Εργασία ”Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά ΙΙ”

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Νίκος Χαλιδιάς

Μέρος Α

Θέμα 1. ***«Από το Riemann στο Riemann–Stieltjes και στη μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής»***

Στόχοι μάθησης.

- Να ορίζετε και να ερμηνεύετε το ολοκλήρωμα **Riemann–Stieltjes** $\int_a^b f\,d\alpha$.
- Να αναγνωρίζετε το **Riemann** ολοκλήρωμα ως ειδική περίπτωση ($\alpha(x) = x$).
- Να κατανοείτε ότι η **μέση τιμή** (αναμενόμενη τιμή) γράφεται ενιαία ως ολοκλήρωμα ως προς τη **συνάρτηση κατανομής** F:

  $$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dF(x)$$

  (μορφή Stieltjes / Lebesgue–Stieltjes).
- Να συγκρίνετε διακριτές/συνεχείς/μεικτές κατανομές μέσω της συμπεριφοράς της F (άλματα vs απολύτως συνεχές μέρος).

1 Μέρος Α: Riemann vs Riemann–Stieltjes

1.1 Ορισμοί

Παρατήρηση 1 (Riemann ολοκλήρωμα). *Για $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ ορίζεται ως όριο αθροισμάτων Riemann:*

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad \Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ \ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

όταν $|\Pi| = \max_i \Delta x_i \to 0$, όπου $\Pi : a = x_0 < \cdots < x_n = b$.

Παρατήρηση 2 (Riemann–Stieltjes ολοκλήρωμα). *Έστω $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα (ή γενικότερα πεπερασμένης μεταβολής) και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Το ολοκλήρωμα Riemann–Stieltjes $\int_a^b f\,d\alpha$ ορίζεται (όταν υπάρχει) ως:*

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \lim_{|\Pi|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})), \qquad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

1.2 Βασικές σχέσεις προς απόδειξη/σχόλιο

A.1 Το Riemann ως ειδική περίπτωση. Δείξτε ότι αν $\alpha(x) = x$, τότε

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

A.2 Παραγωγίσιμη α. Αν α είναι παραγωγίσιμη και α' συνεχής στο $[a, b]$, δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\,dx.$$

A.3 Άλματα. Αν α έχει άλματα (π.χ. είναι βηματική), εξηγήστε γιατί τυπικά εμφανίζεται άθροισμα όρων

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha(x) = \sum_{c\in(a,b]} f(c)\,\Delta\alpha(c), \qquad \Delta\alpha(c) = \alpha(c) - \alpha(c^-),$$

(σε κατάλληλες υποθέσεις για f, α).

2 Μέρος B: Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής ως ολοκλήρωμα Stieltjes

Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x).$$

Για κατάλληλη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, η αναμενόμενη τιμή γράφεται ενιαία ως

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dF(x),$$

όπου το ολοκλήρωμα ερμηνεύεται ως ολοκλήρωμα Stieltjes (ή Lebesgue–Stieltjes).

2.1 Σύγκριση με Riemann

B.1 Συνεχής περίπτωση. Αν F είναι απολύτως συνεχής και $F'(x) = f(x)$ (πυκνότητα), να δείξετε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dF(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,f(x)\,dx,$$

δηλαδή επιστρέφουμε σε ολοκλήρωμα τύπου Riemann (ή Lebesgue) ως προς dx.

B.2 Διακριτή περίπτωση. Αν X είναι διακριτή με τιμές $\{x_k\}$ και $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$, να εξηγήσετε ότι η F έχει άλματα $\Delta F(x_k) = p_k$ και ότι

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dF(x) = \sum_k g(x_k)\,p_k.$$

3 Ασκήσεις (υποχρεωτικές)

Άσκηση 1 (Riemann ως ειδική περίπτωση). *Από τον ορισμό των αθροισμάτων Riemann–Stieltjes, δείξτε ότι αν $\alpha(x) = x$, τότε*

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Άσκηση 2 (Παραγωγίσιμη α). *Στο $[0,1]$, θέστε $\alpha(x) = x^2$ και $f(x) = x$.*

(α') Υπολογίστε $\int_0^1 x\,d(x^2)$ χρησιμοποιώντας ότι $d(x^2) = 2x\,dx$.

(β') (Προαιρετικό) Υπολογίστε το ίδιο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη (αν τη γνωρίζετε).

Άσκηση 3 (Βηματική α με ένα άλμα). *Έστω $a < c < b$ και*

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ 1, & x \geq c. \end{cases}$$

(α') Υπολογίστε $\int_a^b f(x)\,d\alpha(x)$ για συνεχές f.

(β') Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα σε σχέση με τα "άλματα" του α.

Άσκηση 4 (Διακριτή X: μέση τιμή ως Stieltjes). *Έστω $X \in \{0,1,2\}$ με $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ ($p_k \geq 0$, $p_0 + p_1 + p_2 = 1$).*

(α') Γράψτε τη συνάρτηση κατανομής F.

(β') Υπολογίστε $\int_{\mathbb{R}} x\,dF(x)$ και δείξτε ότι ισούται με $\sum_{k=0}^{2} k\,p_k$.

Άσκηση 5 (Συνεχής X: εκθετική κατανομή). *Έστω $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, με*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

(α') Υπολογίστε $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x\,dF(x)$.

(β') Δείξτε ότι αυτό συμπίπτει με $\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Θέμα 2. ***Εφαρμογή της Φόρμουλας του Ιτο***

Υπενθύμιση: Τύπος Itô (1Δ) Έστω $(W_t)_{t\geq 0}$ τυπική κίνηση Brown και διαδικασία X_t που ικανοποιεί την SDE

$$dX_t = b(t, X_t)\, dt + a(t, X_t)\, dW_t.$$

Για $f \in C^{1,2}$ ισχύει:

$$df(t,X_t) = \Big(f_t(t,X_t) + b(t,X_t)\, f_x(t,X_t) + \tfrac{1}{2}a^2(t,X_t)\, f_{xx}(t,X_t)\Big)\, dt + a(t,X_t)\, f_x(t,X_t)\, dW_t.$$

Ασκήσεις

Άσκηση 6 (Ιδιότητες Δεσμευμένης Μέσης τιμής). *Συγκεντρώστε τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής μαζί με τις αντίστοιχες ονομασίες τους σε ένα πίνακα.*

Άσκηση 7 (Βασικό πολυώνυμο – μαρτινγκέιλ). *Θέσε $X_t = W_t$.*

(α') Εφάρμοσε Itô στη $f(x) = x^2$ και βρες $d(W_t^2)$.

(β') Δείξε ότι $M_t := W_t^2 - t$ είναι μαρτινγκέιλ.

Άσκηση 8 (Εκθετικό martingale). *Για $\lambda \in \mathbb{R}$ θέσε*

$$Z_t = \exp\Big(\lambda W_t - \tfrac{1}{2}\lambda^2 t\Big).$$

(α') Εφάρμοσε Itô στη $f(t,x) = e^{\lambda x - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$.

(β') Δείξε ότι $dZ_t = \lambda Z_t\, dW_t$ και άρα Z_t είναι μαρτινγκέιλ.

Άσκηση 9 (Μετασχηματισμός $\log(1+x^2)$). *Θέσε $X_t = \mu t + \sigma W_t$ και $f(x) = \log(1 + x^2)$.*

(α') Υπολόγισε $f'(x)$, $f''(x)$.

(β') Βρες το $df(X_t)$ και ξεχώρισε τον όρο drift και τον όρο διάχυσης.

Άσκηση 10 (Γεωμετρική Brown (GBM) και λογαριθμισμός). *Έστω $S_t > 0$ και*

$$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t, \qquad S_0 > 0.$$

(α') Με Itô στη $f(x) = \ln x$, βρες $d(\ln S_t)$.

(β') Λύσε την SDE και δώσε κλειστή μορφή του S_t.

Άσκηση 11 (Ornstein–Uhlenbeck: «έξυπνος» μετασχηματισμός). *Έστω*

$$dX_t = \theta(\alpha - X_t)\, dt + \sigma\, dW_t, \qquad \theta > 0.$$

(α') Εφάρμοσε Itô στη $f(t,x) = e^{\theta t}x$.

(β') Ολοκλήρωσε και βρες ρητή μορφή του X_t.

Άσκηση 12 (CIR και μετασχηματισμός $Y_t = \sqrt{X_t}$). *Έστω $X_t \ge 0$ και*

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t)\,dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dW_t.$$

Θέσε $Y_t = \sqrt{X_t}$ (όπου $X_t > 0$).

(α') Εφάρμοσε Itô στη $f(x) = \sqrt{x}$ και βρες SDE για Y_t.

(β') Εξήγησε ποιος όρος εμφανίζεται λόγω του f''.

Άσκηση 13 (Χρονικά εξαρτώμενη $f(t,x)$). *Θέσε $X_t = W_t$ και $f(t,x) = t^2 \sin x$. Βρες το $df(t,W_t)$ και ξεχώρισε drift/diffusion.*

Μέρος Β

Αποτίμηση Συμβολαίων και θεωρία Black-Scholes

Άσκηση 14 (Εκτίμηση παραμέτρων GBM από πραγματικά δεδομένα μετοχής (Yahoo Finance)). *Διαλέξτε **μία** μετοχή (ticker) από το* Yahoo Finance *και κατεβάστε **πραγματικά ημερήσια δεδομένα** (*`Adj Close` *κατά προτίμηση) για χρονικό διάστημα **τουλάχιστον 1 έτους**.*

*Θεωρήστε ότι η τιμή S_t ακολουθεί **γεωμετρική κίνηση Brown (GBM)**:*

$$dS_t = m\,S_t\,dt + \sigma\,S_t\,dW_t, \qquad S_t > 0.$$

(α') Περιγράψτε τη διαδικασία λήψης δεδομένων (ticker, διάστημα ημερομηνιών, συχνότητα, χρήση `Adj Close`*).*

*(β') Ορίστε τις **λογαριθμικές αποδόσεις** (log-returns)*

$$r_i = \ln\Big(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\Big),$$

όπου S_{t_i} οι διαδοχικές τιμές `Adj Close`*. Εξηγήστε γιατί οι log-returns είναι φυσικές στο πλαίσιο του GBM.*

*(γ') Θέστε Δt ως το χρονικό βήμα σε **έτη**. Για ημερήσια δεδομένα μπορείτε να πάρετε*

$$\Delta t = \frac{1}{252}$$

(περίπου 252 ημέρες διαπραγμάτευσης ανά έτος).

(δ') Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι υπό GBM ισχύει

$$r_i \sim \mathcal{N}\big((m - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\Delta t,\ \sigma^2\Delta t\big),$$

να εκτιμήσετε τις παραμέτρους m και σ από το δείγμα $\{r_i\}$.

(ε') Δώστε καθαρά τους εκτιμητές που χρησιμοποιήσατε. Ενδεικτικά, αν $\bar{r}$ είναι ο δειγματικός μέσος των r_i και s_r^2 η (αμερόληπτη ή μη) δειγματική διασπορά των r_i, τότε μια τυπική επιλογή είναι:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{s_r^2}{\Delta t}, \qquad \widehat{m} = \frac{\bar{r}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\,\widehat{\sigma}^2.$$

(Να διευκρινίσετε ποιον ορισμό διασποράς χρησιμοποιείτε και γιατί.)

(ς') *Παρουσιάστε τα αριθμητικά αποτελέσματα $\widehat{m}$, $\hat{\sigma}$ (σε ετήσια βάση) και σχολιάστε:*

- *πώς επηρεάζουν οι επιλογές* `Close` *vs* `Adj Close`*,*
- *πώς επηρεάζει η επιλογή Δt (π.χ. 252 έναντι 365),*
- *ποια είναι η ερμηνεία του m (ιστορικός drift) και της σ (ιστορική μεταβλητότητα).*

(Προαιρετικό)*: Κάντε ένα histogram/Q–Q plot των r_i και σχολιάστε αν η κανονικότητα είναι ρεαλιστική για το δείγμα σας.*

Άσκηση 15 (Εφαρμογή Black–Scholes: τιμολόγηση call/put και put–call parity)**.** *Έστω ότι η τιμή της μετοχής S_t (κάτω από το ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο μέτρο) ικανοποιεί*

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t,$$

όπου r το σταθερό επιτόκιο χωρίς κίνδυνο και $\sigma > 0$ η μεταβλητότητα. Έστω επίσης λήξη $T > 0$, τρέχουσα τιμή $S_0 > 0$, και strike *$K > 0$. (Υποθέτουμε μηδενικά μερίσματα.)*

(α') ***Τιμή Ευρωπαϊκού Call.*** *Χρησιμοποιώντας τον τύπο Black–Scholes, δείξτε ότι η αξία του Ευρωπαϊκού call*

$$C_0 = \textit{BSCall}(S_0, K, r, \sigma, T)$$

δίνεται από

$$C_0 = S_0\,\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\,\Phi(d_2),$$

όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της $\mathcal{N}(0,1)$ και

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

(β') ***Τιμή Ευρωπαϊκού Put.*** *Αντίστοιχα, δείξτε ότι η αξία του Ευρωπαϊκού put*

$$P_0 = \textit{BSPut}(S_0, K, r, \sigma, T)$$

δίνεται από

$$P_0 = Ke^{-rT}\,\Phi(-d_2) - S_0\,\Phi(-d_1),$$

με τα ίδια d_1, d_2.

(γ') ***Put–Call Parity.*** *Αποδείξτε ότι οι παραπάνω τιμές ικανοποιούν την* put–call parity*:*

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}.$$

(δ') ***(Προαιρετικό) Αριθμητική εφαρμογή.*** *Επιλέξτε τιμές S_0, K, r, σ, T και υπολογίστε C_0, P_0. Ελέγξτε αριθμητικά ότι $C_0 - P_0$ και $S_0 - Ke^{-rT}$ συμπίπτουν (μέχρι σφάλμα στρογγυλοποίησης).*

Άσκηση 16 (Ιστορική μεταβλητότητα vs. implied μεταβλητότητα και συνέπεια τιμών μεταξύ strikes)**.** *Έστω ότι η υποκείμενη μετοχή (χωρίς μερίσματα) ακολουθεί το Black–Scholes υπό το ουδέτερο μέτρο:*

$$dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,dW_t,$$

με σταθερό επιτόκιο r και (σταθερή) μεταβλητότητα σ.

Θεωρούμε δύο ευρωπαϊκά call με την ίδια *λήξη T, αλλά διαφορετικά strikes $K_1 \neq K_2$:*

$$C_1 = C(S_0, K_1, r, \sigma, T), \qquad C_2 = C(S_0, K_2, r, \sigma, T).$$

Υποθέστε ότι:

- *για το call με strike K_1 **δεν υπάρχει (ακόμη) τιμή αγοράς** και το αποτιμάτε με **ιστορική** μεταβλητότητα $\hat{\sigma}_{\text{hist}}$,*
- *για το call με strike K_2 **υπάρχει τιμή αγοράς** C_2^{mkt}.*

*(α') **Αποτίμηση με ιστορική μεταβλητότητα.** Ορίστε πώς υπολογίζετε $\hat{\sigma}_{\text{hist}}$ από ημερήσια δεδομένα (log-returns, $\Delta t = 1/252$, ετησιοποίηση) και υπολογίστε την "θεωρητική" τιμή*

$$C_1^{\text{hist}} := C(S_0, K_1, r, \hat{\sigma}_{\text{hist}}, T).$$

*(β') **Implied μεταβλητότητα από τιμή αγοράς.** Ορίστε την* implied volatility $\hat{\sigma}_{\text{impl}}(K_2)$ *ως τη λύση της εξίσωσης*

$$C(S_0, K_2, r, \hat{\sigma}_{\text{impl}}(K_2), T) = C_2^{\text{mkt}}.$$

(Να εξηγήσετε γιατί η λύση είναι μοναδική, με βάση ότι η τιμή call είναι αύξουσα ως προς σ.)

*(γ') **Ερώτημα συνέπειας.** Συζητήστε αν η τιμή C_1^{hist} είναι* αναγκαστικά *συνεπής με την ύπαρξη του C_2^{mkt}. Να απαντήσετε τεκμηριωμένα στα εξής:*

- *(i) Αν στο Black–Scholes ίσχυε $\sigma =$ σταθερό, τι θα περιμένατε για τις implied μεταβλητότητες στα διαφορετικά strikes;*
- *(ii) Στην πράξη παρατηρείται* volatility smile/skew. *Τι σημαίνει αυτό για τη σχέση $\hat{\sigma}_{\text{hist}}$ και $\hat{\sigma}_{\text{impl}}(K)$;*
- *(iii) Δείξτε ότι ακόμη και αν $C_1^{\text{hist}} \neq C(S_0, K_1, r, \hat{\sigma}_{\text{impl}}(K_2), T)$, αυτό δεν συνεπάγεται από μόνο του arbitrage: το C_1^{hist} είναι απλώς ένα* μοντέλο-quote.

*(δ') **Έλεγχος στατικής μη-αρμπιτράζ μεταξύ strikes (ίδια λήξη).** Αν τελικά το call με strike K_1 αρχίσει να διαπραγματεύεται στην αγορά με τιμή C_1^{mkt}, δείξτε ποιες συνθήκες πρέπει να ισχύουν ώστε να **μην υπάρχει στατικό arbitrage** ως προς το strike:*

- *(i) **Μονοτονία:** Αν $K_1 < K_2$, τότε πρέπει να ισχύει $C^{\text{mkt}}(K_1) \geq C^{\text{mkt}}(K_2)$.*
- *(ii) **Κυρτότητα ως προς** K**:** Για $K_1 < K_2 < K_3$,*

$$C^{\text{mkt}}(K_2) \;\leq\; \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1}\, C^{\text{mkt}}(K_1) + \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1}\, C^{\text{mkt}}(K_3).$$

  (Ερμηνεύστε την ανισότητα ως απουσία butterfly arbitrage.*)*

(iii) ***Κάτω/άνω φράγματα:***

$$\max\{S_0 - Ke^{-rT}, 0\} \le C^{\mathrm{mkt}}(K) \le S_0.$$

Άσκηση 17 («Φθηνό ή ακριβό για εσένα;» Αποτίμηση, σκοπός συναλλαγής και αντιστάθμιση). *Έστω ότι για ένα ευρωπαϊκό option (π.χ. call) με λήξη T και strike K υπολογίσατε μια* θεωρητική *τιμή V_0^{model} (π.χ. με Black–Scholes ή άλλο μοντέλο), ενώ η παρατηρούμενη τιμή στην αγορά είναι V_0^{mkt}.*

Στόχος της άσκησης είναι να συζητηθεί πότε μια τιμή είναι ακριβή *ή* φθηνή ***για εσάς****, δηλαδή σε σχέση με το* ***λόγο*** *που θέλετε να αγοράσετε/πουλήσετε το option, και πώς αυτό συνδέεται με την* ***αντιστάθμιση κινδύνου****.*

(α') ***Κίνητρο/Στόχος συναλλαγής.*** *Διαλέξτε* ***έναν*** *λόγο για τον οποίο θα αγοράζατε ή θα πουλούσατε το option. Ενδεικτικά:*

- Αντιστάθμιση (hedging): *προστασία ενός ήδη υπάρχοντος χαρτοφυλακίου (π.χ. long stock) από πτώση/άνοδο.*
- Κερδοσκοπία (directional bet): *άποψη για την κατεύθυνση της μετοχής.*
- Διαχείριση ουράς κινδύνου (tail risk): *επιδίωξη ασφάλισης έναντι ακραίων γεγονότων.*

Περιγράψτε το σενάριο και ποιον κίνδυνο θέλετε να μειώσετε ή ποια άποψη θέλετε να εκφράσετε.
Εξηγήστε γιατί το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο των Black-Scholes δεν είναι εφικτό στην πράξη. Προσπαθήστε να εξηγήσετε ότι η τιμή ενός option σχετίζεται με τους τρόπους αντιστάθμισης που πραγματικά μπορούν να υλοποιηθούν και όχι από ένα μοντέλο το οποίο δίνει αυθαίρετη τιμή χωρίς να εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο μπορείτε (και αν συμφέρει) να χρησιμοποιήσετε το option αυτό σε αυτή την τιμή.

(β') *Θεωρείστε τώρα ένα άλλο option με συνάρτηση απολαβής $f(x)$ το οποίο δεν είναι ούτε call ούτε put. Πως θα χρησιμοποιήσετε τη θεωρία των Black-Scholes για την αποτίμηση αυτού του συμβολαίου; Ποια παράμετρο σ θα επιλέξετε; Η τιμή που θα δώσει θα είναι συνεπής με τις υπάρχουσες τιμές των διαθέσιμων options; Πως θα είστε σίγουροι ότι η τιμή που θα προκύψει θα είναι arbitrage-free όταν στην αγορά υπάρχουν διαθέσιμα call και put options;*