Λυμένες ασκήσεις στον υπολογισμό οριακών πιθανοτήτων

Άσκηση 1 Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το $S = \{1, 2, 3\}$ και πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της αλυσίδας, δηλαδή τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Ένας τρόπος προφανώς είναι να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα και στην συνέχεια να υπολογίσουμε ένα-ένα τα όρια ξεχωριστά. Ο συγκεκριμένος όμως πίνακας έχει δυο (συζυγείς) μιγαδικές ρίζες και έτσι ο υπολογισμός της νιοστής δύναμης είναι λίγο πιο περίπλοκος.

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 1213 του βιβλίου για τον υπολογισμό των οριακών πιθανοτήτων. Το πρώτο που θα πρέπει να κάνουμε είναι να δούμε αν τυχόν η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, αν έχει μεταβατικές καταστάσεις, ποιες καταστάσεις επικοινωνούν με ποιες, περιοδικότητα κ.τ.λ.

Διαπιστώνουμε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και απεριοδική και όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές (δες παρατήρηση 1150 και θεώρημα 1152). Σύμφωνα με το θεώρημα 1213 θα ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j}$$

όπου m_j ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης j. Για να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο επαναφοράς θα χρησιμοποιήσουμε το πόρισμα 1232. Θα υπολογίσουμε δηλαδή την στάσιμη κατανομή, αν υπάρχει. Στην περίπτωση που υπάρχει τότε $m_j = \frac{1}{\pi_j}$ ενώ αν δεν υπάρχει θεωρούμε ότι $m_j = \infty$ και επομένως οι αντίστοιχες οριακές πιθανότητες θα είναι μηδέν.

Για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \pi P &= \pi \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις έχουμε

$$\pi_1 = \frac{1}{7}, \quad \pi_2 = \frac{3}{7}, \quad \pi_3 = \frac{3}{7}$$

Επομένως ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty = \begin{bmatrix} 1/7 & 3/7 & 3/7 \\ 1/7 & 3/7 & 3/7 \\ 1/7 & 3/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Συγκρίνετε το με το παράδειγμα 1136 του βιβλίου. $\square$

***Άσκηση* 2** Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3\}$ και πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι το $C = \{1, 2\}$ είναι κλειστό, αδιαχώριστο και απεριοδικό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων ενώ η κατάσταση 3 είναι μεταβατική. Σύμφωνα με το θεώρημα 1213 θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{i3} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Επομένως πρέπει να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{ij}, \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2$$

Εφόσον οι καταστάσεις $1, 2$ συνεπικοινωνούν τότε σύμφωνα με το θεώρημα 1213 θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{ij} = \frac{1}{m_j}, \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2$$

ενώ

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{3j} = \frac{h^j_3}{m_j}, \quad j = 1, 2$$

Λόγω της παρατήρησης 1190 θα ισχύει ότι $h_3^j = h_3^C$ για $j = 1, 2$ και λόγω του πορίσματος 1198 θα ισχύει ότι $h_3^j = h_3^C = 1$ για $j = 1, 2$. Άρα τελικά μένει να βρούμε μόνο τους μέσους χρόνους επαναφοράς m_1, m_2. Για να το κάνουμε αυτό θα εργαστούμε στην υποαλυσίδα με χώρο καταστάσεων το $C = \{1, 2\}$ και πίνακα μετάβασης τον αρχικό εάν όμως διαγράψουμε την γραμμή και στήλη που ανήκει η κατάσταση 3. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον υποπίνακα, τον συμβολίζουμε με A, θα υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \pi A &= \pi \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα θα έχουμε

$$\pi_1 = \frac{2}{5}, \quad \pi_2 = \frac{3}{5}$$

επομένως $m_1 = \frac{5}{2}$ και $m_2 = \frac{5}{3}$. Τελικά θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Άσκηση 3 Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν δυο κλειστά και αδιαχώριστα σύνολα επαναληπτικών καταστάσεων, τα $C_1 = \{1, 2\}$ και $C_2 = \{3, 4\}$ τα οποία είναι και απεριοδικά. Η κατάσταση 5 είναι μεταβατική. Σύμφωνα με το θεώρημα 1213 θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{i5}^n = 0, \quad i = 1, \cdots, 5$$

Εφόσον οι καταστάσεις 1 και 2 συνεπικοινωνούν θα έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2$$

Παρόμοια για τις 3 και 4 θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j}, \quad i = 3, 4, \quad j = 3, 4$$

Για τις οριακές πιθανότητες

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n, \quad i = 3, 4 \quad j = 1, 2$$

θα ισχύει ότι είναι μηδέν αφού $h_i^j = 0$ όταν $i = 3, 4$ και $j = 1, 2$. Παρόμοια για τις πιθανότητες

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n, \quad i = 1, 2 \quad j = 3, 4$$

θα είναι επίσης μηδέν.

Για τις οριακές πιθανότητες της γραμμής 5 θα ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} P_{5j}^n = \frac{h_5^j}{m_j}, \quad j = 1, \cdots, 5$$

Λόγω της παρατήρησης 1190 θα ισχύει ότι

$$h_5^1 = h_5^2 = h_5^{C_1}, \quad h_5^3 = h_5^4 = h_5^{C_2}$$

Δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{0}{m_1} & \frac{0}{m_2} & \frac{1}{m_3} & \frac{1}{m_4} & 0 \\ \frac{0}{m_1} & \frac{0}{m_2} & \frac{1}{m_3} & \frac{1}{m_4} & 0 \\ \frac{h_5^{C_1}}{m_1} & \frac{h_5^{C_1}}{m_2} & \frac{h_5^{C_2}}{m_3} & \frac{h_5^{C_2}}{m_4} & 0 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, πρέπει να υπολογίσουμε τα m_1, m_2, m_3, m_4, $h_5^{C_1}$ και $h_5^{C_2}$. Για να υπολογίσουμε τα m_1 και m_2 θα υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή της υποαλυσίδας με χώρο καταστάσεων το C_1 και πίνακα μετάβασης τον οποίο συμβολίζουμε με A ο οποίος προέρχεται από τον αρχικό διαγράφοντας τις γραμμές 3,4,5 και τις αντίστοιχες στήλες. Η στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ θα ικανοποιεί

$$\begin{aligned} \pi A &= \pi \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι

$$\pi_1 = \frac{2}{5}, \quad \pi_2 = \frac{3}{5}$$

Επομένως $m_1 = \frac{5}{2}$ και $m_2 = \frac{5}{3}$.

Για να υπολογίσουμε τους m_3 και m_4 θα εργαστούμε στην υποαλυσίδα με χώρο καταστάσεων το C_2 και πίνακα μετάβασης τον αρχικό διαγράφοντας τις στήλες 1,2,5 και τις αντίστοιχες γραμμές τον οποίο συμβολίζουμε με B. Για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_3, \pi_4)$ θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \pi B &= \pi \\ \pi_3 + \pi_4 &= 1 \end{aligned}$$

Η λύση είναι

$$\pi_3 = \frac{3}{11}, \quad \pi_4 = \frac{8}{11}$$

Επομένως $m_3 = \frac{11}{3}$ και $m_4 = \frac{11}{8}$.

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες $h_5^{C_1}$ και $h_5^{C_2}$. Λύνοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις σύμφωνα με το θεώρημα 1189 προκύπτει ότι $h_5^{C_1} = h_5^{C_2} = 0.5$. Τελικά θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/11 & \frac{8}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 3/11 & \frac{8}{11} & 0 \\ 1/5 & 3/10 & \frac{3}{22} & 4/11 & 0 \end{bmatrix}$$

Σημειώστε ότι ο οριακός πίνακας P^∞ είναι στοχαστικός (δείτε και την πρόταση 1218 του βιβλίου). $\square$

Άσκηση 4 Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Στην αλυσίδα αυτή έχουμε ένα κλειστό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων, το $C = \{1, 2, 3\}$ το οποίο όμως είναι περιοδικό με περίοδο 2. Η κατάσταση 4 είναι μεταβατική. Άρα οι οριακές πιθανότητες της τέταρτης στήλης θα είναι

$$\lim_{n\to\infty} P_{i4}^n = 0, \quad i = 1, \cdots, 4$$

Εφόσον οι καταστάσεις 1,2,3 είναι περιοδικές με περίοδο 2 δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 1213 στην αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον P. Για την περίπτωση αυτή θα ακολουθήσουμε την μεθοδολογία της παραγράφου 7.14.5 του βιβλίου. Θα εργαστούμε στην αλυσίδα Y_n με πίνακα μετάβασης τον P^2, δηλαδή

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{48} & \frac{11}{48} & \frac{9}{16} & 1/16 \end{bmatrix}$$

Στην αλυσίδα Y_n οι καταστάσεις $1, 2$ ορίζουν ένα κλειστό, αδιαχώριστο και απεριοδικό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων το οποίο συμβολίζουμε με $C_1 = \{1, 2\}$, η κατάσταση 3 είναι απορροφητική και η 4 μεταβατική. Θα υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της αλυσίδας Y_n σύμφωνα με το θεώρημα 1213. Θα έχουμε

$$P^{2\infty} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ \frac{0}{m_1} & \frac{0}{m_2} & \frac{1}{m_3} & 0 \\ \frac{h_4^{C_1}}{m_1} & \frac{h_4^{C_1}}{m_2} & \frac{h_4^3}{m_3} & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή η 3 είναι απορροφητική έπεται ότι $m_3 = 1$. Υπολογίζουμε όπως σε προηγούμενη άσκηση τους m_1 και m_2 μέσω της στάσιμης κατανομής στην υποαλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον αρχικό διαγράφοντας τις στήλες 3,4 και τις αντίστοιχες γραμμές. Προκύπτει ότι $m_1 = 3$ και $m_2 = \frac{3}{2}$. Στην συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε την h_4^3. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 1189 προκύπτει ότι $h_4^3 = \frac{3}{5}$ και επομένως θα ισχύει ότι $h_4^{C_1} = \frac{2}{5}$ (δες πόρισμα 1198). Τελικά θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P^{2n} = P^{2\infty} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/15 & \frac{4}{15} & 3/5 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{n\to\infty} P^{2n+1} = P^{2\infty+1} = P^{2\infty} \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Παρατηρηση 1 *Για την περίπτωση αλυσίδας με δυο κλειστά και περιοδικά σύνολα με διαφορετικές περιόδους και κάποιες μεταβατικές καταστάσεις μπορεί να δει κανείς το παράδειγμα 1240 του βιβλίου.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **2** *Θα εξετάσουμε την αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το* $S = \{0, 1, 2, \cdots, \}$ *και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι αποτελείται από ένα κλειστό σύνολο επαναληπτικών και απεριοδικών καταστάσεων, το $A = \{0, 1\}$. *Οι καταστάσεις* $T = \{2, 3, \cdots, \}$ *συνεπικοινωνούν και είναι μεταβατικές. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της αλυσίδας. Οι οριακές πιθανότητες που βρίσκονται στις στήλες* $2, 3, \cdots$, *είναι μηδέν διότι οι αντίστοιχες καταστάσεις είναι μεταβατικές. Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες* $P_{00}^{\infty}, P_{01}^{\infty}, P_{10}^{\infty}, P_{11}^{\infty}$ *θα εργαστούμε στον πεπερασμένο υποπίνακα που προκύπτει από τον αρχικό διαγράφοντας τις γραμμές και στήλες που ανήκουν οι καταστάσεις* $2, 3, \cdots,$. *Υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή η οποία είναι η* $\pi_0 = 0.4$ *και* $\pi_1 = 0.6$. *Άρα*

$$P_{00}^{\infty} = P_{10}^{\infty} = 0.4$$
$$P_{01}^{\infty} = P_{11}^{\infty} = 0.6$$

Επομένως μένει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες P_{i0}^{∞} *και* P_{i1}^{∞} *για* $i = 2, 3, \cdots$, *Θα έχουμε λοιπόν*

$$\begin{aligned} P_{i0}^{\infty} &= \frac{h_i^{\{0\}}}{m_0}, \quad i = 2, 3, \cdots, \\ P_{i1}^{\infty} &= \frac{h_i^{\{1\}}}{m_1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

όπου $m_0 = \frac{1}{\pi_0} = \frac{5}{2}$ *και* $m_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{5}{3}$. *Λόγω της παρατήρησης 1190 προκύπτει ότι* $h_i^{\{0\}} = h_i^A$ *και* $h_i^{\{1\}} = h_i^A$ *όπου* $A = \{0, 1\}$.

Αν θεωρήσουμε την ισοδύναμη αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το $\{A, 2, 3, \cdots, \}$ *και πίνακα μετάβασης τον πίνακα μετάβασης του παραδείγματος 1196 διαπιστώνουμε ότι*

$$h_i^A = \begin{cases} 1, & \text{όταν } q \geq p \\ \left(\frac{q}{p}\right)^i, & \text{όταν } q < p \end{cases}$$

Τελικά οι οριακές πιθανότητες θα είναι

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{h_2^A}{m_0} & \frac{h_2^A}{m_1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{h_3^A}{m_0} & \frac{h_3^A}{m_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση $q < p$ το άθροισμα γραμμών είναι αυστηρά μικρότερο της μονάδας, εκτός από τις πρώτες δυο γραμμές που είναι ίσο με 1. Ας θυμηθούμε ότι ο πίνακας με τις οριακές πιθανότητες είναι στοχαστικός αν η αλυσίδα είναι πεπερασμένη (δείτε πρόταση 1218). Δεν συμβαίνει το ίδιο όμως για αλυσίδες με άπειρες καταστάσεις και ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το παραπάνω όταν $q < p$. $\square$