

Εργασία "Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά II"

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Νίκος Χαλιδιάς

Μέρος A

Θέμα 1. «Από το Riemann στο Riemann--Stieltjes και στη μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής»

Στόχοι μάθησης.

- Να ορίζετε μ και να ερμηνεύετε το ολοκλήρωμα **Riemann--Stieltjes** $\int_a^b f d\alpha$.
- Να αναγνωρίζετε το **Riemann** ολοκλήρωμα ως ειδική περίπτωση ($\alpha(x) = x$).
- Να κατανοείτε ότι η **μέση τιμή** (αναμενόμενη τιμή) γράφεται ενιαία ως ολοκλήρωμα ως προς τη **συνάρτηση κατανομής** F :

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)$$

(μορφή Stieltjes / Lebesgue--Stieltjes).

- Να συγκρίνετε διακριτές/συνεχείς/μεικτές κατανομές μέσω της συμπεριφοράς της F (άλματα vs απολύτως συνεχές μέρος).

1 Μέρος A: Riemann vs Riemann--Stieltjes

1.1 Ορισμοί

Παρατήρηση 1 (Riemann ολοκλήρωμα). Για $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα Riemann $\int_a^b f(x) dx$ ορίζεται ως όριο αθροισμάτων Riemann:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],$$

όταν $|\Pi| = \max_i \Delta x_i \rightarrow 0$, όπου $\Pi : a = x_0 < \dots < x_n = b$.

Παρατήρηση 2 (Riemann--Stieltjes ολοκλήρωμα). Έστω $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ αύξουσα (ή γενικότερα πεπερασμένης μεταβολής) και $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Το ολοκλήρωμα Riemann--Stieltjes $\int_a^b f d\alpha$ ορίζεται (όταν υπάρχει) ως:

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \lim_{|\Pi| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

1.2 Βασικές σχέσεις προς απόδειξη/σχόλιο

A.1 Το Riemann ως ειδική περίπτωση. Δείξτε ότι αν $\alpha(x) = x$, τότε

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) dx.$$

A.2 Παραγωγίσιμη α . Αν α είναι παραγωγίσιμη και α' συνεχής στο $[a, b]$, δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x) dx.$$

A.3 Άλματα. Αν α έχει άλματα (π.χ. είναι βηματική), εξηγήστε γιατί τυπικά εμφανίζεται άθροισμα όρων

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \sum_{c \in (a, b]} f(c) \Delta\alpha(c), \quad \Delta\alpha(c) = \alpha(c) - \alpha(c^-),$$

(σε κατάλληλες υποθέσεις για f, α).

2 Μέρος B: Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής ως ολοκλήρωμα Stieltjes

Έστω X τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Για κατάλληλη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η αναμενόμενη τιμή γράφεται ενιαία ως

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x),$$

όπου το ολοκλήρωμα ερμηνεύεται ως ολοκλήρωμα Stieltjes (ή Lebesgue--Stieltjes).

2.1 Σύγκριση με Riemann

B.1 Συνεχής περίπτωση. Αν F είναι απολύτως συνεχής και $F'(x) = f(x)$ (πυκνότητα), να δείξετε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx,$$

δηλαδή επιστρέφουμε σε ολοκλήρωμα τύπου Riemann (ή Lebesgue) ως προς dx .

B.2 Διακριτή περίπτωση. Αν X είναι διακριτή με τιμές $\{x_k\}$ και $\mathbb{P}(X = x_k) = p_k$, να εξηγήσετε ότι η F έχει άλματα $\Delta F(x_k) = p_k$ και ότι

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x) = \sum_k g(x_k) p_k.$$

3 Ασκήσεις (υποχρεωτικές)

Άσκηση 1 (Riemann ως ειδική περίπτωση). Από τον ορισμό των αθροισμάτων Riemann--Stieltjes, δείξτε ότι αν $\alpha(x) = x$, τότε

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x) dx.$$

Άσκηση 2 (Παραγωγίσιμη α). Στο $[0, 1]$, θέστε $\alpha(x) = x^2$ και $f(x) = x$.

1. Υπολογίστε $\int_0^1 x d(x^2)$ χρησιμοποιώντας ότι $d(x^2) = 2x dx$.
2. (Προαιρετικό) Υπολογίστε το ίδιο ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη (αν τη γνωρίζετε).

Άσκηση 3 (Βηματική α με ένα άλμα). Έστω $a < c < b$ και

$$\alpha(x) = \begin{cases} 0, & x < c, \\ 1, & x \geq c. \end{cases}$$

1. Υπολογίστε $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ για συνεχές f .
2. Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα σε σχέση με τα 'άλματα' του α .

Άσκηση 4 (Διακριτή X : μέση τιμή ως Stieltjes). Έστω $X \in \{0, 1, 2\}$ με $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ ($p_k \geq 0$, $p_0 + p_1 + p_2 = 1$).

1. Γράψτε τη συνάρτηση κατανομής F .
2. Υπολογίστε $\int_{\mathbb{R}} x dF(x)$ και δείξτε ότι ισούται με $\sum_{k=0}^2 k p_k$.

Άσκηση 5 (Συνεχής X : εκθετική κατανομή). Έστω $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, με

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

1. Υπολογίστε $\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x dF(x)$.
2. Δείξτε ότι αυτό συμπίπτει με $\int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$.

Άσκηση 6. Δώστε τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος και διαπιστώστε ότι μοιάζει με το Riemann-Stieltjes ολοκλήρωμα. Καταγράψτε τις βασικές του ιδιότητες και εξηγήστε σε τι διαφέρει με το Riemann-Stieltjes.

Θέμα 2. Εφαρμογή της Φόρμουλας του Ιτο

Υπενθύμιση: Τύπος Itô (1Δ)

Έστω $(W_t)_{t \geq 0}$ τυπική κίνηση Brown και διαδικασία X_t που ικανοποιεί την SDE

$$dX_t = b(t, X_t) dt + a(t, X_t) dW_t.$$

Για $f \in C^{1,2}$ ισχύει:

$$df(t, X_t) = \left(f_t(t, X_t) + b(t, X_t) f_x(t, X_t) + \frac{1}{2} a^2(t, X_t) f_{xx}(t, X_t) \right) dt + a(t, X_t) f_x(t, X_t) dW_t.$$

Ασκήσεις

Άσκηση 7 (Ιδιότητες Δεσμευμένης Μέσης τιμής). Συγκεντρώστε τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής μαζί με τις αντίστοιχες ονομασίες τους σε ένα πίνακα.

Άσκηση 8 (Βασικό πολυώνυμο – μαρτινγκέλ). Θέσε $X_t = W_t$.

1. Εφάρμοσε Itô στη $f(x) = x^2$ και βρες $d(W_t^2)$.
2. Δείξε ότι $M_t := W_t^2 - t$ είναι μαρτινγκέλ.

Άσκηση 9 (Εκθετικό martingale). Για $\lambda \in \mathbb{R}$ θέσε

$$Z_t = \exp\left(\lambda W_t - \frac{1}{2} \lambda^2 t\right).$$

1. Εφάρμοσε Itô στη $f(t, x) = e^{\lambda x - \frac{1}{2} \lambda^2 t}$.
2. Δείξε ότι $dZ_t = \lambda Z_t dW_t$ και άρα Z_t είναι μαρτινγκέλ.

Άσκηση 10 (Μετασχηματισμός $\log(1 + x^2)$). Θέσε $X_t = \mu t + \sigma W_t$ και $f(x) = \log(1 + x^2)$.

1. Υπολόγισε $f'(x)$, $f''(x)$.
2. Βρες το $df(X_t)$ και ξεχώρισε τον όρο drift και τον όρο διάχυσης.

Άσκηση 11 (Γεωμετρική Brown (GBM) και λογαριθμισμός). Έστω $S_t > 0$ και

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 > 0.$$

1. Με Itô στη $f(x) = \ln x$, βρες $d(\ln S_t)$.
2. Λύσε την SDE και δώσε κλειστή μορφή του S_t .

Άσκηση 12 (Ornstein--Uhlenbeck: «έξυπνος» μετασχηματισμός). Έστω

$$dX_t = \theta(\alpha - X_t) dt + \sigma dW_t, \quad \theta > 0.$$

1. Εφάρμοσε Itô στη $f(t, x) = e^{\theta t} x$.
2. Ολοκλήρωσε και βρες ρητή μορφή του X_t .

Άσκηση 13 (CIR και μετασχηματισμός $Y_t = \sqrt{X_t}$). Έστω $X_t \geq 0$ και

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t) dt + \sigma\sqrt{X_t} dW_t.$$

Θέσε $Y_t = \sqrt{X_t}$ (όπου $X_t > 0$).

1. Εφαρμοσε Itô στη $f(x) = \sqrt{x}$ και βρες SDE για Y_t .
2. Εξήγησε ποιος όρος εμφανίζεται λόγω του f'' .

Άσκηση 14 (Χρονικά εξαρτώμενη $f(t, x)$). Θέσε $X_t = W_t$ και $f(t, x) = t^2 \sin x$. Βρες το $df(t, W_t)$ και ξεχώρισε drift/diffusion.

Μέρος Β

Αποτίμηση Συμβολαίων και θεωρία Black-Scholes

Άσκηση 15 (Εκτίμηση παραμέτρων GBM από πραγματικά δεδομένα μετοχής (Yahoo Finance)). Διαλέξτε **μία** μετοχή (ticker) από το Yahoo Finance και κατεβάστε **πραγματικά ημερήσια δεδομένα** (Adj Close κατά προτίμηση) για χρονικό διάστημα **τουλάχιστον 1 έτους**.

Θεωρήστε ότι η τιμή S_t ακολουθεί **γεωμετρική κίνηση Brown (GBM)**:

$$dS_t = m S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_t > 0.$$

1. Περιγράψτε τη διαδικασία λήψης δεδομένων (ticker, διάστημα ημερομηνιών, συχνότητα, χρήση Adj Close).
2. Ορίστε τις **λογαριθμικές αποδόσεις** (log-returns)

$$r_i = \ln\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right),$$

όπου S_{t_i} οι διαδοχικές τιμές Adj Close. Εξηγήστε γιατί οι log-returns είναι φυσικές στο πλαίσιο του GBM.

3. Θέστε Δt ως το χρονικό βήμα σε **έτη**. Για ημερήσια δεδομένα μπορείτε να πάρετε

$$\Delta t = \frac{1}{252}$$

(περίπου 252 ημέρες διαπραγμάτευσης ανά έτος).

4. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι υπό GBM ισχύει

$$r_i \sim \mathcal{N}\left(\left(m - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \sigma^2\Delta t\right),$$

να εκτιμήσετε τις παραμέτρους m και σ από το δείγμα $\{r_i\}$.

5. Δώστε καθαρά τους εκτιμητές που χρησιμοποιήσατε. Ενδεικτικά, αν \bar{r} είναι ο δειγματικός μέσος των r_i και s_r^2 η (αμερόληπτη ή μη) δειγματική διασπορά των r_i , τότε μια τυπική επιλογή είναι:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{s_r^2}{\Delta t}, \quad \hat{m} = \frac{\bar{r}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2.$$

(Να διευκρινίσετε ποιον ορισμό διασποράς χρησιμοποιείτε και γιατί.)

6. Παρουσιάστε τα αριθμητικά αποτελέσματα $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ (σε ετήσια βάση) και σχολιάστε:

- πώς επηρεάζουν οι επιλογές *Close vs Adj Close*,
- πώς επηρεάζει η επιλογή Δt (π.χ. 252 έναντι 365),
- ποια είναι η ερμηνεία του μ (ιστορικός drift) και της σ (ιστορική μεταβλητότητα).

(Προαιρετικό): Κάντε ένα histogram/Q-Q plot των r_i και σχολιάστε αν η κανονικότητα είναι ρεαλιστική για το δείγμα σας.

Άσκηση 16 (Εφαρμογή Black--Scholes: τιμολόγηση call/put και put--call parity). Έστω ότι η τιμή της μετοχής S_t (κάτω από το ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο μέτρο) ικανοποιεί

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

όπου r το σταθερό επιτόκιο χωρίς κίνδυνο και $\sigma > 0$ η μεταβλητότητα. Έστω επίσης λήξη $T > 0$, τρέχουσα τιμή $S_0 > 0$, και strike $K > 0$. (Υποθέτουμε μηδενικά μερίσματα.)

1. **Τιμή Ευρωπαϊκού Call.** Χρησιμοποιώντας τον τύπο Black--Scholes, δείξτε ότι η αξία του Ευρωπαϊκού call

$$C_0 = BSCall(S_0, K, r, \sigma, T)$$

δίνεται από

$$C_0 = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2),$$

όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της $\mathcal{N}(0, 1)$ και

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

2. **Τιμή Ευρωπαϊκού Put.** Αντίστοιχα, δείξτε ότι η αξία του Ευρωπαϊκού put

$$P_0 = BSPut(S_0, K, r, \sigma, T)$$

δίνεται από

$$P_0 = Ke^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1),$$

με τα ίδια d_1, d_2 .

3. **Put--Call Parity.** Αποδείξτε ότι οι παραπάνω τιμές ικανοποιούν την put--call parity:

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}.$$

4. **(Προαιρετικό) Αριθμητική εφαρμογή.** Επιλέξτε τιμές S_0, K, r, σ, T και υπολογίστε C_0, P_0 . Ελέγξτε αριθμητικά ότι $C_0 - P_0$ και $S_0 - Ke^{-rT}$ συμπίπτουν (μέχρι σφάλμα στρογγυλοποίησης).

Άσκηση 17 (Ιστορική μεταβλητότητα vs. implied μεταβλητότητα και συνέπεια τιμών μεταξύ strikes). Έστω ότι η υποκείμενη μετοχή (χωρίς μερίσματα) ακολουθεί το Black--Scholes υπό το ουδέτερο μέτρο:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

με σταθερό επιτόκιο r και (σταθερή) μεταβλητότητα σ .

Θεωρούμε δύο ευρωπαϊκά call με την ίδια λήξη T , αλλά διαφορετικά strikes $K_1 \neq K_2$:

$$C_1 = C(S_0, K_1, r, \sigma, T), \quad C_2 = C(S_0, K_2, r, \sigma, T).$$

Υποθέστε ότι:

- για το call με strike K_1 δεν υπάρχει (ακόμη) τιμή αγοράς και το αποτιμάτε με ιστορική μεταβλητότητα $\hat{\sigma}_{\text{hist}}$,
 - για το call με strike K_2 υπάρχει τιμή αγοράς C_2^{mkt} .
1. **Αποτίμηση με ιστορική μεταβλητότητα.** Ορίστε πώς υπολογίζετε $\hat{\sigma}_{\text{hist}}$ από ημερήσια δεδομένα (log-returns, $\Delta t = 1/252$, ετησιοποίηση) και υπολογίστε την "θεωρητική" τιμή

$$C_1^{\text{hist}} := C(S_0, K_1, r, \hat{\sigma}_{\text{hist}}, T).$$

2. **Implied μεταβλητότητα από τιμή αγοράς.** Ορίστε την implied volatility $\hat{\sigma}_{\text{impl}}(K_2)$ ως τη λύση της εξίσωσης

$$C(S_0, K_2, r, \hat{\sigma}_{\text{impl}}(K_2), T) = C_2^{\text{mkt}}.$$

(Να εξηγήσετε γιατί η λύση είναι μοναδική, με βάση ότι η τιμή call είναι αύξουσα ως προς σ .)

3. **Ερώτημα συνέπειας.** Συζητήστε αν η τιμή C_1^{hist} είναι αναγκαστικά συνεπής με την ύπαρξη του C_2^{mkt} . Να απαντήσετε τεκμηριωμένα στα εξής:

(α□) Αν στο Black--Scholes ισχύει $\sigma = \text{σταθερό}$, τι θα περιμένατε για τις implied μεταβλητότητες στα διαφορετικά strikes;

(β□) Στην πράξη παρατηρείται volatility smile/skew. Τι σημαίνει αυτό για τη σχέση $\hat{\sigma}_{\text{hist}}$ και $\hat{\sigma}_{\text{impl}}(K)$;

(γ□) Δείξτε ότι ακόμη και αν $C_1^{\text{hist}} \neq C(S_0, K_1, r, \hat{\sigma}_{\text{impl}}(K_2), T)$, αυτό δεν συνεπάγεται από μόνο του arbitrage: το C_1^{hist} είναι απλώς ένα μοντέλο-quote.

4. **Έλεγχος στατικής μη-αρμπιτράζ μεταξύ strikes (ίδια λήξη).** Αν τελικά το call με strike K_1 αρχίσει να διαπραγματεύεται στην αγορά με τιμή C_1^{mkt} , δείξτε ποιες συνθήκες πρέπει να ισχύουν ώστε να μην υπάρχει στατικό arbitrage ως προς το strike:

(α□) **Μονοτονία:** Αν $K_1 < K_2$, τότε πρέπει να ισχύει $C^{\text{mkt}}(K_1) \geq C^{\text{mkt}}(K_2)$.

(β□) **Κυρτότητα ως προς K:** Για $K_1 < K_2 < K_3$,

$$C^{\text{mkt}}(K_2) \leq \frac{K_3 - K_2}{K_3 - K_1} C^{\text{mkt}}(K_1) + \frac{K_2 - K_1}{K_3 - K_1} C^{\text{mkt}}(K_3).$$

(Ερμηνεύστε την ανισότητα ως απουσία butterfly arbitrage.)

(γ□) **Κάτω/άνω φράγματα:**

$$\max\{S_0 - Ke^{-rT}, 0\} \leq C^{\text{mkt}}(K) \leq S_0.$$

Άσκηση 18 («Φθινό ή ακριβό για εσένα;» Αποτίμηση, σκοπός συναλλαγής και αντιστάθμιση). Έστω ότι για ένα ευρωπαϊκό option (π.χ. call) με λήξη T και strike K υπολογίσατε μια θεωρητική τιμή V_0^{model} (π.χ. με Black--Scholes ή άλλο μοντέλο), ενώ η παρατηρούμενη τιμή στην αγορά είναι V_0^{mkt} .

Στόχος της άσκησης είναι να συζητηθεί πότε μια τιμή είναι ακριβή ή φθινή για εσάς, δηλαδή σε σχέση με το λόγο που θέλετε να αγοράσετε/πουλήσετε το option, και πώς αυτό συνδέεται με την αντιστάθμιση κινδύνου.

1. **Κίνητρο/Στόχος συναλλαγής.** Διαλέξτε *έναν* λόγο για τον οποίο θα αγοράζατε ή θα πουλούσατε το *option*. Ενδεικτικά:

- Αντιστάθμιση (hedging): προστασία ενός ήδη υπάρχοντος χαρτοφυλακίου (π.χ. long stock) από πτώση/άνοδο.
- Κερδοσκοπία (directional bet): άποψη για την κατεύθυνση της μετοχής.
- Διαχείριση ουράς κινδύνου (tail risk): επιδίωξη ασφάλισης έναντι ακραίων γεγονότων.

Περιγράψτε το σενάριο και ποιον κίνδυνο θέλετε να μειώσετε ή ποια άποψη θέλετε να εκφράσετε.

Εξηγήστε γιατί το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο των Black-Scholes δεν είναι εφικτό στην πράξη. Προσπαθήστε να εξηγήσετε ότι η τιμή ενός *option* σχετίζεται με τους τρόπους αντιστάθμισης που πραγματικά μπορούν να υλοποιηθούν και όχι από ένα μοντέλο το οποίο δίνει αυθαίρετη τιμή χωρίς να εξηγεί τον τρόπο με τον οποίο μπορείτε (και αν συμφέρει) να χρησιμοποιήσετε το *option* αυτό σε αυτή την τιμή.

2. Θεωρείστε τώρα ένα άλλο *option* με συνάρτηση απολαβής $f(x)$ το οποίο δεν είναι ούτε *call* ούτε *put*. Πώς θα χρησιμοποιήσετε τη θεωρία των Black-Scholes για την αποτίμηση αυτού του συμβολαίου; Ποια παράμετρο σ θα επιλέξετε; Η τιμή που θα δώσει θα είναι συνεπής με τις υπάρχουσες τιμές των διαθέσιμων *options*; Πώς θα είστε σίγουροι ότι η τιμή που θα προκύψει θα είναι *arbitrage-free* όταν στην αγορά υπάρχουν διαθέσιμα *call* και *put options*;

Θεώρημα 1. Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) ένας χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής $F_X(x) = P(X \leq x)$. Τότε, η μέση τιμή της X , ορισμένη μέσω του ολοκληρώματος Lebesgue ως το supremum των μέσων τιμών απλών τυχαίων μεταβλητών, ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes της συνάρτησης κατανομής. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} & \sup \{E[Y] : Y \text{ απλή Τ.Μ.}, 0 \leq Y \leq X\} - \sup \{E[Z] : Z \text{ απλή Τ.Μ.}, 0 \leq Z \leq X^-\} \\ = & \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) \end{aligned}$$

υποθέτοντας ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την ισοδυναμία πρώτα για μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές ($X \geq 0$) και κατόπιν θα επεκτείνουμε το αποτέλεσμα στη γενική περίπτωση.

Περίπτωση 1: $X \geq 0$.

Σύμφωνα με τον ορισμό του ολοκληρώματος Lebesgue, η μέση τιμή ορίζεται ως:

$$E[X] = \sup \{E[Y] : Y \text{ απλή}, 0 \leq Y \leq X\}. \quad (1)$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κατασκευάζουμε την ακολουθία απλών τυχαίων μεταβλητών $(Y_n)_{n \geq 1}$ ως εξής:

$$Y_n(\omega) = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n}\}} + n \mathbb{1}_{\{X(\omega) \geq n\}}. \quad (2)$$

Η ακολουθία αυτή ικανοποιεί τις ιδιότητες $0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq X$ και $Y_n \rightarrow X$ σημειακά καθώς $n \rightarrow \infty$. Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (Monotone Convergence Theorem), έχουμε:

$$E[X] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[Y_n]. \quad (3)$$

Υπολογίζουμε τη μέση τιμή της απλής Y_n :

$$\begin{aligned} E[Y_n] &= \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} P\left(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}\right) + nP(X \geq n) \\ &= \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \left[F_X\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F_X\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] + n[1 - F_X(n)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Το άθροισμα στην παραπάνω εξίσωση αποτελεί ένα άθροισμα Riemann-Stieltjes για το ολοκλήρωμα $\int_0^n x dF_X(x)$, αντιστοιχώντας σε μια διαμέριση του $[0, n]$ με μέγεθος πλέγματος $1/2^n$. Επειδή η συνάρτηση $g(x) = x$ είναι συνεχής και η F_X είναι μονότονη (άρα φραγμένης κύμανσης), το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes υπάρχει και ισούται με το όριο των αθροισμάτων καθώς το βήμα της διαμέρισης τείνει στο μηδέν. Επομένως:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \left[F_X\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F_X\left(\frac{k}{2^n}\right)\right] = \int_0^\infty x dF_X(x). \quad (5)$$

Ομοίως, ο όρος $n[1 - F_X(n)]$ τείνει στο 0 αν η μέση τιμή είναι πεπερασμένη, ή ενσωματώνεται στην απόκλιση του ολοκληρώματος στο άπειρο. Συνεπώς, για $X \geq 0$:

$$E[X] = \int_0^\infty x dF_X(x). \quad (6)$$

Περίπτωση 2: Γενική X .

Για μια γενική τυχαία μεταβλητή, γράφουμε $X = X^+ - X^-$, όπου $X^+ = \max(0, X)$ και $X^- = \max(0, -X)$. Εξ ορισμού Lebesgue:

$$E[X] = E[X^+] - E[X^-]. \quad (7)$$

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της Περίπτωσης 1 στα X^+ και X^- :

$$E[X^+] = \int_0^{\infty} x dF_X(x), \quad (8)$$

$$E[X^-] = \int_{-\infty}^0 (-x) dF_X(x) = - \int_{-\infty}^0 x dF_X(x). \quad (9)$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, προκύπτει:

$$E[X] = \int_0^{\infty} x dF_X(x) + \int_{-\infty}^0 x dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x). \quad (10)$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της ισοδυναμίας των δύο ορισμών. \square

Ισοδυναμία Ορισμού Riemann-Stieltjes με Ειδικές Περιπτώσεις

Στο παρόν κείμενο αποδεικνύουμε ότι ο γενικός ορισμός της μέσης τιμής μέσω του ολοκληρώματος Riemann-Stieltjes ταυτίζεται με τους ειδικούς ορισμούς για διακριτές και απόλυτα συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, συνοδευόμενα από αντίστοιχα παραδείγματα.

Θεώρημα 2 (Διακριτή Τυχαία Μεταβλητή). Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή που λαμβάνει τιμές στο αριθμησιμο σύνολο $\{x_1, x_2, \dots\}$ με πιθανότητες $p_i = P(X = x_i)$. Η μέση τιμή της X ορισμένη μέσω του ολοκληρώματος Riemann-Stieltjes ταυτίζεται με το άθροισμα της διακριτής κατανομής:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) = \sum_i x_i p_i \quad (11)$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής είναι μια βηματική συνάρτηση (step function). Συγκεκριμένα, μπορεί να γραφεί ως:

$$F_X(x) = \sum_i p_i \mathbb{1}_{[x_i, \infty)}(x) \quad (12)$$

Η συνάρτηση F_X είναι συνεχής εκτός από τα σημεία $\{x_i\}$, όπου παρουσιάζει άλματα μεγέθους p_i . Για το ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x)$, όταν η F είναι βηματική συνάρτηση με άλματα στα σημεία x_i μεγέθους $\Delta F(x_i)$, ισχύει η ιδιότητα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) = \sum_i g(x_i) \Delta F(x_i) \quad (13)$$

υποθέτοντας ότι το άθροισμα συγκλίνει απόλυτα. Στην περίπτωσή μας, $g(x) = x$ και το άλμα της συνάρτησης κατανομής στο x_i είναι:

$$\Delta F_X(x_i) = F_X(x_i) - F_X(x_i^-) = P(X \leq x_i) - P(X < x_i) = P(X = x_i) = p_i \quad (14)$$

Επομένως, αντικαθιστώντας στο ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) = \sum_i x_i \cdot p_i \quad (15)$$

Το οποίο είναι ακριβώς ο ορισμός της μέσης τιμής για διακριτή τυχαία μεταβλητή. \square

Παράδειγμα 1. Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή που λαμβάνει τις τιμές $\{1, 2, 3\}$ με πιθανότητες $P(X = 1) = 0.2$, $P(X = 2) = 0.5$ και $P(X = 3) = 0.3$.

- **Κλασικός Ορισμός:**

$$E[X] = \sum x_i p_i = 1(0.2) + 2(0.5) + 3(0.3) = 0.2 + 1.0 + 0.9 = 2.1$$

- **Ορισμός Riemann-Stieltjes:** Η συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ έχει άλματα στα σημεία $x = 1, 2, 3$ με μεγέθη $0.2, 0.5, 0.3$ αντίστοιχα. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως το άθροισμα των γινομένων των σημείων άλματος επί το μέγεθος του άλματος:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) &= 1 \cdot \Delta F_X(1) + 2 \cdot \Delta F_X(2) + 3 \cdot \Delta F_X(3) \\ &= 1(0.2) + 2(0.5) + 3(0.3) = 2.1 \end{aligned}$$

Οι δύο μέθοδοι δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3 (Απόλυτα Συνεχής Τυχαία Μεταβλητή). Έστω X μια απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x)$, τέτοια ώστε $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$. Η μέση τιμή της X ορισμένη μέσω του ολοκληρώματος Riemann-Stieltjes ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα της συνάρτησης πυκνότητας:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (16)$$

Απόδειξη. Επειδή η X είναι απόλυτα συνεχής, η συνάρτηση κατανομής F_X είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού και η παράγωγός της ισούται με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f_X . Δηλαδή:

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x) \quad \text{σχεδόν παντού} \quad (17)$$

Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρώματος Riemann-Stieltjes, αν η F είναι παραγωγίσιμη με συνεχή (ή ολοκληρώσιμη Riemann) παράγωγο f , τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση g :

$$\int_a^b g(x) dF(x) = \int_a^b g(x) F'(x) dx = \int_a^b g(x) f(x) dx \quad (18)$$

Εφαρμόζοντας αυτό για $g(x) = x$ και παίρνοντας τα όρια $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$, έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{dF_X(x)}{dx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (19)$$

Το οποίο είναι ο καθιερωμένος ορισμός της μέσης τιμής για συνεχή τυχαία μεταβλητή. \square

Παράδειγμα 2. Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την Ομοιόμορφη Κατανομή στο διάστημα $[0, 1]$, δηλαδή $X \sim U(0, 1)$.

- **Συνάρτηση Πυκνότητας:** $f_X(x) = 1$ για $x \in [0, 1]$ και 0 αλλού.
- **Συνάρτηση Κατανομής:** $F_X(x) = x$ για $x \in [0, 1]$.

- **Κλασικός Ορισμός:**

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 1 dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

- **Ορισμός Riemann-Stieltjes:** Επειδή $F_X(x) = x$ στο διάστημα ολοκλήρωσης, το διαφορικό $dF_X(x)$ ταυτίζεται με το dx .

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x) = \int_0^1 x d(x) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

Και στις δύο περιπτώσεις η μέση τιμή είναι 0.5.