, δηλαδή στο σημείο $(0, 0)$, ενώ η f είναι συνεχής παντού. Η συνέχεια της f αρκεί για την ύπαρξη μιας τουλάχιστον λύσης ενώ για την μοναδικότητα απαιτείται κάτι παραπάνω, όπως το να είναι φραγμένη η παράγωγος f_y σε μια περιοχή των αρχικών συνθηκών.

Γραμμικές ΣΔΕ Πρώτης Τάξης

Αν η συνάρτηση f στην εξίσωση (3.1) εξαρτάται γραμμικώς από την εξαρτημένη μεταβλητή y, τότε η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής,

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \tag{5}$$

και λέγεται γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης. Η λύση της όμως μπορεί να είναι μια οποιαδήποτε μη γραμμική συνάρτηση. Η ονομασία λοιπόν προκύπτει από το γεγονός ότι το δεξί μέλος της εξίσωσης είναι γραμμική συνάρτηση του y.

Υποθέτουμε ότι οι p, g είναι δοθείσες συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα $a < t < b$. Για παράδειγμα η διαφορική εξίσωση,

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2},$$

είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με $p(t) = \frac{1}{2}, g(t) = \frac{3}{2}$.

Σε οποιαδήποτε διαφορική εξίσωση, πριν προχωρήσουμε στην εύρεση της λύσης, πρέπει να εφαρμόσουμε το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας ;;. Στην συγκεκριμένη περίπτωση η $f(t, y) = g(t) - p(t)y$ η οποία είναι συνεχής ως προς t σε ένα διάστημα όπου και οι δυο συναρτήσεις $p(t), g(t)$ είναι συνεχείς. Ως προς την μεταβλητή y είναι συνεχής παντού ενώ η παράγωγος f_y θα είναι φραγμένη σε κάθε φραγμένο χωρίο αν αντίστοιχα είναι οι συναρτήσεις p, g.

Θα προχωρήσουμε τώρα στο να βρούμε μια διαδικασία επίλυσης της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Παρατηρήστε καταρχάς ότι αν $p(t) = 0$ τότε πολύ εύκολα λύνουμε την εξίσωση 5 ολοκληρώνοντας κατά μέλη. Έχουμε,

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{dt} dt &= \int g(t) dt \Rightarrow \\ y(t) &= \int g(t) dt. \end{aligned}$$

Αρα, είναι λογικό να σκεφτεί κανείς πως και στην γενική περίπτωση που το $p(t) \neq 0$ θα υπάρχει ενδεχομένως κάποιος τρόπος, έτσι ώστε να καταλήξω σε μια λύση της 5 ολοκληρώνοντας μια ποσότητα.

Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια $\mu(t) \neq 0$ τέτοια ώστε,

$$\left(\mu(t)y(t)\right)' = \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y(t). \tag{6}$$

Αν μπορώ να βρω μια τέτοια μ τότε πολλαπλασιάζω την 5 με αυτή και θα αντικαταστήσω το αριστερό μέλος της 5 με την ποσότητα $\left(\mu(t)y(t)\right)'$. Έπειτα θα ολοκληρώσω κατά μέλη και τέλος θα λύσω ως προς y.

Η εξίσωση 6 γίνεται,

$$\begin{aligned}
\mu^{'}(t)y(t)+\mu(t)y^{'}(t) &= \mu(t)y^{'}(t)+\mu(t)p(t)y(t) \Rightarrow \\
\mu^{'}(t)y(t) &= \mu(t)p(t)y(t) \Rightarrow \\
(\mu^{'}(t)-\mu(t)p(t))y(t) &= 0.
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε,

$$\mu^{'}(t)=\mu(t)p(t),$$

διαιρώντας με $y(t)\neq 0$.

Η τελευταία εξίσωση είναι μια απλή διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την μ. Λύνεται ως εξής,

$$
\begin{aligned}
\frac{\mu^{'}(t)}{\mu(t)} &= p(t) \Rightarrow \\
\int \frac{\mu^{'}(t)}{\mu(t)} dt &= \int p(t) dt \Rightarrow \\
\ln|\mu(t)| &= \int p(t) dt \Rightarrow \\
\mu(t) &= e^{\int p(t) dt},
\end{aligned}
$$

Καταλήξαμε σε μια μ με την οποία θα πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη την εξίσωση 5. Τότε αυτή γίνεται,

$$\begin{aligned} \mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y &= \mu(t)g(t) \Rightarrow \\ \left(\mu(t)y(t)\right)' &= \mu(t)g(t), \end{aligned}$$

λάβαμε υπόψη μας την εξίσωση 6 την οποία ικανοποιεί πια η μ.

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη την τελευταία εξίσωση έχουμε,

$$\begin{aligned} \mu(t)y(t) &= \int \mu(t)g(t)dt + c \Rightarrow \\ y(t) &= \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)}, \end{aligned}$$

παρατηρήστε ότι μπορούμε να διαιρέσουμε με $\mu(t)$ διότι είναι διάφορη του μηδέν για όλα τα $t \in \mathbb{R}$.

Καταλήξαμε στην λύση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης. Παρατηρήστε ότι δεν έχουμε μόνο την διαδικασία εύρεσης λύσης αλλά και την ίδια την λύση σε κλειστή μορφή η οποία δίνεται από τον εξής τύπο,

$$y(t) = \frac{\int \mu(t) g(t) dt + c}{\mu(t)} \tag{7}$$

Η φόρμουλα αυτή ισχύει για κάθε γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης. Δυστυχώς, αυτό δεν συμβαίνει με όλες τις διαφορικές εξισώσεις που μπορεί να συναντήσει κάποιος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3 *Υπολογίστε την λύση στο παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{2}y &= e^{-t} \\ y(0) &= -1 \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ. Παρατηρούμε ότι $p(t) = -\frac{1}{2}, g(t) = e^{-t}$. Πριν προχωρήσουμε στο να υπολογίσουμε την λύση πρέπει να μιλήσουμε για την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης και σε ποιο διάστημα. Βλέπουμε ότι οι p, g είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}$ και ότι βέβαια το $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$. Αρα ικανοποιείται το θεώρημα ;; και υπάρχει μοναδική λύση η οποία ορίζεται σε οποιοδήποτε διάστημα (a, b) που περιέχει το 0. Γνωρίζοντας έναν τρόπο για να υπολογίζουμε μια λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης και έχοντας επιπλέον την πληροφορία ότι είναι μοναδική από το θεώρημα ;;, είμαστε σίγουροι ότι υπολογίζουμε την μία και μοναδική και άρα δεν μας ενδιαφέρει ο τρόπος υπολογισμού. Δηλαδή μπορεί ακόμη και να την μαντέψει κάποιος και στην συνέχεια να επαληθεύσει ότι πράγματι πρόκειται για λύση χωρίς να χάσει καθόλου από την απαιτούμενη μαθηματική αυστηρότητα.

Θα υπολογίσουμε το $\mu(t) = e^{\int p(t)dt} = e^{\int (-\frac{1}{2})dt} = e^{-\frac{t}{2}}$. Έπειτα θα υπολογίσουμε το εξής ολοκλήρωμα,

$$\int \mu(t)g(t)dt = \int e^{-\frac{t}{2}}e^{-t}dt = \int e^{-\frac{3}{2}t}dt = -\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t}.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο 7 έχουμε την μορφή της γενικής λύσης η οποία είναι

$$y(t) = \frac{-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t} + c}{e^{-\frac{t}{2}}} = -\frac{2}{3}e^{-t} + ce^{\frac{t}{2}}$$

Τέλος για να υπολογίσουμε την λύση του Π.Α.Τ. έχουμε ότι

$$y(0) = -1 \Rightarrow -\frac{2}{3}e^{-0} + ce^{\frac{0}{2}} = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{3}.$$

Δηλαδή η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι,

$$y(t) = -\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}.$$

Για να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα θα πρέπει να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $y(t)$ και στην συνέχεια να σχηματίσουμε την $y^{'}(t) - \frac{1}{2}y(t)$. Η ποσότητα αυτή θα πρέπει να είναι ίση με e^{-t}. Ταυτόχρονα θα πρέπει να ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 *Να υπολογισθεί η λύση του παρακάτω προβλήματος αρχικών τιμών,*

$$\begin{aligned} ty' + 2y &= 4t^2 \\ y(1) &= 2. \end{aligned}$$

Εξισώσεις Bernoulli

Οι διαφορικές εξισώσεις Bernoulli είναι της μορφής,

$$y^{'} + a(t)y = b(t)y^{r}, \quad r \neq 0, 1. \tag{8}$$

Αν $r = 0$ ή $r = 1$ τότε είναι πολύ εύκολο να δει κανείς ότι η παραπάνω διαφορική εξίσωση είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Όμως με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό θα αποδείξουμε ότι στην πραγματικότητα για οποιοδήποτε r μετασχηματίζεται σε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

Είναι προφανές ότι μια λύση είναι η μηδενική συνάρτηση. Θα υπολογίσουμε στην συνέχεια και τις μη μηδενικές. Θέτουμε $z(t) = y^{1-r}(t)$. Υπολογίζουμε την παράγωγο του z και έχουμε $z^{'}(t) = (1-r)y^{-r}y^{'}$. Στην συνέχεια πολλαπλασιάζω με $(1-r)y^{-r}$ την εξίσωση 8 και παίρνω όπως εύκολα μπορεί να δει κανείς την εξής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με άγνωστη συνάρτηση την z,

$$z^{'} + (1-r)a(t)z = b(t)(1-r). \tag{9}$$

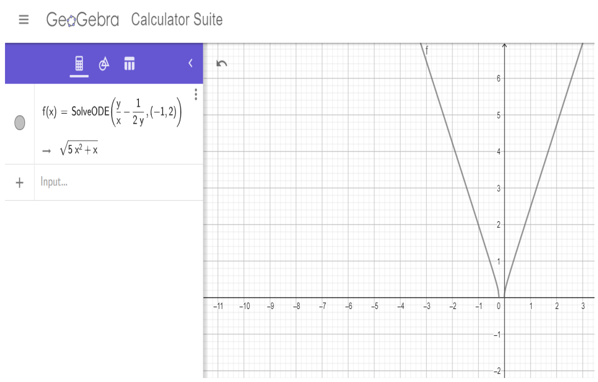
Λύνουμε την παραπάνω γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση και στην συνέχεια αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό και έχουμε $y(t) = z^{\frac{1}{1-r}}(t)$. Επομένως η γενική λύση της Bernoulli δίνεται από την οικογένεια συναρτήσεων $y(t) = z^{\frac{1}{1-r}}(t)$ και την $y(t) = 0$. Αρα σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με μοναδική λύση θα εξετάσουμε πρώτα αν η μηδενική συνάρτηση είναι η μοναδική λύση και αν όχι θα υπολογίσουμε την κατάλληλη σταθερά έτσι να βρούμε ποια ακριβώς συνάρτηση από την οικογένεια συναρτήσεων $y(t) = z^{\frac{1}{1-r}}(t)$ είναι η μοναδική λύση. Στην συνέχεια επιβεβαιώνουμε ότι πράγματι αποτελεί λύση του προβλήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5 *Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών,*

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{t-2}y &= 7(t-2)^2 y^{\frac{1}{2}} \\ y(3) &= 1. \end{aligned}$$

Παραδειγμα 6 *Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών,*

$$
\begin{aligned}
y^{'} - \frac{1}{t}y &= -\frac{1}{2y}, \\
y(-1) &= 2.
\end{aligned}
$$



Σχήμα 1: Επίλυση της $y^{'} = \frac{y}{x} - \frac{1}{2y}$, $y(-1) = 2$ με το Geogebra (δες παράδειγμα 6).

Διαφορικές Εξισώσεις Riccati

Θα λέμε μια διαφορική εξίσωση ότι είναι μια διαφορική εξίσωση Riccati αν μπορούμε να την φέρουμε στην μορφή,

$$y^{'} + a(t)y + b(t)y^2 + d(t) = 0. \tag{10}$$

Βλέπουμε ότι αν $d(t) = 0$ τότε έχουμε στην πραγματικότητα μια Bernoulli με $r = 2$. Για να λυθεί μια τέτοια διαφορική εξίσωση καλό είναι να γνωρίζουμε εκ των προτέρων μια ειδική λύση της. Ας την ονομάσουμε y_1. Κάνοντας τον μετασχηματισμό $z(t) = \frac{1}{y-y_1}$ καταλήγουμε σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (ας σημειώσουμε εδώ ότι $z(t) \neq 0$).

Πραγματικά, από αυτόν τον μετασχηματισμό έχω, $y = y_1 + \frac{1}{z}$ και $y^{'} = y_1^{'} - \frac{1}{z^2}z^{'}$ και αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση έχουμε,

$$
\begin{aligned}
& y_1^{'} - \frac{1}{z^2}z^{'} + a(t)(y_1 + \frac{1}{z}) + b(t)(y_1 + \frac{1}{z})^2 + d(t) = 0 \Rightarrow \\
& \Big(y_1^{'} + a(t)y_1 + b(t)y_1^2 + d(t)\Big) - \frac{1}{z^2}z^{'} \\
& + a(t)\frac{1}{z} + 2b(t)y_1\frac{1}{z} + b(t)\frac{1}{z^2} = 0.
\end{aligned}
$$

Στην τελευταία ισότητα, ο πρώτος όρος είναι μηδέν, γιατί η y_1 δεχθήκαμε ότι είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης. Από τους υπόλοιπους όρους βγάζουμε κοινό παράγοντα το $-\frac{1}{z^2}$ και καταλήγουμε, κάνοντας κάποιες πολύ εύκολες πράξεις, στην γραμμική διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την z,

$$
z^{'} - (a(t) + 2b(t)y_1)z = b(t) \tag{11}
$$

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, λύνουμε την γραμμική διαφορική εξίσωση και έπειτα αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό παίρνουμε την γενική λύση της Riccati η οποία είναι $y(t) = y_1(t) + \frac{c}{z(t)}$ όπου $c \in \mathbb{R}$ μια αυθαίρετη σταθερά. Στην συνέχεια επιβεβαιώνουμε ότι πράγματι αποτελεί λύση του προβλήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 *Να μελετηθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών για διάφορες τιμές των* x_0, y_0,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2 \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

αν γνωρίζουμε ότι μια μερική λύση είναι της μορφής $y_1(x) = \frac{a}{x}$ *με* $a \in \mathbb{R}$.

Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζομένων Μεταβλητών

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις λεγόμενες διαχωρίσιμες διαφορικές εξισώσεις. Η γενική της μορφή είναι η εξής,

$$y^{'} = A(t)B(y) \tag{12}$$

Από την μορφή της καταλαβαίνουμε αμέσως γιατί ονομάζονται διαχωρίσιμες διαφορικές εξισώσεις. Το δεξί μέλος γράφεται σαν γινόμενο δύο συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Η πρώτη εξαρτάται από την μεταβλητή t και η δεύτερη από την εξαρτημένη μεταβλητή y. Αυτή ακριβώς την ιδιότητα θα εκμεταλλευτούμε για την επίλυσή της.

Μεταφέρουμε την ποσότητα που εξαρτάται από το y στο αριστερό μέλος. Έτσι έχουμε,

$$\frac{y^{'}(t)}{B(y(t))} = A(t) \tag{13}$$

Τώρα δεν έχουμε παρά να ολοκληρώσουμε κατά μέλη, οπότε το αποτέλεσμα είναι,

$$\int \frac{y^{'}(t)}{B(y(t))}dt = \int A(t)dt \Rightarrow h(y(t)) = g(t) + c.(14)$$

Αυτή θα είναι και η λύση, σε πεπλεγμένη μορφή εν γένει. Στην συνέχεια επιβεβαιώνουμε ότι πράγματι αποτελεί λύση του προβλήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8 *Να λυθεί η επόμενη διαφορική εξίσωση,*

$$(5y^4 + 3)y^{'} = t.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9 *Να λυθεί η επόμενη διαφορική εξίσωση,*

$$2t(y^2(t) + y(t)) + (t^2 - 1)y(t)y^{'}(t) = 0.$$

Παραδειγμα 10 *Να λυθεί το επόμενο πρόβλημα αρχικών τιμών,*

$$\begin{aligned}(y^2(t)-1)+y(t)(t-1)y^{'}(t) &= 0,\\ y(0) &= -2.\end{aligned}$$

Η προσεγγιστική μέθοδος του Euler

Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε την απλούστερη προσεγγιστική (αριθμητική) μέθοδο η οποία ονομάζεται η μέθοδος του Euler. Με αυτή την μέθοδο θα είμαστε σε θέση να προσεγγίζουμε την ακριβή λύση σε σημεία μέσα σε ένα διάστημα $[a, b]$.

Θα περιγράψουμε στην συνέχεια πως προκύπτει η μέθοδος του Euler και έπειτα θα αποδείξουμε ότι συγκλίνει στην ακριβή λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} y'(t) &= f(t, y(t)), \quad a \leq t \leq b \\ y(a) &= y_0 \end{aligned}$$

Διαμερίζουμε το διάστημα $[a, b]$ με τα σημεία $a = t^0 < t^1 < \cdots < t^N = b$. Για ευκολία υποθέτουμε ομοιόμορφο διαμερισμό, δηλαδή $t^i - t^{i-1} = h > 0$ για κάθε $i = 1, \cdots, N$. Η μέθοδος του Euler είναι ο παρακάτω αναδρομικός τύπος

$$y^{n+1} = y^n + hf(t^n, y^n), \quad n = 0, 1, \cdots, N-1,$$

όπου $y^0 = y_0$ (`μέθοδος του Euler`).

Η ακριβής λύση προφανώς ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση στα σημεία $t^0, \cdots, t^N$ άρα

$$y^{'}(t^n) = f(t^n, y(t^n)) \quad \text{για κάθε } n = 0, 1, \cdots, N$$

Μπορούμε να προσεγγίσουμε την παράγωγο $y^{'}(t^n)$ με το πηλίκο

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h}$$

Με τον τρόπο αυτόν προκύπτει η μέθοδος του Euler.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11 *Έστω ότι η συνάρτηση* $f \in C([a,b] \times \mathbb{R})$ *ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$\exists L \geq 0 \; \forall t \in [a,b] \; \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$
$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Αν $y \in C^2([a,b])$ *είναι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών τότε για τις τιμές της μεθόδου του Euler* $y^0, \cdots, y^N$ *ισχύει*

$$\max_{0 \leq n \leq N} |y(t^n) - y^n| \leq \frac{M}{2L}\left(e^{L(b-a)} - 1\right) h$$

όπου $h = \frac{b-a}{N}$ *και* $M = \max\limits_{a \leq t \leq b} |y''(t)|$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12 *Ας δούμε ως παράδειγμα την διαφορική εξίσωση*

$$y^{'}(t) + \frac{y(t)}{t-2} = 7(t-2)^2\sqrt{y(t)}, \quad y(3) = 1$$

Γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση η οποία είναι η $y(t) = (t-2)^6$. *Με την προσεγγιστική μέθοδο του Euler μπορούμε να προσεγγίσουμε την λύση στα σημεία* $t_1, t_2, \cdots, t_n$ *που ανήκουν σε ένα διάστημα που μας ενδιαφέρει. Ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρει να έχουμε τιμές της λύσης στο διάστημα* $[3,4]$ *και στα σημεία* $t_1 = 3+1/4$, $t_2 = 3+2/4$, $t_3 = 3+3/4$ *και* $t_4 = 4$. *Επιλέγουμε δηλαδή το* $h = 1/4$. *Όπως περιγράψαμε παραπάνω, οι προσεγγιστικές τιμές της λύσης θα δοθούν μέσω της αναδρομικής ακολουθίας*

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y(t_n)), \quad n = 0, 1, 2, 3$$

όπου $f(t,y) = 7(t-2)^2\sqrt{y(t)} - \frac{y(t)}{t-2}$ *και* $t_0 = 3$. *Στον παρακάτω πίνακα καταγράφουμε τις τιμές από την εφαρμογή του παραπάνω αναδρομικού τύπου. Στην συνέχεια μπορούμε να αποτυπώσουμε τα σημεία* $(t, y(t))$ *στον* $\mathbb{R}^2$ *και ενώνοντάς τα με γραμμές να έχουμε το* *προσεγγιστικό γράφημα της λύσης. Παρόμοιους πίνακες μπορούμε να κατασκευάσουμε για οποιοδήποτε βήμα* h *επιλέξουμε σχηματίζοντας έτσι προσεγγιστικά γραφήματα της λύσης τα οποία είναι ολοένα (καθώς το* h *μικραίνει) πιο κοντά στο γράφημα της πραγματικής λύσης.*

t	$y(t)$
3.25	2.5
3.5	6.32
3.75	15.16
4	33.87

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 13 *Στη περίπτωση στην οποία θέλουμε να προσεγγίσουμε τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης σε ένα διάστημα της μορφής* $[-a, -x_0]$ *όπου η αρχική συνθήκη δίνεται στο* x_0 *και* $a > x_0$ *τότε λόγω του θεωρήματος Taylor θα έχουμε*

$$y(t-h) = y(t) + (t-h-t)y^{'}(t) + (t-h-t)^2 \frac{y^{''}(\xi)}{2!}$$

όπου $\xi \in (t-h, t)$. *Αυτό σημαίνει ότι για* h *αρκετά* *μικρό θα έχουμε ότι*

$$y'(t) \backsimeq \frac{y(t-h) - y(t)}{-h}$$

Δηλαδή σε αυτή τη περίπτωση η ακολουθία θα είναι

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) - hf(t, y(t_n))$$

Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Δεύτερης Τάξης με Σταθερούς Συντελεστές

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης στις οποίες θα εμπλέκεται και η δεύτερη παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης. Συγκεκριμένα, θα ασχοληθούμε με γραμμικές εξισώσεις δεύτερης τάξης των οποίων η τυπική μορφή είναι η εξής

$$y^{''} + p(t)y^{'} + q(t)y = g(t). \tag{15}$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια ομογενής γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης, όταν $g(t) = 0$, ενώ λέγεται μη ομογενής, αν $g(t) \neq 0$. Η εξίσωση 15 μαζί με τις συνθήκες

$$y(t_0) = y_0, \;\; y^{'}(t_0) = y_1, \tag{16}$$

αποτελούν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, όπως και στις εξισώσεις πρώτης τάξης.

Στην επόμενη ενότητα θα ασχοληθούμε με την εξίσωση 15 όταν οι συντελεστές της άγνωστης συνάρτησης p, q είναι σταθερές.

Γραμμικές ΣΔΕ 2ης Τάξης με σταθερούς Συντελεστές

Θα ασχοληθούμε τώρα με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης, δηλαδή η άγνωστη συνάρτηση είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής (συνήθης) ενώ εμφανίζεται και η δεύτερη παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης (δεύτερης τάξης). Οι εξισώσεις αυτές στην απλούστερη μορφή τους είναι οι εξής

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

όπου $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ γνωστοί αριθμοί.

Ψάχνουμε λύσεις της μορφής $e^{\lambda t}$. Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση θα προκύψει μια δευτεροβάθμια εξίσωση η οποία είναι η παρακάτω

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

και ονομάζεται η χαρακτηριστική εξίσωση.

Περίπτωση 1

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε λ_1, λ_2 πραγματικές ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης και διαφορετικές. Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, προφανώς οι $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$ είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης. Όπως μπορούμε πολύ εύκολα να διαπιστώσουμε και οι $c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t}$ για οποιεσδήποτε σταθερές, είναι επίσης λύσεις. Τέλος μπορούμε να διαπιστώσουμε (αφήνεται σαν άσκηση) ότι και το άθροισμα δύο τέτοιων λύσεων, είναι επίσης μια λύση. Αρα η συνάρτηση

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{17}$$

είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης για οποιεσδήποτε σταθερές c_1, c_2. Μπορεί να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις έχουν αυτή την μορφή. Η διαδικασία που ακολουθήσαμε μας οδηγεί στην γενική λύση όπως λέμε ή αλλιώς κάθε λύση περιέχεται στην μορφή 17.

Περίπτωση 2

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε μια διπλή ρίζα, έστω λ, οπότε μια λύση εκθετικής μορφής είναι η $e^{\lambda x}$. Χρειαζόμαστε άλλη μια ειδική λύση για να κατασκευάσουμε την γενική. Ας υποθέσουμε ότι αυτή έχει την μορφή $y(x) = e^{\lambda x}Y(x)$ και θα προσπαθήσουμε να βρούμε την συνάρτηση Y έτσι ώστε η y να ικανοποιεί την εξίσωση. Πράγματι, υπολογίζουμε τις παραγώγους της y και αντικαθιστούμε στην εξίσωση,

$$\begin{aligned} (Y'' + 2\lambda Y' + \lambda^2 Y) + a_1(Y' + \lambda Y) + a_0 Y &= 0 \Rightarrow \\ Y'' + (2\lambda + a_1)Y' + (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)Y &= 0 \end{aligned}$$

Έχουμε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με άγνωστη συνάρτηση την Y. Παρατηρούμε όμως ότι $2\lambda + a_1 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$ αφού λ διπλή ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της αρχικής εξίσωσης. Αρα καταλήγουμε στην εξής απλή διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την Y,

$$Y'' = 0 \Rightarrow Y = c_1 + c_2 x.$$

Δηλαδή, η $y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$. Μπορούμε να αποδείξουμε ότι πράγματι η γενική λύση είναι αυτής της μορφής.

Περίπτωση 3

Στην τελευταία αυτή περίπτωση, έχουμε δύο μιγαδικές ρίζες. Ας είναι αυτές οι $r_1 = \lambda + i\mu, r_2 = \lambda - i\mu$. Η γενική λύση θα δίνεται από την $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$. Όμως μπορούμε αυτό να το γράψουμε με ένα τρόπο ώστε να μην εμφανίζεται μιγαδικός αριθμός. Ας ανακαλέσουμε μια σχέση από την μιγαδική ανάλυση. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Αρα η γενική λύση είναι $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = e^{\lambda x}((c_1 + c_2)\cos(\mu x) + i(c_1 - c_2)\sin(\mu x) = c_1^{'} e^{\lambda x}\cos(\mu x) + c_2^{'} e^{\lambda x}\sin(\mu x)$ με $c_1^{'} = c_1 + c_2, c_2^{'} = i(c_1 - c_2)$. Αν διαλέξουμε c_1, c_2 να είναι συζυγείς μιγαδικοί, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $c_1^{'}, c_2^{'}$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14 *Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$\begin{aligned} y'' + 5y' + 6y &= 0, \\ y(0) = 2,\ y'(0) &= 3. \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ. Το πρώτο πράγμα που κάνουμε σε αυτές τις εξισώσεις (με σταθερούς συντελεστές) είναι να κοιτάξουμε την χαρακτηριστική εξίσωση, η οποία στην προκειμένη περίπτωση είναι

$$r^2 + 5r + 6 = (r+2)(r+3) = 0.$$

Αρα οι δυνατές τιμές του r είναι οι $r_1 = -3, r_2 = -2$ και επομένως η γενική λύση είναι

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}.$$

Για να ικανοποιηθούν και οι αρχικές συνθήκες θα διαλέξουμε τις σταθερές έτσι ώστε $y(0) = 2, y^{'}(0) = 3$. Η πρώτη σχέση μας δίνει $c_1 + c_2 = 2$. Για να δούμε τι μας δίνει η δεύτερη θα βρούμε πρώτα την παράγωγο της λύσης, η οποία είναι $y^{'}(t) = -2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t}$. Έτσι η δεύτερη αρχική συνθήκη μας δίνει $-2c_1 - 3c_2 = 3$. Λύνοντας αυτές τις δύο εξισώσεις με αγνώστους τις c_1, c_2 βρίσκουμε ότι $c_1 = 9, c_2 = -7$. Αρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}.$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15 *Να υπολογισθεί μια διαφορική εξίσωση της οποίας η γενική λύση είναι*

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}.$$

ΛΥΣΗ. Αυτή η γενική λύση μοιάζει να προέρχεται από μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. Από την μορφή της έχουμε την χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης που ψάχνουμε, η οποία είναι $(r-2)(r+3) = 0 \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0$ επομένως όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε η διαφορική εξίσωση που έχει αυτή την χαρακτηριστική εξίσωση είναι η

$$y^{''}(t) + y^{'}(t) - 6y = 0.$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16 *Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$\begin{aligned} 16y'' - 8y' + 145y &= 0, \\ y(0) &= -2, \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $16r^2 - 8r + 145 = 0$ και οι ρίζες της είναι $\frac{1}{4} \pm 3i$. Οπότε η γενική λύση της θα είναι

$$y(t) = c_1 e^{\frac{t}{4}} \cos 3t + c_2 e^{\frac{t}{4}} \sin 3t.$$

Για να ικανοποιηθεί η πρώτη αρχική συνθήκη πρέπει να ισχύει $y(0) = c_1 = -2$ ενώ, αφού βρούμε την παράγωγο της λύσης, υπολογίζουμε και την δεύτερη σταθερά η οποία είναι $c_2 = \frac{1}{2}$. Αρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$y(t) = -2e^{\frac{t}{4}} \cos 3t + \frac{1}{2} e^{\frac{t}{4}} \sin 3t.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 17 *Να λυθεί το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$\begin{aligned} y'' - y' + 0.25y &= 0, \\ y(0) &= 2, \\ y'(0) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$r^2 - r + 0.25 = 0,$$

άρα οι ρίζες είναι $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$. Αρα η γενική λύση είναι $y(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 t e^{\frac{t}{2}}$. Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα υπολογίζουμε τις σταθερές c_1, c_2 έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες. Οι τιμές τους είναι $c_1 = 2, c_2 = -\frac{2}{3}$. Αρα η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι $y(t) = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3} t e^{\frac{t}{2}}$. □

Υπολογισμός νιοστής δύναμης και εκθετικού πίνακα

Παρακάτω θα μελετήσουμε γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Θα δούμε ότι για να υπολογίσουμε τη λύση του συστήματος αρκεί να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα ενός δοσμένου τετραγωνικού πίνακα A. Τον ίδιο υπολογισμό συναντάμε και στη μελέτη στοχαστικών διαδικασιών σε χρόνο συνεχή και πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Παρόμοια, στις εξισώσεις διαφορών αλλά και στη μελέτη στοχαστικών διαδικασιών σε διακριτό χρόνο με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων θα συναντήσουμε το πρόβλημα υπολογισμού της νιοστής δύναμης ενός δοσμένου πίνακα A. Στη συνέχεια θα τυποποιήσουμε την διαδικασία υπολογισμού των παραπάνω δίνοντας μια μεθοδολογία η οποία έχει αποτέλεσμα σε κάθε πίνακα A. Επιπλέον, θα δούμε πως εργαλεία Γραμμικής Αλγεβρας και Απειροστικού Λογισμού (πρώτου έτους) χρησιμοποιούνται για τον παραπάνω σκοπό.

Έστω $A_{k\times k}$ ένας πίνακας πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε συμβολικά τον πίνακα A^n μπορούμε να εργαστούμε όπως παρακάτω. Βρίσκουμε ένα πολυώνυμο $p(x) = x^q + c_{q-1}x^{q-1} + \cdots + c_0$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε

$$p(A) = A^q + c_{q-1}A^{q-1} + \cdots + c_0\mathbb{I}_{k\times k} = 0_{k\times k}$$

Διαιρώντας θεωρητικά το x^n, για $n \geq q$, με $p(x)$ έχουμε

$$x^n = \pi(x)p(x) + v(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

όπου $v(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ $q-1$. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $\Delta(x) = x^n - \pi(x)p(x)v(x)$ έχει όλους του τους συντελεστές ίσους με το μηδέν και αυτό σημαίνει ότι

$$A^n = v(A)$$

Σε αυτή τη φάση το μόνο που πρέπει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές του $v(x)$. Για το σκοπό αυτό οι ρίζες (και οι πολλαπλότητες τους) του $p(x)$ θα παίξουν καθοριστικό ρόλο. Αν $p_1, \cdots, p_l$ είναι οι ρίζες του με πολλαπλότητες $j_1, \cdots, j_l$ (όπου $j_1 + \cdots + j_l = q$)τότε κατασκευάζουμε το επόμενο γραμμικό σύστημα θέτοντας $f(x) = x^n$,

$$v^{(r)}(p_i) = f^{(r)}(p_i),\ r = 0, \cdots, j_i - 1,\ i = 1, \cdots, l \tag{18}$$

όπου $f^{(r)}$ είναι η r παράγωγος της f και $f^{(0)} = f$.

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της Αλγεβρας (κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει ακριβώς n μιγαδικές εν γένει ρίζες, όχι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους) διαπιστώνουμε ότι αφού το πολυώνυμο $v(\cdot)$ είναι $q-1$ βαθμού τότε θα έπρεπε να έχει ακριβώς $q-1$ ρίζες. Το ομογενές σύστημα 18 έχει προφανώς το μηδενικό διάνυσμα ως λύση. Αν υποθέσουμε ότι έχει ως λύση και ένα μη μηδενικό διάνυσμα τότε συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο $v(\cdot)$ θα έχει ρίζες με άθροισμα πολλαπλοτήτων q το οποίο δεν μπορεί να συμβεί επομένως η μοναδική λύση του ομογενούς είναι η μηδενική και αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας του συστήματος είναι αντιστρέψιμος.

Ένα πολυώνυμο με την ιδιότητα $p(A) = 0_{k\times k}$ είναι βεβαίως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Το σύστημα 18 όμως έχει μέγεθος όσο και το πολυώνυμο p. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα ήταν καλό να χρησιμοποιήσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο το οποίο έχει επίσης την ίδια ιδιότητα.

Ο υπολογισμός του ελαχίστου πολυωνύμου

Έστω ένας $k \times k$ πίνακας αριθμών A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 18 *Με P_A συμβολίζουμε όλα τα πολυώνυμα με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα τα οποία είναι τέτοια ώστε $p(A) = 0_{k \times k}$.*

Είναι γνωστό ότι υπάρχει το ελάχιστο πολυώνυμο (το οποίο είναι μοναδικό) του πίνακα A το οποίο βεβαίως ανήκει P_A. Συμβολίζουμε με $m_A(x)$ και τον βαθμό του με q_{m_A} το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 19 *Με* $b_A(q)$ *συμβολίζουμε το διάνυσμα το οποίο περιέχει τον πίνακα* A^q *ανά στήλη. Με* $b_A(0)$ *συμβολίζουμε το διάνυσμα το οποίο περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα στήλη-στήλη. Με* $B_A(q)$ *συμβολίζουμε τον πίνακα ο οποίος έχει στήλες τα διανύσματα* $b_A(0), \cdots, b_A(q)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 20 *Με* $C_A(q)$ *συμβολίζουμε το επόμενο σύνολο, δοσμένου κάποιου* $q \in \mathbb{N}$,

$$C_A(q) = \{c \in \mathbb{R}^q : B_A(q-1) \cdot c = -b_A(q)\}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 21 *Αν* $p(x) = x^q + c_{q-1}x^{q-1} + \cdots + c_0$ *και* $c = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{q-1} \end{pmatrix}$ *τότε*

$$p(x) \in P_A \Longleftrightarrow c \in C_A(q)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $p(x) \in P_A$. Αυτό σημαίνει ότι

$$p(A) = A^q + c_{q-1}A^{q-1} + \cdots + c_0\mathbb{I}_{k\times k} = 0_{k\times k}$$

Με άλλα λόγια

$$c_{q-1}A^{q-1} + \cdots + c_0\mathbb{I}_{k\times k} = -A^q \tag{19}$$

Το παραπάνω σύνολο εξισώσεων μπορεί να γραφεί στην επόμενη μορφή

$$B_A(q-1) \cdot c = -b_A(q) \tag{20}$$

όπου $c = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{q-1} \end{pmatrix}$. Δηλαδή τα συστήματα 19 και 20 είναι ισοδύναμα. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 22 *Συμβολίζουμε με Q_A το επόμενο σύνολο ακεραίων*

$$Q_A = \{q \in \mathbb{N} : C_A(q) \neq \emptyset\}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 23 *Έστω $m(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A βαθμού q_{m_A}. Τότε*

$$q_{m_A} = \min Q_A$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το σύνολο Q_A είναι μη κενό αφού για $q = k$ το $C_A(q)$ περιέχει τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Επομένως το $q^* = \min Q_A$ είναι καλά ορισμένο και φυσικά $q^* \in Q_A$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο με μεγιστοβάθμιο συντελεστή την μονάδα $p_{q^*}(x)$ βαθμού q^* το οποίο είναι τέτοιο ώστε $p_{q^*}(A) = 0_{k\times k}$.

Γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο υπάρχει και είναι μοναδικό επομένως $q_{m_A} \in Q_A$ οπότε $q_{m_A} \geq q^*$. Αυτό σημαίνει ότι $q_{m_A} = q^*$ χρησιμοποιώντας την πρόταση 21. □

Δηλαδή για να υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο θα πρέπει να βρούμε το μικρότερο q για το οποίο το σύστημα $B_A(q-1) \cdot c = -b_A(q)$ έχει λύση.

Συνάρτηση πίνακα

Θα δώσουμε δυο ορισμούς της έννοιας της συνάρτησης πίνακα. Πρώτα όμως θα δώσουμε τον ορισμό του πίνακα $v(A)$ όπου $v(x)$ πολυώνυμο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 24 *Έστω ένα πολυώνυμο* $v(x) = a_q x^q + \cdots + a_0$. *Ο πίνακας* $v(A)$ *ορίζεται να είναι ο*

$$v(A) = a_q A^q + \cdots + a_0 \mathbb{I}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 25 *Έστω ο πίνακας $A_{k\times k}$ και μια συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ο πίνακας $f(A)$ ορίζεται να είναι ο $v(A)$ όπου $v(\cdot)$ είναι το πολυώνυμο το οποίο ικανοποιεί το σύστημα 18, δοσμένου ενός πολυωνύμου $p(x)$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε $p(A) = 0_{k\times k}$ και $p_1, \cdots, p_l$ οι ρίζες του με αντίστοιχες πολλαπλότητες $j_1, \cdots, j_l$ οφ $p(x)$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 26 *Έστω ο πίνακας $A_{k\times k}$ και μια συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ο πίνακας $f(A)$ ορίζεται να είναι ο $v(A)$ όπου $v(\cdot)$ είναι η σειρά Taylor της f γύρω από μηδέν.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 27 *Έστω η συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *και ένα πολυώνυμο* $p(x)$ *με ρίζες της* $p_1, \cdots, p_l$ *πολλαπλότητας* $j_1, \cdots, j_l$ *του* $p(x)$*. Λέμε ότι η συνάρτηση* f *είναι καλά ορισμένη στις ρίζες του* $p(x)$ *αν* $f^{(k)}(p_i)$, *για* $i = 1, \cdots, l$ *και* $k = 0, \cdots, j_i - 1$ *είναι καλά ορισμένα.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 28 *Έστω ο πίνακας $A_{k\times k}$ και $\Delta = \max_{i,j}|A_{ij}|$. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μοπορεί να αναλυθεί κατά Taylor γύρω από το μηδέν και να συγκλίνει απόλυτα για κάθε $x \in [-M, M]$ με $M > k\Delta$ τότε ο πίνακας $f(A)$ είναι καλά ορισμένος υπό την έννοια του ορισμού 26. Έστω πολυώνυμο $p(x)$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε $p(A) = 0_{k\times k}$. Τότε ο πίνακας $f(A)$ είναι καλά ορισμένος υπό την έννοια του ορισμού 25 αν η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη στις ρίζες του $p(x)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο πίνακας $f(A)$ μέσω της σειράς Taylor ορίζεται ως εξής

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n$$

Αυτός ο πίνακας είναι καλά ορισμένος επειδή η σειρά συγκλίνει απολύτως. Πράγματι, ορίζοντας $\Delta = \max_{i,j}|A_{ij}|$ έχουμε ότι

$$|(A^n)_{ij}| \leq k^{n-1}\Delta^n$$

Θα το αποδείξουμε με επαγωγή. Για $n = 1$ είναι προφανές ότι $|(A^1)_{ij}| \leq k^0\Delta$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο n, δηλαδή $|(A^n)_{ij}| \leq k^{n-1}\Delta^n$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Έχουμε ότι

$$|(A^{n+1})_{ij}| = |\sum_{l=1}^{k}(A^n)_{il}A_{lj}| \leq \sum_{l=1}^{k} k^{n-1}\Delta^n A_{lj} \leq k^n\Delta^{n+1}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(A^n)_{ij}\right| &\leq 1 + \left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(A^n)_{ij}\right| \\ &\leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}k^{n-1}\Delta^n\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(A^n)_{ij}$ συγκλίνει απολύτως και επομένως ο πίνακας $f(A)$ είναι καλά ορισμένος.

Από την άλλη μεριά είναι εύκολο να δούμε ότι ο πίνακας $f(A)$ μέσω του ορισμού 25 είναι καλά ορισμένος όταν και εφόσον του δεξί μέλος του συστήματος 18 είναι καλά ορισμένο. $\square$

Παρατηρηση 29 *Είναι εύκολο να δούμε ότι οι πίνακες $f(A), g(A), h(A)$ είναι καλά ορισμένοι για οποιονδήποτε πίνακα $A_{k\times k}$ για τις συναρτήσεις $f(x) = e^{tx}$, $g(x) = \cos(tx)$ και $h(x) = \sin(tx)$.* □

Θεωρημα 30 *Έστω η συνάρτηση f και ο πίνακας $A_{k\times k}$. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας $f(A)$ είναι καλά ορισμένος υπό την έννοια και των δυο ορισμών 26 και 25. Τότε οι δυο πίνακες συμπίπτουν.*

Αποδειξη. Έστω q ο βαθμός του πολυωνύμου $p(x)$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε $p(A) = 0_{k\times k}$ και οι ρίζες του $p_1, \cdots, p_l$ έχουν πολλαπλότητες $j_1 \cdots, j_l$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ με $m \geq q$ υπάρχουν $a_0(m), \cdots, a_{q-1}(m)$ τέτοια ώστε

$$A^m = a_{q-1}(m)A^{q-1} + \cdots + a_0(m)\mathbb{I}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$
\begin{aligned}
f^{Taylor}(A) &= A^{q-1} \underbrace{\left(\sum_{n=q}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} a_{q-1}(n) + \frac{f^{(q-1)}(0)}{(q-1)!} \right)}_{b_{q-1}} \\
&\quad + \cdots + \mathbb{I} \underbrace{\left(\sum_{n=q}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} a_0(n) + \frac{f^{(0)}(0)}{0!} \right)}_{b_0}
\end{aligned}
$$

Για να πάρουμε το παραπάνω κάναμε αναδιάταξη όρων το οποίο επιτρέπεται αφού η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Θα δούμε παρακάτω ότι οι συντελεστές

$b_0, \cdots, b_{q-1}$ θα εμφανιστούν πάλι υπολογίζοντας τον πίνακα $f(A)$ με τον άλλο ορισμό. Υπολογίζοντας τον A^m για $m \geq q$ το σύστημα 18 θα περιέχει τις επόμενες εξισώσεις, για $i = 1, \cdots, l$,

$$\begin{aligned}
a_{q-1}(m)p_i^{q-1} + \cdots + a_0(m) &= p_i^m \\
a_{q-1}(m)(q-1)p_i^{q-2} + \cdots + a_1(m) &= mp_i^{m-1} \\
&\vdots \\
a_{q-1}(m)(q-1)\cdots(q-j_i+1)p_i^{q-j_i} + \cdots + a_{j_i-1}(m) &= \\
m\cdot(m-1)\cdots(m-j_i+2)p_i^{m-j_i+1}
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε αυτές τις εξισώσεις με $\frac{f^{(m)}(0)}{m!}$ και έπειτα τις αθροίζουμε από $m = q$ ως ∞. Επομένως το παραπάνω σύστημα θα περιέχει τις εξισώσεις, για $i = 1, \cdots, l$,

$$\begin{aligned}
p_i^{q-1}\sum_{m=q}^{\infty} a_{q-1}(m)\frac{f^{(m)}(0)}{m!} + \cdots + \sum_{m=q}^{\infty} a_0(m)\frac{f^{(m)}(0)}{m!} &= \sum_{m=q}^{\infty} p_i^m \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\
(q-1)p_i^{q-1}\sum_{m=q}^{\infty} a_{q-1}(m)\frac{f^{(m)}(0)}{m!} + \cdots + \sum_{m=q}^{\infty} a_1(m)\frac{f^{(m)}(0)}{m!} &= \sum_{m=q}^{\infty} mp_i^{m-1}\frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\
&\vdots \\
(q-1)\cdots(q-j_i+1)p_i^{q-j_i}\sum_{m=q}^{\infty} a_{q-1}(m)\frac{f^{(m)}(0)}{m!} + \cdots + \\
+\sum_{m=q}^{\infty} a_{j_i-1}(m)\frac{f^{(m)}(0)}{m!} &= \\
\sum_{m=q}^{\infty} m\cdot(m-1)\cdots(m-j_i+2)p_i^{m-j_i+1}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}
\end{aligned}$$

Προσθέτουμε τους κατάλληλους όρους κατά μέλη έτσι ώστε στο δεξί μέλος να δημιουργηθούν οι όροι $f(p_i)$, $f^{'}(p_i)$, $\cdots$, $f^{(j_i-1)}(p_i)$. Τότε οι άγνωστοι αυτού του συστήματος θα είναι οι $b_0, \cdots, b_{q-1}$. $\square$

Η `matlab` συνάρτηση για το παραπάνω είναι η `matfun(A,f)` και μπορεί να βρεθεί στον επόμενο σύνδεσμο. https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/132518-computing-the-minimum-polynomial-of-a-matrix. Την αντίστοιχη εργασία μπορεί κανείς να την κατεβάσει από εδώ όπου θα βρει και τις ανάλογες αναφορές για το όλο αυτό θέμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 31 *Έστω ο πίνακας $A_{k\times k}$ και έστω $a_{ij}(n)$ τα στοιχεία του A^n. Τότε ο πίνακας B με στοιχεία τους αριθμούς $a_{ij}(-1)$ είναι ο Drazin αντίστροφος του A.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 32 *Σε όλους τους παραπάνω υπολογισμούς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε πολυώνυμο έχει την ιδιότητα $p(A) =)$ χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα.*

Πράγματι, έστω $v(x)$ και $\hat{v}(x)$ πολυώνυμα τα οποία ικανοποιούν το σύστημα 18 χρησιμοποιώντας το χαρακτηριστικό για να πάρουμε το $v(x)$ και ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο $p(x)$ (με $p(A) = 0_{k\times k}$) για να πάρουμε το $\hat{v}(x)$. Το πολυώνυμο $v(x)$ είναι βαθμού $k-1$ και έστω ότι το πολυώνυμο $p(x)$ είναι βαθμού μικρότερου του $k-1$. Διαιρώντας το $v(x)$ με το $p(x)$ έχουμε

$$v(x) = \pi(x)p(x) + q(x)$$

Χρησιμοποιώντας τις ρίζες του $p(x)$ και τις πολλαπλότητες τους υπολογίζουμε3 το πολυώνυμο $q(x)$ και διαπιστώνουμε ότι $q(x) = \hat{v}(x)$. Επιπλέον, $\hat{v}(A) = v(A) = f(A)$. $\square$

Παραδείγματα

Θα υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη ενός μη αντιστρέψιμου πίνακα και ύστερα τον Drazin αντίστροφο του. Έστω ο πίνακας

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $f(x) = x^n$ και καλούμε την συνάρτηση `matfun(C,f)` προκειμένου να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του C. Παίρνουμε το επόμενο αποτέλεσμα

$$C^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2^n+1}{5\,2^n} & \frac{2\,(2^n+1)}{5\,2^n} & \frac{2\,2^n-3}{5\,2^n} \\ \frac{2^n-1}{5\,2^n} & \frac{2\,(2^n-1)}{5\,2^n} & \frac{2\,2^n+3}{5\,2^n} \end{pmatrix}$$

Θέτοντας $n = -1$ έχουμε τον Drazin αντίστροφο του πίνακα C ο οποίος είναι ο επόμενος

$$C_D = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση **isdrazin** επαληθεύουμε το αποτέλεσμα.

Έστω ο πίνακας A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Θέτοντας $f(x) = x^n$ και $g(x) = exp(t * x)$ και καλώντας τις συναρτήσεις **matfun(A,f)** και **matfun(A,g)** παίρνουμε τα επόμενα αποτελέσματα

$$A^n = \begin{pmatrix} 11^{n/2} \cos\left(n \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) & \sqrt{2}\, 11^{n/2} \sin\left(n \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) \\ -\frac{\sqrt{2}\, 11^{n/2} \sin\left(n \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)}{2} & 11^{n/2} \cos\left(n \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) \end{pmatrix}$$

και

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} \cos\left(\sqrt{2}\, t\right) & \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{3t} \sin\left(\sqrt{2}\, t\right) \\ -\frac{\sqrt{2}\, \mathrm{e}^{3t} \sin\left(\sqrt{2}\, t\right)}{2} & \mathrm{e}^{3t} \cos\left(\sqrt{2}\, t\right) \end{pmatrix}$$

Οι συναρτήσεις **isan(an,a)** και **isexpt(at,a)** επαληθεύουν αυτά τα αποτελέσματα. Για την νιοστή δύναμη γίνεται ουσιαστικά με επαγωγή ενώ για τον εκθετικό πίνακα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο e^{tA} είναι ο μοναδικός πίνακας ο οποίος ικανοποιεί την επόμενη διαφορική εξίσωση πινάκων

$$\begin{aligned} (M(t))' &= AM(t) \\ M(0) &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε ότι η παραπάνω διαφορική εξίσωση πινάκων έχει μοναδική λύση. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο πίνακας e^{tA} ικανοποιεί την εξίσωση αυτή χρησιμοποιώντας την μορφή του μέσω της σειράς Taylor. Πράγματι, θα αποδείξουμε ότι

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (e^{tA})' &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right)' \\ &= A\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} A \end{aligned}$$

Η παράγωγος πέρασε μέσα στο άθροισμα λόγω του ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως.

Έστω ότι υπάρχουν περισσότερες από μια λύσεις, τότε η διαφορά δυο από αυτές θα ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$\begin{aligned} (M(t))' &= AM(t) \\ M(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Όμως $(M(t)e^{-tA})' = M'(t)e^{-tA} - AM(t)e^{-tA} = \mathbf{0}$. Επομένως $M(t)e^{-tA} = \mathbf{C}$ όπου $\mathbf{C}$ είναι πίνακας ανεξάρτητος του t. Πολλαπλασιάζοντας με e^{tA}, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $e^A e^B = e^{A+B}$ για πίνακες A, B που αντιμετατίθενται και αφού $M(0) = \mathbf{0}$ προκύπτει ότι $M(t) = \mathbf{0}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Έστω $y_1, y_2, \cdots, y_n$ n το πλήθος συναρτήσεις. Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

$$\begin{aligned} y_1^{'} &= f_1(t, y_1, \cdots, y_n) \\ y_2^{'} &= f_2(t, y_1, \cdots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n^{'} &= f_n(t, y_1, \cdots, y_n) \end{aligned}$$

Εδώ οι άγνωστοι είναι οι συναρτήσεις $y_1, \cdots, y_n$ ενώ οι συναρτήσεις $f_1, \cdots, f_n$ είναι δοσμένες.

Τα γραμμικά συστήματα εμφανίζονται, εκτός των άλλων, κατά την επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης n τάξης, για παράδειγμα

$$y^{(n)}(t) = f(t, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)})$$

όπου $y^{(k)}$ είναι η k παράγωγος της συνάρτησης y. Θέτοντας $y_1(t) = y(t)$, $y_2(t) = y^{'}(t)$, $\cdots$, $y_n(t) = y^{(n-1)}(t)$ η παραπάνω εξίσωση μετασχηματίζεται στο σύστημα

$$\begin{aligned}
y_1^{'} &= y_2 \\
y_2^{'} &= y_3 \\
&\vdots \\
y_{n-1}^{'} &= y_n \\
y_n^{'} &= f(t, y_1, \cdots, y_n)
\end{aligned}$$

Σύστημα Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων-Ο Εκθετικός Πίνακας

Όταν οι συναρτήσεις $f_1, \cdots, f_n$ είναι γραμμικές και ανεξάρτητες του χρόνου t τότε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων παίρνει την μορφή πινάκων

$$y^{'} = A \cdot y, \quad y(0) = y_0$$

όπου $y = (y_1(t), \cdots, y_n(t))$ και $A_{n\times n}$ πίνακας με τους συντελεστές (ανεξάρτητους του t) των συναρτήσεων $y_k(t)$ και $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

Ορίζουμε τον πίνακα

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

και τον συμβολίζουμε με e^A. Ο πίνακας αυτός είναι καλά ορισμένος, δηλαδή το άπειρο άθροισμα συγκλίνει όπως έχουμε αποδείξει στο κεφάλαιο της γραμμικής άλγεβρας.

Η πρώτη ιδιότητα που θα αποδείξουμε είναι η

$$e^{A_1+A_2} = e^{A_1}e^{A_2}$$

όταν $A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} e^{A_1+A_2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A_1+A_2)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} A_1^k A_2^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_1^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{A_2^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{A_1} e^{A_2} \end{aligned}$$

Θέτουμε $P(t) = e^{tA}$. Θα αποδείξουμε ότι $P(s+t) = P(s)P(t)$ για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$. Πράγματι, εφόσον $sA \cdot tA = tA \cdot sA$ τότε από την προηγούμενη ιδιότητα έχουμε ότι $P(s+t) = e^{(s+t)A} = e^{sA+tA} = e^{sA}e^{tA}$.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο πίνακας συνάρτηση $P(t)$ ικανοποιεί τις επόμενες διαφορικές εξισώσεις πινάκων

$$\begin{aligned} P^{'}(t) = P(t)A, \quad P(0) = I \\ P^{'}(t) = AP(t), \quad P(0) = I \end{aligned}$$

και μάλιστα έχουν μοναδική λύση την συνάρτηση πίνακα $P(t)$.

Πράγματι,

$$P^{'}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} = P(t)A = AP(t)$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλη λύση των παραπάνω εξισώσεων. Τότε η διαφορά τους θα ικανοποιεί την εξίσωση

$$M^{'}(t) = M(t)A, \quad M(0) = 0 \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

Αρα θα ισχύει ότι

$$(M(t)e^{-tA})^{'} = M^{'}(t)e^{-tA} + M(t)(-A)e^{-tA} = 0$$

Δηλαδή κάθε στοιχείο του πίνακα $(M(t))_{ij} = c \in \mathbb{R}$ και επειδή $M(0) = 0$ προκύπτει ότι $M(0) = 0$ άρα έχει μοναδική λύση. Παρόμοια επιχειρήματα ισχύουν και για την εξίσωση $P^{'}(t) = AP(t)$.

Ξαναγυρνώντας στο σύστημα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων

$$y^{'} = Ay, \quad y(0) = y_0$$

παρατηρούμε ότι μια λύση είναι το διάνυσμα $e^{tA} \cdot y_0$. Πράγματι,

$$(e^{tA} \cdot y_0)' = A(e^{tA} \cdot y_0)$$

Θα αποδείξουμε ότι η λύση είναι μοναδική. Έστω $y(t)$ το διάνυσμα στήλη που είναι η διαφορά δυο λύσεων. Τότε αυτό θα ικανοποιεί το πρόβλημα

$$y' = Ay, \quad y(0) = 0$$

Όμως

$$\left(e^{-tA}y(t)\right)' = -e^{-tA}Ay(t) + e^{-tA}y' = -e^{-tA}Ay(t) + e^{-tA}Ay(t) = 0$$

Όπως σε προηγούμενη απόδειξη καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι έχει μοναδική λύση.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η λύση του μη ομογενούς προβλήματος

$$y' = Ay + b(t)$$

όπου $A_{n\times n}$ πίνακας, δίνεται από την

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}y(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)ds$$

Το ολοκλήρωμα ενός διανύσματος που ο κάθε όρος εξαρτάται από το t είναι ίσο με το διάνυσμα όπου ο κάθε όρος έχει ολοκληρωθεί ως προς t.

Ας ξαναγυρίσουμε στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων n-τάξης. Έστω η διαφορική εξίσωση

$$y^{(n)} + c_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + c_0 y = 0$$

Με τον τρόπο που αναφέραμε μετατρέπεται σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Θέτοντας $z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ η αρχική εξίσωση μετατρέπεται στην

$$z'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{n-1} \end{pmatrix} \cdot z(t)$$

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_0 & -c_1 & \cdots & -c_{n-1} \end{pmatrix}$ είναι γνωστός στην γραμμική άλγεβρα ως ο συνοδός πίνακας του πολυωνύμου $\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0$ (συγκρίνετε το με την αρχική διαφορική εξίσωση!) Αποδεικνύεται ότι τόσο το χαρακτηριστικό του όσο και το ελάχιστο πολυώνυμό του είναι ίσο με το παραπάνω πολυώνυμο. Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ πολλαπλότητας $r_1, \cdots, r_m$ και στην συνέχεια υπολογίζουμε τον εκθετικό πίνακα e^{tA}. Για να το κάνουμε αυτό κατασκευάζουμε ένα πολυώνυμο $v(\lambda) = a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0$ το οποίο θα πρέπει να ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned} v(\lambda_1) &= f(\lambda_1) \\ &\vdots \\ v^{(r_1-1)}(\lambda_1) &= f^{(r_1-1)}(\lambda_1) \\ v(\lambda_2) &= f(\lambda_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

όπου $f(x) = e^{tx}$. Λύνοντας το παραπάνω σύστημα υπολογίζουμε τους $a_0, \cdots, a_{n-1}$. Στην συνέχεια διαπιστώνουμε εύκολα ότι η μορφή της λύσης θα είναι ως εξής

$$\begin{aligned} y(t) = & \quad e^{\lambda_1 t}(d_0 + d_1 t + \cdots + d_{r_1 - 1} t^{r_1 - 1}) \\ & + \ e^{\lambda_2 t}(f_0 + f_1 t + \cdots + f_{r_2 - 1} t^{r_2 - 1}) \\ & + \ e^{\lambda_3 t} \cdots \end{aligned}$$

όπου $d_0, d_1, \cdots, f_0, f_1, \cdots \in \mathbb{R}$ αυθαίρετες σταθερές οι οποίες μπορούν να υπολογισθούν όταν μας δοθούν οι κατάλληλες αρχικές συνθήκες. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω η παρακάτω διαφορική εξίσωση

$$y^{'''} + 3y^{''} - 4y = 0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$$

το οποίο έχει την $\lambda_1 = 1$ ως ρίζα πολλαπλότητας ένα και την $\lambda_2 = -2$ πολλαπλότητας 2. Αρα η γενική λύση θα έχει την μορφή

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t}$$

Εξισώσεις Διαφορών

Θα αναφέρουμε μερικά στοιχεία για τις γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές οι οποίες εμφανίζονται συχνά στην μελέτη των στοχαστικών διαδικασιών.

• Έστω μια ακολουθία αριθμών $y(n)$ η οποία ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} y(n+1) &= ay(n) \quad \text{(εξίσωση διαφορών)} \\ y(0) &= y_0 \quad \text{(αρχική συνθήκη)} \end{aligned}$$

όπου $a, y_0 \in \mathbb{R}$ δοσμένοι αριθμοί. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την ακολουθία αριθμών που ικανοποιεί τα παραπάνω. Εφόσον $y(n+1) = ay(n) = a^2 y(n-1)$ προκύπτει εύκολα ότι $y(n) = a^n y(0)$. Αντικαθιστώντας και το δεδομένο $y(0) = y_0$ καταλήγουμε στο ότι $y(n) = a^n y_0$. Ως παράδειγμα μπορούμε να δούμε την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \frac{1}{2} y(n) \\ y(0) &= 3 \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε εύκολα στο συμπέρασμα ότι $y(n) = 3\frac{1}{2^n}$.

• Θα γενικεύσουμε στην συνέχεια την παραπάνω εξίσωση διαφορών εργαζόμενοι σε μια εξίσωση σε μορφή πινάκων. Έστω $z(n) = \begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \\ \vdots \\ z_k(n) \end{pmatrix}$ μια ακολουθία διανυσμάτων και έστω ένας δοσμένος πίνακας $A_{k\times k}$. Θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$\begin{aligned} z(n+1) &= A \cdot z(n) \\ z(0) &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

όπου $c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ δοσμένοι αριθμοί. Σκεπτόμενοι όπως προηγούμενα προκύπτει ότι $z(n) = A^n \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$.

Συνεπώς θα πρέπει να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα A έτσι ώστε να πάρουμε την λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών.

• Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με εξισώσεις διαφορών ανώτερης τάξης.

Έστω μια ακολουθία $y(n)$ τ.ω.

$$y(n+k) + a_{k-1}y(n+k-1) + \cdots + a_1 y(n+1) + a_0 y(n) = 0 \tag{21}$$

όπου $a_{k-1}, \cdots, a_0$ δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί. Μια τέτοια σχέση ονομάζεται ομογενής και γραμμική εξίσωση διαφορών k τάξης. Ένας απλός τρόπος να υπολογίσουμε την ακολουθία αυτή είναι να μετατρέψουμε το πρόβλημα αυτό στον υπολογισμό της νιοστής δύναμης ενός πίνακα A κάτι το οποίο έχουμε μελετήσει διεξοδικά στο κεφάλαιο γραμμικής άλγεβρας. Για να γίνει αυτό κατασκευάζουμε k νέες ακολουθίες

$$b_1(n), b_2(n), \cdots, b_k(n)$$

τ.ω.

$$\begin{aligned} b_1(n) &= y(n) \\ b_2(n) &= y(n+1) \\ &\vdots \\ b_k(n) &= y(n+k-1) \end{aligned}$$

Στην συνέχεια σχηματίζουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} b_1(n+1) &= b_2(n) \\ b_2(n+1) &= b_3(n) \\ &\vdots \\ b_{k-1}(n+1) &= b_k(n) \\ b_k(n+1) &= -a_0b_1(n) - a_1b_2(n) - \cdots - a_{k-1}b_k(n) \end{aligned} \tag{22}$$

Έπειτα θέτουμε $x_n = \begin{pmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ \vdots \\ b_k(n) \end{pmatrix}$ και επομένως το σύστημα 22 γράφεται $x_{n+1} = A \cdot x_n$ όπου $A_{k\times k}$ είναι ο παρακάτω πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτής της μορφής είναι γνωστός στην γραμμική άλγεβρα ως ο **συνοδός πίνακας** του πολυωνύμου $\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0$. Αποδεικνύεται ότι τόσο το χαρακτηριστικό όσο και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι ίσο με το $d_A(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0$ (συγκρίνετε το με την εξίσωση διαφορών!).

Συνεπώς ισχύει ότι

$$x_n = A^n \cdot x_0$$

άρα το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση της νιοστής δύναμης του πίνακα A. Για να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα A θα πρέπει να σχηματίσουμε ένα πολυώνυμο $k-1$ βαθμού, το $v(\lambda) =$

$c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_0$, έτσι ώστε

$$\begin{array}{rcl} v(\lambda_1) & = & f(\lambda_1) \\ v^{'}(\lambda_1 & = & f^{'}(\lambda_1) \\ & \vdots & \\ v^{(r_1-1)}(\lambda_1) & = & f^{(r_1-1)}(\lambda_1) \\ & \vdots & \\ v(\lambda_2) & = & f(\lambda_2) \\ & \vdots & \end{array}$$

όπου $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A (δηλαδή οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου) και $r_1, \cdots, r_m$ οι αντίστοιχες πολλαπλότητες τους και επίσης $f(x) = x^n$. Αν συμβολίσουμε με F τον πίνακα του παραπάνω συστήματος τότε η λύση θα είναι η

$$\left(\begin{array}{c} c_{k-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{array} \right) = F^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c} f(\lambda_1) \\ f^{'}(\lambda_1) \\ \vdots \end{array} \right)$$

Δηλαδή οι συντελεστές $c_{k-1}, \cdots, c_0$ είναι γραμμικός συνδυασμός του δεξί μέλους του παραπάνω συστήματος. Επειδή $A^n = c_{k-1}A^{k-1} + c_{k-2}A^{k-2} + \cdots + c_0 I_{k\times k}$

έπεται ότι η $y(n)$ θα έχει την μορφή

$$\begin{aligned} y(n) = b_1(n) = & \quad \lambda_1^n(d_0 + d_1 n + d_2 n^2 + \cdots + d_{r_1-1} n^{r_1-1}) \\ & + \ \lambda_2^n(f_0 + f_1 n + \cdots + f_{r_2-1} n^{r_2-1}) \\ & + \ \lambda_3^n \cdots \end{aligned}$$

όπου $d_0, d_1, \cdots, f_0, f_1, \cdots$ αυθαίρετες σταθερές οι οποίες θα υπολογισθούν αν μας δίνονται ισάριθμες αρχικές συνθήκες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 33 *Έστω η παρακάτω εξίσωση διαφορών*

$$y(n+3) + 5y(n+2) + 3y(n+1) - 9y(n) = 0$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9$$

το οποίο έχει ρίζες τις $\lambda_1 = 1$ *πολλαπλότητας 1 (δηλαδή* $r_1 = 1$*) και* $\lambda_2 = -3$ *πολλαπλότητας 2 (δηλαδή* $r_2 = 2$*). Συνεπώς η λύση θα έχει την μορφή*

$$y(n) = c_0 1^n + (-3)^n (d_0 + d_1 n)$$

όπου $c_0, d_0, d_1 \in \mathbb{R}$ *αυθαίρετες σταθερές.* $\square$

Μετασχηματισμός Fourier

ΟΡΙΣΜΟΣ 34 *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια δοσμένη συνάρτηση. Ορίζουμε την $F(s)$ με $s \in \mathbb{R}$ ως εξής*

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt$$

αν το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο.
Η συνάρτηση $F(s)$ ονομάζεται ο ***μετασχηματισμός Fourier*** *της f. Συχνά, συμβολίζεται και με $\mathcal{F}(f)(s)$.*

Σε αυτό τον ορισμό χρησιμοποιούμε την σχέση (φόρμουλα του Euler)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 35 *Μια συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *ονομάζεται* **απολύτως ολοκληρώσιμη** *στο* $\mathbb{R}$ *όταν*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Το σύνολο των απόλυτα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ *συμβολίζεται με* $L^1(\mathbb{R})$.

Παρατηρηση 36 (Ύπαρξη Μετασχηματισμού Fourier) *Στον προηγούμενο ορισμό το απόλυτο αναφέρεται σε μιγαδικούς αριθμούς, εν γένει. Δηλαδή αν $z = a + ib$ ισχύει ότι $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Έτσι, εύκολα βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας απόλυτα ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f(t)$ υπάρχει. Πράγματι,*

$$|F(s)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) e^{-ist}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||e^{-ist}| dt$$

Επειδή $|e^{-ist}| = \sqrt{\cos^2(st) + \sin^2(st)} = 1$ *τότε προκύπτει ότι*

$$|F(s)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

Εφαρμογή του Μετασχηματισμού στις Διαφορικές Εξισώσεις

ΘΕΩΡΗΜΑ 37 *Έστω f μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και F ο μετασχηματισμός Fourier. Αν $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ τότε ο μετασχηματισμός της παραγώγου της f δίνεται από $\mathcal{F}(f')(s) = isF(s)$.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 38 *Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό σε μια συνάρτηση m-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη προκύπτει ότι*

$$\mathcal{F}\left(f^{(m)}(t)\right)(s) = (is)^m F(s)$$

Παραδειγμα 39 *Έστω ότι η f είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$. Θα μελετήσουμε την συνήθη διαφορική εξίσωση*

$$y''(x) - y(x) = f(x) \quad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στα δυο μέλη της εξίσωσης και έχουμε

$$\left((is)^2 - 1\right) Y(s) = F(s)$$

Αρα

$$Y(s) = -\left(\frac{1}{1+s^2}\right) F(s)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier μετατρέψαμε την διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική ως προς $Y(s)$ (εξίσωση χωρίς παραγώγους). Λύνουμε ως προς $Y(s)$ και στην συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε την $y(t)$ η οποία είναι τέτοια ώστε ο μετασχηματισμός της κατά Fourier να είναι ίσος με την $Y(s)$. Για να το κάνουμε αυτό όμως θα πρέπει να καταγράψουμε ιδιότητες και διάφορα θεωρήματα για τον μετασχηματισμό αυτό. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 40 *Έστω $a > 0$. Ορίζουμε την συνάρτηση*

$$q_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a}, & \text{όταν } |t| \leq a \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η συνάρτηση q_a είναι επίσης απολύτως ολοκληρώσιμη επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(q_a)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} q_a(t)e^{-ist}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} q_a(t)e^{-ist}dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} q_a(t)e^{-ist}dt + \int_{0}^{\infty} q_a(t)e^{-ist}dt \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $q_a(t)$ είναι άρτια προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}(q_a)(s) = 2\int_0^{\infty} q_a(t)\cos st dt = 2\int_0^{a} \left(1 - \frac{t}{a}\right)\cos st dt$$

Για $s \neq 0$ χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη *έχουμε ότι*

$$\mathcal{F}(q_a)(s) = \frac{2}{s}\int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right)(\sin st)_t' dt = \frac{2}{as^2}(1 - \cos(as)) = \frac{4\sin^2(\frac{as}{2})}{as^2}$$

Για $s = 0$ *έχουμε ότι* $\mathcal{F}(q_a)(0) = a$. *Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι*

$$\lim_{s\to 0}\frac{4\sin^2(\frac{as}{2})}{as^2} = a$$

το οποίο σημαίνει ότι η $\mathcal{F}(q_a)(s)$ *είναι συνεχής συνάρτηση σε όλο το* $\mathbb{R}$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 41 *Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης* $f(t) = e^{-a|t|}$ *όπου* $a > 0$. *Έχουμε ότι*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-ist}dt + \int_{-\infty}^0 e^{at}e^{-ist}dt = \frac{2a}{a^2 + s^2}$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$g_a(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{όταν } t > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $a \in \mathbb{C}$ *με* $\operatorname{Re} a > 0$. *Έχουμε ότι*

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) e^{-ist} dt = \frac{1}{a+is} = \frac{a-is}{a^2+s^2}$$

Παρόμοια, ισχύει ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$\hat{g}_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t \geq 0 \\ e^{at}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

είναι η συνάρτηση $\mathcal{F}(\hat{g}_a)(s) = \frac{a+is}{a^2+s^2}$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 42 *Θα μετασχηματίσουμε την συνάρτηση* $f(t) = e^{-at^2}$ *όπου* $a > 0$ *η οποία ονομάζεται συνάρτηση του Gauss. Έχουμε λοιπόν ότι*

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-ist} dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-at^2} \cos st dt$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης $F(s)$ *(υποθέτοντας ότι η παράγωγος μπορεί να περάσει μέσα* *στο ολοκλήρωμα) και έχουμε*

$$\begin{aligned} F^{'}(s) &= -2\int_0^\infty e^{-at^2} t \sin st dt \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{-at^2}\right)\sin st dt \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη προκύπτει ότι

$$F^{'}(s) = -\frac{s}{2a}F(s)$$

Η λύση της γραμμικής αυτής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$F(s) = Ce^{-s^2/4a}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι (δείτε άσκηση 433 του βιβλίου)

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t\sqrt{a})^2}\sqrt{a}dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

έχουμε τελικά

$$F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a}$$

□

Ιδιότητες του Μετασχηματισμού *Fourier*

ΘΕΩΡΗΜΑ 43 (ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ) *Έστω δυο συναρτήσεις f και g με μετασχηματισμούς Fourier τις $F(s)$ και $G(s)$ αντίστοιχα. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier του γραμμικού συνδυασμού $af(t) + bg(t)$ είναι η συνάρτηση $aF(s) + bG(s)$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 44 (ΣΥΖΥΓΗΣ) *Έστω f μια συνάρτηση και $F(s)$ ο μετασχηματισμός Fourier. Τότε, ο μετασχηματισμός της $\overline{f}(t)$ είναι η συνάρτηση $\overline{F}(-s)$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 45 *Έστω f μια συνάρτηση και $F(s)$ ο μετασχηματισμός Fourier. Τότε για $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\mathcal{F}(f(t-a))(s) = e^{-isa}F(s)$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 46 *Έστω f μια συνάρτηση και $F(s)$ ο μετασχηματισμός Fourier. Για $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\mathcal{F}(e^{iat}f(t))(s) = F(s-a)$.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 47 *Αν F είναι ο μετασχηματισμός Fourier της f τότε*

$$\mathcal{F}\Big(f(t)\cos(at)\Big)(s) = \frac{F(s-a)}{2} + \frac{F(s+a)}{2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 48 *Αν $f(t) = p_a(t)$ τότε σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι*

$$\mathcal{F}\Big(p_a(t)\cos bt\Big)(s) = \frac{\sin(a(s-b)/2)}{s-b} + \frac{\sin(a(s+b)/2)}{s+b}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 49 *Έστω $F(s)$ ο μετασχηματισμός Fourier της f. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της $f(ct)$ για $c \neq 0$ είναι*

$$\mathcal{F}\Big(f(ct)\Big)(s) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{s}{c}\right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 50 *Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα αυτά στην συνάρτηση $p_a(ct)$ έχουμε ότι*

$$\mathcal{F}\Big(p_a(ct)\Big)(s) = \frac{1}{c}\frac{2\sin(\frac{as}{2c})}{\frac{s}{c}} = \frac{2\sin(\frac{as}{2c})}{s}$$

$\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 51 *Έστω f μια άρτια συνάρτηση. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτής δίνεται από*

$$F(s) = 2\int_0^{\infty} f(t)\cos st dt \qquad (\text{συνημιτονικός μετασχηματισμός})$$

η οποία είναι επίσης άρτια συνάρτηση. Αν η f είναι περιττή τότε ο μετασχηματισμός Fourier δίνεται από

$$F(s) = -2i\int_0^{\infty} f(t)\sin st dt \qquad (\text{ημιτονικός μετασχηματισμός})$$

η οποία είναι επίσης περιττή συνάρτηση.

ΘΕΩΡΗΜΑ 52 *Έστω f και g τμηματικά λείες συναρτήσεις και απολύτως ολοκληρώσιμες με μετασχηματισμούς Fourier F και G αντίστοιχα. Τότε*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)G(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)g(t)dt$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 53 *Έστω f μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και F ο μετασχηματισμός Fourier. Αν $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ τότε ο μετασχηματισμός της παραγώγου της f δίνεται από $\mathcal{F}(f')(s) = isF(s)$.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 54 *Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό σε μια συνάρτηση m-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη προκύπτει ότι*

$$\mathcal{F}\left(f^{(m)}(t)\right)(s) = (is)^m F(s)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 55 *Η συνάρτηση $f(t) = e^{-at^2}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και η παράγωγος της είναι η $f^{'}(t) = -2ate^{-at^2}$. Επίσης, ισχύει ότι $\lim\limits_{t\to\pm\infty} e^{-at^2} = 0$. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι*

$$\mathcal{F}\left(f^{'}(t)\right)(s) = is\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 56 *Έστω f μια απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μετασχηματισμό Fourier την F. Αν η συνάρτηση $tf(t)$ είναι επίσης απολύτως ολοκληρώσιμη τότε ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα*

$$F^{'}(s) = -\mathcal{F}\big(itf(t)\big)$$

Σημαντική η επόμενη παρατήρηση, ειδικά στον υπολογισμό ροπών τυχαίων μεταβλητών με συνάρτηση πυκνότητας $f(t)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 57 *Αν $t^k f(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη για $k = 0, 1, 2, \cdots, m$ τότε η F είναι m-φορές* *παραγωγίσιμη και μάλιστα*

$$F^{(m)}(s) = \mathcal{F}\Big((-it)^m f(t)\Big)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 58 *Η συνάρτηση $tp_a(t)$ ικανοποιεί το παραπάνω θεώρημα και έτσι*

$$\mathcal{F}(tp_a(t))(s) = -\frac{1}{i}F^{'}(s) = i\frac{a\cos(as/2)}{s} - i\frac{2\sin(as/2)}{s^2}$$

$\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 59 *Έστω F ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης f η οποία είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και συνεχής. Έστω $\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{t} f(x)dx = 0$. Τότε για $s \neq 0$ έχουμε ότι*

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} f(x)dx\right) = \frac{F(s)}{is}$$

Μπορεί να αποδειχθεί το παρακάτω αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 60 *Αν η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και τμηματικά συνεχής τότε ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 61 *Η συνέλιξη δυο συναρτήσεων f και g ορίζεται ως εξής*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx \quad \text{για } t \in \mathbb{R}$$

αν το ολοκλήρωμα υπάρχει.

ΛΗΜΜΑ 62 *Ισχύει ότι*

$$f * g = g * f$$

για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f και g.

ΛΗΜΜΑ 63 *Αν η συνάρτηση f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και η g είναι φραγμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ τότε η συνέλιξη $f * g$ υπάρχει.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 64 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ) *Έστω* f *και* g *κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες είναι απολύτως ολοκληρώσιμες και φραγμένες. Έστω* $F(s)$ *και* $G(s)$ *οι μετασχηματισμοί Fourier των* f *και* g *αντίστοιχα. Τότε η συνέλιξη* $f * g$ *είναι απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση και*

$$\mathcal{F}(f * g)(s) = F(s)G(s)$$

Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Ο χώρος $L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ των απόλυτα ολοκληρώσιμων και συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος όπως πολύ εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε. Ο μετασχηματισμός Fourier

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) \to \operatorname{im} \mathcal{F}$$

όπου $\operatorname{im} \mathcal{F}$ είναι η εικόνα του μετασχηματισμού, είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός το οποίο εύκολα βλέπουμε χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος. Ο πυρήνας του μετασχηματισμού $\ker \mathcal{F}$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις f τέτοιες ώστε $\mathcal{F}(f) = 0$, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt = 0, \qquad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f \geq 0$ που ανήκει στον πυρήνα του μετασχηματισμού. Τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt = 0, \qquad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

Διαλέγοντας $s = 0$ προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 0$$

από το οποίο εύκολα βλέπουμε ότι αναγκαστικά $f = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει γενικότερα, για οποιαδήποτε συνάρτηση f, το οποίο είναι το επόμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 65 *Αν η συνάρτηση f είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη και τέτοια ώστε*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt = 0, \qquad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

τότε αναγκαστικά $f(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Επομένως, ο πυρήνας του μετασχηματισμού Fourier αποτελείται μονάχα από το μηδενικό στοιχείο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 66 *Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to W$ λέγεται*

(i) *K-**ισομορφισμός** αν ο T είναι μια $1-1$ και επί απεικόνιση*

(ii) ***μη-ιδιάζων*** *μετασχηματισμός αν* $\ker T = \{0\}$.

Σημειώστε ότι $1-1$ είναι μια απεικόνιση η οποία είναι τέτοια ώστε $T(v) \neq T(v^{'})$ όταν $v \neq v^{'}$ για κάθε $v, v^{'} \in V$ και επί όταν για κάθε $w \in W$ υπάρχει κάποιο $v \in V$ τέτοιο ώστε $T(v) = w$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 67 *Έστω $T : V \to W$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Τότε είναι 1-1* ***ανν*** *είναι μη-ιδιάζων.*

Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 και άρα αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος είναι επίσης ένας γραμμικός μετασχηματισμός.

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο διότι αν η $F(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης τότε οφείλει να συγκλίνει στο μηδέν καθώς $s \to \pm\infty$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 68 (Riemann-Lebesgue) *Έστω f μια απολύτως ολοκληρώσιμη και κατά τμήματα λεία συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Τότε*

$$\lim_{s\to\pm\infty} F(s) = \lim_{s\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt = 0$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 69 *Έστω ότι η συνάρτηση f και ο μετασχηματισμός Fourier F είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αν η f είναι λεία συνάρτηση τότε*

$$\mathcal{F}(F)(s) = 2\pi f(-s)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 70 *Έστω f και g τμηματικά λείες και απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε το γινόμενό τους να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι οι μετασχηματισμοί Fourier F και G είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε*

$$\mathcal{F}(fg)(s) = \frac{1}{2\pi}(F * G)(s)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό στις f και $\overline{g}$ έχουμε το επόμενο πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 71 (ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ Parseval) *Έστω δυο συναρτήσεις f και g τμηματικά λείες. Υποθέτουμε ότι οι f και $\overline{g}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες όπως επίσης και* *το γινόμενό τους. Υποθέτουμε επίσης ότι οι μετασχηματισμοί Fourier F και G των f και g αντίστοιχα είναι τέτοιοι ώστε οι F και $\overline{G}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε ισχύει η ταυτότητα*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\overline{G(x)}dx \quad \textit{(ταυτότητα του Parseval)}$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 72 *Διαλέγοντας $f = p_a$ έχουμε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p_a(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\sin^2(as/2)}{s^2} ds$$

Το αριστερό ολοκλήρωμα είναι ίσο με a ενώ στο δεξί κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = as/2$ και έτσι προκύπτει ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy = \frac{\pi}{2}$$

Διαλέγοντας $f = p_a$ *και* $g = p_b$ *με* $0 < a \leq b$ *έχουμε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)p_b(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\sin(as/2)\sin(bs/2)}{s^2}ds$$

Το αριστερό ολοκλήρωμα είναι ίσο με a *ενώ*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\sin(as/2)\sin(bs/2)}{s^2}ds = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(as/2)\sin(bs/2)}{s^2}ds$$

λόγω του ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι άρτια συνάρτηση. Τελικά έχουμε ότι

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin(as/2)\sin(bs/2)}{s^2}ds = \frac{\pi}{4}a$$

Στην συνέχεια θέτοντας $y = \frac{a}{2}s$ *προκύπτει ότι*

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin y \sin(\frac{b}{a}y)}{y^2}dy = \frac{\pi}{2}$$

$\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 73 *Μπορούμε να ορίσουμε ως μετασχηματισμό Fourier τον εξής*

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ist}dt$$

οπότε ο αντίστροφος θα είναι

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} F(s)e^{-ist}ds$$

το οποίο οδηγεί σε ισοδύναμα αποτελέσματα με μικρές διαφορές, όπως για παράδειγμα ο μετασχηματισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης. Επίσης, ο συντελεστής μπροστά από το ολοκλήρωμα μπορεί να επιλεγεί όπως θέλουμε αλλά έπειτα ο αντίστοιχος συντελεστής στον αντίστροφο μετασχηματισμό θα πρέπει να είναι τέτοιος ώστε το γινόμενο των δυο συντελεστών να είναι ίσο με $\frac{1}{2\pi}$. Σε πολλά βιβλία θα δούμε ότι υπάρχουν διαφορές στον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier όπως περιγράψαμε πιο πριν. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει κανείς να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός με την χρήση των πινάκων μετασχηματισμών (δες για παράδειγμα τον πίνακα 1) που συνήθως υπάρχουν διότι αυτοί θα διαφέρουν από βιβλίο σε βιβλίο, ανάλογα με τον ορισμό του μετασχηματισμού που έχει δοθεί. $\square$

Υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού **Fourier**

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης, προφανώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες θεώρημα του μετασχηματισμού Fourier. Δεδομένου ότι ο απευθείας υπολογισμός του αντιστρόφου μέσω αυτού του θεωρήματος μπορεί να είναι αρκετά δύσκολος, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τον πίνακα 1 (ή παρόμοιους και πληρέστερους που υπάρχουν στην βιβλιογραφία). Ο πίνακας 1 περιέχει τους μετασχηματισμούς Fourier που έχουμε υπολογίσει στα παραδείγματα που έχουμε δώσει. Έτσι, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης $\frac{2a}{a^2+s^2}$ θα κοιτάξουμε τον πίνακα μετασχηματισμών και θα δούμε ότι προέρχεται από την συνάρτηση $e^{-a|t|}$. Λόγω του ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 είμαστε βέβαιοι ότι δεν υπάρχει άλλη συνάρτηση τέτοια ώστε να έχει τον ίδιο μετασχηματισμό. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό μιας πιο πο-

Πίνακας 1: Πίνακας μετασχηματισμών Fourier

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{ist}ds$	$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt$
$a>0,\ p_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } \lvert t\rvert \le \frac{a}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$\mathcal{F}(p_a)(s) = \begin{cases} \frac{2\sin(\frac{a}{2}s)}{s}, & \text{όταν } s \neq 0 \\ a, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
$a>0,\ q_a(t) = \begin{cases} 1-\frac{\lvert t\rvert}{a}, & \text{όταν } \lvert t\rvert \le a \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$\mathcal{F}(q_a)(s) = \begin{cases} \frac{4\sin^2(\frac{a}{2}s)}{as^2}, & \text{όταν } s \neq 0 \\ a, & \text{αλλιώς} \end{cases}$
$a>0,\ e^{-a\lvert t\rvert}$	$\frac{2a}{a^2+s^2}$
$\operatorname{Re} a>0,\ g_a(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{όταν } t>0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$\mathcal{F}(g_a)(s) = \frac{a-is}{a^2+s^2} = \frac{1}{a+is}$
$a>0,\ e^{-at^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a}$
$\operatorname{Re} a>0,\ \hat{g}_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t \ge 0 \\ e^{at}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$	$\mathcal{F}(\hat{g}_a)(s) = \frac{a+is}{a^2+s^2} = \frac{1}{a-is}$

λύπλοκης συνάρτησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης

$$2\frac{2a}{a^2+s^2} + 3\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a} \qquad \text{όταν } a > 0$$

μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Fourier και του αντιστρόφου της. Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{-1}\left(2\frac{2a}{a^2+s^2} + 3\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a}\right) \\ = \; & 2\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2a}{a^2+s^2}\right) + 3\mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a}\right) \\ = \; & 2e^{-a|t|} + 3e^{-at^2} \end{aligned}$$

Παραδειγμα 74 *Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης*

$$F(t) = \frac{2a}{a^2 + t^2}$$

με $a > 0$ *θα δίνεται από*

$$\mathcal{F}(F)(s) = 2\pi e^{-a|s|}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το θεώρημα 69 και τον πίνακα 1.

Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία στη θεωρία πιθανοτήτων και συγκεκριμένα στο μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την Cauchy, δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας είναι η $f(t) = \frac{1}{\pi(1+xt^2)}$. *Σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχύει ότι* $\mathcal{F}(f)(s) = e^{-|s|}$. □

Παραδειγμα 75 *Θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier για να επιλύσουμε την διαφορική εξίσωση*

$$y^{'}(x) + 2y(x) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Λαμβάνουμε τον μετασχηματισμό Fourier κατά μέλη της εξίσωσης και έχουμε

$$(is+2)Y(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

ή αλλιώς, αναλύοντας σε απλά κλάσματα,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{(1+s^2)(2+is)} \\ &= \frac{1}{1+is} + \frac{1}{3(1-is)} - \frac{2}{3(2+is)} \\ &= \frac{1-is}{1+s^2} + \frac{1}{3}\frac{1+is}{1+s^2} - \frac{2}{3}\frac{2-is}{4+s^2} \end{aligned}$$

Αρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός της Y θα είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(Y) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1-is}{1+s^2}\right) + \frac{1}{3}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1+is}{1+s^2}\right) - \frac{2}{3}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2-is}{4+s^2}\right) \\ &= g_1(x) + \frac{1}{3}\hat{g}_1(x) - \frac{2}{3}g_2(x) \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τον πίνακα μετασχηματισμών. Δηλαδή

$$y(x) = \begin{cases} e^{-x} - \frac{2}{3}e^{-2x}, & \textit{όταν } x > 0 \\ \frac{1}{3}e^{x}, & \textit{όταν } x < 0 \end{cases}$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 76 *Έστω ότι η f είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$. Θα μελετήσουμε την συνήθη διαφορική εξίσωση*

$$y''(x) - y(x) = f(x) \qquad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στα δυο μέλη της εξίσωσης και έχουμε

$$\left((is)^2 - 1\right) Y(s) = F(s)$$

Άρα

$$Y(s) = -\left(\frac{1}{1+s^2}\right) F(s)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης (δες θεώρημα 64) προκύπτει ότι

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y) f(y) dy, \qquad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

όπου $k(x) = -\frac{1}{2}e^{-|x|}$. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 77 *Στο προηγούμενο παράδειγμα υποθέσαμε ότι η f είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Αν διαλέξουμε ως f την $f(x) = e^{x/2}$ διαπιστώνουμε ότι δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και επιπλέον δεν μετασχηματίζεται κατά Fourier, παρόλα αυτά ο μετασχηματισμός Fourier θα μας οδηγήσει σε μια συνάρτηση η οποία όντως είναι μια λύση του προβλήματος!*

Από την άλλη πλευρά, αν διαλέξουμε ως f την

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{όταν } x > 0 \\ 0, & \text{όταν } x \leq 0 \end{cases}$$

η οποία είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και επομένως μετασχηματίζεται κατά Fourier, η μέθοδος Fourier θα μας οδηγήσει σε μια συνάρτηση η οποία **δεν είναι λύση** *του παραπάνω προβλήματος! Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;*

Το συμπέρασμα είναι ότι ο καλύτερος τρόπος εφαρμογής του μετασχηματισμού Fourier είναι να τον εφαρμόζουμε χωρίς να ελέγχουμε αν το πρόβλημα μετασχηματίζεται κατά Fourier και στη συνέχεια να επαληθεύουμε αν η συνάρτηση που μας δίνει είναι πράγματι *λύση του προβλήματος. Με τον τρόπο αυτό θα είμαστε αφενός σίγουροι για το συμπέρασμά μας και μάλιστα με αυστηρά μαθηματικό τρόπο και από την άλλη δεν θα έχουμε χάσει μια λύση αν τα δεδομένα δεν μετασχηματίζονται κατά Fourier όπως στο πρώτο παράδειγμα της παρατήρησης.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 78 *Θα επιλύσουμε την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(u)y(x-u)du = e^{-\lambda|x|}, \qquad \text{για } x \in \mathbb{R}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+$$

Μετασχηματίζουμε κατά μέλη με τον μετασχηματισμό Fourier την ολοκληρωτική εξίσωση και έπειτα εφαρμόζουμε το θεώρημα συνέλιξης 64 στο αριστερό μέλος, οπότε έχουμε

$$Y(s) = \frac{2\lambda(1+is)}{\lambda^2+s^2} = \frac{2\lambda(1+is)}{(\lambda+is)(\lambda-is)} = \frac{1-\lambda}{\lambda+is} + \frac{1+\lambda}{\lambda-is}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Συνεπώς

$$y(x) = (1-\lambda)g_\lambda(x) + (1+\lambda)\hat{g}_\lambda(x)$$

ή αλλιώς

$$y(x) = \begin{cases} (1-\lambda)e^{-\lambda x}, & \text{όταν } x > 0 \\ (1+\lambda)e^{\lambda x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

$\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 79 *Έχουμε χρησιμοποιήσει στην ενότητα αυτή συχνά αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης χωρίς να έχουμε σταθεί στις προϋποθέσεις που απαιτούνται για να μπορεί να γίνει αυτό. Επίσης, έχουμε χρησιμοποιήσει το λεγόμενο* **θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue** *(στην ξενόγλωσση βιβλιογραφία είναι γνωστό ως Lebesgue's Dominated Convergence Theorem) το οποίο μας δίνει τις προϋποθέσεις για να γίνει εναλλαγή ορίου με ολοκλήρωμα χωρίς επίσης να έχουμε αναφερθεί σε αυτό. Τέτοιου είδους αποτελέσματα βρίσκονται σε βιβλία ανάλυσης.*

Επίσης, κατά την εφαρμογή του μετασχηματισμού στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων υποθέσαμε αυθαίρετα ότι η άγνωστη συνάρτηση μπορεί να μετασχηματισθεί κατά Fourier. Αυτό βέβαια δεν μπορούμε να *το γνωρίζουμε εκ των προτέρων, τουλάχιστο με μια απλή ματιά. Η ιδέα είναι ότι το υποθέτουμε και καταλήγουμε σε μια συνάρτηση η οποία «πιθανό» να είναι λύση του προβλήματος. Για να το διαπιστώσουμε θα πρέπει να δοκιμάσουμε αν όντως αυτή η συνάρτηση αποτελεί λύση του, δηλαδή ουσιαστικά η απόδειξη του ότι μια λύση του προβλήματος είναι αυτή που υπολογίσαμε είναι μέσω της επαλήθευσης και όχι μέσω της εφαρμογής του μετασχηματισμού! Η ίδια παρατήρηση βεβαίως ισχύει και για τον επόμενο μετασχηματισμό που θα μελετήσουμε.* □

Μετασχηματισμός Laplace

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τον μετασχηματισμό Laplace. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 80 *Έστω $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ και $s \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε ως* ***μετασχηματισμό Laplace*** *της f τον επόμενο ολοκληρωτικό μετασχηματισμό*

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

όπου $s = x + iy$, αν το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Είναι δυνατόν να ορίσουμε και τον λεγόμενο **δίπλευρο** μετασχηματισμό Laplace του οποίου ο ορισμός είναι ο επόμενος.

ΟΡΙΣΜΟΣ 81 *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ και $s \in \mathbb{C}$. Ορίζουμε ως δίπλευρο μετασχηματισμό Laplace τον επόμενο ολοκληρωτικό μετασχηματισμό*

$$\mathcal{DL}(f)(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-st} f(t)dt$$

όπου $s = x + iy$, αν το ολοκλήρωμα υπάρχει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 82 *Έστω $f(t) = 1$ για κάθε $t \geq 0$. Ισχύει ότι, όταν $s \in \mathbb{C}$ και τέτοιο ώστε $s \neq 0$,*

$$\begin{aligned}
\frac{e^{st}}{s} &= \frac{e^{x+iy}}{x+iy} \\
&= \frac{e^{xt}(\cos yt + i\sin yt)(x-iy)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{e^{xt}}{x^2+y^2}\left((x\cos yt + y\sin yt) + i(x\sin yt - y\cos yt)\right)
\end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int e^{st}dt &= \int e^{(x+iy)t}dt \\
&= \frac{e^{xt}}{x^2+y^2}\left((x\cos yt + y\sin yt) + i(x\sin yt - y\cos yt)\right)
\end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\int e^{st}dt = \frac{e^{st}}{s}$$

όταν $s \neq 0$.

Επομένως έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-st}dt = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{e^{-sA}}{-s} + \frac{1}{s}\right)$$

Όμως το όριο, δεδομένου ότι $s = x + iy$,

$$\lim_{A\to\infty} \frac{e^{-sA}}{-s} = \lim_{A\to\infty} e^{-xA}(\cos(-yA) + i\sin(-yA))$$

υπάρχει μονάχα όταν $x > 0$ *ή αλλιώς* $\operatorname{Re} s > 0$ *και είναι ίσο με μηδέν. Τελικά,*

$$\mathcal{L}(1)(s) = \frac{1}{s} \quad \text{όταν } \operatorname{Re} s > 0$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 83 *Σε αυτό το παράδειγμα θα υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς*

$$\mathcal{L}(\cos xt) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}(\sin xt)$$

Ας υπολογίσουμε πρώτα τον μετασχηματισμό

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{ixt}) &= \int_0^\infty e^{-st} e^{ixt} dt \\
&= \lim_{A\to\infty} \left. \frac{e^{(ix-s)t}}{ix - s} \right|_{t=0}^{t=A} \\
&= \frac{1}{s - ix}
\end{aligned}$$

αρκεί $\operatorname{Re} s > 0$ *για τον ίδιο λόγο με το προηγούμενο παράδειγμα.*

Επειδή

$$\cos xt = \frac{e^{ixt} + e^{-ixt}}{2} \quad \text{και} \quad \sin xt = \frac{e^{ixt} - e^{-ixt}}{2i}$$

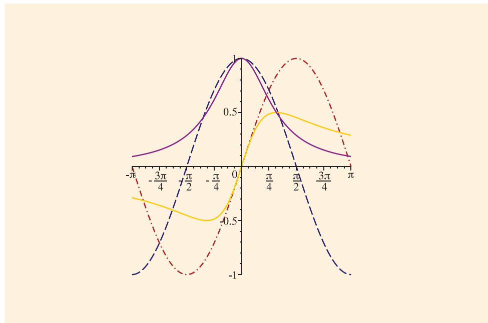
προκύπτει ότι, όταν $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\cos xt) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - ix} + \frac{1}{s + ix}\right) = \frac{s}{s^2 + x^2} \\ \mathcal{L}(\sin xt) &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - ix} - \frac{1}{s + ix}\right) = \frac{x}{s^2 + x^2} \end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 84 *Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης*

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{όταν } 0 \le t \le 1 \\ 1, & \text{όταν } t > 1 \end{cases}$$



Σχήμα 2: Τα γραφήματα των συναρτήσεων $\cos t$ (με μπλε διακεκομμένη γραμμή) $\sin t$ (με κίτρινη διακεκομμένη γραμμή) και των μετασχηματισμών τους κατά Laplace (κίτρινο και μοβ χρώμα αντίστοιχα).

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \\ &= \int_0^1 te^{-st}dt + \lim_{A\to\infty}\int_1^A e^{-st}dt \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s^2} \end{aligned}$$

αρκεί $\operatorname{Re} s > 0$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 85 *Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

συγκλίνει απολύτως όταν το όριο

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A |f(t)e^{-st}|dt$$

υπάρχει. Θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για κάποια $s \in U$ *όπου* U *ένα υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου, εάν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει κάποιος αριθμός* t_0 *τέτοιος ώστε αν* $t \geq t_0$ *τότε*

$$\left|\int_t^\infty f(t)e^{-st}dt\right| < \varepsilon$$

για κάθε $s \in U$.

Για να είναι καλά ορισμένος ο μετασχηματισμός Laplace μια ικανή συνθήκη για την συνάρτηση f είναι η επόμενη.

Ορισμος 86 *Θα λέμε ότι η συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ *είναι εκθετικής τάξης* a *εάν υπάρχει σταθερά* $M > 0$ *και κάποιο* $a > 0$ *τέτοια ώστε για κάποιο* $t_0 \geq 0$, *να ισχύει*

$$|f(t)| \leq Me^{at}, \quad t \geq t_0$$

Παρατηρηση 87 *Για να εξετάσουμε αν κάποια συνάρτηση είναι εκθετικής τάξης για κάποιο* $a > 0$ *αρκεί να μελετήσουμε τον λόγο*

$$\frac{f(t)}{e^{at}}$$

και να δούμε αν συγκλίνει καθώς $t \to \infty$. *Αν μπορούμε να διαλέξουμε κάποιο* $a > 0$ *τέτοιο ώστε ο λόγος αυτός να είναι φραγμένος για κάθε* $t > 0$ *τότε το μικρότερο από αυτά τα* a *(που έχει αυτή την ιδιότητα) είναι ο αριθμός που χρειαζόμαστε και η συνάρτηση* f *λέγεται εκθετικής τάξης* a. *Για παράδειγμα όλες οι συναρτήσεις* $f(t) = t^p$ *για οποιοδήποτε* p *είναι εκθετικής τάξης για οποιοδήποτε* a. *Η συνάρτηση* e^{pt} *είναι εκθετικής τάξης* p *ενώ η συνάρτηση* e^{t^2} *δεν είναι εκθετικής τάξης.*

Για παράδειγμα έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{x^k}{e^{ax}}, \quad a > 0, \quad k \in \mathbb{N}$$

Υπολογίζοντας την παράγωγο της g διαπιστώνουμε ότι είναι φθίνουσα συνάρτηση για κάθε $x \geq \frac{k}{a}$. Επιπλέον, με τον κανόνα του ***L'Hospital*** *προκύπτει ότι η συνάρτηση $g(x)$ συγκλίνει στο 0 καθώς $x \to +\infty$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση e^{ax} «τελικά» (δηλαδή από κάποιο x_0 και πάνω) ξεπερνά την συνάρτηση x^k για οποιαδήποτε $a > 0$ και $k \in \mathbb{N}$.* $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 88 (Ύπαρξη Μετασχηματισμού Laplace)
Αν η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξεως a, τότε ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}(f)$ υπάρχει για $s \in \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $\operatorname{Re} s = x > a$ και μάλιστα συγκλίνει απόλυτα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 89 *Η συνάρτηση $f(t) = e^{at}$ με $t \geq 0$*

είναι συνεχής και εκθετικής τάξεως a. *Οπότε*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{at}) &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt \\
&= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}$$

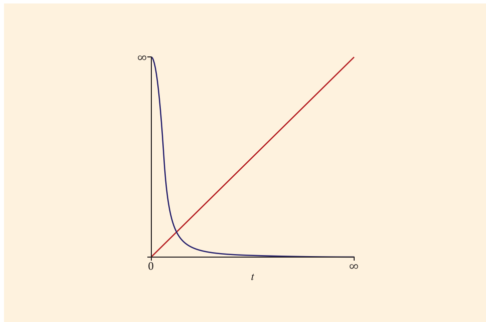
για $\operatorname{Re} s > a$. *Ο αριθμός* a *μπορεί να είναι και μιγαδικός οπότε σε αυτή την περίπτωση πρέπει* $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} a$.

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 90 *Η συνάρτηση* $f(t) = t$ *για* $t \geq 0$ *είναι συνεχής και εκθετικής τάξεως (για οποιοδήποτε* a*) επομένως*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t) &= \int_0^\infty te^{-st}dt \\
&= \left.\frac{-te^{-st}}{s}\right|_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt \\
&= \frac{1}{s}\mathcal{L}(1) \\
&= \frac{1}{s^2}
\end{aligned}$$

αρκεί $\operatorname{Re} s > 0$.



Σχήμα 3: Η συνάρτηση $f(t) = t$ δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη αλλά είναι εκθετικής τάξεως. Στο σχήμα αυτό φαίνεται το γράφημα της (με κόκκινο χρώμα) καθώς και το γράφημα του μετασχηματισμού της (με μπλε χρώμα).

Παρομοίως, μπορούμε να υπολογίσουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(t^2\right) = \frac{2}{s^3}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

και επαγωγικά ισχύει ότι

$$\mathcal{L}\left(t^n\right) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 91 *Έστω η συνάρτηση*

$$f(t) = 2te^{t^2}\cos\left(e^{t^2}\right)$$

Η συνάρτηση f *είναι συνεχής στο* $[0,\infty)$ *αλλά δεν είναι εκθετικής τάξης. Παρόλα αυτά ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει διότι*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^\infty 2te^{t^2}\cos(e^{t^2})e^{-st}dt \\ &= e^{-st}\sin(e^{t^2})\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\sin(e^{t^2})dt \\ &= \sin(1) + s\mathcal{L}\left(\sin(e^{t^2})\right)\end{aligned}$$

αρκεί $\operatorname{Re} s > 0$. *Ο μετασχηματισμός Laplace της* $\sin(e^{t^2})$ *υπάρχει διότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής και εκθετικής τάξεως.* $\square$

Ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace

Στην συνέχεια θα παραθέσουμε βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace σε μορφή θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 92 (ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ) *Έστω ότι υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace για τις συναρτήσεις f_1 και f_2 για $\operatorname{Re} s > a_1$ και $\operatorname{Re} s > a_2$ αντίστοιχα. Τότε για $\operatorname{Re} s > \max\{a_1, a_2\}$ υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace του γραμμικού συνδυασμού των συναρτήσεων και μάλιστα*

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2)$$

για οποιεσδήποτε σταθερές c_1, c_2.

Η απόδειξη είναι απλή χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 93 *Έστω η συνάρτηση*

$$\cosh xt = \frac{e^{xt} + e^{-xt}}{2}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace υπάρχει και μάλιστα

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cosh xt) &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^{xt} + \mathcal{L}(e^{-xt})\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-x} + \frac{1}{s+x}\right) \\ &= \frac{s}{s^2 - x^2}\end{aligned}$$

Παρομοίως

$$\mathcal{L}(\sinh xt) = \frac{x}{s^2 - x^2}$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 94 *Έστω η συνάρτηση* $f(t) = a_0 + \cdots + a_n t^n$. *Είναι συνεχής και εκθετικής τάξης επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace. Έχουμε*

$$\mathcal{L}(f)(s) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{L}(t^k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k! a_k}{s^{k+1}}$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 95 *Έστω η συνάρτηση*

$$f(t) = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}. \quad -\infty < t < \infty$$

Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace του αθροίσματος όρο προς όρο. Έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}\left(t^{2n}\right) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(2n)!}{s^{2n+1}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n) \cdots (n+2)(n+1)}{s^{2n}}$$

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του λόγου έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{s^2} = \infty$$

επομένως η σειρά αυτή αποκλίνει για κάθε s.

Παρόλα αυτά ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης e^{-t^2} υπάρχει διότι είναι συνεχής και εκθετικής τάξεως. □

Στο επόμενο παράδειγμα θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace μιας οικογένειας συναρτήσεων που περιέχει την e^{-t^2}.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 96 *Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{t-m}{\sqrt{2}\sigma}$ *έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(s) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-sm} \int_0^\infty e^{-\left(y^2 + s\sqrt{2}\sigma y + \frac{s^2\sigma^2}{2}\right)} e^{\sigma^2 s^2/2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-sm} e^{\sigma^2 s^2/2} \int_0^\infty e^{-(y+\frac{s\sigma}{\sqrt{2}})^2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-sm} e^{\sigma^2 s^2/2} \int_0^\infty e^{-r^2} dr \\
&= \frac{1}{2} e^{-sm} e^{\sigma^2 s^2/2}
\end{aligned}$$

όπου στο τέλος κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $y + \frac{s\sigma}{\sqrt{2}} = r$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 97 *Έστω ότι η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[0,\infty)$ και εκθετικής τάξεως. Τότε το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-st}|dt$$

συγκλίνει ομοιόμορφα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 98 *Αν η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[0,\infty)$ και εκθετικής τάξης a τότε*

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) \to 0 \quad \text{καθώς } \operatorname{Re} s \to \infty$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι αρκετά σημαντικό καθότι αν μια συνάρτηση $F(s)$ δεν συγκλίνει στο μηδέν καθώς $\operatorname{Re} s \to \infty$ τότε δεν μπορεί να είναι ο μετασχηματισμός Laplace κάποιας συνάρτησης. Για παράδειγμα οι συναρτήσεις $\frac{s-1}{s+1}, \frac{e^s}{s}, s^2$ δεν συγκλίνουν στο μηδέν καθώς το $\operatorname{Re} s \to \infty$ επομένως δεν είναι ο μετασχηματισμός Laplace κάποιας συνάρτησης.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Λόγω του θεωρήματος 88 γνωρίζουμε ότι οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση f η οποία είναι εκθετικής τάξεως επιδέχεται μετασχηματισμό Laplace. Ας συμβολίσουμε με $C_a\mathcal{L}$ το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων f οι οποίες είναι εκθετικής τάξης a. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν $f \in C_a\mathcal{L}$ και $g \in C_a\mathcal{L}$ τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους επιδέχεται μετασχηματισμό Laplace. Αρα ο χώρος $C_a\mathcal{L}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος. Λόγω της γραμμικότητας του ολοκληρώματος εύκολα βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός

$$\mathcal{L} : C_a\mathcal{L} \to \operatorname{im}\mathcal{L}$$

Ο πυρήνας $\ker\mathcal{L}$ αποτελείται από τις συναρτήσεις εκείνες για τις οποίες

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = 0 \quad \text{για κάθε } s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s > a$$

Με άλλα λόγια, αν $s = x + iy$ τότε

$$\int_0^\infty e^{-xt} f(t) e^{-iyt} dt = 0 \quad \text{για κάθε } x > a, y \in \mathbb{R}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 65 προκύπτει ότι ο πυρήνας του μετασχηματισμού αποτελείται μονάχα από το μηδενικό στοιχείο. Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι 1-1 και συνεπώς αντιστρέψιμος. Ο αντίστροφος του είναι επίσης ένας γραμμικός μετασχηματισμός (βλέπε γραμμική άλγεβρα). Έτσι, χρησιμοποιώντας τα παραδείγματα μετασχηματισμών Laplace και τις ιδιότητες του μετασχηματισμού είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό ορισμένων συναρτήσεων χωρίς να γνωρίζουμε την μορφή του αντιστρόφου.

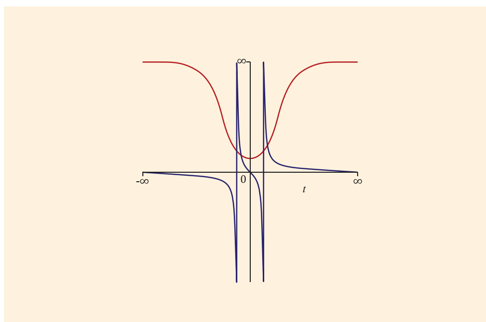
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 99 *Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης*

$$\frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s+1)}$$

Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του αντιστρόφου *προκύπτει ότι*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2(s-1)}+\frac{1}{2(s+1)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2(s-1)}\right)+\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2(s+1)}\right)\\
&= \frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}\\
&= \cosh t, \quad t \geq 0
\end{aligned}$$

□



Σχήμα 4: Τα γραφήματα των συναρτήσεων $\cosh t$ (με κόκκινη γραμμή) και του μετασχηματισμού της (με μπλε γραμμή).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 100 *Ας δούμε την συνάρτηση*

$$u_a(t)=\begin{cases}1, & \textit{όταν } t \geq a\\ 0, & \textit{όταν } t < a\end{cases}$$

η οποία είναι γνωστή και ως συνάρτηση του Heaviside. Υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace και έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u_a)(s) &= \int_0^\infty u_a(t)e^{-st}dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}dt \\ &= \frac{e^{-sa}}{s} \quad \text{όταν } \operatorname{Re} s > 0\end{aligned}$$

Αν υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης

$$v_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } t > a \\ 0, & \text{όταν } t \le a \end{cases}$$

η οποία διαφέρει σε ένα σημείο από την u_a, θα βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα. Αυτό συμβαίνει διότι οι συναρτήσεις u_a και v_a δεν είναι συνεχείς για αυτό και δεν ορίζεται καλά ο αντίστροφος σε αυτή την περίπτωση.

Παρόμοια η συνάρτηση

$$u_{ab}(t) = \frac{1}{b-a}\left(u_a(t) - u_b(t)\right) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t < a \\ \frac{1}{b-a}, & \text{όταν } a \le t < b \\ 0, & \text{όταν } t \ge b \end{cases}$$

έχει ως μετασχηματισμό Laplace την

$$\mathcal{L}(u_{ab})(s) = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s(b-a)}$$

$\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 101 *Αν* $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ *για* $\operatorname{Re} s > 0$ *τότε*

$$F(s-a) = \mathcal{L}(e^{at} f(t)), \quad a \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re} s > a$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 102 *Έχουμε αποδείξει ότι*

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Οπότε

$$\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(s-a)^2}, \quad \operatorname{Re} s > a$$

και γενικότερα

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad \mathrm{Re}\, s > a$$

Εφόσον η συνάρτηση $t^n e^{at}$ *είναι συνεχής τότε προκύπτει ότι*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right) = \frac{1}{n!} t^n e^{at}, \quad t \geq 0$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 103 *Δεδομένου ότι*

$$\mathcal{L}(\sin xt) = \frac{x}{s^2 + x^2}$$

τότε

$$\mathcal{L}\left(e^{2t} \sin 3t\right) = \frac{3}{(s-2)^2 + 9}$$

Επίσης, ισχύουν τα παρακάτω όταν $\operatorname{Re} s > a$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{at}\cos xt) &= \frac{s-a}{(s-a)^2+x^2}\\
\mathcal{L}(e^{at}\sin xt) &= \frac{x}{(s-a)^2+x^2}\\
\mathcal{L}(e^{at}\cosh xt) &= \frac{s-a}{(s-a)^2-x^2}\\
\mathcal{L}(e^{at}\sinh xt) &= \frac{x}{(s-a)^2-x^2}
\end{aligned}$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 104 *Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης*

$$\frac{s}{s^2+4s+1}$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+1}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+2)^2-3}\right)\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2-3}\right)-\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+2)^2-3}\right)\\ &= e^{-2t}\cosh\left(\sqrt{3}t\right)-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-2t}\sinh\left(\sqrt{3}t\right)\end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 105 *Αν* $F(s)=\mathcal{L}(f)(s)$ *τότε*

$$\mathcal{L}\Big(u_a(t)f(t-a)\Big)=e^{-as}F(s),\quad a\geq 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 106 *Έστω η συνάρτηση*

$$g(t)=\begin{cases}0, & \text{όταν } 0\leq t<1\\ (t-1)^2, & \text{όταν } t\geq 1\end{cases}$$

Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g)(s) &= \mathcal{L}\left(u_1(t)(t-1)^2\right)\\ &= e^{-s}\mathcal{L}(t^2)\\ &= \frac{2e^{-s}}{s^3},\quad \operatorname{Re}s>0\end{aligned}$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 107 *Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης*

$$\frac{e^{-2s}}{s^2+1}$$

Επειδή

$$\frac{e^{-2s}}{s^2+1} = e^{-2s}\mathcal{L}(\sin t)$$

τότε

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right) = u_2(t)\sin(t-2), \quad t \geq 0$$

$\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 108 *Αν η f είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξεως a τότε για τον μετασχηματισμό Laplace ισχύει ότι*

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = \mathcal{L}\left((-1)^n t^n f(t)\right), \quad n = 1, 2, \cdots \quad \operatorname{Re} s > a$$

Παραδειγμα 109 *Ισχύει ότι*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(t\cos xt) &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\cos xt)\\ &= -\frac{d}{ds}\frac{s}{s^2+x^2}\\ &= \frac{s^2-x^2}{(s^2+x^2)^2}\end{aligned}$$

και παρομοίως

$$\mathcal{L}(t\sin xt) = \frac{2xs}{(s^2+x^2)^2}$$

□

Παραδειγμα 110 *Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης*

$$\ln\frac{s+a}{s+b}$$

Εφόσον

$$\frac{d}{ds}\ln\frac{s+a}{s+b} = \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}$$

τότε

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\ln\frac{s+a}{s+b}\right) \\
&= -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s+b}\right) \\
&= \frac{1}{t}\left(e^{-bt}-e^{-at}\right)
\end{aligned}
$$

$\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 111 *Αν η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[0,\infty)$, εκθετικής τάξης a και τέτοια ώστε το $\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$ να υπάρχει, τότε*

$$
\int_s^\infty F(x)dx = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right), \quad s>a
$$

όπου $F(s)=\mathcal{L}(f)(s)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 112 *Είχαμε υπολογίσει τον μετασχηματισμό Laplace της $\sin t$ και επομένως έχουμε ότι*

$$
\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2} - \arctan s, \quad s>0
$$

Παρόμοια έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{\sinh xt}{t}\right) &= \int_s^\infty \frac{xdy}{y^2-x^2} \\
&= \frac{1}{2}\int_s^\infty \left(\frac{1}{y-x}-\frac{1}{y+x}\right)dy \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{s+x}{s-x}, \qquad \textit{για } s>|x|
\end{aligned}$$

□

Για μια γενίκευση των μετασχηματισμών Fourier και Laplace δείτε την επόμενη εργασία.

Η συνάρτηση Γάμμα

Έχουμε αποδείξει ότι

$$\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Θα γενικεύσουμε το αποτέλεσμα αυτό για μη ακέραιες δυνάμεις, οπότε θα υπολογίσουμε το

$$\mathcal{L}(t^a)(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^a dt, \quad a > -1$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = st$ όπου $s > 0$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t^a)(s) &= \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^a \frac{1}{s} dx \\ &= \frac{1}{s^{a+1}} \int_0^\infty x^a e^{-x} dx \end{aligned}$$

Η συνάρτηση

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \quad p > 0$$

ονομάζεται **συνάρτηση Γάμμα**. Με αυτό τον συμβολισμό έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(t^a)(s) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, \quad a > -1, \quad s > 0$$

Επομένως όταν $a = n = 1, 2, \cdots$ ισχύει ότι

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Μπορεί να ορισθεί ακόμη και για μιγαδικό εκθέτη a αρκεί $a \neq 0, -1, -2, \cdots$ και ισχύει ότι

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad a \neq 0, -1, -2, \cdots$$

Πράγματι, όταν $a = n \in \mathbb{N}$ μπορεί εύκολα να αποδείξουμε την σχέση αφού

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty x^n e^{-x} dx \\
&= \int_0^\infty x^n (-e^{-x})' dx \\
&= \left[e^{-x} x^n\right]_0^\infty + n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \\
&= n\Gamma(n)
\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 113 *Για* $a = -\frac{1}{2}$ *έχουμε ότι*

$$\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}$$

Για να υπολογίσουμε το $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ *κάνουμε αλλαγή μεταβλητής* $x = u^2$ *και έχουμε*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

Συνεπώς

$$\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0$$

οπότε και

$$\mathcal{L}^{-1}\left(s^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}, \quad t > 0$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 114 *Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό*

$$\mathcal{L}(\ln t)(s) = \int_0^\infty e^{-st} \ln t dt$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = st$ *όπου* $s > 0$ *έχουμε ότι*

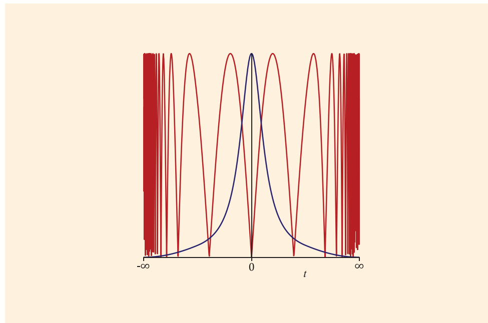
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\ln t)(s) &= \int_0^\infty e^{-x} \ln\left(\frac{x}{s}\right) \frac{1}{s} dx \\ &= \frac{1}{s}\left(\int_0^\infty e^{-x} \ln x dx - \ln s \int_0^\infty e^{-x} dx\right) \\ &= -\frac{1}{s}(\ln s + \gamma) \end{aligned}$$

όπου $\gamma = -\int_0^\infty e^{-x} \ln x dx = 0.577\cdots$ *και ονομάζεται η σταθερά του Euler την οποία είχαμε ξαναδεί ως την διαφορά* $\sum \frac{1}{n} - \ln n$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 115 *Έστω ότι η* f *είναι συνεχής στο* $(0, \infty)$ *και εκθετικής τάξης* a *και επίσης η* f' *είναι τμηματικά συνεχής στο* $[0, \infty)$. *Τότε*

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0+) \quad \textit{όταν } \operatorname{Re} s > a$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 116 *Έστω μια συνάρτηση* $f(t)$. *Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό* $\mathcal{L}(tf'(t))$. *Έχουμε*



Σχήμα 5: Το γράφημα της περιοδικής συνάρτησης $|\sin t|$ (με κόκκινο χρώμα) και του μετασχηματισμού της (με μπλε χρώμα).

ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(tf^{'}(t)) &= (-1)\left(\mathcal{L}(f^{'}(t))\right)^{'}(s) \text{ (δες θεώρημα 108)}\\ &= -\left(sF(s) - f(0+)\right)^{'}\\ &= -(sF^{'}(s) + F(s))\end{aligned}$$

Παραδειγμα 117 *Θα υπολογίσουμε τους μετασχηματισμούς*

$$\mathcal{L}(\sin^2 xt) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}(\cos^2 xt)$$

μέσω των παραγώγων των συναρτήσεων $f(t) = \sin^2 xt$ *και* $g(t) = \cos^2 xt$*. Η παράγωγος της* f *είναι η* $f^{'}(t) =$

$2x \sin xt \cos xt = x \sin 2xt$. *Επειδή*

$$\mathcal{L}(x \sin 2xt) = s\mathcal{L}(\sin^2 xt) - \sin^2 0$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin^2 xt) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(x \sin 2xt) \\ &= \frac{x}{s}\frac{2x}{s^2 + x^2} \\ &= \frac{2x^2}{s(s^2 + x^2)}\end{aligned}$$

Παρομοίως,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos^2 xt) &= \frac{1}{s}\mathcal{L}(-x \sin 2xt) + \frac{1}{s} \\ &= -\frac{x}{s}\frac{2x}{s^2 + 4x^2} + \frac{1}{s} \\ &= \frac{s^2 + 2x^2}{s(s^2 + 4x^2)}\end{aligned}$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 118 *Αν για μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει ότι $f(0) = 0$ τότε ισχύει και ότι*

$$f'(t) = \mathcal{L}^{-1}(sF(s))$$

όπου $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$.

Οπότε, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right) = \left(\frac{\sinh at}{a}\right)' = \cosh at$$

□

Γενικότερα, ισχύει το επόμενο αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 119 *Έστω ότι οι* $f, f', \cdots, f^{(n-1)}$ *είναι συνεχείς στο* $(0,\infty)$ *και εκθετικής τάξεως ενώ η* $f^{(n)}$ *είναι τμηματικά συνεχής στο* $[0,\infty)$. *Τότε*

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n\mathcal{L}(f) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 120 *Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace των πολυωνύμων Laguerre*

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-t}\right), \quad n = 0, 1, 2, \cdots,$$

Θέτουμε $y(t) = t^n e^{-t}$ *και υπολογίζουμε πρώτα τον μετασχηματισμό*

$$\mathcal{L}\left(y^{(n)}\right) = s^n\mathcal{L}(y) = \frac{s^n n!}{(s+1)^{n+1}}$$

Επομένως έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(L_n) = \mathcal{L}\left(e^t \frac{1}{n!} y^{(n)}\right) = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > 1$$

□

Τέλος, με το επόμενο θεώρημα θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 121 *Έστω ότι η f είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξεως a. Αν*

$$g(t) = \int_0^t f(u)du$$

τότε

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f), \quad \operatorname{Re} s > a$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον $g^{'}(t) = f(t)$ εκτός από τα σημεία ασυνέχειας της f τότε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(g)(s) &= \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt \\ &= \lim_{A\to\infty} \left[\frac{g(t)e^{-st}}{-s}\Big|_0^A + \frac{1}{s}\int_0^A e^{-st} f(t)dt \right]\end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{A\to\infty} \frac{g(A)e^{-sA}}{-s}$$

Επειδή

$$\begin{aligned}|g(A)e^{-sA}| &\leq e^{-A\,\mathrm{Re}\,s} \int_0^A |f(u)|du \\ &\leq Me^{-A\,\mathrm{Re}\,s} \int_0^A e^{au} du \\ &= \frac{M}{a}\left(e^{-(\mathrm{Re}\,s-a)A} - e^{-A\,\mathrm{Re}\,s}\right) \\ &\to 0 \text{ καθώς } A \to \infty \text{ για } \mathrm{Re}\,s > a > 0\end{aligned}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και όταν $a = 0$. Επομένως

$$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f), \quad \text{για } \mathrm{Re}\,s > a$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 122 *Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης*

$$\int_0^t \frac{\sin u}{u} du$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \frac{1}{s}\arctan\frac{1}{s}$$

□

Στα επόμενα δυο θεωρήματα θα μελετήσουμε την συμπεριφορά μιας συνάρτησης f στο μηδέν και το $+\infty$ μέσω του μετασχηματισμού της.

ΘΕΩΡΗΜΑ 123 *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $(0, \infty)$ και εκθετικής τάξης a και επίσης η f' είναι τμηματικά συνεχής στο $[0, \infty)$. Τότε ισχύει ότι*

$$f(0+) = \lim_{t \to 0+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s), \quad s \in \mathbb{R}$$

όπου $F(s) = \mathcal{L}(f)$.

Αποδειξη. Ξεκινώντας από τον μετασχηματισμό Laplace της παραγώγου έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f^{'}) = sF(s) - f(0+), \quad s > a$$

Επειδή κάθε μετασχηματισμένη συνάρτηση συγκλίνει στο μηδέν καθώς $s \to \infty$ τότε εύκολα προκύπτει ότι

$$sF(s) - f(0+) \to 0 \quad \text{καθώς } s \to \infty$$

και άρα και η ζητούμενη σχέση. □

Παραδειγμα 124 *Έστω*

$$\mathcal{L}(f) = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)}$$

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα (υποθέτοντας ότι ικανοποιεί η συνάρτηση f τις απαιτούμενες συνθήκες) έχουμε ότι

$$f(0+) = \lim_{s\to\infty} s\left(\frac{s+1}{(s-1)(s+2)}\right) = 1$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 125 *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $(0,\infty)$ και εκθετικής τάξης a και επίσης η f' είναι τμηματικά συνεχής στο $[0,\infty)$. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι το όριο $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ υπάρχει. Τότε*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s), \quad s \in \mathbb{R}$$

όπου $F(s) = \mathcal{L}(f)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 126 *Έστω $f(t) = \sin t$. Τότε*

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s^2+1} = 0$$

Δεν μπορούμε όμως να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι το ίδιο όριο έχει και η f καθώς $t\to\infty$ διότι στην προκειμένη περίπτωση δεν έχει καν όριο. Αν όμως είχε κάποιο όριο, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα θα όφειλε να είναι ίσο με το $\lim\limits_{s\to 0} sF(s)$. $\square$

Συνέλιξη

Στην συνέχεια θα αναφερθούμε στην συνέλιξη δυο συναρτήσεων την οποία ορίζουμε για την προκειμένη περίπτωση (αφού υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις ορίζονται στο $[0, +\infty)$) να είναι ως εξής

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx$$

Με τον μετασχηματισμό $u = t - x$ είναι καθαρό ότι $f * g = g * f$. Εύκολα αποδεικνύονται και οι παρακάτω τρεις ιδιότητες,

(i) $c(f * g) = cf * g = f * cg$

(ii) $f * (g * h) = (f * g) * h$

(iii) $f * (g + h) = f * g + f * h$

ΘΕΩΡΗΜΑ 127 (ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ) *Αν οι f και g είναι τμηματικά συνεχείς στο $[0, \infty)$ και εκθετικής τάξεως a, τότε*

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) \cdot \mathcal{L}(g)(s), \quad \text{για } \operatorname{Re} s > a$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 128 *Εύκολα βλέπουμε ότι*

$$\mathcal{L}\left(e^{at} * e^{bt}\right) = \frac{1}{(s-a)(s-b)}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right) &= e^{at} * e^{bt} \\
&= \int_0^t e^{ax} e^{b(t-x)} dx \\
&= \frac{e^{at} - e^{bt}}{a-b}, \quad a \neq b
\end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 129 *Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης*

$$\frac{1}{s^2(s-1)}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\mathcal{L}(t * e^t) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1}$$

συνεπώς ο αντίστροφος είναι η συνάρτηση $t * e^t = e^t - t - 1$.

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 130 *Γνωρίζουμε ότι*

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}}$$

Θα υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης

$$\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} * e^t \\ &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{t-x} dx \\ &= \frac{e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

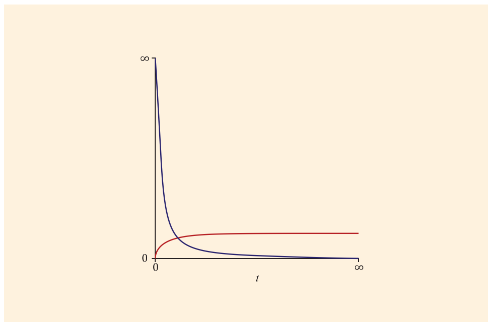
Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u = \sqrt{x}$ *προκύπτει ότι*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right) &= \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du \\ &= e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(\operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right)\right)(s) = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

$\square$



Σχήμα 6: Το γράφημα της συνάρτησης $\operatorname{erf}\left(\sqrt{t}\right)$ (με κόκκινο χρώμα) και του μετασχηματισμού της (με μπλε χρώμα).

Η συνάρτηση Βήτα

Έστω οι συναρτήσεις $f(t) = t^{a-1}$ και $g(t) = t^{b-1}$ όπου $a, b > 0$. Τότε

$$(f * g)(t) = \int_0^t x^{a-1}(t-x)^{b-1}dx$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $x = ut$ προκύπτει ότι

$$(f * g)(t) = t^{a+b-1} \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du$$

Η συνάρτηση

$$B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du$$

ονομάζεται **ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΒΗΤΑ**. Εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}\left(t^{a+b-1}B(a, b)\right) &= \mathcal{L}\left(t^{a-1}\right)\mathcal{L}\left(t^{b-1}\right) \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{s^{a+b}}\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} t^{a+b-1}B(a,b) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{s^{a+b}}\right) \\ &= \Gamma(a)\Gamma(b)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{a+b}}\right) \\ &= \Gamma(a)\Gamma(b)\frac{t^{a+b-1}}{\Gamma(a+b)} \end{aligned}$$

Στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\mathcal{L}(t^{a+b-1}) = \frac{\Gamma(a+b)}{s^{a+b}}$ και επομένως $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Gamma(a+b)}{s^{a+b}}\right) = \Gamma(a+b)\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{a+b}}\right) = t^{a+b-1}$.

Επομένως προκύπτει η φόρμουλα

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Στον πίνακα 2 συγκεντρώνουμε ορισμένους από τους μετασχηματισμούς Laplace που έχουμε υπολογίσει στα παραδείγματα. Για περισσότερους μετασχηματισμούς και πληρέστερους πίνακες μπορεί κανείς να συμβουλευθεί την προτεινόμενη βιβλιογραφία.

Πίνακας 2: Πίνακας μετασχηματισμών Laplace

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{st}dy,\ s\in\mathbb{C},\ t\geq 0$	$F(s)=\mathcal{L}(f)(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt,\ s\in\mathbb{C}$
$f(t)=1$	$\mathcal{L}(f)(s)=\frac{1}{s},\ \operatorname{Re}s>0$
$f(t)=e^{ixt}$	$\mathcal{L}(f)(s)=\frac{1}{s-ix},\ \ \operatorname{Re}s>0$
$f(t)=\cos xt$	$\mathcal{L}(f)(s)=\frac{s}{s^2+x^2},\ \ \operatorname{Re}s>0$
$f(t)=\sin xt$	$\mathcal{L}(f)(s)=\frac{x}{s^2+x^2}$
$f(t)=e^{at},\ \ a\in\mathbb{C}$	$\mathcal{L}(f)(s)=\frac{1}{s-a},\ \ \operatorname{Re}s>\operatorname{Re}a$
$f(t)=t^n$	$\mathcal{L}(f)(s)=\frac{n!}{s^{n+1}},\ \ \operatorname{Re}s>0$

Εφαρμογές του μετασχηματισμού Laplace

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 131 *Έστω το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$\begin{aligned} y''(t)+y(t) &= 1\\ y(0) &= 0\\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών όπως το παραπάνω ο μετασχηματισμός Laplace υπερτερεί έναντι του μετασχηματισμού Fourier.

Υποθέτουμε ότι η λύση ικανοποιεί όλες τις απαιτούμενες προϋποθέσεις ούτως ώστε να μπορούμε να μετασχηματίσουμε την παραπάνω εξίσωση κατά Laplace. Έτσι έχουμε

$$\mathcal{L}(y^{''}) + \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1)$$

οπότε λύνοντας ως προς $Y(s)$ *προκύπτει ότι*

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό του δεξιού μέλους έχουμε ότι

$$y(t) = 1 - \cos t$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι πράγματι είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 132 *Θα μπορούσαμε να ορίσουμε τον μονόπλευρο μετασχηματισμό Fourier ως εξής*

$$\hat{\mathcal{F}}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-ist}dt = \hat{F}(s)$$

Τότε για κατάλληλη f θα ισχύει ότι

$$\hat{\mathcal{F}}(f^{'}(t)) = (is)\hat{F}(s) - f(0+)$$

Παρομοίως για μεγαλύτερης τάξης παραγώγους. Με αυτό το μετασχηματισμό θα μπορούσε κανείς να εργαστεί στο προηγούμενο πρόβλημα έτσι ώστε να χρησιμοποιήσει και τις αρχικές συνθήκες. Δεν θα μπορούσε όμως να μετασχηματίσει το δεξί μέλος. Το βασικό προτέρημα του μετασχηματισμού Laplace έναντι του μονόπλευρου μετασχηματισμού Fourier είναι το γεγονός ότι δύναται να μετασχηματίσει μια συνάρτηση η οποία δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη στο $(0, +\infty)$ αλλά βεβαίως να είναι εκθετικής τάξης. Για τις συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμες σε όλο το $\mathbb{R}$ μπορεί να χρησιμοποιήσει κανείς το συμμετρικό μετασχηματισμό Laplace ο οποίος είναι μια γενίκευση τόσο του μετασχηματισμού Fourier *όσο και του Laplace (δες εργασία). Ισχύει ότι* $\mathcal{L}(f) = \hat{\mathcal{F}}(e^{-xt}f(t))$ *και* $\mathcal{SL}(f) = \mathcal{F}(l(xt)f(t))$ *όπου* $l(t)$ *κατάλληλη συνάρτηση επομένως σε οποιοδήποτε πρόβλημα μπορούμε να εφαρμόσουμε το μονόπλευρο ή το (δίπλευρο) μετασχηματισμό Fourier πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με την κατάλληλη συνάρτηση.* $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 133 *Θα επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών*

$$\begin{aligned} y^{'''} + y^{''} &= e^t + t + 1 \\ y(0) &= 0 \\ y^{'}(0) &= 0 \\ y^{''}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Μετασχηματίζουμε κατά μέλη την παραπάνω εξίσωση και έχουμε

$$s^3Y(s) - s^2y(0) - sy^{'}(0) - y^{''}(0) + s^2Y(s) - sy(0) - y^{'}(0) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

Λύνοντας ως προς $Y(s)$ έχουμε

$$Y(s) = \frac{2s^2-1}{s^4(s+1)(s-1)} = -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^4} - \frac{1}{2(s+1)} + \frac{1}{2(s-1)}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό του δεξιού μέλους έχουμε

$$y(t) = -t + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t$$

Στην συνέχεια επιβεβαιώνουμε ότι είναι πράγματι λύση του παραπάνω προβλήματος. □

Παρατηρηση 134 *Στο προηγούμενο παράδειγμα οι αρχικές συνθήκες ήταν στο $x_0 = 0$. Αυτό είναι ιδιαίτερα βολικό για την εφαρμογή του μετασχηματισμού του οποίου η ολοκλήρωση είναι στο $(0, +\infty)$. Αν όμως οι αρχικές συνθήκες ήταν στο $x_0 = \gamma \neq 0$ τότε η άμεση εφαρμογή του μετασχηματισμού δεν θα βοηθήσει. Σε αυτή τη περίπτωση θεωρούμε την συνάρτηση $z(t) = y(t+\gamma)$, γράφουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για τη συνάρτηση z, εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό και υπολογίζουμε την άγνωστη συνάρτηση $y(t)$ μέσω της $z(t)$.*

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω το παρακάτω Π.Α.Τ.

$$\begin{aligned} y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) &= t, \\ y(1) &= 0 \\ y'(1) &= 0 \end{aligned}$$

θεωρούμε τη συνάρτηση $z(t) = y(t+1)$ *η οποία θα ικανοποιεί το παρακάτω Π.Α.Τ.*

$$\begin{aligned} z''(t) + 2z'(t) + 3z(t) &= t+1, \\ z(0) &= 0 \\ z'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό Laplace διαπιστώνουμε ότι η λύση του παραπάνω Π.Α.Τ. είναι

$$z(t) = 1/9\,\mathrm{e}^{-t}\left(3\,\mathrm{e}^{t}t + \mathrm{e}^{t} - 2\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}t\right) - \cos\left(\sqrt{2}t\right)\right)$$

Επομένως η λύση του αρχικού Π.Α.Τ. είναι η

$$y(t) = 1/9\,\mathrm{e}^{-t+1}\left(3\,\mathrm{e}^{t-1}t - 2\sqrt{2}\sin\left(\sqrt{2}\,(t-1)\right) - 2\,\mathrm{e}^{t-1} - \cos\left(\sqrt{2}\,(t-1)\right)\right)$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 135 *Θα υπολογίσουμε την λύση του παρακάτω προβλήματος συνοριακών τιμών,*

$$\begin{aligned} y'' + \lambda^2 y &= \cos \lambda t \\ y(0) &= 1 \\ y\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) &= 1 \end{aligned}$$

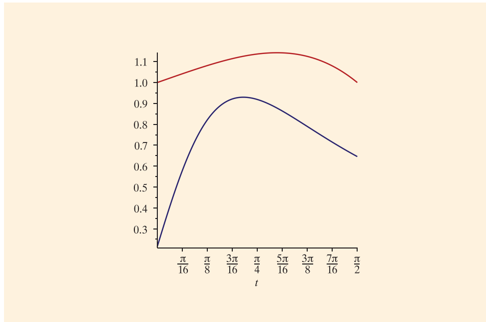
Μετασχηματίζοντας κατά μέλη την παραπάνω εξίσωση κατά Laplace λαμβάνουμε την ισότητα

$$Y(s) = \frac{s}{(s^2+\lambda^2)^2} + \frac{sy(0)}{s^2+\lambda^2} + \frac{y'(0)}{s^2+\lambda^2}$$

Υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό του δεξιού μέλους έχουμε ότι

$$y(t) = \frac{1}{2\lambda} t \sin \lambda t + \cos \lambda t + \frac{y'(0)}{\lambda} \sin \lambda t$$

Για να υπολογίσουμε το $y'(0)$ θέτουμε στην τελευταία ισότητα $t = 0$ και έτσι έχουμε ότι $y'(0) = \lambda - \frac{\pi}{4\lambda}$. Τέλος, επιβεβαιώνουμε ότι είναι λύση του προβλήματος. □



Σχήμα 7: Το γράφημα (με κόκκινη γραμμή) της συνάρτησης $\frac{1}{2\lambda}t\sin\lambda t + \cos\lambda t + \frac{y^{'}(0)}{\lambda}\sin\lambda t$ για $\lambda = 1$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Διαπιστώνουμε ότι ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Με μπλε γραμμή απεικονίζεται ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης αυτής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 136 *Έστω το σύστημα διαφορικών εξισώσεων*

$$\begin{aligned} y^{'} &= -z \\ z^{'} &= y \\ y(0) &= 1 \\ z(0) &= 0 \end{aligned}$$

Μετασχηματίζουμε κατά Laplace τις διαφορικές εξισώσεις και έχουμε

$$\begin{aligned} sY(s) - 1 &= -Z(s) \\ sZ(s) &= Y(s) \end{aligned}$$

το οποίο είναι ένα αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων. Λύνοντας το σύστημα αυτό έχουμε ότι

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1}$$

άρα $y(t) = \cos t$. *Επομένως,* $z(t) = -y^{'}(t) = \sin t$ *και εύκολα βλέπουμε ότι είναι λύση του συστήματος.* $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 137 *Παρόμοια, θα υπολογίσουμε την λύση του συστήματος*

$$\begin{aligned} y^{'} + z^{'} + y + z &= 1, \\ y^{'} + z &= e^t, \\ y(0) &= -1 \\ z(0) &= 2 \end{aligned}$$

Μετασχηματίζουμε κατά Laplace τις δυο διαφορικές εξισώσεις και λύνοντας το αλγεβρικό σύστημα που προκύπτει έχουμε ότι

$$Y(s) = \frac{-s^2+s+1}{s(s-1)^2}$$

Τελικά, η λύση του συστήματος είναι $y(t) = 1 - 2e^t + te^t$ *και* $z(t) = 2e^t - te^t$. $\square$

Παραδειγμα 138 *Θα επιλύσουμε την συνήθη διαφορική εξίσωση*

$$y'' + ty' - 2y = 4, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$$

χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace. Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό κατά μέλη έχουμε

$$s^2Y(s) + s - \Big(sY'(s) + Y(s)\Big) - 2Y(s) = \frac{4}{s}$$

και επομένως προκύπτει μια συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως ως προς την $Y(s)$ της οποίας η λύση είναι

$$Y(s) = \frac{2}{s^3} - \frac{1}{s} + \frac{C}{s^3}e^{s^2/2}$$

Σημειώστε ότι $\mathcal{L}(ty') = -\Big(sY'(s) + Y(s)\Big)$ (δείτε παράδειγμα 116).

Λόγω του θεωρήματος 98 ισχύει ότι $Y(s) \to 0$ καθώς $s \to \infty$ οπότε αναγκαστικά $C = 0$. Επομένως $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s}\right) = t^2 - 1$ η οποία πράγματι είναι λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 139 *Θα επιλύσουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace. Η εξίσωση είναι*

$$f(t) = e^{-t} + \int_0^t \sin(t-x) f(x) dx$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό κατά μέλη και έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(e^{-t}) + \mathcal{L}(\sin t)\mathcal{L}(f)(s)$$

έχοντας εφαρμόσει το θεώρημα της συνέλιξης. Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \frac{\mathcal{L}(e^{-t})}{1-\mathcal{L}(\sin t)} \\ &= \frac{s^2+1}{s^2(s+1)} \\ &= \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Επομένως η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι η συνάρτηση $f(t) = 2e^{-t} + t - 1$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 140 *Θα επιλύσουμε την εξίσωση*

$$y(t) - y\left(t - \frac{\pi}{x}\right) = \sin xt, \quad y(0) = 0, \quad t \geq 0$$

χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Laplace. Έχουμε ότι

$$\mathcal{L}\left(y\left(t - \frac{\pi}{x}\right)\right) = e^{-\frac{s\pi}{x}}\mathcal{L}(y)$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace στην αρχική εξίσωση προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}(y) = \frac{x}{(s^2 + x^2)(1 - e^{-\frac{s\pi}{x}})}$$

και τελικά

$$y(t) = \begin{cases} \sin xt, & \text{για } \frac{2n\pi}{x} < t < \frac{(2n+1)\pi}{x} \\ 0, & \text{για } \frac{(2n+1)\pi}{x} < t < \frac{(2n+2)\pi}{x} \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 141 *Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης* $f(t) = a^{[t]}$ *όπου* $[t]$

είναι το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού t *και* $a > 0$. *Εφόσον,* $a^{[t]}$ *είναι εκθετικής τάξης έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t)) &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^1 a^0 e^{-st}dt + \int_1^2 a^1 e^{-st}dt + \cdots \\
&= \frac{1-e^{-s}}{s} + \frac{a(e^{-s}-e^{-2s})}{s} + \cdots \\
&= \frac{1-e^{-s}}{s(1-ae^{-s})}, \quad \operatorname{Re} s > \max\{0, \ln a\}
\end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 142 *Θα επιλύσουμε την επόμενη εξίσωση διαφορών*

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0, \quad a_0 = 0,\ a_1 = 1$$

Ορίζουμε μια συνάρτηση $y(t)$ *τέτοια ώστε*

$$y(t) = a_n, \quad n \le t \le n+1, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Επομένως, η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 0, \quad t \ge 0$$

Λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της $y(t+2)$ *έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y(t+2)) &= \int_0^\infty y(t+2)e^{-st}dt \\ &= \int_2^\infty e^{-s(x-2)}y(x)dx \\ &= e^{2s}\int_0^\infty y(x)e^{-sx}dx - e^{2s}\int_0^2 y(x)e^{-sx}dx \\ &= e^{2s}Y(s) - \frac{e^s}{s}(1-e^{-s})\end{aligned}$$

Παρόμοια, ισχύει ότι

$$\mathcal{L}(y(t+1)) = e^s Y(s)$$

Λαμβάνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της εξίσωσης διαφορών κατά μέλη έχουμε ότι

$$\mathcal{L}(y(t)) = \frac{1-e^{-s}}{s(1-2e^{-s})} - \frac{1}{s} = \mathcal{L}(2^{[t]}) - \mathcal{L}(1)$$

Επομένως, $y(t) = 2^{[t]} - 1$ *και αυτό σημαίνει ότι* $a_n = 2^n - 1$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 143 *Θα υπολογίσουμε την λύση του παρακάτω παραβολικού προβλήματος*

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) &= u_t(x,t), \;\; x>0, \;\; t>0 \\ u(x,0+) &= 1, \qquad\quad x>0 \\ u(0,t) &= 0, \qquad\qquad\qquad t>0 \\ \lim_{x\to\infty} u(x,t) &= 1 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace κατά μέλη ως προς την μεταβλητή t, προκύπτει η συνήθης διαφορική εξίσωση

$$U_{xx}(x,s) = sU(x,s) - u(x,0+) = sU(x,s) - 1$$

Επίσης, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace στην συνθήκη $u(0,t) = 0$ και έχουμε ότι $U(0,s) = 0$. Τέλος, το ίδιο κάνουμε και στην τελευταία συνθήκη, δηλαδή

$$\mathcal{L}\left(\lim_{x\to\infty} u(x,t)\right) = \frac{1}{s} = \lim_{x\to\infty} U(x,s)$$

Η λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης με άγνωστη την $U(x,s)$ είναι

$$U(x,s) = c_1(s)e^{x\sqrt{s}} + c_2(s)e^{-x\sqrt{s}} + \frac{1}{s}$$

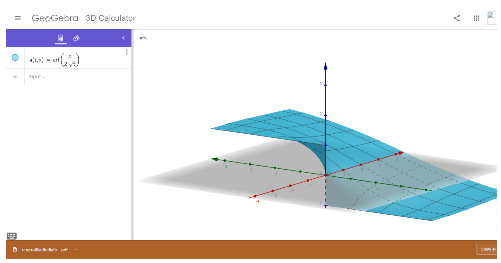
Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $U(0,s) = 0$ *και* $\frac{1}{s} = \lim\limits_{x\to\infty} U(x,s)$ *καταλήγουμε στην*

$$U(x,s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{x\sqrt{s}}}{s}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό (χρησιμοποιώντας πίνακες μετασχηματισμών) έχουμε ότι

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-u^2} du = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

$\square$



Σχήμα 8: Το γράφημα της λύσης χρησιμοποιώντας το Geogebra

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 144 *Θα επιλύσουμε την επόμενη υπερ-*

βολική μερική διαφορική εξίσωση

$$\begin{aligned}
y_{tt}(x,t) &= a^2 y_{xx}(x,t), \ \ x>0, \ \ t>0, \quad a>0\\
y(x,0+) &= 0, \qquad\qquad\quad x>0\\
y_t(x,0+) &= 0, \qquad\qquad\quad x>0\\
y(0,t) &= f(t), \qquad\qquad\qquad\qquad t>0, \quad f(0)=0\\
\lim_{x\to\infty} y(x,t) &= 0
\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace ως προς την μεταβλητή t και έχουμε

$$s^2 Y(x,s) - s y(x,0+) - y_t(x,0+) = a^2 Y_{xx}(x,s)$$

οπότε

$$Y_{xx}(x,s) - \frac{s^2}{a^2} Y(x,s) = 0$$

Η λύση αυτής της συνήθους διαφορικής εξίσωσης είναι

$$Y(x,s) = c_1(s) e^{\frac{sx}{a}} + c_2(s) e^{-\frac{sx}{a}}$$

Επειδή $y(x,t) \to 0$ καθώς $x \to \infty$ και $Y(0,s) = F(s)$ έχουμε τελικά

$$Y(x,s) = F(s) e^{-\frac{sx}{a}}$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό προκύπτει ότι

$$y(x,t) = \begin{cases} f(t - \frac{x}{a}), & \textit{όταν } t \geq \frac{x}{a} \\ 0, & \textit{όταν } t < \frac{x}{a} \end{cases}$$

$\square$

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις δεύτερης τάξης - Εισαγωγικά

ΟΡΙΣΜΟΣ 145 *Μια διαφορική εξίσωση δύο μεταβλητών της μορφής*

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y),$$

ονομάζεται ***ημί-γραμμική διαφορική εξίσωση*** *δεύτερης τάξης.*

Αν η

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = F_1(x,y)u + F_2(x,y)u_x + F_3(x,y)u_y + F_4(x,y)$$

τότε η μερική διαφορική εξίσωση ονομάζεται γραμμική.

Θεωρούμε την διακρίνουσα,

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)C(x,y), \ \ (x,y) \in G \subseteq \mathbb{R}^2.$$

- Όταν $\Delta(x,y) > 0$ στο G τότε η Μ.Δ.Ε. ονομάζεται **υπερβολικού τύπου**, π.χ. η **εξίσωση κύματος**, $z_{xx} - c^2 z_{yy} = f(x,y)$.
- Αν $\Delta(x,y) = 0$ στο G τότε η Μ.Δ.Ε. ονομάζεται **παραβολικού τύπου**, π.χ. η **εξίσωση θερμότητας**, $z_x - a^2 z_{yy} = f(x,y)$.

- Αν $\Delta(x, y) < 0$ στο G ονομάζεται **ελλειπτικού τύπου**, π.χ. η **εξίσωση του Laplace**, $z_{xx} + z_{yy} = f(x, y)$.

Με κατάλληλους μετασχηματισμούς $x = v_1(\xi, \eta)$ και $y = v_2(\xi, \eta)$ κάθε μια από τις παραπάνω μορφές μπορεί να μετασχηματιστεί σε αρκετά πιο απλή μορφή η οποία ονομάζεται **κανονική μορφή** της εξίσωσης. Η άγνωστη συνάρτηση $u(x, y)$ θα μετασχηματιστεί στην $w(\xi, \eta)$ η οποία θα είναι λύση της κανονικής μορφής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 146 *Η κανονική μορφή μιας υπερβολικής εξίσωσης είναι της μορφής*

$$w_{\xi\eta} + L[w] = G(\xi, \eta)$$

όπου $L[w]$ είναι γραμμικός τελεστής και περιέχει μέχρι πρώτης τάξης μερικές παραγώγους της συνάρτησης w.

Η κανονική μορφή μιας παραβολικής εξίσωσης είναι

$$w_{\xi\xi} + L[w] = G(\xi, \eta)$$

Η κανονική μορφή μιας ελλειπτικής εξίσωσης είναι

$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + L[w] = G(\xi, \eta)$$

Η εξίσωση θερμότητας σε άπειρο χωρίο

Θα ασχοληθούμε με την ίδια εξίσωση σε άπειρο χωρίο. Το πρόβλημα είναι το επόμενο

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \qquad k > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x,t) \text{ φραγμένη και } u_x(x,t) &\to 0 \qquad \text{καθώς} \quad |x| \to \infty \end{aligned}$$

Μοναδικότητα Λύσης

Θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Έστω ότι έχει δυο λύσεις, τις $u_1(x,t)$ και $u_2(x,t)$, τότε η διαφορά τους $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ λόγω γραμμικότητας του προβλήματος, θα ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \qquad k > 0 \\ u(x,0) &= 0, \qquad x \in \mathbb{R} \\ u(x,t) \text{ φραγμένη και } u_x(x,t) &\to 0 \qquad \text{καθώς} \quad |x| \to \infty \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με $u(x,t)$ και ολοκληρώνουμε ως προς t στο $(0,t)$. Στο αριστερό μέλος θα έχουμε, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $u(x,0) = 0$,

$$\int_0^t u_t(x,y)u(x,y)dy = u^2(x,t) - \int_0^t u(x,y)u_t(x,y)dy$$

Συνεπώς
$$\int_0^t u_t(x,y)u(x,y)dy = \frac{1}{2}u^2(x,t)$$
Στην συνέχεια ολοκληρώνουμε την εξίσωση ως προς x σε όλο το $\mathbb{R}$. Στο δεξί μέλος θα έχουμε
$$\begin{aligned} k\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t u_{xx}(y,r)u(y,r)drdy &= k\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(y,r)u(y,r)dydr \\ &= k\int_0^t \Big(u_x(y,r)u(y,r)\Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(y,r)dy\Big)dr \\ &= -k\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(y,r)dydr \end{aligned}$$
όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $u_x(x,t) \to 0$ καθώς $|x| \to \infty$. Τελικά, ισχύει ότι
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u^2(y,t)dy + k\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(y,r)dydr = 0$$
το οποίο ικανοποιείται μονάχα όταν $u(x,t) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $t > 0$, δηλαδή $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ άρα το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Υπολογισμός της λύσης με τον μετασχηματισμό *Fourier*

Για να υπολογίσουμε την λύση, θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Fourier. Δεν θα αναφερθούμε στις προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση f για να είναι καλά ορισμένος ο μετασχηματισμός Fourier. Αρκεί η συνάρτηση που θα υπολογίσουμε να είναι πράγματι λύση του προβλήματος.

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στην εξίσωση κατά μέλη ως προς την μεταβλητή x. Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του μετασχηματισμού προκύπτει ότι

$$U_t(s,t) = -ks^2U(s,t)$$

Η εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier στην αρχική συνθήκη είναι ως εξής

$$U(s,0) = F(s)$$

όπου $U(s,t)$ και $F(s)$ οι μετασχηματισμοί Fourier των συναρτήσεων $u(x,t)$ και $f(x)$.

Το παραπάνω πρόβλημα είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της οποίας η λύση είναι

$$U(s,t) = F(s)e^{-ks^2t}$$

Για να βρούμε την $u(x,t)$ αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό και χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης παίρνουμε

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(r)e^{-\frac{(x-r)^2}{4kt}} dr \qquad (23)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 147 *Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση*

$$g(x,t,r) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-r)^2}{4kt}}$$

τότε παρατηρούμε ότι $g_t = kg_{xx}$. *Αν αποδείξουμε ότι οι παράγωγοι περνούν στο ολοκλήρωμα της συνάρτησης* $u(x,t)$ *τότε προφανώς προκύπτει ότι η συνάρτηση αυτή είναι μια λύση της εξίσωσης θερμότητας. Θεωρώντας τη συνάρτηση*

$$F(x,t,r) = f(r)g(x,t,r)$$

θα πρέπει να αποδείξουμε (εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης) ότι οι συναρτήσεις F_t, F_x, F_{xx}

είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες έτσι ώστε να έχουμε το συμπέρασμα ότι οι παράγωγοι περνούν στο ολοκλήρωμα και άρα η $u(x,t)$ αποτελεί λύση του προβλήματος. $\square$

Σημειώστε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα (και άρα και η λύση) είναι καλά ορισμένη ακόμη και σε περιπτώσεις όπου η συνάρτηση f δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη (αν για παράδειγμα $f(x) = e^x$) και ενδεχομένως να μην μετασχηματίζεται κατά Fourier. Αυτό αποτελεί μια «αδυναμία» της μεθόδου εύρεσης της λύσης (δηλαδή του μετασχηματισμού Fourier) και όχι του προβλήματος. Για να διαπιστώσουμε ότι πράγματι είναι λύση του προβλήματος αρκεί να δικαιολογήσουμε το γεγονός ότι η παράγωγος περνά μέσα στο ολοκλήρωμα. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x-r}{2\sqrt{kt}}$ εύκολα αποδεικνύουμε ότι

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$$

Συνοψίζοντας, η απόδειξη του ότι η μοναδική λύση είναι η παραπάνω προκύπτει από την επαλήθευση της λύσης (και όχι από την εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier!), κάτι το οποίο δεν είναι καθόλου προφανές αφού περιέχει την δικαιολόγηση του γεγονότος ότι οι παράγωγοι περνούν μέσα στο ολοκλήρωμα. Σημειώστε ότι αν $f(x) = e^x$ τότε η συνάρτηση δεν μετασχηματίζεται κατά Fourier και επομένως δεν είναι μαθηματικά ορθό να εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό κατά μέλη. Σημειώστε επίσης ότι στην περίπτωση όπου $f(x) = e^{x^3}$ τότε το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν είναι καλά ορισμένο.

Για να δούμε τη σχέση μεταξύ διαφορικών εξισώσεων και θεωρίας πιθανοτήτων - στοχαστικής ανάλυσης ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί τη κανονική κατανομή με μέση τιμή x και διακύμανση $2kt$. Τότε

$$\mathbb{E}f(X) = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) e^{-\frac{(x-r)^2}{4kt}} dr$$

και επομένως η μέση τιμή $\mathbb{E}f(X)$ είναι μια λύση της παραπάνω εξίσωσης θερμότητας. Με μια τέτοια συσχέτιση ανοίγει ο δρόμος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με μεθόδους στοχαστικής ανάλυσης και αντίστροφα.

Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών όπως επίσης να προσεγγίσουμε τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής με τη μέθοδο Monte Carlo. Με τη παραπάνω συσχέτιση λοιπόν μπορεί κανείς να υπολογίσει τη λύση μιας μερικής διαφορικής με τη μέθοδο Monte Carlo ή τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 148 *Θα υπολογίσουμε μια λύση του παρακάτω προβλήματος*

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= e^{ax}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Fourier. Διαπιστώνουμε όμως ότι η συνάρτηση e^{ax} *δεν μετασχηματίζεται κατά Fourier και επομένως δεν είναι μαθηματικά ορθό να εφαρμόσουμε αυτό το μετασχηματισμό. Θα το κάνουμε όμως προκειμένου να έχουμε τη μορφή της λύσης και στη συνέχεια θα επαληθεύσουμε ότι πράγματι πρόκειται για μια λύση του παραπάνω προβλήματος.*

Όπως είδαμε μια λύση (πιθανό) να έχει την εξής μορφή

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{4kt}} e^{ay} dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-(x+2kta))^2}{4kt} + ax + a^2 kt} dy \\ &= e^{ax + a^2 kt} \end{aligned}$$

Η μορφή της λύσης είναι απλή και μπορούμε πολύ εύκολα να επαληθεύσουμε ότι πράγματι αποτελεί μια λύση του παραπάνω προβλήματος. Πράγματι,

$$\begin{aligned} u_t &= e^{ax+a^2kt}a^2k \\ u_x &= e^{ax+a^2kt}a \\ u_{xx} &= e^{ax+a^2kt}a^2 \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει ότι $u_t = ku_{xx}$ *καθώς και* $u(x,0) = e^{ax}$ *δηλαδή αποτελεί μια λύση του προβλήματος. Σημειώστε ότι δεν έχουμε αποδείξει για τη περίπτωση αυτή μοναδικότητα λύσης. Το συμπέρασμα είναι ότι μπορεί κάποιος να εφαρμόσει το μετασχηματισμό Fourier χωρίς καν να αυτό να είναι επιτρεπτό από τα δεδομένα του προβλήματος και να δημιουργήσει τη πιθανή μορφή της λύσης. Η μαθηματικά αυστηρή απόδειξη του ότι πράγματι πρόκειται για λύση θα γίνει μέσω της επαλήθευσης!*

Αν μελετήσουμε το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= e^{-a|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \\ u(x,t) & \quad \text{φραγμένη και } u_x(x,t) \to 0 \text{ καθώς } |x| \to \infty \end{aligned}$$

θα δούμε ότι η μοναδική λύση του είναι η $u(x,t) = e^{-a|x|+a^2kt}$. $\square$

Η Εξίσωση των $Black - Scholes$

Η εξίσωση των Black-Scholes είναι η επόμενη

$$V_t(t,S) + rSV_s(t,S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{ss}(t,S) - rV(t,S) = 0, \quad (24)$$
$$t \in [0,T], \; S > 0$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια παραβολική εξίσωση συνεπώς με κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορούμε να την μετασχηματίσουμε στην κανονική της μορφή η οποία είναι η εξίσωση θερμότητας που έχουμε ήδη μελετήσει.

Μετασχηματισμός της εξίσωσης στην εξίσωση θερμότητας

Θα δώσουμε στην συνέχεια τους κατάλληλους μετασχηματισμούς ούτως ώστε η εξίσωση αυτή να μετασχηματισθεί στην εξίσωση θερμότητας. Θέτουμε

$$\begin{array}{lcl} t & = & T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, \qquad \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T] \\ S & = & e^x, \qquad x \in \mathbb{R} \\ V(t,S) & = & v(\tau,x), \quad x \in \mathbb{R}, \;\; \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T] \end{array}$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της V και έχουμε, σημειώνοντας ότι $V(t,S) = v\left(\frac{\sigma^2}{2}(T-t), \ln S\right)$

$$\begin{aligned}
V_t &= -\frac{\sigma^2}{2} v_\tau \\
V_s &= \frac{1}{S} v_x \\
V_{SS} &= -\frac{1}{S^2} v_x + \frac{1}{S^2} v_{xx}
\end{aligned}$$

Τότε η αρχική διαφορική εξίσωση γίνεται, θέτοντας $k = \frac{2r}{\sigma^2}$,

$$v_\tau = v_{xx} + (k-1)v_x - kv$$

έχοντας χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η V ικανοποιεί την 24.

Στην συνέχεια θέτουμε

$$v(\tau, x) = e^{ax+b\tau} u(\tau, x)$$

Αντικαθιστώντας την v στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει η παρακάτω

$$bu + u_\tau = a^2 u + 2a u_x + u_{xx} + (k-1)(au + u_x) - ku$$

Προκειμένου να απλουστευθεί διαλέγουμε

$$a = -\frac{1}{2}(k-1), \quad b = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

Τελικά προκύπτει ότι η συνάρτηση V είναι λύση της 24 **αν και μόνο αν** η $u(\tau, x)$ ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας

$$u_\tau = u_{xx}, \quad \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T], \quad x \in \mathbb{R}$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε μια τελική συνθήκη στην 24, όπως για παράδειγμα

$$V(T, S) = F(S), \quad S > 0$$

όπου $F(\cdot)$ δοσμένη συνάρτηση, τότε η αντίστοιχη μετασχηματισμένη εξίσωση θερμότητας παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} u_\tau &= u_{xx}, & \tau \in [0, \tfrac{\sigma^2}{2}T], \ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x}F(e^x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Συμβολίζοντας με $f(x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x}F(e^x)$ έχουμε ότι το πρόβλημα αυτό έχει ως λύση την (δείτε το αντίστοιχο εδάφιο στο [;]),

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} dz, \quad \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T], \quad x \in \mathbb{R} \quad (25)$$

Αξία Ευρωπαϊκού Συμβολαίου Αγοράς

Ας δούμε ποια είναι η αξία ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου αγοράς με βάση την συνάρτηση $V(t,S)$ που έχουμε υπολογίσει. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $F(x)=(x-K)^+$ όπου K είναι η τιμή εξάσκησης.

Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση $u(\tau,x)$ από την σχέση 25 κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y=\frac{z-x}{\sqrt{2\tau}}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u(\tau,x) &= \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}}dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy-\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f(x)=e^{\frac{1}{2}(k-1)x}\max\{e^x-K,0\}$.

Το πρώτο ολοκλήρωμα στην τελευταία σχέση γίνεται

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \\
=\ &\frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2}dy \\
=\ &\frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho \\
=\ &e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}N(d_1)
\end{aligned}
$$

όπου

$$
N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}u^2}du
$$

και

$$
d_1 = \frac{\ln S-\ln K}{\sqrt{2\tau}}+\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} = \frac{\ln\frac{S}{K}+r(T-t)+\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
$$

Παρόμοια έχουμε ότι

$$
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}N(d_2)
$$

όπου

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \quad \text{και} \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S}{K} + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση

$$N(d) = 1 - N(-d)$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} N(-d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (\text{θέσαμε } t = -u) \\ &= 1 - N(d) \end{aligned}$$

Οπότε

$$V(t,S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Μπορούμε να συσχετίσουμε την $V(t,S)$ με την συνάρτηση σφάλματος $\mathrm{erf}(x)$ και να πάρουμε το εξής

$$V(t,S) = S\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{d_1}{\sqrt{2}}\right)\right) - Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{d_2}{\sqrt{2}}\right)\right) \tag{26}$$

Η συσχέτιση αυτή προκύπτει εύκολα ως εξής

$$\begin{aligned}
N(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}\sigma\sqrt{2}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-y^2}dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}dy \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Η εξίσωση κύματος σε άπειρο χωρίο

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε την εξίσωση

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Θα παρουσιάσουμε την μέθοδο του d'Alembert με την οποία θα βρούμε την γενική λύση της εξίσωσης $u_{tt} = c^2 u_{xx}$. Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών $\xi = x - ct$ και $\phi = x + ct$ επομένως $x = \frac{\xi+\phi}{2}, t = \frac{\phi-\xi}{2c}$, οπότε $u(x,t) = u\left(\frac{\xi+\phi}{2}, \frac{\phi-\xi}{2c}\right)$.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας για συναρτήσεις δυο μεταβλητών θα υπολογίσουμε την $u_{\xi\phi}$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι, εφόσον $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, ισχύει ότι $u_{\xi\phi} = 0$.

Ολοκληρώνοντας ως προς ξ παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$u_\phi = \hat{f}(\phi)$$

για μια αυθαίρετη συνάρτηση $\hat{f}$. Ολοκληρώνοντας ως προς ϕ έχουμε τελικά ότι

$$u(x,t) = a(\phi) + b(\xi) = a(x+ct) + b(x-ct)$$

όπου a και b αυθαίρετες συναρτήσεις. Αυτή την μορφή έχει η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης, δηλαδή οποιαδήποτε λύση μπορεί να γραφεί με αυτό τον τρόπο.

Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή $u(x,0) = f(x)$ και $u_t(x,0) = g(x)$ προκύπτει ότι η λύση είναι της μορφής

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + G(x+ct) - G(x-ct)$$

όπου

$$G(x) = \frac{1}{2c}\int g(x)dx$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει εύκολα και η μοναδικότητα. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δυο λύσεις u_1, u_2 τότε η διαφορά τους $u = u_1 - u_2$ θα ικανοποιεί το ίδιο πρόβλημα με αρχικές συνθήκες τέτοιες ώστε $f(x) = g(x) = 0$. Επομένως, αναγκαστικά θα ισχύει ότι $u = u_1 - u_2 = 0$ δηλαδή $u_1 = u_2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 149 *Έστω το παρακάτω πρόβλημα*

$$\begin{array}{lcl} u_{tt} & = & 4u_{xx}, \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0 \\ u(x,0) & = & 1, \qquad x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) & = & x, \qquad x \in \mathbb{R} \end{array}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η λύση θα είναι

$$u(x,t) = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{(x+2t)^2}{2} - \frac{(x-2t)^2}{2}\right) = 1 + xt$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι πρόκειται για την μοναδική λύση του παραπάνω προβλήματος. □

Η εξίσωση του *Laplace* σε άπειρο χωρίο

Θα μελετήσουμε την εξίσωση του Laplace σε άπειρο χωρίο. Έστω το πρόβλημα

$$
\begin{array}{lllll}
u_{xx}+u_{yy} & = & 0, & x\in\mathbb{R}, & y>0\\
u(x,0) & = & f(x), & x\in\mathbb{R} & \\
u(x,y) & \to 0 & u_x(x,y),u_y(x,y)\ \text{φραγμένες} & \text{καθώς}\ |x|,|y|\to\infty &
\end{array}
$$

Μοναδικότητα Λύσης

Για να αποδείξουμε ότι έχει μοναδική λύση θα υποθέσουμε ότι έχει δυο λύσεις, τις $u_1(x,y)$ και $u_2(x,y)$. Τότε η διαφορά τους $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ θα ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα

$$
\begin{array}{lllll}
u_{xx}+u_{yy} & = & 0, & x\in\mathbb{R}, & y>0\\
u(x,0) & = & 0, & x\in\mathbb{R} & \\
u(x,y) & \to 0 & u_x(x,y),u_y(x,y)\ \text{φραγμένες} & \text{καθώς}\ |x|,|y|\to\infty &
\end{array}
$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με την συνάρτηση $u(x,y)$ και ολοκληρώνουμε στο $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$. Αλλάζοντας κατάλληλα την σειρά ολοκλήρωσης προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left(u_x^2(x,y)+u_y^2(x,y)\right)dydx=0$$

Η σχέση αυτή μαζί με την απαίτηση $u(x,0)=0$ σημαίνει ότι $u(x,y)=0$ για $x\in\mathbb{R}$ και $y\in\mathbb{R}_+$. Επομένως το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση.

Υπολογισμός λύσης με τον μετασχηματισμό *Fourier*

Στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Fourier στην εξίσωση ως προς την μεταβλητή x. Έχουμε τότε

$$\begin{array}{rcll} U_{yy}(s,y) - s^2 U(s,y) & = & 0, & s \in \mathbb{R},\ y > 0 \\ U(s,0) & = & F(s), & s \in \mathbb{R} \end{array}$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$U(s,y) = c_1(s)e^{sy} + c_2(s)e^{-sy}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad y > 0$$

Λόγω του θεωρήματος 68 θα πρέπει $U(s,y) \to 0$ καθώς $s \to \pm\infty$. Αυτό σημαίνει ότι $c_1(s) = 0$ όταν $s > 0$ και $c_2(s) = 0$ όταν $s < 0$. Λόγω της αρχικής συνθήκης, δηλαδή $U(s,0) = F(s)$ προκύπτει ότι

$$U(s,y) = \begin{cases} F(s)e^{-sy}, & \text{όταν } s > 0 \\ F(s)e^{sy}, & \text{όταν } s < 0 \end{cases}$$

Τελικά η λύση θα είναι

$$U(s,y) = F(s)e^{-|s|y}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad y > 0$$

Λόγω του ότι

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|t|}\right) = \frac{2a}{a^2+s^2}, \quad a>0$$

και λόγω του θεωρήματος 69 προκύπτει ότι

$$\mathcal{F}\left(\frac{2a}{a^2+s^2}\right) = 2\pi e^{-a|t|}$$

οπότε

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-a|s|}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+s^2}$$

Αρα

$$\mathcal{F}^{-1}\left(e^{-|s|y}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{y^2+x^2}$$

Τέλος, εφαρμόζοντας το θεώρημα της συνέλιξης υπολογίζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό του γινομένου $F(s)e^{-|s|y}$ ο οποίος θα δίνεται ως εξής

$$\boxed{u(x,y) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^2+y^2}dt, \quad x\in\mathbb{R}, \quad y>0}$$

(ολοκλήρωμα Poisson)

Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για την προσέγγιση της λύσης της εξίσωσης θερμότητας σε πεπερασμένο χωρίο.

Η εξίσωση θερμότητας σε πεπερασμένο χωρίο είναι επόμενη,

$$u_t \;=\; c^2 u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad t > 0$$

μαζί με τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(L,t) &= 0, \quad t > 0 \end{aligned}$$

καθώς και την αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, L]$$

όπου f δοσμένη συνάρτηση με $f(0) = f(L) = 0$ και $c > 0$.

Θα εργαστούμε και σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[0, T]$. Έστω $N \in \mathbb{N}$ και έστω τα $N + 2$

ισαπέχοντα σημεία $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = L$ και συμβολίζουμε με $h = x_{i+1} - x_i$. Επιπλέον, έστω $M \in \mathbb{N}$ και έστω τα $M+1$ ισαπέχοντα σημεία $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T$ και συμβολίζουμε με $k = t_{j+1} - t_j$. Σκοπός μας είναι να προσεγγίσουμε τις τιμές της λύσης πάνω στα σημεία (x_i, t_j), δηλαδή να δώσουμε κάποιες τιμές $U_{i,j} \simeq u(x_i, t_j)$ όπου $u(\cdot, \cdot)$ είναι η ακριβής λύση του προβλήματος και $U_{i,j}$ η προσεγγιστική τιμή της λύσης στο σημείο (x_i, t_j).

Όπως και στην μέθοδο του Euler για την προσέγγιση της λύσης μιας συνήθους διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης, έτσι και εδώ θα αντικαταστήσουμε τις παραγώγους που εμφανίζονται στην εξίσωση με «πεπερασμένες διαφορές». Δηλαδή,

$$\begin{aligned} u_t(x_i, t_j) &\simeq \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} \\ u_{xx}(x_i, t_j) &\simeq \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j)}{h^2} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εκφράσεις στην διαφορική εξίσωση λαμβάνουμε ένα σύστημα εξισώσεων όπου όμως οι άγνωστες ποσότητες είναι προσεγγίσεις της πραγματικής τιμής της λύσης. Όπως είπαμε και προηγούμενα θα συμβολίζονται με $U_{i,j}$ και θα προσεγγίζουν την ακριβή τιμή της $u(x_i, t_j)$. Το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτει είναι το εξής

$$\begin{aligned}
\frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{k} &= \frac{U_{i+1,j} - 2U_ij + U_{i-1,j}}{h^2}, \quad i = 1, \cdots, N \quad j = 0, \cdots, M-1 \\
U_{0,j} &= U_{N+1,j} = 0, \quad j = 0, \cdots, M \\
U_{i,0} &= f(x_i), \quad i = 1, \cdots, N
\end{aligned}$$

Για να γράψουμε καλύτερα το παραπάνω σύστημα εξισώσεων θα συμβολίσουμε με $\lambda = \frac{k}{h^2}$ και επίσης με $U^j \in \mathbb{R}^N$ το διάνυσμα με συνιστώσες $U_{1,j}, \cdots, U_{N,j}$. Αρα το παραπάνω σύστημα γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$U^{j+1} = AU^j, \quad j = 0, \cdots, M-1, \quad U^0 = F$$

όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1-2\lambda \end{pmatrix}$$

και $F = (f(x_1), \cdots, f(x_N))^T$.

Με τον τρόπο αυτό υπολογίζουμε σε κάθε βήμα ένα διάνυσμα, το U^{j+1}, απλά πολλαπλασιάζοντας τον πίνακα A με ένα γνωστό διάνυσμα U^j λαμβάνοντας έτσι τις προσεγγίσεις $U_{i,j}$. Το παρακάτω θεώρημα αναφέρει ότι οι προσεγγιστικές τιμές $U_{i,j}$ όπως τις υπολογίζουμε παραπάνω συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές τις συνάρτησης καθώς τα k, h τείνουν στο μηδέν.

ΘΕΩΡΗΜΑ 150 *Έστω ότι η λύση u του αρχικού προβλήματος είναι αρκετά ομαλή και $U_{i,j}$ οι τιμές όπως τις υπολογίζουμε παραπάνω. Τότε, αν $\lambda = \frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, υπάρχει μια σταθερά C ανεξάρτητη των k, h τ.ω.*

$$\max_{1 \leq j \leq M} \max_{0 \leq i \leq N+1} |U_{i,j} - u(x_i, t_j)| \leq C(k + h^2)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 151 *Μια συνάρτηση $f(x)$ ορισμένη στο $[a, b]$ θα λέμε ότι είναι* **τμηματικά συνεχής** *όταν υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους σημεία ασυνέχειας, όπου όμως τα πλευρικά όρια να είναι πεπερασμένα.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 152 *Μια συνεχής συνάρτηση $f(x)$ στο $\mathbb{R}$ θα λέμε ότι είναι περιοδική όταν υπάρχει $T > 0$, έτσι ώστε*

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Ο αριθμός T ονομάζεται **περίοδος** *της $f(x)$. Μια συνάρτηση $f(x)$ θα λέμε ότι είναι άρτια (αντίστοιχα περιττή) όταν*

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (\text{άρτια}) \\ f(-x) &= -f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (\text{περιττή}) \end{aligned}$$

Γενικά, μια συνάρτηση f ορισμένη στο $[0, l]$ μπορεί να επεκταθεί ως άρτια στο $[-l, l]$ ως εξής,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για } x \in [0, l] \\ f(-x), & \text{για } x \in [-l, 0] \end{cases}$$

Επίσης, μπορεί να επεκταθεί ως περιττή στο $[-l, l]$ (χωρίς να είναι συνεχής κατ΄ ανάγκη) ως εξής,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για } x \in [0, l] \\ -f(-x), & \text{για } x \in [-l, 0] \end{cases}$$

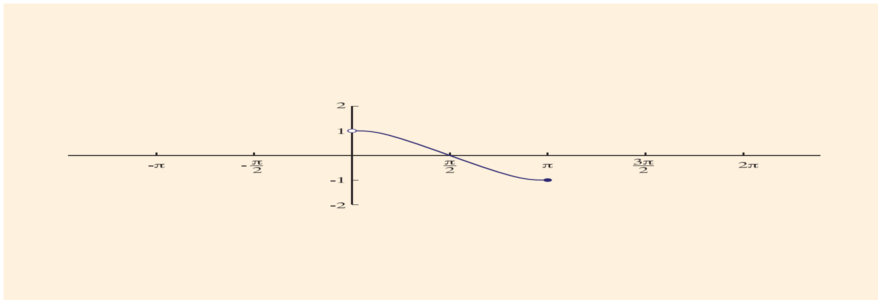
Στην συνέχεια μπορούμε να την επεκτείνουμε σε όλο το $\mathbb{R}$ ως περιοδική με περίοδο $2l$ θέτοντας

$$G(x + 2kl) = F(x) \quad \text{για } x \in [-l, l] \quad \text{και για κάθε } k \in \mathbb{Z}$$

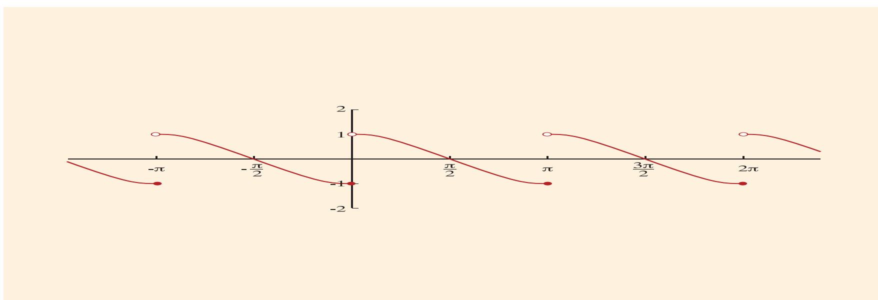
Μια $f(x)$ ορισμένη στο $[0, l]$ μπορεί να επεκταθεί κατά άπειρους τρόπους σε μια περιοδική $G(x)$ με περίοδο $2l$ ορίζοντας αρχικά την,

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{για } x \in [0, l) \\ \phi(x), & \text{για } x \in [-l, 0] \end{cases}$$

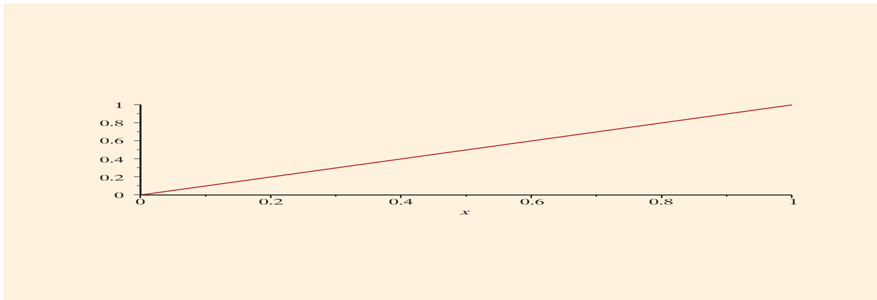
και έπειτα $G(x + 2kl) = F(x)$ για κάθε $x \in [-l.l]$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, όπου $\phi(x)$ αυθαίρετη συνάρτηση στο $[-l, 0]$.



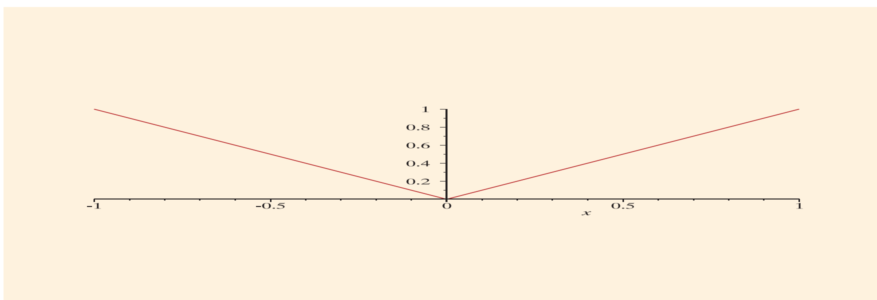
Σχήμα 9: Συνάρτηση ορισμένη στο $(0, \pi]$



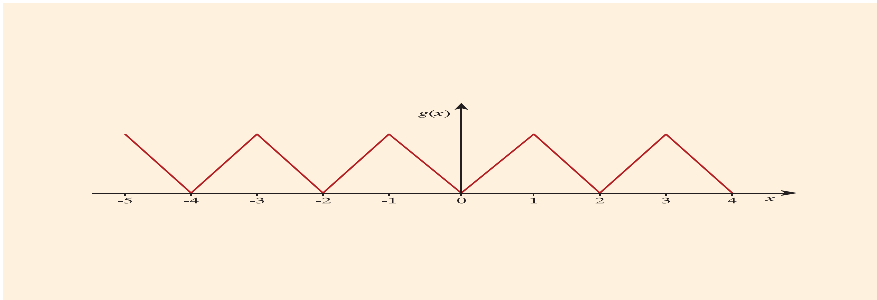
Σχήμα 10: Περιττή και περιοδική επέκταση της συνάρτησης



Σχήμα 11: Συνάρτηση ορισμένη στο $[0, 1]$



Σχήμα 12: Αρτια επέκταση της συνάρτησης στο $[-1, 1]$



Σχήμα 13: Αρτια και περιοδική επέκταση της συνάρτησης

Ορισμος 153 *Κάθε σειρά της μορφής*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

με $a_0, a_n, b_n, x \in \mathbb{R}$ *ονομάζεται* ***τριγωνομετρική σειρά.***

Προταση 154 *Αν η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty}(|a_k| + |b_k|)$ *συγκλίνει, τότε η τριγωνομετρική σειρά συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση* $f(x)$ *στο* $\mathbb{R}$*, η οποία είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο* 2π.

Μορφή των συντελεστών

Έστω ότι η τριγωνομετρική σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ στην $f(x)$, δηλαδή

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{(ομοιόμορφα)}$$

για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

Θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές a_0, a_n, b_n της τριγωνομετρικής σειράς. Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με $\cos mx$ και έπειτα ολοκληρώνουμε κατά μέλη στο $[-\pi, \pi]$. Αν η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα τότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο , οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx \\
&\quad + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx \big) \Rightarrow \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \pi a_m \Rightarrow \\
a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx dx.
\end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε τα b_n πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη με $\sin kx$ και ολοκληρώνουμε ενώ για να υπολογίσουμε το a_0 ολοκληρώνουμε ως έχει.

Τελικά, οι συντελεστές θα είναι

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \\
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k = 1, 2, \cdots
\end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 155 *Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι αν*

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

όπου οι συντελεστές a_n, b_n *δεν είναι οι Fourier συντελεστές τότε η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη. Επιπλέον θα ισχύει ότι* $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = \infty$ *διότι αλλιώς η σύγκλιση θα ήταν ομοιόμορφη (δες 154) και επομένως οι συντελεστές* a_n, b_n *θα ήταν αναγκαστικά οι συντελεστές Fourier της* f. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 156 *Έστω $f(x)$ ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$. Ονομάζουμε σειρά Fourier της $f(x)$ την τριγωνομετρική σειρά*

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

με συντελεστές όπως προηγούμενα. Γράφουμε

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 157 *Αν η f είναι άρτια (αντίστοιχα περιττή) η σειρά Fourier έχει την μορφή,*

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \ \left(\text{αντίστοιχα } f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ 158 *Να υπολογισθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{για } x \in (-\pi,\pi) \\ 0, & \text{όταν } x = \pm\pi \end{cases}$$

ΛΥΣΗ. Θα εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι η $f(x)$ είναι περιττή συνάρτηση το οποίο σημαίνει ότι $a_k = 0$ ενώ

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x)\sin kx dx = (-1)^k\frac{2}{k}$$

Οπότε

$$f(x) \sim 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin kx$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 159 *Να υπολογισθεί η σειρά Fourier της* $f(x) = |x|$ *για* $x \in [-\pi, \pi]$.

ΛΥΣΗ. Σε αυτή την περίπτωση η $f(x)$ είναι άρτια επομένως $b_k = 0$ ενώ

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x dx = \pi, \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx = -4\frac{1}{(2k-1)^2} \end{aligned}$$

Δηλαδή
$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$
$\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 160 *Αν μια συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο 2π, συνεχής και κατά τμήματα λεία σε κάθε φραγμένο και κλειστό διάστημα τότε οι συντελεστές Fourier της f συγκλίνουν στο μηδέν με τον παρακάτω τρόπο*
$$|a_n| \leq \frac{c}{n} \quad \textit{και} \quad |b_n| \leq \frac{c}{n}, \quad n = 1, 2, \cdots$$
Επιπλέον, η σύγκλιση της σειράς Fourier είναι ομοιόμορφη.

Σημειώστε ότι δεν θα μπορούσαμε να έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στην περίπτωση που η f δεν είναι συνεχής. Αυτό θα ήταν άτοπο με το γεγονός ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier είναι συνεχείς συναρτήσεις και την υπόθεση ότι συγκλίνουν ομοιόμορφα διότι τότε και το όριο θα πρέπει να είναι συνεχής συνάρτηση. Επιπλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι ούτε η συνέχεια είναι ικανή συνθήκη διότι μπορεί να κατασκευαστεί συνεχής συνάρτηση για την οποία η σειρά Fourier δεν συγκλίνει (δες [;], θεώρημα 480).

Πορισμα 161 (Parseval για Τριγωνομετρικες Σειρες) *Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g είναι περιοδικές με περίοδο 2π και κατά τμήματα συνεχείς με πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών. Τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις*

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx, \\ \frac{a_0 a_0^{'}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k a_k^{'} + b_k b_k^{'}) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx \end{aligned}$$

όπου (a_k, b_k) και $(a_k^{'}, b_k^{'})$ οι συντελεστές Fourier των f και g αντίστοιχα.

Παραδείγματα

- Εξετάζοντας την σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

ως προς την σύγκλιση διαπιστώνουμε ότι συγκλίνει. Σε ποιον αριθμό όμως συγκλίνει; Αναπτύσσουμε την $|x|$ σε σειρά Fourier και έχουμε ότι $b_k = 0$ ενώ $a_k = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2k-1)^2}$ επομένως η σειρά Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα στην $|x|$. Δηλαδή,

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

άρα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- Ας εξετάσουμε την συνάρτηση προσήμου

$$\operatorname{sgn}\ x = \begin{cases} -1, & \text{όταν } -\pi < x < 0 \\ 0, & \text{όταν } x = 0 \\ 1, & \text{όταν } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι περιττή και αναπτύσσοντας την σε σειρά Fourier έχουμε ότι

$$\mathrm{sgn}\ x \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 160 και επομένως η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην sgn στο διάστημα $(-\pi,\pi)$. Διαλέγοντας $x=\frac{\pi}{2}$ έχουμε ότι

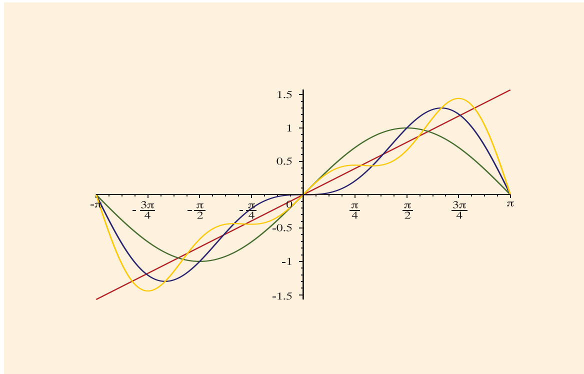
$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$$

Με το κριτήριο του Leibniz γνωρίζαμε ότι η σειρά αυτή συγκλίνει αλλά δεν γνωρίζαμε το όριο της.

• Θα δούμε τώρα την επίσης περιττή συνάρτηση $f(x)=x$ στο $(-\pi,\pi)$. Αναπτύσσοντάς τη σε σειρά Fourier έχουμε ότι

$$\frac{x}{2}\sim\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}$$

Η δοσμένη συνάρτηση ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 160 επομένως η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$.



Σχήμα 14: Το γράφημα της συνάρτησης $\frac{x}{2}$ καθώς και των τριών πρώτων προσεγγίσεων με κόκκινο, μπλε, πράσινο και κίτρινο αντίστοιχα χρώμα.

• Θα αναπτύξουμε σε σειρά Fourier την $f(x) = x^2$ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ η οποία είναι άρτια και επομένως $b_n = 0$. Όμως

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}, \\ a_0 &= \frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

Εφόσον, η f ικανοποιεί τις αντίστοιχες προϋποθέσεις, η σειρά Fourier συγκλίνει ομοιόμορφα στην f και έχουμε

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} \cdots\right)$$

Μπορούμε να παραγωγίσουμε όρο προς όρο και διαιρώντας με το 2 παίρνουμε την σειρά Fourier της $f(x) = x$. Για $x = 0$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

ενώ για $x = \pi$ λαμβάνουμε το όριο

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Αν όμως επεκτείνουμε την συνάρτηση $g(x) = x$ σε άρτια περιοδική συνάρτηση και υπολογίσουμε την σειρά Fourier θα δούμε ότι δεν συμπίπτει με την σειρά των παραγώγων της $f(x) = x^2$.

• Θα αναπτύξουμε σε σειρά Fourier την $f(x) = x \cos x$ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ η οποία είναι περιττή και επομένως $a_n = 0$ ενώ

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x)dx \\ &= (-1)^n\left(\frac{2n}{n^2-1}\right) \quad n = 2, 3, \cdots \end{aligned}$$

και $b_1 = -1/2$. Αρα

$$x\cos x = -1/2\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2-1}\sin nx$$

• Θα εξετάσουμε τώρα την $f(x) = |\sin x|$ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ η οποία είναι άρτια και άρα $b_n = 0$. Υπολογίζοντας τους συντελεστές a_n προκύπτει ότι

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$$

Για $x = 0$ λαμβάνουμε το όριο

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}$$

• Θα μελετήσουμε την $f(x) = \cos mx$ στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ όπου m δεν είναι ακέραιος. Η συνάρτηση αυτή είναι άρτια και άρα $b_n = 0$. Η σειρά Fourier είναι ως εξής

$$\cos mx = \frac{2m \sin m\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2m^2} - \frac{\cos x}{m^2 - 1^2} + \frac{\cos 2x}{m^2 - 2^2} + \cdots \right)$$

Θέτοντας $x = \pi$ και διαιρώντας με $\sin m\pi$ και ύστερα γράφοντας το m ως x προκύπτει ότι

$$\cot \pi x := \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \frac{2x}{\pi} \left(\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^2 - 1^2} + \frac{1}{x^2 - 2^2} + \cdots \right)$$

Μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω σειρά στην μορφή

$$\cot \pi x - \frac{1}{\pi x} = -\frac{2x}{\pi} \left(\frac{1}{1^2 - x^2} + \frac{1}{2^2 - x^2} + \cdots \right)$$

Όταν $x \in [0, q]$ με $q < 1$ τότε η σειρά στο δεξί μέλος συγκλίνει ομοιόμορφα, άρα μπορούμε να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο και να πάρουμε

$$\pi \int_0^x \left(\cot \pi t - \frac{1}{\pi t} \right) dt = \ln \frac{\sin \pi x}{\pi x} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \ln \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$\sin \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots$$

Για $x = 1/2$ λαμβάνουμε το γινόμενο Wallis

$$\frac{1}{2}\pi = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1}\frac{2n}{2n+1}$$

• Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x)$ ορισμένη στο $(0, \pi)$. Αφού την επεκτείνουμε ως περιττή στο διάστημα $(-\pi, \pi)$, δηλαδή

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x), & \text{για } x \in (0, \pi) \\ -\frac{1}{2}(\pi + x), & \text{για } x \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

τότε $a_n = 0$ ενώ

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = \frac{1}{n}$$

Δηλαδή,

$$g(x) = \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \cdots, \qquad \text{για } x \in (-\pi, \pi)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι ασυνεχής στο $x = 0$ και η σειρά Fourier στο σημείο αυτό συγκλίνει στο $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

• Θα αναπτύξουμε την $f(x) = \sin x$ ορισμένη στο $(0, \pi)$ σε συνημιτονική σειρά. Προφανώς, θα πρέπει να την επεκτείνουμε κατάλληλα έτσι ώστε να γίνει άρτια συνάρτηση στο $(-\pi, \pi)$. Επομένως, ορίζουμε την

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{όταν } x \in [0, \pi] \\ -f(x), & \text{όταν } x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Συνεχίζουμε με την γνωστή διαδικασία υπολογίζοντας τους συντελεστές.

• Σε προηγούμενα παραδείγματα είχαμε αναπτύξει σε σειρά Fourier τις συναρτήσεις $\frac{x}{2}$ και $x \cos x$ και το αποτέλεσμα ήταν

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}, \\ x \cos x &= -\frac{\sin x}{2} + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{k^2 - 1} \sin kx \end{aligned}$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 161 στην συνάρτηση $\frac{x}{2}$ για παράδειγμα με αποτέλεσμα την παρακάτω ισότητα

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2}{4}dx=\frac{\pi^2}{6}$$

Παρομοίως, εφαρμόζοντας το ίδιο θεώρημα στην δεύτερη συνάρτηση έχουμε

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos^2(x)dx=\frac{1}{4}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{4k^2}{(k^2-1)^2}=\frac{\pi^2}{3}+\frac{1}{2}$$

Επίσης, μπορούμε να εφαρμόσουμε το 161 στο γινόμενο των δυο συναρτήσεων με αποτέλεσμα την επόμενη ισότητα

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^2\cos x}{2}dx=-\frac{1}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k^2-1}=-2$$

και επομένως

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k^2-1}=\frac{3}{4}$$

Η εξίσωση θερμότητας σε πεπερασμένο χωρίο

Θεωρούμε την παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση

$$u_t = k^2 u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad t > 0$$

μαζί με τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(L,t) &= 0, \quad t > 0 \end{aligned}$$

καθώς και την αρχική συνθήκη

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in [0, L]$$

όπου f δοσμένη συνάρτηση με $f(0) = f(L) = 0$ και $k > 0$.

Μοναδικότητα Λύσης

Θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση. Πράγματι, έστω δυο λύσεις του προβλήματος, $u_1(x,t)$ και $u_2(x,t)$. Τότε η διαφορά τους

$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ θα ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{array}{rcll} u_t & = & k^2 u_{xx}, & x \in [0,L], \;\; t > 0 \\ u(0,t) & = & 0, & \qquad\qquad\quad t > 0 \\ u(L,t) & = & 0, & \qquad\qquad\quad t > 0 \\ u(x,0) & = & 0, & x \in [0,L] \end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με την συνάρτηση $u(x,t)$ και ολοκληρώνουμε κατά μέλη στο $[0,L] \times [0,t]$, δηλαδή έχουμε αλλάζοντας στο δεξί μέλος την σειρά ολοκλήρωσης

$$\int_0^L \int_0^t u_t(x,r) u(x,r) dr dx = k^2 \int_0^t \int_0^L u_{xx}(x,r) u(x,r) dx dr$$

Ισχύει όμως το εξής

$$\int_0^t u_t(x,r) u(x,r) dr = u^2(x,r)\Big|_{r=0}^{r=t} - \int_0^t u_t(x,r) u(x,r) dr$$

Συνεπώς

$$\int_0^t u_t(x,r) u(x,r) dr = \frac{1}{2} u^2(x,t)$$

Από την άλλη μεριά έχουμε

$$\int_0^L u_{xx}(x,r)u(x,r)dx = u_x(x,r)u(x,r)\Big|_{x=0}^{x=L} - \int_0^L u_x^2(x,r)dx$$

Αντικαθιστώντας προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)dx + k^2\int_0^t\int_0^L u_x^2(x,r)dxdr = 0$$

από το οποίο λαμβάνουμε το συμπέρασμα ότι $u(x,t) = 0$ για $x \in [0,L]$ και για οποιοδήποτε $t > 0$ (δες πρόταση ;;). Αρα $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ για κάθε $x \in [0,L]$ και $t > 0$.

Μέθοδος Χωρισμού των Μεταβλητών

Για να υπολογίσουμε την μορφή της λύσης θα εφαρμόσουμε την `μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών` ή αλλιώς την `μέθοδο Fourier`. Θα υποθέσουμε δηλαδή ότι η λύση $u(t,x)$ γράφεται στην μορφή

$$u(t,x) = G(t)\phi(x)$$

Υπολογίζοντας τις παραγώγους που εμφανίζονται στην εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned} u_t &= G^{'}(t)\phi(x) \\ u_{xx} &= G(t)\phi^{''}(x) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση προκύπτει ότι

$$G^{'}(t)\phi(x) = kG(t)\phi^{''}(x)$$

ενώ διαχωρίζοντας τις συναρτήσεις με διαφορετικές μεταβλητές προκύπτει ότι

$$\frac{G^{'}(t)}{kG(t)} = \frac{\phi^{''}(x)}{\phi(x)}$$

Αυτή η ισότητα μπορεί να αληθεύει μονάχα όταν και τα δυο κλάσματα είναι σταθεροί αριθμοί, ανεξάρτητοι δηλαδή της μεταβλητής x ή t. Συμβολίζουμε με $-\lambda$ την σταθερά αυτή και την ονομάζουμε **σταθερά χωρισμού μεταβλητών**. Δηλαδή, ισχύει ότι

$$\frac{G^{'}(t)}{kG(t)} = \frac{\phi^{''}(x)}{\phi(x)} = -\lambda$$

Παρόμοιο χωρισμό μεταβλητών κάνουμε και στις συνοριακές συνθήκες, δηλαδή

$$u(0,t) = G(t)\phi(0) = 0$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\phi(0) = 0$ αλλιώς θα πρέπει να υποθέσουμε ότι $G(t) = 0$ το οποίο μας οδηγεί στην συνάρτηση $u(x,t) = 0$ που όμως δεν ικανοποιεί κατά ανάγκη την αρχική συνθήκη. Παρόμοια,

$$u(L,t) = G(t)\phi(L) = 0$$

από την οποία προκύπτει ότι $\phi(L) = 0$.

Συνεπώς, έχουμε τις εξής συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$G^{'}(t) = -\lambda k G(t)$$

και

$$\begin{aligned} \phi^{''}(x) &= -\lambda \phi(x) \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0 \end{aligned}$$

Θα συνεχίσουμε μελετώντας την τελευταία συνήθη διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού. Ξεχωρίζουμε τρεις περιπτώσεις για την σταθερά λ.

- $\lambda < 0$.

Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε για ευκολία $\lambda = -s$ με $s > 0$. Επομένως, έχουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= s\phi(x) \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi(L) &= 0 \end{aligned}$$

του οποίου η λύση δίνεται από

$$\phi(x) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x}$$

Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει ότι $c_1 = c_2 = 0$ και επομένως $u(x,t) = 0$ η οποία δεν είναι εν γένει αποδεκτή λύση.

• $\lambda = 0$.

Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση γίνεται

$$\phi''(x) = 0$$

η οποία έχει ως λύση την $\phi(x) = d_1 x + d_2$. Εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες προκύπτει πάλι η μηδενική συνάρτηση $u(x,t)$ ως λύση η οποία δεν είναι εν γένει αποδεκτή.

- $\lambda > 0$.

Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση έχει ως λύση την

$$\phi(x) = c_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

Εφαρμόζοντας την συνοριακή συνθήκη $\phi(0) = 0$ προκύπτει ότι $c_1 = 0$ ενώ εφαρμόζοντας την δεύτερη συνθήκη $\phi(L) = 0$ προκύπτει ότι

$$c_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0$$

Προφανώς θα υποθέσουμε ότι $\sin\left(\sqrt{\lambda}L\right) = 0$ αλλιώς θα καταλήξουμε πάλι στην μηδενική συνάρτηση $u(x,t) = 0$. Η ισότητα $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$ ικανοποιείται για άπειρα λ, τα εξής

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Τα συγκεκριμένα λ_n ονομάζονται **ιδιοτιμές** και οι συναρτήσεις

$$\phi_n(x) = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

οι οποίες είναι λύσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών για οποιαδήποτε σταθερά c_n, ονομάζονται **ιδιοσυναρτήσεις**.

Έχοντας υπολογίσει μια μη μηδενική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών, στην πραγματικότητα άπειρες λύσεις, θα προχωρήσουμε στην επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης με άγνωστη συνάρτηση την $G(t)$. Προφανώς, θα επιλύσουμε την διαφορική αυτή εξίσωση επιλέγοντας ως λ τα λ_n. Δηλαδή, η διαφορική εξίσωση που αφορά την συνάρτηση G γίνεται

$$G_n^{'}(t) = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 kG_n(t)$$

της οποίας η λύση είναι

$$G_n(t) = c_n e^{-k\lambda_n t}, \quad n = 1, 2, 3 \cdots$$

Συνεπώς, η λύση της εξίσωσης θερμότητας έχει την μορφή

$$u_n(x,t) = c_n e^{-k\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

όπου c_n αυθαίρετες σταθερές. Λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης και των συνοριακών συνθηκών προκύπτει εύκολα ότι η συνάρτηση

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

είναι λύση του προβλήματος αρκεί να ικανοποιούνται οι κατάλληλες προϋποθέσεις ούτως ώστε να περνά η παράγωγος μέσα στο άθροισμα. Η συνάρτηση αυτή πρέπει να ικανοποιεί και την αρχική συνθήκη, δηλαδή

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad x \in [0,L]$$

Επεκτείνουμε την συνάρτηση f σε περιττή στο διάστημα $[-L,L]$ ως εξής

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{όταν } x \in [0,L] \\ -f(-x), & \text{όταν } x \in [-L,0) \end{cases}$$

και έπειτα περιοδικά σε όλο το $\mathbb{R}$. Στην συνέχεια θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = \hat{f}\left(\frac{L}{\pi}x\right)$ (δες ;;) η οποία είναι περιττή και περιοδική με περίοδο 2π. Αναπτύσσουμε την $g(x)$ σε σειρά Fourier και έχουμε

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad x \in \mathbb{R}$$

όπου

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx dx$$

Κάνοντας την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $\hat{f}$ είναι περιττή έχουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad x \in \mathbb{R} \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

Αφού πρέπει να ισχύει ότι

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad x \in [0, L]$$

επιλέγουμε τις αυθαίρετες σταθερές c_n να είναι ως εξής

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Τελικά η μοναδική λύση θα έχει την μορφή

$$\boxed{\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-k\lambda_n t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad x \in [0,L], \quad t > 0 \\
c_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
\lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1,2,3,\cdots
\end{aligned}}$$

Στην συνέχεια πρέπει να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση που υπολογίσαμε είναι όντως λύση του προβλήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 162 *Θα μελετήσουμε το πρόβλημα*

$$\begin{aligned}
u_t(0,t) &= 1.14u_{xx}, \quad x \in [0,1], \ t > 0 \\
u(0,t) &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad\ t > 0 \\
u_x(1,t) &= 0, \qquad\qquad\qquad\quad\ t > 0 \\
u(x,0) &= -x^2 + 2x, \quad x \in [0,1]
\end{aligned}$$

Όπως πριν μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση. Στην συνέχεια θα την υπολογίσουμε. Εφαρμόζουμε την μέθοδο του χωρισμο-

ύ των μεταβλητών και άρα υποθέτουμε ότι $u(x,t) = G(t)\phi(x)$. Προκύπτει έτσι το πρόβλημα

$$G^{'}(t) = -1.14\lambda G(t)$$

και το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} \phi^{''}(x) &= -\lambda\phi(x) \\ \phi(0) &= 0 \\ \phi^{'}(1) &= 0 \end{aligned}$$

για $\lambda > 0$. Το τελευταίο πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις, τις συναρτήσεις

$$\phi_n(x) = c_n \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

για $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2$ και c_n αυθαίρετες σταθερές. Τελικά, η λύση του αρχικού προβλήματος θα έχει την μορφή

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-1.14\lambda_n t} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

Προκειμένου να ικανοποιηθεί και η αρχική συνθήκη, αναπτύσσουμε την συνάρτηση $-x^2+2x$ *σε σειρά Fourier (αφού πρώτα την επεκτείνουμε ως περιττή στο διάστημα* $[-1,1]$ *και έπειτα περιοδικά σε όλο το* $\mathbb{R}$*) και επιλέγουμε τις αυθαίρετες σταθερές* c_n *να έχουν την μορφή*

$$c_n = \frac{2}{1}\int_0^1 (-x^2+2x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}dx = \frac{32}{(2n-1)^3\pi^3}$$

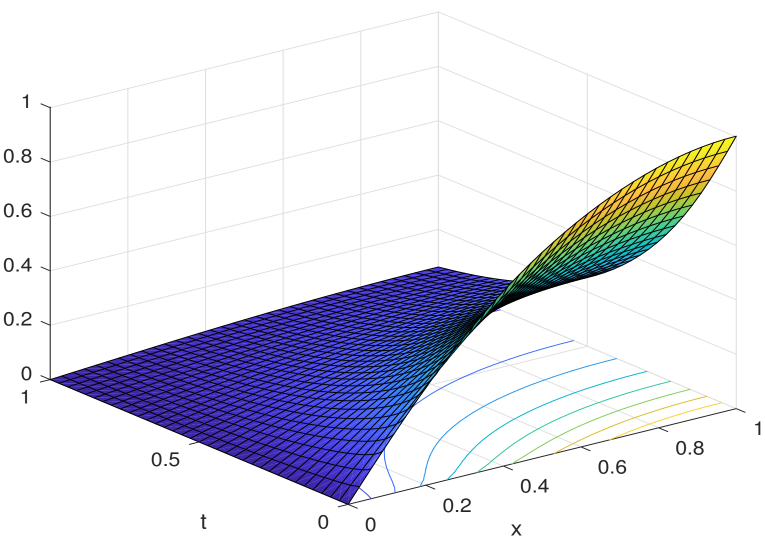
και επομένως η τελική μορφή της λύσης θα είναι

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{(2n-1)^3\pi^3}e^{-1.14\lambda_n t}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad x\in[0,1], \quad t>0 \\ \lambda_n &= \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Επειδή

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{(2n-1)^3\pi^3} < \infty$$

έπεται ότι η σύγκλιση της σειράς Fourier της συνάρτησης $-x^2+2x$ *είναι ομοιόμορφη (δες 154).*



Σχήμα 15: Το γράφημα της λύσης του παραδείγματος 162

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση u είναι πράγματι λύση του προβλήματος. Πράγματι,

$$|u_n(x,t)| \leq C\frac{1}{(2n-1)^3}$$

συνεπώς λόγω της πρότασης ;; προκύπτει ότι η σειρά της u_n συγκλίνει ομοιόμορφα (για κάθε μεταβλητή χωριστά) στην συνάρτηση $u(x,t)$. Επομένως, η συνάρτηση $u(x,t)$ είναι συνεχής συνάρτηση ως προς την *μεταβλητή* x *(με σταθερό το* t*) και ως προς την μεταβλητή* t *(με σταθερό το* x*).*

Στην συνέχεια ορίζουμε το σύνολο $D_\varepsilon = \{(x,t) : 0 < x < 1, \quad t > \varepsilon\}$*. Διαπιστώνουμε ότι*

$$|(u_n(x,t))_t| \leq Ce^{-1.14\varepsilon(2n-1)^2}$$

Η σειρά της $e^{-1.14\varepsilon(2n-1)^2}$ *συγκλίνει (συγκρίνετέ τη με την σειρά της* $\frac{1}{n^2}$*) επομένως σύμφωνα με το ;; προκύπτει ότι η σειρά της* $(u_n(x,t))_t$ *(ως συνάρτηση του* t*) συγκλίνει ομοιόμορφα στην* $u_t(x,t)$*. Με παρόμοιους συλλογισμούς προκύπτει ότι η σειρά της* $(u_n(x,t))_{xx}$ *(ως συνάρτηση του* x*) συγκλίνει ομοιόμορφα στην* $u_{xx}(x,t)$*. Επειδή η* $u_n(x,t)$ *είναι λύση της εξίσωσης για κάθε* n *τότε προκύπτει ότι και η* $u(x,t)$ *είναι επίσης λύση της εξίσωσης αφού πλέον οι παράγωγοι εναλλάσσονται με το άπειρο άθροισμα. Το* $\varepsilon > 0$ *είναι ένας οποιοδήποτε θετικός αριθμός, άρα η* $u(x,t)$ *είναι λύση της εξίσωσης στο* $D = \{(x,t) : x \in (0,1), \quad t > 0\}$*.*

Συνεπώς διαπιστώνουμε ότι η u *ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση, την αρχική συνθήκη καθώς και τις* *συνοριακές συνθήκες επομένως αποτελεί την μοναδική λύση του προβλήματος.* $\square$

Η εξίσωση κύματος σε πεπερασμένο χωρίο

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την εξίσωση κύματος, η οποία είναι η επόμενη

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in [0, L], \quad t > 0$$

μαζί με τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \quad t > 0 \\ u(L,t) &= 0, \quad t > 0 \end{aligned}$$

αλλά και τις αρχικές συνθήκες

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \quad x \in [0, L] \\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in [0, L] \end{aligned}$$

Μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών

Εν συνεχεία θα εφαρμόσουμε την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών στο αρχικό πρόβλημα. Υποθέτουμε ότι η λύση γράφεται στην μορφή $u(x,t) = G(t)\phi(x)$ και υπολογίζουμε τις παραγώγους

$$\begin{aligned} u_{tt} &= G^{''}(t)\phi(x) \\ u_{xx} &= G(t)\phi^{''}(x) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα

$$G^{''}(t)\phi(x) = c^2 G(t)\phi^{''}(x)$$

συνεπώς διαχωρίζοντας τις συναρτήσεις με διαφορετικές μεταβλητές έχουμε ότι

$$\frac{G^{''}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{\phi^{''}(x)}{\phi(x)} = -\lambda$$

Κάνοντας το ίδιο στην συνοριακή συνθήκη $u(0,t) = G(t)\phi(0) = 0$ προκύπτει το αποτέλεσμα ότι $\phi(0) = 0$ αλλιώς παίρνουμε την μηδενική συνάρτηση ως λύση η οποία εν γένει δεν είναι αποδεκτή. Με την συνθήκη $u(L,t) = 0$ έχουμε ότι $\phi(L) = 0$. Επομένως έχουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= -\lambda\phi(x) \\ \phi(0 &= 0 \\ \phi(L) &= 0 \end{aligned}$$

στο οποίο εργαζόμαστε ακριβώς όπως στην εξίσωση θερμότητας λαμβάνοντας έτσι τις ίδιες ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις. Αντικαθιστώντας το λ με τις λ_n στην εξίσωση

$$G''(t) = -\lambda_n c^2 G(t)$$

παίρνουμε την λύση

$$G_n(t) = a_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right), \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Τελικά, η λύση του προβλήματος θα έχει την μορφή

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)+b_n\sin\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Για να ικανοποιηθούν οι αρχικές συνθήκες, εργαζόμαστε όπως στην εξίσωση θερμότητας, αναπτύσσοντας δηλαδή τις συναρτήσεις f και g κατά Fourier αφού πρώτα τις επεκτείνουμε ως περιττές και στην συνέχεια τις επεκτείνουμε περιοδικά σε όλο το $\mathbb{R}$. Κάνοντας τους υπολογισμούς προκύπτει ότι οι συντελεστές a_n και b_n πρέπει να είναι ως εξής

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \\ b_n &= \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \end{aligned}$$

Δίνουμε στην συνέχεια ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 163 *Έστω το πρόβλημα*

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} & = & 4u_{xx}, & x \in [0,1], \ t > 0 \\ u_x(0,t) & = & 0, & \qquad\qquad\quad t > 0 \\ u(1,t) & = & 0, & \qquad\qquad\quad t > 0 \\ u(x,0) & = & x^3 + 2x^2 - 3, & x \in [0,1] \\ u_t(x,0) & = & x^2 - 1, & x \in [0,1] \end{array}$$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, οπότε υποθέτουμε ότι $u(x,t) = G(t)\phi(x)$. *Έτσι προκύπτει το πρόβλημα*

$$\begin{array}{rcl} \phi''(x) & = & -\lambda\phi(x) \\ \phi'(0) & = & 0 \\ \phi(1) & = & 0 \end{array}$$

Οι λύσεις του παραπάνω προβλήματος είναι οι συναρτήσεις

$$\phi_n(x) = c_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

για $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right)^2$.

Από την εξίσωση

$$G_n''(t) = -4\lambda_n G_n(t)$$

έχουμε ότι

$$G_n(t) = a_n \cos((2n-1)\pi t) + b_n \sin((2n-1)\pi t)$$

Τελικά, η γενική λύση του προβλήματος είναι

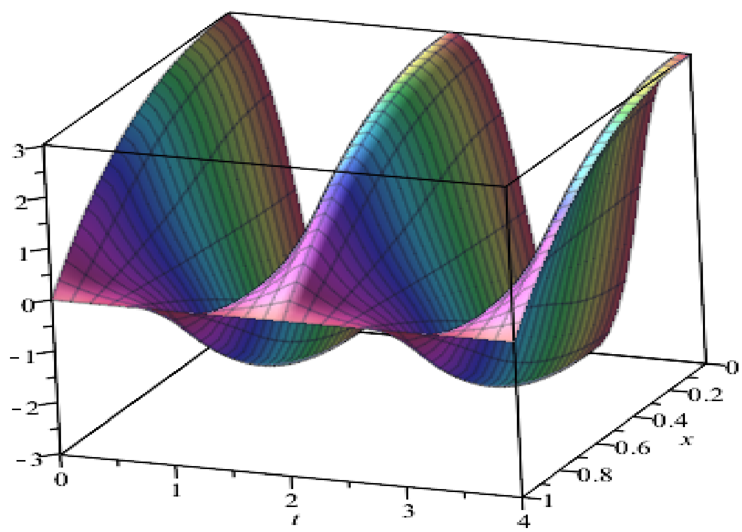
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \cos\big((2n-1)\pi t\big) + b_n \sin\big((2n-1)\pi t\big)\Big] \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

Αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις x^3+2x^2-3 *και* x^2-1 *κατά Fourier υπολογίζουμε τους συντελεστές* a_n *και* b_n *οι οποίοι είναι*

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-2(96+80\pi(-1)^{n+1}(1-2n))}{(2n-1)^4\pi^4} \\ b_n &= \frac{-32(-1)^{n+1}}{(2n-1)^4\pi^4} \end{aligned}$$

Ακριβώς όπως στην περίπτωση του παραβολικού προβλήματος αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση u *είναι πράγματι λύση του προβλήματος.*

$\square$



Σχήμα 16: Το γράφημα της λύσης του παραδείγματος 163

Η εξίσωση του *Laplace* σε ορθογώνιο

Θεωρούμε το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad x \in [0,d], \; y \in [0,b] \\ u(0,y) &= 0, \quad y \in [0,b] \\ u(d,y) &= f(y), \quad y \in [0,b] \\ u(x,0) &= 0, \quad x \in [0,d] \\ u(x,b) &= 0, \quad x \in [0,d] \end{aligned}$$

Μοναδικότητα Λύσης

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι το πρόβλημα αυτό έχει μοναδική λύση. Έστω ότι έχει δυο λύσεις, τις $u_1(x,y)$ και $u_2(x,y)$. Λόγω γραμμικότητας η διαφορά τους $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ θα ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad x \in [0,d], \quad y \in [0,b] \\
u(0,y) &= 0, \qquad\qquad\qquad y \in [0,b] \\
u(d,y) &= 0, \qquad\qquad\qquad y \in [0,b] \\
u(x,0) &= 0, \quad x \in [0,d] \\
u(x,b) &= 0, \quad x \in [0,d]
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη την εξίσωση με την συνάρτηση $u(x,y)$ και ολοκληρώνουμε κατά μέλη στο $[0,b] \times [0,d]$. Αφού κάνουμε αλλαγή ολοκλήρωσης προκύπτει η εξής ισότητα,

$$\int_0^b \int_0^d u_{xx}(x,y)u(x,y)dxdy + \int_0^d \int_0^b u_{yy}(x,y)u(x,y)dydx = 0 \tag{27}$$

Όμως

$$\begin{aligned}\int_0^d u_{xx}(x,y)u(x,y)dx &= u_x(x,y)u(x,y)\Big|_0^d - \int_0^d u_x^2(x,y)dx \\ \int_0^b u_{yy}(x,y)u(x,y)dy &= u_y(x,y)u(x,y)\Big|_0^b - \int_0^b u_y^2(x,y)dy\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 27 και αλλάζοντας την σειρά ολοκλήρωσης προκύπτει ότι

$$\int_0^b \int_0^d (u_x^2(x,y) + u_y^2(x,y))dxdy = 0$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να ικανοποιηθεί μονάχα όταν $u_x(x,y) = u_y(x,y) = 0$ για $x \in [0,d]$ και $y \in [0,b]$. Αυτό όμως μπορεί να συμβεί όταν $u(x,y) = k \in \mathbb{R}$ για $x \in [0,d]$ και $y \in [0,b]$. Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες τελικά έχουμε ότι $u(x,y) = 0$ για $x \in [0,d]$ και $y \in [0,b]$ και επομένως η λύση είναι μοναδική.

Μέθοδος Χωρισμού των Μεταβλητών

Θα υπολογίσουμε την λύση εφαρμόζοντας την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Θεωρούμε ότι

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

και αντικαθιστώντας στην διαφορική εξίσωση προκύπτει η γνωστή σχέση

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = k \in \mathbb{R}$$

Οι συνοριακές συνθήκες μας δίνουν $X(0) = Y(0) = Y(b) = 0$. Για την εξίσωση $Y'' = -kY$ έχουμε μη μηδενική λύση όταν $k = p^2$ η οποία είναι

$$Y(y) = A\cos py + B\sin py$$

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες $Y(0) = Y(b) = 0$ έχουμε ότι $A = 0$ και $\sin pb = 0$. Από αυτό προκύπτει ότι

$$k = k_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

Δηλαδή

$$Y_n(y) = B_n \sin\frac{n\pi y}{b}$$

Αντικαθιστώντας το k με το k_n στην εξίσωση $X'' = kX$ παίρνουμε την λύση

$$X_n(x) = C_n e^{\frac{n\pi x}{b}} + D_n e^{-\frac{n\pi x}{b}}$$

Όμως $X(0) = 0$ από το οποίο παίρνουμε την σχέση $D_n + C_n = 0$ και άρα

$$X_n = 2C_n \sinh \frac{n\pi x}{b}$$

Η λύση λοιπόν θα δίνεται ως εξής

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Επειδή $u(d,y) = f(y)$, αναπτύσσουμε την f κατά Fourier και επομένως

$$E_n \sinh \frac{n\pi d}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy$$

από όπου υπολογίζουμε τις σταθερές E_n. Αντικαθιστώντας, προκύπτει η λύση

$$\boxed{u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{b \sinh \frac{n\pi d}{b}} \left(\int_0^b f(r) \sin \frac{n\pi r}{b} dr \right) \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}}$$

Στην συνέχεια θα πρέπει να αποδείξουμε ότι πράγματι η συνάρτηση u αποτελεί λύση του προβλήματος (όπως στο παραβολικό πρόβλημα).

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις πρώτης τάξης

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης της μορφής

$$a(x,y)z_x(x,y) + b(x,y)z_y(x,y) + c(x,y)z(x,y) = f(x,y) \tag{128}$$

όπου $a(\cdot,\cdot), b(\cdot,\cdot), c(\cdot,\cdot), f(\cdot,\cdot)$ δοσμένες συναρτήσεις και $z(x,y)$ η άγνωστη συνάρτηση. Στην συνέχεια θα περιγράψουμε πως μπορεί να επιλυθεί μια τέτοια εξίσωση. Η βασική ιδέα είναι να γίνει κατάλληλη αλλαγή των μεταβλητών έτσι ώστε να καταλήξουμε σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης.

Ας δούμε καταρχάς ένα απλούστερο πρόβλημα όπου η συνάρτηση $b(x,y)$ είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν. Τότε το παραπάνω πρόβλημα γίνεται

$$a(x,y)z_x(x,y) + a(x,y)z(x,y) = f(x,y)$$

Η εξίσωση αυτή είναι στην πραγματικότητα μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς την μεταβλητή x (θεωρούμε την μεταβλητή y ως μια παράμετρο). Η λύση της είναι γνωστή και είναι η επόμενη

$$\frac{h(y)+\int \frac{f(s,y)}{a(s,y)}e^{\int \frac{c(r,y)}{a(r,y)}dr}ds}{e^{\int \frac{c(r,y)}{a(r,y)}dr}}$$

όπου $h(y)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση της μεταβλητής y.

Ξαναγυρνώντας στην εξίσωση 28 θα υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $a(x,y)\neq 0$ σε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Στην συνέχεια επιλύουμε την παρακάτω συνήθη διαφορική εξίσωση

$$y^{'}=\frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

γράφοντας την λύση στην μορφή

$$\omega(x,y)=d$$

Θεωρούμε τώρα τον μετασχηματισμό

$$r=x \quad p=\omega(x,y)$$

καθώς και τις κατάλληλες συναρτήσεις $u_1(r,p)$ και $u_2(r,p)$ έτσι ώστε $x=u_1(r,p)$ και $y=u_2(r,p)$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας (δες Θεώρημα ;;) προκύπτει ότι $\omega_x + \omega_y y^{'} = 0$ άρα $y^{'} = -\frac{\omega_x}{\omega_y}$ και επομένως $a(x,y)\omega_x + b(x,y)\omega_y = 0$. Ισχύει ότι $z(x,y) = z(u_1(r,p), u_2(r,p)) =: Z(r,p)$ οπότε παραγωγίζοντας την $Z(r,p)$ ως προς x και ως προς y θα έχουμε

$$\begin{aligned} Z_x(r,p) &= Z_r\frac{dr}{dx} + Z_p\frac{dp}{dx} = Z_r + Z_p\omega_x \\ Z_y(r,p) &= Z_r\frac{dr}{dy} + Z_p\frac{dp}{dy} = Z_p\omega_y \end{aligned}$$

δεδομένου ότι $p = \omega(x,y)$. Θέτοντας

$$\begin{aligned} A(r,p) &= a(u_1(r,p), u_2(r,p)) \\ B(r,p) &= b(u_1(r,p), u_2(r,p)) \\ C(r,p) &= c(u_1(r,p), u_2(r,p)) \\ F(r,p) &= f(u_1(r,p), u_2(r,p)) \end{aligned}$$

καταλήγουμε στην εξίσωση

$$A(r,p)Z_r(r,p) + C(r,p)Z(r,p) = F(r,p)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Υπολογίζουμε την λύση της και στην συνέχεια αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 164 *Θα επιλύσουμε την επόμενη μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης*

$$kz_x + lz_y + mz = 0$$

όπου $k, l, m \in \mathbb{R}$ *και* $k \neq 0$. *Στην περίπτωση αυτή θα επιλύσουμε την συνήθη διαφορική εξίσωση*

$$y^{'} = \frac{l}{k}$$

Η λύση της είναι η $y(x) = \frac{l}{k}x + c$ *και την γράφουμε στην μορφή* $lx - ky = d$. *Οπότε θέτουμε* $\omega(x, y) = lx - ky$ *και κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών* $r = x$ *και* $p = lx - ky$. *Η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται στην*

$$kz_r + mz = 0$$

της οποίας η λύση είναι $z(r, p) = e^{-\frac{m}{k}r}h(p)$ *όπου* $h(\cdot)$ *μια αυθαίρετη συνάρτηση του* p. *Αντιστρέφοντας τον* *μετασχηματισμό προκύπτει ότι η λύση του αρχικού προβλήματος είναι η*

$$z(x, y) = e^{-\frac{m}{k}x} h(lx - ky)$$

$\square$