Δεύτερο Φυλλάδιο Εργασίας
Στοχαστικές Διαδικασίες Εαρινό Εξάμηνο 2018-2019
Διδάσκων: Νίκος Χαλιδιάς

Μια μορφή στοιχειώδη πίνακα είναι όταν εναλλάξουμε δυο γραμμές του μοναδιαίου πίνακα, δηλαδή $r_i \leftrightarrow r_j$, οπότε προκύπτει ο επόμενος πίνακας,

$$H_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & \underbrace{1}_{i \text{ γραμμή } j \text{ στήλη}} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \underbrace{1}_{j \text{ γραμμή } i \text{ στήλη}} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ο στοιχειώδης αυτός πίνακας είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του είναι ο ίδιος ο πίνακας. Το γινόμενο $H_{ij} \cdot A$ θα έχει ως αποτέλεσμα να εναλλαχθούν οι γραμμές r_i και r_j του πίνακα A. Αντίστοιχα, το γινόμενο $A \cdot H_{ij}$ θα έχει ως αποτέλεσμα να εναλλαχθούν οι αντίστοιχες στήλες του A. Σε μια τέτοια περίπτωση (όταν δηλαδή εναλλάξουμε δυο γραμμές αλλά και τις αντίστοιχες στήλες του πίνακα A) θα προκύψει ένας νέος πίνακας $B = H_{ij} A H_{ij}^{-1}$ ο οποίος θα είναι όμοιος με τον A. Συνεπώς θα έχει και τις ίδιες ιδιοτιμές με την ίδια πολλαπλότητα. Αυτό μπορεί να είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στον υπολογισμό ιδιοτιμών ενός πίνακα. Θα το εφαρμόσετε στο πρώτο θέμα παρακάτω.

(Πρώτο Θέμα) Έστω X_n Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και πίνακα μετάβασης τον παρακάτω

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.9 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Υπάρχουν κλειστά υποσύνολα καταστάσεων; Μεταβατικές καταστάσεις; Μπορείτε να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του πίνακα; (Υπόδειξη: Αναδιατάξτε κατάλληλα τις καταστάσεις έτσι ώστε ο πίνακας μετάβασης να είναι σε μορφή κάτω τριγωνικού με Blocks. Μπορεί αυτό να βοηθήσει στον υπολογισμό των ιδιοτιμών; Αν ναι αποδείξτε το.)

(Δεύτερο Θέμα) Έστω X_n Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα μετάβασης τον παρακάτω

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Ποιες από τις καταστάσεις είναι μεταβατικές και ποιες απορροφητικές; Αφού υπολογίσετε τον B^n δείτε ποιες από τις πιθανότητες που απεικονίζει η νιοστή δύναμη του B συγκλίνουν στο μηδέν. Αυτό μπορούσαμε να το γνωρίζαμε εκ των προτέρων, χωρίς δηλαδή την εύρεση της νιοστής δύναμης του πίνακα; Ποιο θεώρημα μας δίνει την πληροφορία αυτή;

(Τρίτο Θέμα) Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με $S = \{1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα μετάβασης,

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Ποιες καταστάσεις είναι επαναληπτικές και ποιες μεταβατικές; Εξηγήστε πλήρως τις απαντήσεις σας. Μπορείτε να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές του πίνακα; Με ποιον τρόπο είναι βολικότερο;

(Τέταρτο Θέμα) Ένας κομήτης περιφέρεται γύρω από τον ήλιο. Σε κάθε περιστροφή η πιθανότητα να πλησιάσει την Γη και να περιφέρεται γύρω από από αυτή είναι 0.01 ενώ η πιθανότητα να παραμείνει σε τροχιά γύρω από τον ήλιο είναι 0.99. Αν μπει σε τροχιά γύρω από την Γη, η πιθανότητα να πέσει σε αυτή είναι 0.01 και η πιθανότητα να παραμείνει σε τροχιά είναι 0.99. Περιγράψτε το φαινόμενο ως μια Μαρκοβιανή αλυσίδα τριών καταστάσεων. Στην συνέχεια υπολογίστε πόσες περιστροφές γύρω από τον ήλιο απαιτούνται έτσι ώστε η πιθανότητα να παραμείνει μακριά από την Γη γίνει μικρότερη του 10^-6.