Επίλυση της εξίσωσης των Black-Scholes

1 Η Εξίσωση των Black – Scholes

Η εξίσωση των Black-Scholes είναι η επόμενη

$$V_t(t,S) + rSV_s(t,S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{ss}(t,S) - rV(t,S) = 0,\ t \in [0,T],\ S > 0 \tag{1}$$

Έχουμε περιγράψει πως προκύπτει η εξίσωση αυτή από το διωνυμικό μοντέλο καθώς το πλήθος των περιόδων συγκλίνει στο άπειρο. Η εξίσωση αυτή είναι μια παραβολική εξίσωση συνεπώς με κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορούμε να την μετασχηματίσουμε στην κανονική της μορφή η οποία είναι η εξίσωση θερμότητας που έχουμε ήδη μελετήσει.

1.1 Μετασχηματισμός της εξίσωσης στην εξίσωση θερμότητας

Θα δώσουμε στην συνέχεια τους κατάλληλους μετασχηματισμούς ούτως ώστε η εξίσωση αυτή να μετασχηματισθεί στην εξίσωση θερμότητας. Θέτουμε

$$\begin{array}{rcll} t & = & T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, & \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T] \\ S & = & e^x, & x \in \mathbb{R} \\ V(t,S) & = & v(\tau,x), & x \in \mathbb{R},\ \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T] \end{array}$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της u (εφαρμόζοντας το θεώρημα ;;) και έχουμε, σημειώνοντας ότι $V(t,S) = v\left(\frac{\sigma^2}{2}(T-t), \ln S\right)$

$$\begin{array}{rcl} V_t & = & -\frac{\sigma^2}{2} v_\tau \\ V_s & = & \frac{1}{S} v_x \\ V_{SS} & = & -\frac{1}{S^2} v_x + \frac{1}{S^2} v_{xx} \end{array}$$

Τότε η αρχική διαφορική εξίσωση γίνεται, θέτοντας $k = \frac{2r}{\sigma^2}$,

$$v_\tau = v_{xx} + (k-1)v_x - kv$$

έχοντας χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η V ικανοποιεί την 1.

Στην συνέχεια θέτουμε

$$v(\tau,x) = e^{ax+b\tau} u(\tau,x)$$

Αντικαθιστώντας την v στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει η παρακάτω

$$bu + u_\tau = a^2 u + 2au_x + u_{xx} + (k-1)(au + u_x) - ku$$

Προκειμένου να απλουστευθεί διαλέγουμε

$$a = -\frac{1}{2}(k-1), \quad b = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

Τελικά προκύπτει ότι η συνάρτηση V είναι λύση της 1 αν και μόνο αν η $u(\tau, x)$ ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας

$$u_\tau = u_{xx}, \quad \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T], \quad x \in \mathbb{R}$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε μια τελική συνθήκη στην 1, όπως για παράδειγμα

$$V(T, S) = F(S), \quad S > 0$$

όπου $F(\cdot)$ δοσμένη συνάρτηση, τότε η αντίστοιχη μετασχηματισμένη εξίσωση θερμότητας παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} u_\tau &= u_{xx}, && \tau \in [0, \tfrac{\sigma^2}{2}T], \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x}F(e^x), && \qquad\qquad\quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Συμβολίζοντας με $f(x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x}F(e^x)$ έχουμε ότι το πρόβλημα αυτό έχει ως λύση την

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} dz, \quad \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T], \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

1.2 Αξία Ευρωπαϊκού Συμβολαίου Αγοράς (Call Option)

Ας δούμε ποια είναι η αξία ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου αγοράς με βάση την συνάρτηση $V(t, S)$ που έχουμε υπολογίσει. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $F(x) = (x - K)^+$ όπου K είναι η τιμή εξάσκησης.

Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση $u(\tau, x)$ από την σχέση 2 κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{z-x}{\sqrt{2\tau}}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u(\tau, x) &= \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy - \frac{K}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f(x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x} \max\{e^x - K, 0\}$.

Το πρώτο ολοκλήρωμα στην τελευταία σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \\ =\; & \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} e^{-\frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2} dy \\ =\; & \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \ln S}{\sqrt{2\tau}} - \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho \\ =\; & e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1) \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\ &\text{και} \\ d_1 &= \frac{\ln S - \ln K}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} = \frac{\ln \frac{S}{K} + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

Παρόμοια έχουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln K - \ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = e^{\frac{1}{2}(k-1)x + \frac{1}{4}(k-1)^2\tau} N(d_2)$$

όπου

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \quad \text{και} \quad d_2 = \frac{\ln \frac{S}{K} + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση

$$N(d) = 1 - N(-d)$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} N(-d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= 1 - \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (\text{θέσαμε } t = -u) \\ &= 1 - N(d) \end{aligned}$$

Οπότε

$$V(t,S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Μπορούμε να συσχετίσουμε την $V(t,S)$ με την συνάρτηση σφάλματος $\mathrm{erf}(x)$ και να πάρουμε το εξής

$$V(t,S) = S\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{d_1}{\sqrt{2}}\right)\right) - Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{d_2}{\sqrt{2}}\right)\right) \tag{3}$$

Η συσχέτιση αυτή προκύπτει εύκολα ως εξής

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} \sigma\sqrt{2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-y^2} dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$