

Θέματα εξέτασης στη φόρμουλα του Itô

Τέσσερα ισοδύναμα σετ θεμάτων και πρόσθετες ερωτήσεις Girsanov

Όλες οι στοχαστικές εξισώσεις γράφονται σε ολοκληρωτική μορφή.

Σετ Α

Θέμα Α1 – Θεωρία

[15 μονάδες]

Έστω ότι

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(r) dr + \int_0^t b(r) dW_r.$$

- α') Να δοθεί ο ορισμός μιας διαδικασίας Itô σε ολοκληρωτική μορφή.
- β') Να γραφεί η φόρμουλα του Itô για $f(t, X_t)$, όπου $f \in C^{1,2}$.

Θέμα Α3 – Υπολογιστικό

[25 μονάδες]

Έστω ότι η τιμή ενός χρηματοοικονομικού τίτλου δίνεται από

$$S_t = 200 + 0.20 \int_0^t S_r dr + 0.03 \int_0^t S_r dW_r.$$

- α') Να αναγνωρίσετε τους συντελεστές drift και diffusion.
- β') Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του Itô για $f(x) = \log x$, να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για το $\log S_t$.
- γ') Να βρείτε την αναλυτική μορφή του S_t .
- δ') Να υπολογίσετε το $\mathbb{E}[S_1]$ και το $\text{Var}[S_1]$.

Θέμα Α4 – Υπολογιστικό

[25 μονάδες]

Έστω W_t Brownian motion. Εφαρμόστε τη φόρμουλα του Itô στη συνάρτηση

$$f(x) = x^4.$$

- α') Να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για το W_t^4 .
- β') Να πάρετε αναμενόμενες τιμές και να υπολογίσετε τα $\mathbb{E}[W_t^4]$, $\text{Var}[W_t^4]$.
- γ') Να εξηγήσετε γιατί ο στοχαστικός ολοκληρωτικός όρος έχει αναμενόμενη τιμή μηδέν.

Θέμα Α5 – Υπολογιστικό

[25 μονάδες]

Έστω

$$X_t = \exp\left(0.4W_t - \frac{1}{2}(0.4)^2t\right).$$

- α') Να εφαρμόσετε τη φόρμουλα του Itô και να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για το X_t .
- β') Να εξηγήσετε γιατί το X_t είναι martingale αφού δώσετε τον κατάλληλο ορισμό.

Σετ Β**Θέμα Β1 — Θεωρία****[15 μονάδες]**

Να διατυπώσετε τη φόρμουλα του Itô για $f(W_t)$, όπου $f \in C^2(\mathbb{R})$, σε ολοκληρωτική μορφή. Στη συνέχεια να την εφαρμόσετε για $f(x) = x^2$ και να δείξετε ότι

$$\int_0^t W_r \, dW_r = \frac{1}{2}(W_t^2 - t).$$

Θέμα Β3 — Υπολογιστικό**[25 μονάδες]**

Έστω

$$P_t = 50 + 0.08 \int_0^t P_r \, dr + 0.25 \int_0^t P_r \, dW_r.$$

- α') Να αναγνωρίσετε τους συντελεστές drift και diffusion.
- β') Να εφαρμόσετε τη φόρμουλα του Itô για $f(x) = x^2$ και να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για το P_t^2 .
- γ') Να εφαρμόσετε τη φόρμουλα του Itô για $f(x) = \log x$ και να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για το $\log P_t$.
- δ') Να υπολογίσετε το $\mathbb{E}[P_2]$ και το $\text{Var}(P_2)$.

Θέμα Β4 — Υπολογιστικό**[25 μονάδες]**

Έστω

$$X_t = 1 + \int_0^t (1 + 0.1X_r) \, dr + \int_0^t 0.2X_r \, dW_r.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(t, x) = tx^2.$$

Να υπολογίσετε ολοκληρωτική αναπαράσταση για το tX_t^2 .

Σετ Γ

Θέμα Γ3 — Υπολογιστικό

[25 μονάδες]

Έστω

$$S_t = 120 + 0.05 \int_0^t S_r dr + 0.18 \int_0^t S_r dW_r.$$

Θεωρούμε επίσης τον τραπεζικό λογαριασμό

$$B_t = e^{0.03t}.$$

Θέτουμε

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = e^{-0.03t} S_t.$$

α') Να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για τη discounted price $\tilde{S}_t$.

β') Είναι η $\tilde{S}_t$ martingale υπό το αρχικό μέτρο πιθανότητας; Να δικαιολογήσετε.

Θέμα Γ4 — Υπολογιστικό

[25 μονάδες]

Έστω

$$S_t = 120 + 0.05 \int_0^t S_r dr + 0.18 \int_0^t S_r dW_r.$$

Θέτουμε

$$Y_t = \frac{1}{S_t}.$$

Να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για το Y_t .

Θέμα Γ5 — Ornstein--Uhlenbeck

[25 μονάδες]

Έστω

$$Y_t = 0.6e^{-1.5t} \int_0^t e^{1.5r} dW_r.$$

α') Να δείξετε ότι το Y_t ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$Y_t = -1.5 \int_0^t Y_r dr + 0.6 \int_0^t dW_r.$$

β') Να υπολογίσετε $\mathbb{E}[Y_t]$.

γ') Να υπολογίσετε $\text{Var}(Y_t)$.

δ') Να βρείτε αριθμητικά τη διακύμανση για $t = 1$.

Σετ Δ

Θέμα Δ3 – Υπολογιστικό

[25 μονάδες]

Έστω

$$X_t = 10 + 0.4 \int_0^t X_r dr + 0.6 \int_0^t \sqrt{X_r} dW_r,$$

με $X_t > 0$. Θέτουμε

$$Y_t = \sqrt{X_t}.$$

Να εφαρμόσετε τη φόρμουλα του Ιτô και να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για το Y_t .

Θέμα Δ4 – Υπολογιστικό

[25 μονάδες]

Έστω

$$S_t = 80 + 0.12 \int_0^t S_r dr + 0.30 \int_0^t S_r dW_r.$$

Για $\alpha \in \mathbb{R}$, θέτουμε

$$Y_t = S_t^\alpha.$$

α') Να βρείτε γενικό ολοκληρωτικό τύπο για το Y_t .

β') Να εφαρμόσετε τον τύπο για $\alpha = \frac{1}{2}$.

γ') Να εφαρμόσετε τον τύπο για $\alpha = -1$.

Θέμα Δ5 – GBM και πιθανότητα

[25 μονάδες]

Έστω

$$S_t = 80 + 0.12 \int_0^t S_r dr + 0.30 \int_0^t S_r dW_r.$$

α') Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του Ιτô για $\log S_t$, να βρείτε την αναλυτική μορφή του S_t .

β') Να υπολογίσετε την πιθανότητα

$$\mathbb{P}(S_1 > 100).$$

Δίνεται ότι αν $Z \sim N(0, 1)$, τότε

$$\mathbb{P}(Z > 0.494) \approx 0.311.$$

Πρόσθετες ερωτήσεις για το θεώρημα Girsanov

Θέμα G2 – Αλλαγή μέτρου σε γεωμετρική Brownian motion

[25 μονάδες]

Έστω ότι υπό το πραγματικό μέτρο $\mathbb{P}$ η τιμή ενός τίτλου δίνεται από

$$S_t = 100 + 0.15 \int_0^t S_r dr + 0.25 \int_0^t S_r dW_r^{\mathbb{P}}.$$

Έστω ότι το σταθερό επιτόκιο είναι

$$r = 0.05.$$

Αλλάξτε κατάλληλα το μέτρο και την κίνηση Brown έτσι ώστε η S_t να έχει παράμετρο $0.05S_t$ στο ολοκλήρωμα ως προς dt . Στη συνέχεια να δείξετε ότι η $e^{-0.05t}S_t$ είναι martingale κάτω από το νέο μέτρο πιθανότητας, υπό κατάλληλες συνθήκες.

Θέμα G3 – Υπολογισμός πιθανότητας μετά από αλλαγή μέτρου

[20 μονάδες]

Έστω $W_t^{\mathbb{P}}$ Brownian motion υπό το $\mathbb{P}$. Ορίζουμε νέο μέτρο $\mathbb{Q}$ με

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left(-\theta W_T^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2} \theta^2 T \right).$$

Τότε

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} + \theta t$$

είναι Brownian motion υπό το $\mathbb{Q}$.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα

$$\mathbb{Q}(W_T^{\mathbb{P}} \leq a)$$

σε όρους της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής Φ της τυπικής κανονικής κατανομής.

Επιπλέον σύντομες εφεδρικές ερωτήσεις

Ερώτηση 1

Έστω

$$X_t = X_0 + 0.3 \int_0^t X_r dr + 0.4 \int_0^t X_r dW_r.$$

Να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για το $\log X_t$.

Ερώτηση 2

Έστω

$$X_t = X_0 + 2 \int_0^t dr + 3 \int_0^t dW_r.$$

Να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για το X_t^2 .

Ερώτηση 3

Έστω

$$S_t = S_0 + 0.08 \int_0^t S_r dr + 0.20 \int_0^t S_r dW_r.$$

Θέτουμε

$$Y_t = e^{-0.05t} S_t.$$

Να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για το Y_t .

Ερώτηση 4

Να βρείτε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η διαδικασία

$$M_t = e^{0.7W_t + \lambda t}$$

να έχει ολοκληρωτική αναπαράσταση χωρίς όρο ως προς dt .

Ερώτηση 5

Έστω

$$X_t = X_0 + 0.1 \int_0^t X_r dr + 0.2 \int_0^t X_r dW_r.$$

Να βρείτε για ποια $\alpha \neq 0$ η διαδικασία X_t^α έχει ολοκληρωτική αναπαράσταση χωρίς όρο ως προς dr .

Ερώτηση 6

Έστω

$$X_t = X_0 + 0.2 \int_0^t X_r dr + 0.5 \int_0^t X_r dW_r.$$

Να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για

$$Y_t = e^{-t} X_t^2.$$

Ερώτηση 7

Έστω W_t Brownian motion. Να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για e^{W_t} και στη συνέχεια να υπολογίσετε $\mathbb{E}[e^{W_t}]$.

Ερώτηση 8

Να δείξετε με τη φόρμουλα του Itô ότι

$$W_t^2 - t$$

είναι martingale.

Ερώτηση 9

Να δείξετε με τη φόρμουλα του Itô ότι

$$e^{W_t - \frac{1}{2}t}$$

είναι martingale.

Ερώτηση 10

Έστω

$$X_t = X_0 + \int_0^t (3 - 2X_r) dr + 0.4 \int_0^t dW_r.$$

Να βρείτε ολοκληρωτική αναπαράσταση για X_t^2 και να γράψετε εξίσωση για $\mathbb{E}[X_t^2]$.

Εννοιολογικές ερωτήσεις για τη θεωρία Black--Scholes

Θέμα BS1 — Στόχος της θεωρίας Black--Scholes

[15 μονάδες]

Ποιος είναι ο βασικός στόχος της θεωρίας Black--Scholes;

Στην απάντησή σας να σχολιάσετε τα εξής σημεία:

- α') Αν η θεωρία Black--Scholes έχει στόχο να προβλέψει την πραγματική μελλοντική τιμή του υποκείμενου τίτλου.
- β') Πώς χρησιμοποιείται η θεωρία για την τιμολόγηση ευρωπαϊκών παραγώγων.
- γ') Πώς συνδέεται η τιμολόγηση με την κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου.

Θέμα BS2 — Προβλήματα εφαρμογής στην πράξη

[20 μονάδες]

Ποια είναι τα βασικά προβλήματα εφαρμογής της θεωρίας Black--Scholes στην πράξη;

Θέμα BS3 — Τι σημαίνει ``fair price" στο Black--Scholes;

[15 μονάδες]

Στο πλαίσιο Black--Scholes, η τιμή ενός ευρωπαϊκού call προκύπτει από τον τύπο

$$C_0 = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2).$$

Να απαντήσετε στα εξής:

- α') Με ποια έννοια η τιμή αυτή είναι ``δίκαιη" ή arbitrage-free; Η έννοια αυτή είναι πρακτικά χρήσιμη;
- β') Γιατί η τιμή αυτή εξαρτάται από την επιλογή της μεταβλητότητας σ ;
- γ') Τι μπορεί να συμβεί αν δύο συμμετέχοντες στην αγορά χρησιμοποιούν διαφορετική σ ;

Θέμα BS4 — Ιστορική, implied και realized volatility

[20 μονάδες]

Να εξηγήσετε τη διαφορά μεταξύ:

- α') ιστορικής μεταβλητότητας,
- β') implied volatility,
- γ') μελλοντικής realized volatility στο διάστημα $[0, T]$.

Γιατί η διάκριση αυτή είναι σημαντική στην εφαρμογή του Black--Scholes;

Θέμα BS5 — Volatility smile

[15 μονάδες]

Τι είναι το volatility smile ή volatility skew;

Να εξηγήσετε γιατί το φαινόμενο αυτό δημιουργεί πρόβλημα για το κλασικό Black--Scholes μοντέλο.

Θέμα BS6 — Delta hedging και πρακτικοί περιορισμοί

[20 μονάδες]

Στη θεωρία Black--Scholes, το delta hedge ενός ευρωπαϊκού call χρησιμοποιεί

$$\Delta(t, S_t) = \Phi(d_1(t, S_t)).$$

- α') Τι σημαίνει ότι το χαρτοφυλάκιο πρέπει να αναπροσαρμόζεται συνεχώς;

β') Γιατί αυτό δεν είναι εφικτό στην πράξη;

Ερωτήσεις για model-free τιμολόγηση και στατική αντιστάθμιση options

Θέμα MF1 — Arbitrage-free διάστημα τιμών

[25 μονάδες]

Έστω ότι θέλουμε να εισάγουμε στην αγορά ένα νέο ευρωπαϊκό option με payoff

$$f(x), \quad x = S_T \geq 0,$$

όπου η f είναι τμηματικά γραμμική με πεπερασμένο πλήθος κλάδων. Στην αγορά υπάρχουν ήδη m calls και ℓ puts με ίδια λήξη T , strikes

$$K_1^C, \dots, K_m^C, \quad K_1^P, \dots, K_\ell^P,$$

και αγοραίες τιμές

$$C_1, \dots, C_m, \quad P_1, \dots, P_\ell.$$

Να απαντήσετε στα εξής:

- α') Πώς ορίζουμε ένα στατικό χαρτοφυλάκιο $\Phi(x)$ από τα διαθέσιμα εργαλεία;
- β') Πώς ορίζεται το κόστος $V(\Phi)$;
- γ') Ποιο είναι το ελάχιστο κόστος υπερ-αντιστάθμισης της payoff f ;
- δ') Ποιο είναι το μέγιστο κόστος υπο-αντιστάθμισης της payoff f ;
- ε') Ποιο είναι το arbitrage-free διάστημα τιμών για το νέο option;

Θέμα MF2 — Πεπερασμένος έλεγχος των ανισοτήτων

[20 μονάδες]

Έστω ότι η payoff $f(x)$ του νέου option είναι τμηματικά γραμμική με πεπερασμένα σημεία αλλαγής κλάδων

$$A_1, \dots, A_q.$$

Οι διαθέσιμες αγοραίες απολαβές έχουν σημεία αλλαγής κλάδου στα strikes των calls και puts:

$$K_1^C, \dots, K_m^C, \quad K_1^P, \dots, K_\ell^P.$$

- α') Να ορίσετε το πεπερασμένο σύνολο κόμβων στο οποίο αρκεί να ελέγξουμε τις ανισότητες.
- β') Να εξηγήσετε γιατί, αν οι συναρτήσεις είναι τμηματικά γραμμικές, δεν χρειάζεται να ελέγξουμε όλα τα $x \geq 0$.
- γ') Ποια συνθήκη πρέπει να ελέγξουμε για να μην τείνει η διαφορά $\Phi(x) - f(x)$ στο $-\infty$ όταν $x \rightarrow +\infty$;

Θέμα MF3 — Γραμμικό πρόγραμμα υπερ-αντιστάθμισης

[25 μονάδες]

Να διατυπώσετε το γραμμικό πρόγραμμα που υπολογίζει την άνω arbitrage-free τιμή U ενός νέου option με payoff $f(x)$.

Να χρησιμοποιήσετε χαρτοφυλάκιο της μορφής

$$\Phi(x) = b + ax + \sum_{j=1}^m c_j (x - K_j^C)^+ + \sum_{k=1}^{\ell} d_k (K_k^P - x)^+.$$

Υποθέστε ότι το πεπερασμένο σύνολο κόμβων είναι

$$\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_N\}.$$

Θέμα MF4 – Γραμμικό πρόγραμμα υπο-αντιστάθμισης

[25 μονάδες]

Να διατυπώσετε το γραμμικό πρόγραμμα που υπολογίζει την κάτω arbitrage-free τιμή L ενός νέου option με payoff $f(x)$.

Να εξηγήσετε γιατί το L δίνει τη μέγιστη τιμή ενός χαρτοφυλακίου που είναι πάντοτε μικρότερο ή ίσο από την payoff του νέου option.

Θέμα MF5 – Αν πουλήσω το option σε τιμή Y

[25 μονάδες]

Έστω ότι πουλάτε ένα νέο option με payoff $f(x)$ στην τιμή Y .

- α') Ποιο πρόβλημα πρέπει να λύσετε για να αντισταθμίσετε πλήρως τον κίνδυνο;
- β') Τι κάνετε αν $Y > U$, όπου U είναι το ελάχιστο κόστος υπερ-αντιστάθμισης;
- γ') Τι μπορείτε να συμπεράνετε αν $Y < U$;

Θέμα MF6 – Αν αγοράσω το option σε τιμή Y

[25 μονάδες]

Έστω ότι αγοράζετε ένα νέο option με payoff $f(x)$ στην τιμή Y .

- α') Ποιο πρόβλημα πρέπει να λύσετε για να κατασκευάσετε μια αντισταθμιστική στρατηγική;
- β') Τι κάνετε αν $Y < L$, όπου L είναι το μέγιστο κόστος υπο-αντιστάθμισης;
- γ') Τι συμπεραίνετε αν $Y > L$;

Θέμα MF7 – Απόφαση αγοράς ή πώλησης με βάση το διάστημα $[L, U]$

[20 μονάδες]

Έστω ότι για ένα νέο option με payoff $f(x)$ υπολογίσαμε το arbitrage-free διάστημα

$$[L, U].$$

Η αγορά προσφέρει το option στην τιμή Y .

Να εξηγήσετε τι συμπεραίνουμε στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α') $Y < U$ και θέλουμε να το πουλήσουμε.
- β') $Y > U$ και μπορούμε να το πουλήσουμε.
- γ') $Y > L$ και θέλουμε να το αγοράσουμε.
- δ') $Y < L$ και μπορούμε να το αγοράσουμε.
- ε') $L \leq Y \leq U$.

Θέμα MF8 – Μπορεί η αντιστάθμιση να με βοηθήσει να αποφασίσω αν με βολεύει η τιμή;
[25 μονάδες]

Σχολιάστε την ακόλουθη πρόταση:

"Ο τρόπος αντιστάθμισης που επιλέγω μπορεί να με βοηθήσει να αποφασίσω αν ένα option με συμφέρει στην τιμή Y ."

Να απαντήσετε ξεχωριστά για την περίπτωση που θέλω να αγοράσω και για την περίπτωση που θέλω να πουλήσω το option.

Θέμα MF9 — Αριθμητικό παράδειγμα με calls και puts

[30 μονάδες]

Υποθέστε ότι

$$S_0 = 100$$

και στην αγορά υπάρχουν διαθέσιμα τα παρακάτω options ίδιας λήξης:

$$C(100) = 10, \quad C(120) = 3,$$

$$P(80) = 2, \quad P(100) = 8.$$

Θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα νέο option με payoff

$$f(x) = \begin{cases} 20, & 0 \leq x \leq 80, \\ 100 - x, & 80 < x \leq 100, \\ 0, & 100 < x \leq 120, \\ x - 120, & x > 120. \end{cases}$$

α') Να βρείτε τα kink points της f .

β') Να γράψετε το σύνολο κόμβων $\mathcal{G}$.

γ') Να διατυπώσετε το γραμμικό πρόγραμμα για την άνω τιμή U .

δ') Να διατυπώσετε το γραμμικό πρόγραμμα για την κάτω τιμή L .

ε') Να εξηγήσετε τι σημαίνει αν η αγορά δίνει τιμή $Y = 15$, χωρίς να λύσετε αριθμητικά το LP.

Θέμα MF10 — Πρόβλεψη και αντιστάθμιση

[25 μονάδες]

Έστω ότι το arbitrage-free διάστημα ενός option είναι

$$[L, U] = [7, 12].$$

Η αγορά προσφέρει το option στην τιμή

$$Y = 10.$$

Ένας επενδυτής πιστεύει ότι στη λήξη το υποκείμενο θα ανήκει στο διάστημα

$$S_T \in [90, 110].$$

α') Υπάρχει arbitrage στην τιμή $Y = 10$;

β') Μπορεί ο επενδυτής να χρησιμοποιήσει την πρόβλεψή του για να αποφασίσει αν θα αγοράσει ή θα πουλήσει;

γ') Πώς μπορεί να διατυπώσει ένα γραμμικό πρόγραμμα που μεγιστοποιεί το εγγυημένο κέρδος στο διάστημα $[90, 110]$, ενώ ελέγχει τη μέγιστη ζημία εκτός του διαστήματος;

Θέμα MF13 — Arbitrage όταν η τιμή είναι έξω από το arbitrage-free διάστημα μονάδες]

[25

Έστω ότι για ένα νέο option με payoff $f(x)$ έχει υπολογιστεί το arbitrage-free διάστημα τιμών

$$[L, U].$$

Το option διαπραγματεύεται στην αγορά στην τιμή Y .

α') Τι μπορεί να συμβεί αν

$$Y > U;$$

β') Τι μπορεί να συμβεί αν

$$Y < L;$$

γ') Να εξηγήσετε γιατί, σε μια αγορά χωρίς κόστη συναλλαγών και περιορισμούς, οι επενδυτές τείνουν να εκμεταλλεύονται τέτοιες ευκαιρίες.

δ') Να σχολιάσετε γιατί στην πράξη η τιμή ενός option συνήθως πιέζεται να βρίσκεται μέσα, ή κοντά, στο arbitrage-free interval.

Θέμα MF14 — Αν η τιμή είναι μέσα στο arbitrage-free διάστημα, αξίζει να αγοράσω ή να πουλήσω;

[25 μονάδες]

Έστω ότι για ένα νέο option με payoff $f(x)$, όπου $x = S_T$, έχει υπολογιστεί το arbitrage-free διάστημα τιμών

$$[L, U].$$

Η αγορά προσφέρει το option στην τιμή

$$Y \in [L, U].$$

α') Υπάρχει arbitrage στην τιμή Y ;

β') Μπορούμε να αποφασίσουμε μόνο από τη σχέση $Y \in [L, U]$ αν αξίζει να αγοράσουμε ή να πουλήσουμε το option;

γ') Ποιος είναι ο ρόλος της πρόβλεψης για την τελική τιμή S_T του υποκείμενου αγαθού;

δ') Πώς μπορεί ένας επενδυτής να ελέγξει αν το option είναι χρήσιμο για αυτόν, δεδομένης της πρόβλεψής του;

Θέμα MF15 — Ποια διαθέσιμα options θα αγοράσω ή θα πουλήσω;

[25 μονάδες]

Στην αγορά υπάρχουν διαθέσιμα n ευρωπαϊκά options ίδιας λήξης T . Για απλότητα, υποθέτουμε ότι είναι calls και puts με payoffs

$$g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \quad x = S_T,$$

και σημερινές τιμές

$$p_1, p_2, \dots, p_n.$$

Θέλουμε να αποφασίσουμε ποια από αυτά θα αγοράσουμε ή θα πουλήσουμε και σε ποιες ποσότητες.

α') Πώς περιγράφεται μαθηματικά ένα χαρτοφυλάκιο από τα διαθέσιμα options;

β') Τι σημαίνει θετική και τι αρνητική θέση σε ένα option;

- γ') Μπορούμε να αποφασίσουμε ποια options θα αγοράσουμε ή θα πουλήσουμε μόνο από τις τιμές $p_1, \dots, p_n$;
- δ') Ποιος είναι ο ρόλος της πρόβλεψης για το S_T ;
- ε') Πώς μπορεί να διατυπωθεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης για την επιλογή των ποσοτήτων;

Θέμα FC1 – Ιστορικά δεδομένα σε βραχυπρόθεσμες και μακροπρόθεσμες επενδύσεις [25 μονάδες]

Σε μια επενδυτική απόφαση, ένας επενδυτής έχει στη διάθεσή του αριθμητικά ιστορικά δεδομένα, όπως παρελθοντικές τιμές, αποδόσεις, μεταβλητότητες, όγκους συναλλαγών και συσχετίσεις.

- α') Σε μια βραχυπρόθεσμη επένδυση, είναι σωστό να στηριχθεί πλήρως στα ιστορικά αριθμητικά δεδομένα;
- β') Σε μια μακροπρόθεσμη επένδυση, είναι σωστό να στηριχθεί πλήρως στα ιστορικά αριθμητικά δεδομένα;
- γ') Ποια είναι τα βασικά προβλήματα της αποκλειστικής χρήσης ιστορικών δεδομένων;
- δ') Ποια άλλα στοιχεία πρέπει να συνδυάζονται με τα ιστορικά δεδομένα πριν ληφθεί η επενδυτική απόφαση;