ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ SIMPLEX - Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΥΟ ΦΑΣΕΩΝ

1. ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

Εκτός από την γραφική μέθοδο επίλυσης π.γ.π. που εξετάσαμε, η συνηθέστερη μέθοδος αριθμητικής επίλυσης π.γ.π. είναι η μέθοδος ή αλγόριθμος Simplex. Η μέθοδος αυτή προφανώς εφαρμόζεται και σε προβλήματα με περισσότερες από δύο μεταβλητές απόφασης (όπου η γραφική μέθοδος δε μπορεί να εφαρμοστεί).

Για να λύσουμε ένα π.γ.π. με τον αλγόριθμο Simplex αυτό θα πρέπει να βρίσκεται στην ***κανονική*** ή ***τυπική*** μορφή του δηλ.

1) όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές,

2) η αντικειμενική συνάρτηση θα πρέπει να μεγιστοποιείται (οπότε προβλήματα ελαχιστοποίησης θα πρέπει να μετατρέπονται σε προβλήματα μεγιστοποίησης),

3) όλοι οι περιορισμοί, εκτός των περιορισμών μη αρνητικότητας, θα πρέπει να εκφράζονται με εξισώσεις τα δεξιά μέλη των οποίων είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Για τον λόγο αυτόν σε περιορισμούς της μορφής $\leq$ θα προσθέτουμε μη αρνητικές ***χαλαρές*** ή ***ελλειματικές*** ή ***περιθώριες*** μεταβλητές και σε περιορισμούς της μορφής $\geq$ θα αφαιρούμε μη αρνητικές ***πλεονασματικές*** μεταβλητές, προκειμένου να τους μετατρέπουμε σε ισότητες. Οι χαλαρές ή/και οι πλεονασματικές αυτές μεταβλητές θα εμφανίζονται και στην αντικειμενική συνάρτηση με μηδενικούς όμως συντελεστές. Επιπλέον αν το δεξί μέλος ενός περιορισμού είναι αρνητικός αριθμός τότε πολλαπλασιάζουμε επί (-1), οπότε και αλλάζει η φορά της ανίσωσης, πριν κάνουμε τη μετατροπή σε ισότητα. Το ίδιο κάνουμε και αν κάποια μεταβλητή είναι αρνητική. Αν δεν γνωρίζουμε

το πρόσημο κάποιας μεταβλητής x_i τότε θέτουμε $x_i = x_i' - x_i'', x_i', x_i'' \geq 0$.

Π.χ. το π.γ.π.

$$\begin{gathered}\max(-2x_1 + 3x_2) \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \geq 30 \\ x_1 \geq 0\end{gathered}$$

με την αντικατάσταση $x_2 = x_2' - x_2''$ γράφεται ως εξής

$$\begin{gathered}\max(-2x_1 + 3x_2' - 3x_2'') \\ 2x_1 + x_2' - x_2'' \leq 10 \\ x_1 + 2x_2' - 2x_2'' \geq 30 \\ x_1, x_2', x_2'' \geq 0\end{gathered}.$$

Ουσιαστικά η περιθώρια μεταβλητή x_i (της i-εξίσωσης) αντιστοιχεί στην ποσότητα του πόρου i του προβλήματος που υπολείπεται μέχρι το μέγιστο ή άνω όριό του, ενώ η πλεονασματική μεταβλητή x_i αντιστοιχεί στην ποσότητα του πόρου i που υπερβαίνει το ελάχιστο ή κάτω όριό του.

Με βάση τα παραπάνω η κανονική ή τυπική μορφή ενός π.γ.π. είναι η ακόλουθη

$$\begin{gathered}\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m\end{gathered}$$

$x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $b_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$, ή σε μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m12} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $b_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Όπως βλέπουμε η μορφή αυτή περιλαμβάνει m εξισώσεις με n αγνώστους όπου $m < n$. Η λογική της μεθόδου είναι να θέτουμε τις $n - m$ μεταβλητές (που επιλέγονται με συγκεκριμένο τρόπο κάθε φορά) ίσες με 0 και να προσδιορίζουμε τις τιμές των υπολοίπων m μεταβλητών (λύνοντας ουσιαστικά ένα $m \times m$ γραμμικό σύστημα). Αν οι m εξισώσεις δίνουν μια μοναδική λύση, με μη αρνητικές συνιστώσες, τότε η λύση αυτή λέγεται βασική εφικτή λύση και οι m μεταβλητές ***βασικές*** μεταβλητές. Οι υπόλοιπες $n-m$ μηδενικές μεταβλητές είναι οι ***μη βασικές*** μεταβλητές. Οι βασικές εφικτές λύσεις αντιστοιχούν σε ακραία σημεία (κορυφές στις 2 διαστάσεις) της εφικτής περιοχής του προβλήματος. Η βασική εφικτή λύση η οποία μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση είναι η ***βέλτιστη*** ή ***άριστη*** λύση. Ο αλγόριθμος Simplex αρχίζει από μια βασική εφικτή λύση και μετά βρίσκει την επόμενη βασική εφικτή λύση που βελτιώνει την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι να βρεθεί η βέλτιστη λύση. Δεν διατρέχονται απαραίτητα όλες οι κορυφές. Επειδή κάθε βασική εφικτή λύση έχει m βασικές και $n-m$ μη βασικές μεταβλητές, η εύρεση της επόμενης βασικής εφικτής λύσης, βάσει της προηγούμενης, συνεπάγεται τη μετατροπή μιας μη βασικής μεταβλητής σε βασική, κάθε φορά, η οποία ονομάζεται ***εισερχόμενη*** μεταβλητή και η τιμή της αυξάνεται από τη μηδενική. Ταυτόχρονα μια βασική μεταβλητή μετατρέπεται σε μη βασική και ονομάζεται ***εξερχόμενη*** μεταβλητή. Η τιμή της τότε μηδενίζεται.

2. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Πρδγ. 1 Το πρόβλημα παραγωγής τσαντών της Par έχει την εξής διατύπωση

$$\begin{gathered}
\max z = 10S + 9D \\
\frac{7}{10}S + D \leq 630 \\
\frac{1}{2}S + \frac{5}{6}D \leq 600 \\
S + \frac{2}{3}D \leq 708 \\
\frac{1}{10}S + \frac{1}{4}D \leq 135 \\
S, D \geq 0
\end{gathered}$$

Τα βήματα της μεθόδου Simplex είναι τα ακόλουθα

Βήμα 1

Γράφουμε το πρόβλημα στην τυπική του μορφή

$$\max z = 10S + 9D + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$$

$$\frac{7}{10}S + D + S_1 = 630$$

$$\frac{1}{2}S + \frac{5}{6}D + S_2 = 600$$

$$S + \frac{2}{3}D + S_3 = 708$$

$$\frac{1}{10}S + \frac{1}{4}D + S_4 = 135$$

$$S, D, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0.$$

Παρατηρούμε ότι επειδή όλοι οι περιορισμοί είναι της μορφής $\leq$ προσθέτουμε χαλαρές μεταβλητές προκειμένου να τους μετατρέψουμε σε ισότητες. Ουσιαστικά οι χαλαρές μεταβλητές αντιστοιχούν στις αχρησιμοποίητες ώρες σε κάθε στάδιο της παραγωγής.

Το πρόβλημα, σε μορφή πινάκων, γράφεται τώρα ως εξής

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ D \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 630 \\ 600 \\ 708 \\ 135 \end{pmatrix}$$

Βήμα 2

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν $m = 4$ εξισώσεις και $n = 6$ μεταβλητές. Αν θέσουμε τις τιμές των $n - m = 6 - 4 = 2$ μεταβλητών ίσες με 0, μπορούμε να προσδιορίσουμε μια αρχική βασική εφικτή λύση με τις 4 υπόλοιπες μεταβλητές της μη αρνητικές. Ποιές όμως μεταβλητές θα μηδενίσουμε πρώτα; Μηδενίζουμε τις αρχικές μεταβλητές δεδομένου ότι δεν αντιστοιχούν σε στήλες μοναδιαίου 4×4 υποπίνακα. Θέτουμε $S = D = 0$ απ' όπου προκύπτει η λύση: $(S, D, S_1, S_2, S_3, S_4) = (0, 0, 630, 600, 708, 135)$ (η ερμηνεία αυτού είναι ότι αν δεν παραχθεί καμία τσάντα, τότε όλες οι διαθέσιμες ώρες παραγωγής, για κάθε στάδιο, θα μείνουν αχρησιμοποίητες). Η λύση αυτή μας δίνει τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $z = 0$. Αυτό είναι αναμενόμενο από τη στιγμή που δεν παράγεται και άρα δεν πωλείται τίποτα. Οι S, D είναι οι μη βασικές μεταβλητές, ενώ οι S_1, S_2, S_3, S_4 είναι οι βασικές μεταβλητές. Φτιάχνουμε τώρα τον αρχικό πίνακα ή tableau Simplex ως εξής:

1) η πρώτη στήλη περιλαμβάνει τις βασικές μεταβλητές S_1, S_2, S_3, S_4,

2) οι στήλες $2 - 7$ περιλαμβάνουν τους συντελεστές όλων των μεταβλητών (βασικών και μη) σε κάθε εξίσωση,

3) η τελευταία στήλη περιλαμβάνει τις συνιστώσες της αρχικής βασικής εφικτής λύσης (οι βασικές μεταβλητές περιέχονται στην πρώτη στήλη),

4) η τελευταία γραμμή ή γραμμή της αντικειμενικής συνάρτησης z περιλαμβάνει τους συντελεστές κάθε μεταβλητής που εμφανίζεται στην έκφρασή της αλλά με ***αντίθετο πρόσημο***,

5) το ακρογωνιαίο στοιχείο του πίνακα (δηλ. το a_{68}) αντιστοιχεί στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης γι' αυτή την βασική εφικτή λύση (εδώ 0). Η λύση αυτή αντιστοιχεί στην κορυφή 1 της εφικτής περιοχής (βλ. γραφική επίλυση). Με βάση τα παραπάνω έχουμε τον

Πίνακας 1

Βασικές μεταβλητές	S	D	S_1	S_2	S_3	S_4	**Λύση**
S_1	$\frac{7}{10}$	1	1	0	0	0	630
S_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	0	1	0	0	600
S_3	1	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	708
S_4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	1	135
z	–10	–9	0	0	0	0	0

Βήμα 3

Όπως προείπαμε η λύση αυτή δεν είναι βέλτιστη αφού δεν παράγεται τίποτα ($S = D = 0$). Άρα πρέπει να συνεχίσουμε την αναζήτηση. Το κριτήριο διακοπής του αλγορίθμου δηλ. το να μην υπάρχει αρνητικός αριθμός στην τελευταία γραμμή του πίνακα δεν ικανοποιείται και συνεπώς ο αλγόριθμος συνεχίζεται. Στην τελευταία γραμμή του πίνακα εντοπίζουμε τον μικρότερο αρνητικό αριθμό (εδώ το -10) που αντιστοιχεί στη μεταβλητή S. Η μεταβλητή S θα γίνει η νέα βασική μεταβλητή δηλ. είναι η εισερχόμενη μεταβλητή (η ερμηνεία της επιλογής της S είναι η εξής: αν αυξηθεί η παραγωγή τσαντών S π.χ. από 0 σε 1, τότε το κέρδος θα αυξηθεί από 0 σε \$ 10, ενώ αν αυξηθεί αντίστοιχα η παραγωγή τσαντών D από 0 σε 1, τότε το κέρδος θα αυξηθεί από 0 σε \$ 9 μόνο ή αλλιώς ο ρυθμός αύξησης του κέρδους ανά παραγόμενο τεμάχιο S είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο ρυθμό αύξησης του κέρδους ανά παραγόμενο τεμάχιο D). Η στήλη της μεταβλητής S ονομάζεται και ***αξονική στήλη*** ή ***στήλη οδηγός***.

Βήμα 4

Το επόμενο ερώτημα είναι το ποιά μεταβλητή θα αφαιρεθεί από τις βασικές μεταβλητές δηλ. θα γίνει εξερχόμενη μεταβλητή, οπότε και θα μηδενισθεί. Στον πίνακα Simplex διαιρούμε κάθε στοιχείο της στήλης Λύση με το αντίστοιχο στοιχείο της αξονικής στήλης S, οπότε προκύπτουν οι λόγοι $\frac{630}{\frac{7}{10}}$, $\frac{600}{\frac{1}{2}}$, $\frac{708}{1}$, $\frac{135}{\frac{1}{10}}$ από τους οποίους επιλέγουμε τον μικρότερο που είναι ο $\frac{708}{1}$ και αντιστοιχεί στη γραμμή της μεταβλητής S_3. (Σημείωση: εξετάζουμε μόνο τα θετικά πηλίκα). Η μεταβλητή S_3 θα γίνει εξερχόμενη (η ερμηνεία της επιλογής της S_3 είναι η εξής: αφού από υπόθεση θα παραχθούν μόνο τσάντες S σύμφωνα με τον 1ο περιορισμό το μέγιστο όριο παραγωγής θα είναι

$$\frac{630 \text{ διαθέσιμες ώρες κοπής και βαφής}}{\frac{7}{10} \text{ ώρες κοπής και βαφής ανά τσάντα } S} = \frac{630}{\frac{7}{10}} = \frac{6300}{7} = 900 \text{ τσάντες } S,$$

σύμφωνα με τον 2ο περιορισμό το μέγιστο όριο παραγωγής θα είναι

$$\frac{600 \text{ διαθέσιμες ώρες ραφής}}{\frac{1}{2} \text{ ώρες ραφής ανά τσάντα } S} = 1200 \text{ τσάντες } S,$$

σύμφωνα με τον 3ο περιορισμό το μέγιστο όριο παραγωγής θα είναι

$$\frac{708 \text{ διαθέσιμες ώρες για φινίρισμα}}{1 \text{ ώρα για φινίρισμα ανά τσάντα } S} = 708 \quad \text{τσάντες } S,$$

και τέλος σύμφωνα με τον 4ο περιορισμό το μέγιστο όριο παραγωγής θα είναι

$$\frac{135 \text{ διαθέσιμες ώρες για έλεγχο και συσκευασία}}{\frac{1}{10} \text{ ώρες για έλεγχο και συσκευασία ανά τσάντα } S} = 1350 \quad \text{τσάντες } S.$$

Επομένως για να ικανοποιούνται ταυτόχρονα όλοι οι περιορισμοί το μέγιστο όριο αύξησης της παραγωγής τσαντών S είναι το $\min(900, 1200, 708, 1350) = 708$ τσάντες, και τότε θα χρησιμοποιηθούν όλες οι διαθέσιμες ώρες για φινίρισμα). Έτσι η S_3 παίρνει την τιμή 0 και τη θέση της παίρνει η μεταβλητή S. Στον πίνακα Simplex η γραμμή που αντιστοιχεί στην εξερχόμενη μεταβλητή S_3 ονομάζεται ***αξονική γραμμή*** ή ***γραμμή οδηγός***. Το σημείο τομής αξονικής γραμμής και αξονικής στήλης ονομάζεται ***αξονικό στοιχείο*** (εδώ το 1).

Βήμα 5

Στο νέο πίνακα Simplex η S θα προστεθεί στη στήλη με τις βασικές μεταβλητές (απ'τον οποίον θα αφαιρεθεί η S_3) και επιπλέον ισχύει ο τύπος

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{νέα αξονική γραμμή} \\ (\text{πρώην γραμμή } S_3 \text{ και νυν γραμμή } S)\end{array} = \frac{\text{παλιά αξονική γραμμή}}{\text{αξονικό στοιχείο}}}.$$

Άρα η καινούργια γραμμή 4 είναι η

$$\left[\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{1} & \frac{\frac{2}{3}}{1} & \frac{0}{1} & \frac{0}{1} & \frac{1}{1} & \frac{0}{1} & \frac{708}{1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 708 \end{array}\right]$$

Ο υπολογισμός των υπολοίπων γραμμών γίνεται με βάση τον τύπο

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{νέα γραμμή} = \text{παλιά γραμμή} - \text{αντίστοιχος συντελεστής} \\ \text{της αξονικής στήλης} \times \text{νέα αξονική γραμμή}\end{array}}$$

οπότε έχουμε

<u>νέα γραμμή S_1</u>

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{10} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 630 \end{bmatrix} (= \text{παλιά γραμμή } S_1)$$

$$-\frac{7}{10}\ (= \text{αντίστοιχο στοιχείο στην αξονική στήλη}) \times$$

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 708 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & \frac{8}{15} & 1 & 0 & -\frac{7}{10} & 0 & \frac{672}{5} \end{bmatrix}}$$

<u>νέα γραμμή S_2</u>

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 0 & 1 & 0 & 0 & 600 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}\times$$

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 708 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 246 \end{bmatrix}}$$

<u>νέα γραμμή S_4</u>

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 135 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{10}\times$$

$$\frac{\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 708 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0 & \frac{11}{60} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 1 & \frac{321}{5} \end{bmatrix}}$$

<u>νέα γραμμή z</u>

$$\begin{bmatrix} -10 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-(-10)\times$$

$$\frac{\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 708\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0 & -\frac{7}{3} & 0 & 0 & 10 & 0 & 7080\end{bmatrix}}$$

(Σημείωση: αυτό που κάνουμε ονομάζεται, στην Γραμμική Άλγεβρα, ***μέθοδος απαλοιφής του Gauss***).

Ο νέος (2ος) πίνακας Simplex είναι ο

Πίνακας 2

Βασικές μεταβλητές	S	D	S_1	S_2	S_3	S_4	**Λύση**
S_1	0	$\frac{8}{15}$	1	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{672}{5}$
S_2	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	246
S	1	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	708
S_4	0	$\frac{11}{60}$	0	0	$-\frac{1}{10}$	1	$\frac{321}{5}$
z	0	$-\frac{7}{3}$	0	0	10	0	7080

που αντιστοιχεί στη βασική εφικτή λύση $(S, D, S_1, S_2, S_3, S_4) = (708, 0, \frac{672}{4}, 246, 0, \frac{321}{5}\Big)$ (δηλ. η κορυφή 2 της εφικτής περιοχής στη γραφική επίλυση) με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης 7080. Εφόσον στη γραμμή z του πίνακα υπάρχει αρνητικός συντελεστής $\left(-\frac{7}{3}\right)$ που αντιστοιχεί στη μη βασική μεταβλητή D, η λύση αυτή δεν είναι βέλτιστη, οπότε επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία και επιστρέφουμε στο

Βήμα 3

Επιλέγουμε ως εισερχόμενη τη μη βασική μεταβλητή με τον μικρότερο αρνητικό συντελεστή δηλ. την D. Η στήλη της D γίνεται η καινούργια αξονική στήλη.

Βήμα 4

Στο νέο πίνακα Simplex υπολογίζουμε τους λόγους των συντελεστών της στήλης Λύση προς τους αντίστοιχους συντελεστές της αξονικής στήλης, οπότε έχουμε τους λόγους

$$\frac{\frac{672}{5}}{\frac{8}{15}} = 84, \quad \frac{246}{\frac{1}{2}} = 492, \quad \frac{708}{\frac{2}{3}} = 1062, \quad \frac{\frac{321}{5}}{\frac{11}{60}} \simeq 350,18.$$

Ο μικρότερος απ' αυτούς είναι ο 84 που αντιστοιχεί στην S_1. Η S_1 λοιπόν γίνεται εξερχόμενη μεταβλητή, οπότε η νέα αξονική γραμμή είναι η γραμμή που αντιστοιχεί στην S_1 και το νέο αξονικό στοιχείο είναι το $\frac{8}{15}$.

Βήμα 5

Κατασκευάζουμε το νέο (3ο) πίνακα Simplex κατά τα γνωστά

<u>νέα γραμμή 2 (ή γραμμή D)</u>

$$\left[\begin{array}{ccccccc} \frac{0}{\frac{8}{15}} & \frac{\frac{8}{15}}{\frac{8}{15}} & \frac{1}{\frac{8}{15}} & \frac{0}{\frac{8}{15}} & \frac{\frac{-7}{10}}{\frac{8}{15}} & \frac{0}{\frac{8}{15}} & \frac{\frac{672}{5}}{\frac{8}{15}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & \frac{15}{8} & 0 & -\frac{21}{16} & 0 & 252 \end{array}\right]$$

<u>νέα γραμμή S_2</u>

$$\begin{array}{l} \left[0 \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad 0 \quad 246\right] \\ -\frac{1}{2}\times \\ \left[0 \quad 1 \quad \frac{15}{8} \quad 0 \quad -\frac{21}{16} \quad 0 \quad 252\right] \\ \hline \left[0 \quad 0 \quad -\frac{15}{16} \quad 1 \quad \frac{5}{32} \quad 0 \quad 120\right] \end{array}$$

<u>νέα γραμμή S</u>

$$\begin{array}{l} \left[1 \quad \frac{2}{3} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 708\right] \\ -\frac{2}{3}\times \end{array}$$

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{15}{8} & 0 & -\frac{21}{16} & 0 & 252\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{5}{4} & 0 & \frac{15}{8} & 0 & 540\end{bmatrix}\end{array}$$

νέα γραμμή S_4

$$\begin{array}{l}\begin{bmatrix}0 & \frac{11}{60} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 1 & \frac{321}{5}\end{bmatrix}\\ -\frac{11}{60}\times\\ \begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{15}{8} & 0 & -\frac{21}{16} & 0 & 252\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{11}{32} & 0 & \frac{9}{64} & 1 & 18\end{bmatrix}\end{array}$$

νέα γραμμή z

$$\begin{array}{l}\begin{bmatrix}0 & -\frac{7}{3} & 0 & 0 & 10 & 0 & 7080\end{bmatrix}\\ -\left(-\frac{7}{3}\right)\times\\ \begin{bmatrix}0 & 1 & \frac{15}{8} & 0 & -\frac{21}{6} & 0 & 252\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}0 & 0 & \frac{35}{8} & 0 & \frac{11}{6} & 0 & 7668\end{bmatrix}\end{array}$$

Ο 3ος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	S	D	S_1	S_2	S_3	S_4	**Λύση**
D	0	1	$\frac{15}{8}$	0	$-\frac{21}{16}$	0	252
S_2	0	0	$-\frac{15}{16}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120
S	1	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{15}{8}$	0	540
S_4	0	0	$\frac{11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18
z	0	0	$\frac{35}{8}$	0	$\frac{11}{6}$	0	7668

Παρατηρούμε ότι στη γραμμή της z δεν υπάρχει αρνητικός αριθμός, οπότε η λύση $(S, D, S_1, S_2, S_3, S_4) = (540, 252, 0, 120, 0, 18)$ είναι βέλτιστη λύση. Είναι η λύση που αντιστοιχεί στην κορυφή 3 της γραφικής μεθόδου επίλυσης. Η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι 7668. Το ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι το εξής: υπάρχει άλλη βέλτιστη λύση; Η απάντηση είναι όχι κι αυτό γιατί ***αν κοιτάξουμε τη γραμμή της z παρατηρούμε ότι όλες οι βασικές μεταβλητές δηλ. οι S, D, S_2, S_4 έχουν συντελεστή 0, ενώ οι μη βασικές μεταβλητές S_1, S_3 του συγκεκριμένου tableau έχουν θετικούς συντελεστές***. Ο αλγόριθμος Simplex τερματίζει εδώ. Πρέπει λοιπόν να παραχθούν 540 συμβατικές τσάντες $(S = 540)$, 252 πολυτελείς τσάντες $(D = 252)$ για να επιτευχθεί το μέγιστο κέρδος $(z = 7668)$. Τότε $S_1 = 0$ δηλ. θα χρησιμοποιηθούν όλες οι διαθέσιμες ώρες κοπής και βαφής, $S_2 = 120$ δηλ. θα μείνουν αχρησιμοποίητες 120 ώρες ραφής, $S_3 = 0$ δηλ. θα χρησιμοποιηθούν όλες οι ώρες φινιρίσματος, και $S_4 = 18$ δηλ. θα μείνουν αχρησιμοποίητες 18 ώρες ελέγχου και συσκευασίας.

Πρδγ. 2 Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης κόστους της M & D Chemicals έχει την εξής διατύπωση

$$
\begin{aligned}
\min 2A + 3B& \\
A + B &\geq 350 \\
A &\geq 125 \\
2A + B &\leq 600 \\
A, B &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Ισχύει ότι $\min(2A + 3B) = -\max(-2A - 3B)$ οπότε αρκεί να λύσουμε το π.γ.π.

$$\max z_1 = -2A - 3B + 0.S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$
\begin{aligned}
A + B - S_1 &= 350 \\
A - S_2 &= 125 \\
2A + B + S_3 &= 600 \\
A, B, S_1, S_2, S_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\max z_1 = -2A - 3B + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 125 \\ 600 \end{pmatrix}$$

$$A, \quad B, \quad S_1, \quad S_2, \quad S_3 \ \geq 0$$

Έχουμε $m = 3$ εξισώσεις με $n = 5$ μεταβλητές επομένως πρέπει να μηδενίσουμε $n - m = 5 - 3 = 2$ μεταβλητές για να προσδιορίσουμε μια αρχική βασική εφικτή λύση. Ποιές μεταβλητές όμως θα μηδενισθούν δεδομένου ότι δεν σχηματίζεται κάποιος 3×3 μοναδιαίος υποπίνακας; Μόνο η στήλη που αντιστοιχεί στη μεταβλητή S_3 προέρχεται από 3×3 μοναδιαίο υποπίνακα και έχει το στοιχείο 1 στην τρίτη θέση δηλ. στον τρίτο περιορισμό (εξίσωση). Για να δημιουργήσουμε και τις υπόλοιπες στήλες προσθέτουμε δύο τεχνητές μεταβλητές R_1, R_2 στον πρώτο και δεύτερο περιορισμό αντίστοιχα. Εφαρμόζουμε τη ***Μέθοδο των Δύο Φάσεων***.

Φάση 1

Λύνουμε το εξής π.γ.π.

$$\begin{aligned} &\min r = R_1 + R_2 \\ &A + B - S_1 + R_1 = 350 \\ &A - S_2 + R_2 = 125 \\ &2A + B + S_3 = 600 \\ &A, B, S_1, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ή το ισοδύναμο

$$\begin{aligned} &\max r_1 = -R_1 - R_2 \\ &A + B - S_1 + R_1 = 350 \\ &A - S_2 + R_2 = 125 \\ &2A + B + S_3 = 600 \\ &A, B, S_1, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0 \end{aligned}$$

και σε μορφή πινάκων

$$\max r_1 = -R_1 - R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 350 \\ 125 \\ 600 \end{pmatrix}.$$

$$A, \quad B, \quad S_1, \quad S_2, \quad S_3 \quad R_1, \quad R_2 \quad \geq 0$$

Οι βασικές μεταβλητές είναι οι R_1, R_2, S_3. Αντικαθιστούμε τις βασικές μεταβλητές R_1, R_2 στην έκφραση της r_1 με μη βασικές μεταβλητές. Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε ότι $R_1 = 350 - A - B + S_1$ και από την δεύτερη εξίσωση ότι $R_2 = 125 - A + S_2$. Αντικαθιστώντας στην r_1 προκύπτει ότι $r_1 = -(350 - A - B + S_1) - (125 - A + S_2) = -350 + A + B - S_1 - 125 + A - S_2 = 2A + B - S_1 - S_2 - 475$. Άρα το π.γ.π. γράφεται

$$\max r_1 = 2A + B - S_1 - S_2 + 0S_3 + 0R_1 + 0R_2 - 475$$

$$\begin{aligned} A + B - S_1 + R_1 &= 350 \\ A - S_2 + R_2 &= 125 \\ 2A + B + S_3 &= 600 \end{aligned}$$

$$A, \quad B, \quad S_1, \quad S_2, \quad S_3, \quad R_1, \quad R_2 \quad \geq 0$$

Ο αρχικός πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	A	B	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	**Λύση**
R_1	1	1	–1	0	0	1	0	350
R_2	1	0	0	–1	0	0	1	125
S_3	2	1	0	0	1	0	0	600
r_1	–2	–1	1	1	0	0	0	–475

Ο δεύτερος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	A	B	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	**Λύση**
R_1	0	1	–1	1	0	1	–1	225
A	1	0	0	–1	0	0	1	125
S_3	0	1	0	2	1	0	–2	350
r_1	0	–1	1	–1	0	0	2	–225

Παρατηρούμε ότι δύο διαφορετικές μεταβλητές, οι B και S_2 αντιστοιχούν στον ίδιο μικρότερο αρνητικό αριθμό δηλ. τον -1. Μπορούμε να επιλέξουμε όποια θέλουμε ως εισερχόμενη μεταβλητή. Επιλέγουμε π.χ. την B. Ο τρίτος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	A	B	S_1	S_2	S_3	R_1	R_2	**Λύση**
B	0	1	–1	1	0	1	–1	225
A	1	0	0	–1	0	0	1	125
S_3	0	0	1	1	1	–1	–1	125
r_1	0	0	0	0	0	1	1	0

Ο αλγόριθμος σταματά. Η βέλτιστη λύση είναι η 0. Δηλ. $\min r = R_1 + R_2 = 0 \Rightarrow R_1 = R_2 = 0$ δεδομένου ότι $R_1, R_2 \geq 0$ από υπόθεση. Ισχύει μάλιστα και το εξής: ***το αρχικό πρόβλημα έχει λύση αν και μόνο αν*** $\boldsymbol{\min r = -\max(-r) = 0}$ ***δηλ. αν και μόνον αν οι τεχνητές μεταβλητές έχουν στο τέλος της Φάσης 1 την τιμή 0***.
Περνάμε τώρα στην

Φάση 2

Από τον τελευταίο πίνακα της Φάσης 1 διαγράφουμε τις στήλες που αντιστοιχούν στις τεχνητές μεταβλητές οπότε παίρνουμε τους εξής περιορισμούς:

$$\begin{aligned} B - \quad S_1 + \quad S_2 &= 225 \\ A \quad -S_2 \quad\quad &= 125 \\ S_1 + \quad S_2 + \quad S_3 &= 125 \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται ότι αυτοί οι περιορισμοί είναι ισοδύναμοι με τους αρχικούς περιορισμούς του αρχικού π.γ.π. Άρα το ισοδύναμο π.γ.π. είναι

$$\max z_1 = -2A - 3B + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$
\begin{aligned}
B- \quad S_1+ \quad S_2 &= 225 \\
A \quad -S_2 \quad\quad &= 125 \\
S_1+ \quad S_2+ \quad S_3 &= 125
\end{aligned}
$$

$$A, \quad B, \quad S_1, \quad S_2, \quad S_3 \geq 0$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\max z_1 = -2A - 3B + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 225 \\ 125 \\ 125 \end{pmatrix}$$

$$A, \quad B, \quad S_1 \quad S_2, \quad S_3 \geq 0$$

(**Σημείωση**: παρατηρούμε ότι οι στήλες του μοναδιαίου 3×3 υποπίνακα αντιστοιχούν στις μεταβλητές A, B και S_3 δηλ. στις βασικές μεταβλητές του τελευταίου tableau της Φάσης 1). Αντικαθιστούμε, όπως και στην Φάση 1, τις βασικές μεταβλητές A, B που εμφανίζονται στην έκφραση της z_1 με μη μηδενικούς συντελεστές, με μη βασικές μεταβλητές. Από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε ότι $B = 225 + S_1 - S_2$ και από τη δεύτερη εξίσωση ότι $A = 125 + S_2$. Αντικαθιστώντας στην έκφραση της z_1 προκύπτει ότι $z_1 = -2(125 + S_2) - 3(225 + S_1 - S_2) = -250 - 2S_2 - 675 - 3S_1 + 3S_2 = -3S_1 + S_2 - 925$. Άρα το πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα

$$\max z_1 = 0A + 0B - 3S_1 + S_2 + 0S_3 - 925$$

$$
\begin{aligned}
B- \quad S_1+ \quad S_2 &= 225 \\
A \quad -S_2 \quad\quad &= 125 \\
S_1+ \quad S_2+ \quad S_3 &= 125
\end{aligned}
$$

$$A, \quad B, \quad S_1, \quad S_2, \quad S_3 \geq 0$$

Ο αρχικός πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	A	B	S_1	S_2	S_3	**Λύση**
B	0	1	–1	1	0	225
A	1	0	0	–1	0	125
S_3	0	0	1	1	1	125
z_1	0	0	3	–1	0	–925

Ο δεύτερος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	A	B	S_1	S_2	S_3	**Λύση**
B	0	1	–2	0	–1	100
A	1	0	1	0	1	250
S_2	0	0	1	1	1	125
z_1	0	0	4	0	1	–800

Ο αλγόριθμός τερματίζει. Άρα $\max z_1 = -800$ για $A = 250$, $B = 100$. Ισοδύναμα $\min z = -(-800) = 800$ για $A = 250$, $B = 100$ (η λύση δηλ. που βρήκαμε και με τη γραφική μέθοδο).

(**Σημείωση**: τα περισσότερα γνωστά λογισμικά χρησιμοποιούν τη μέθοδο των δύο φάσεων ως αλγόριθμο επιλογής προκειμένου να επιλύσουν προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού. Παρουσιάζει πλεονεκτήματα έναντι της ***Μεθόδου του Μεγάλου M***, αλλά και της ***Μεθόδου Karmakar***).

3. ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

α) Εναλλακτικές βέλτιστες λύσεις (βιβλίο σελ. 101-103). Θεωρούμε πάλι το πρόβλημα της Par Inc. όμως με τη νέα υπόθεση ότι το κέρδος ανά συμβατική τσάντα προσδιορίζεται σε \$ 6,30 αντί για \$ 10. Η νέα αντικειμενική συνάρτηση είναι $6,30S + 9D$ και το π.γ.π. διατυπώνεται ως εξής

$$\max z = 6,30S + 9D$$

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{10}S+ \quad D \quad &\leq 630\\
\frac{1}{2}S+ \quad \frac{5}{6}D \quad &\leq 600\\
S+ \quad \frac{2}{3}D \quad &\leq 708\\
\frac{1}{10}S+ \quad \frac{1}{4}D \quad &\leq 135\\
S, \quad D \quad &\geq 0
\end{aligned}
$$

Γραφικά προσδιορίζουμε ότι η εφικτή περιοχή του προβλήματος αποτελείται από τις κορυφές με συντεταγμένες $(0,0)$, $(708,0)$, $(540,252)$, $(300,420)$, $(0,540)$. Η αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποιείται $(=5670)$ σε δύο διαφορετικές κορυφές με συντεταγμένες $(540,252)$ και $(300,420)$ αντίστοιχα, οπότε και κάθε σημείο του ευθυγράμμου τμήματος που αυτές ορίζουν είναι επίσης βέλτιστη λύση του προβλήματος. Με άλλα λόγια το πρόβλημα έχει άπειρες βέλτιστες λύσεις. Παρατηρούμε, στην γραφική επίλυση ότι η ευθεία της αντικειμενικής συνάρτησης είναι παράλληλη (για την ακρίβεια συμπίπτει) με την ακμή που ορίζουν οι κορυφές 3 και 4. Θα εξετάσουμε τώρα τη συμπεριφορά του αλγόριθμου Simplex σε αυτές τις περιπτώσεις. Η κανονική μορφή του προβλήματος είναι

$$
\begin{aligned}
\max z = 6,305 + 9D + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4&\\
\frac{7}{10}S+ \quad D+ \quad S_1 \quad &= 630\\
\frac{1}{2}S+ \quad \frac{5}{6}D+ \quad S_2 \quad &= 600\\
S+ \quad \frac{2}{3}D+ \quad S_3 \quad &= 708\\
\frac{1}{10}S+ \quad \frac{1}{4}D+ \quad S_3 \quad &= 135\\
S, \quad D, \quad S_1, \quad S_2, \quad S_3, \quad S_4 \quad &\geq 0
\end{aligned}
$$

ή σε μορφή πινάκων

$$
\begin{pmatrix}
\frac{7}{10} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
\frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0\\
\frac{1}{10} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
S\\ D\\ S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
630\\ 600\\ 708\\ 135
\end{pmatrix}
$$

$$S,\quad D,\quad S_1,\quad S_2,\quad S_3,\quad S_4\ \geq 0$$

Κατά τα γνωστά, έχουμε $m = 4$ εξισώσεις με $n = 6$ μεταβλητές οπότε πρέπει να μηδενίσουμε $n - m = 6 - 4 = 2$ μεταβλητές που δεν αντιστοιχούν σε στήλες μοναδιαίου υποπίνακα δηλ. τις S, D. Θέτοντας $S = D = 0$ προκύπτει ότι $S_1 = 630$, $S_2 = 600$, $S_3 = 708$, $S_4 = 135$ και η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 0$. Ο αρχικός πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	S	D	S_1	S_2	S_3	S_4	**Λύση**
S_1	$\frac{7}{10}$	1	1	0	0	0	630
S_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	0	1	0	0	600
S_3	1	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	708
S_4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	1	135
z	–6,3	–9	0	0	0	0	0

Ο δεύτερος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	S	D	S_1	S_2	S_3	S_4	**Λύση**
S_1	$\frac{3}{10}$	0	1	0	0	–4	90
S_2	$\frac{1}{6}$	0	0	1	0	$-\frac{10}{3}$	150
S_3	$\frac{11}{15}$	0	0	0	1	$-\frac{8}{3}$	348
D	$\frac{2}{5}$	1	0	0	0	4	540
z	–2,7	0	0	0	0	36	4860

Ο τρίτος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	S	D	S_1	S_2	S_3	S_4	Λύση
S	1	0	$\frac{10}{3}$	0	0	$-\frac{40}{3}$	300
S_2	0	0	$-\frac{5}{9}$	1	0	$-\frac{10}{9}$	100
S_3	0	0	$-\frac{22}{9}$	0	1	$\frac{64}{9}$	128
D	0	1	$-\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{28}{3}$	420
z	0	0	9	0	0	0	5670

Προκύπτει η βέλτιστη λύση με μεταβλητές απόφασης $(S, D) = (300, 420)$ και τιμή αντικειμενικής συνάρτησης $z = 5670$. Παρατηρούμε ότι το τελευταίο στοιχείο της στήλης της μη βασικής μεταβλητής S_4 είναι 0 (ενώ θα έπρεπε να είναι > 0 αν είχαμε μοναδική λύση), οπότε μπορούμε να την εισάγουμε στη βάση χωρίς να αλλάξει η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Ο τέταρτος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	S	D	S_1	S_2	S_3	S_4	Λύση
S	1	0	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{15}{8}$	0	540
S_2	0	0	$-\frac{135}{144}$	1	$\frac{5}{32}$	0	120
S_4	0	0	$-\frac{11}{32}$	0	$\frac{9}{64}$	1	18
D	0	1	$\frac{15}{8}$	0	$-\frac{21}{16}$	0	252
z	0	0	9	0	0	0	5670

Προκύπτει η δεύτερη βέλτιστη λύση $(S, D) = (540, 252)$ που βρήκαμε και με τη γραφική μέθοδο. Παρατηρούμε ότι η μη βασική μεταβλητή S_3 αντιστοιχεί σε στήλη με τελευταίο στοιχείο το 0, οπότε μπορεί να μπει στη βάση χωρίς μεταβολή στην τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Ο πέμπτος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	S	D	S_1	S_2	S_3	S_4	**Λύση**
S	1	0	$\frac{10}{3}$	0	0	$-\frac{40}{3}$	300
S_2	0	0	$-\frac{5}{9}$	1	0	$-\frac{10}{9}$	100
S_3	0	0	$-\frac{22}{9}$	0	1	$\frac{64}{9}$	128
D	0	1	$-\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{28}{3}$	420
z	0	0	9	0	0	0	5670

δηλ. ο τρίτος πίνακας Simplex. Άρα προκύπτουν δύο βέλτιστες λύσεις με συντεταγμένες $(300, 420)$ και $(540, 252)$ αντίστοιχα. Το γεγονός ότι και κάθε κυρτός συνδυασμός τους είναι επίσης βέλτιστη λύση δε μπορεί να προκύψει από τον πρωτεύοντα αλγόριθμο Simplex. Χρειάζεται μία παραλλαγή του που ονομάζεται ***δυϊκός αλγόριθμος Simplex***.

β) **Μη φραγμένη λύση** (βιβλίο σελ. 105-106). Θεωρούμε το π.γ.π.

$$\begin{gathered}\max 20x + 10y \\ x \geq 2 \\ y \leq 5 \\ x, y \geq 0\end{gathered}$$

Η κανονική του μορφή είναι

$$\max z = 20x + 10y + 0S_1 + 0S_2$$

$$\begin{gathered}x - S_1 = 2 \\ y + S_2 = 5 \\ x, y, S_1, S_2 \geq 0\end{gathered}$$

ή σε μορφή πινάκων

$$maxz = 20x + 10y + 0S_1 + 0S_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x, \;\; y, \;\; S_1, \;\; S_2 \;\; \geq 0$$

Έχουμε $m = 2$ εξισώσεις με $n = 4$ μεταβλητές οπότε για να προσδιορίσουμε αρχική βασική εφικτή λύση θα πρέπει να μηδενίσουμε $n-m = 4-2 = 2$ μεταβλητές. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 3 διαφορετικές μεταβλητές που αντιστοιχούν σε στήλες μοναδιαίου υποπίνακα (οι x, y, S_2). Μηδενίζουμε π.χ. την y οπότε προκύπτει η λύση $(x, y, S_1, S_2) = (2, 0, 0, 5)$ με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 20 \cdot 2 + 10 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 5 = 40$. Ο πρώτος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	x	y	S_1	S_2	**Λύση**
x	1	0	–1	0	2
S_2	0	1	0	1	5
z	–20	–10	0	0	40

Παρατηρούμε ότι η στήλη της μη βασικής μεταβλητής S_1 (δηλ. οι συντελεστές της στους περιορισμούς του προβλήματος) αποτελείται από μη θετικά (≤ 0) στοιχεία. Αυτό σημαίνει ότι η εφικτή περιοχή του προβλήματος είναι μη φραγμένη στην κατεύθυνση της μεταβλητής αυτής. Αφού η S_1 μπορεί να γίνει απεριόριστα μεγάλη για να μην παραβιάζεται ο πρώτος περιορισμός θα πρέπει και η x να μεγαλώνει απεριόριστα. Αν προσπαθήσουμε να επαναλάβουμε τον αλγόριθμο και να κατασκευάσουμε τον δεύτερο πίνακα Simplex οδηγούμαστε στην αντίφαση η μεταβλητή x να είναι ταυτόχρονα εισερχόμενη και εξερχόμενη. Σε άλλες ανάλογες περιπτώσεις, στον υπολογισμό των πηλίκων μπορεί να προκύψουν μη αποδεκτά αποτελέσματα (δηλ. αρνητικοί αριθμοί ή διαίρεση δια 0), οπότε πάλι δε μπορούμε να επιλέξουμε εξερχόμενη μεταβλητή. Σε τέτοιες περιπτώσεις η γραφική μέθοδος επίλυσης, όπου εφαρμόζεται, προσφέρει μεγαλύτερη εποπτεία.

γ) Μη εφικτό πρόβλημα (βιβλίο σελ. 103-105). Υποθέτουμε ότι η διεύθυνση της Par Inc. αποφάσισε την παραγωγή τουλάχιστον 500 συμβατικών και 360 πολυτελών τσαντών. Το π.γ.π. παίρνει τώρα τη μορφή

$$\max \; 10S + 9D$$

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{10}S+ \quad D \quad &\leq 630\\
\frac{1}{2}S+ \quad \frac{5}{6}D \quad &\leq 600\\
S+ \quad \frac{2}{3}D \quad &\leq 708\\
\frac{1}{10}S+ \quad \frac{1}{4}D \quad &\leq 135\\
S &\geq 500\\
D &\geq 360\\
S, D &\geq 0
\end{aligned}
$$

Με τη γραφική μέθοδο παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει σημείο που να ικανοποιεί ταυτόχρονα όλους τους περιορισμούς. Άρα δεν υπάρχει εφικτή περιοχή και το πρόβλημα ονομάζεται ***μη εφικτό*** δηλ. δεν λύνεται. Μπορούμε να κάνουμε την διαπίστωση αυτή και με τη μέθοδο Simplex;

Γράφουμε το πρόβλημα στην κανονική του μορφή

$$\max z = 10S + 9D + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 + 0S_6$$

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{10}S+ \quad D+ \quad S_1 \quad &= 630\\
\frac{1}{2}S+ \quad \frac{5}{6}D+ \quad S_2 \quad &= 600\\
S+ \quad \frac{2}{3}D+ \quad S_3 \quad &= 708\\
\frac{1}{10}S+ \quad \frac{1}{4}D+ \quad S_4 \quad &= 135\\
S - S_5 \quad &= 500\\
D - S_6 \quad &= 360
\end{aligned}
$$

$$S, \quad D, \quad S_1, \quad S_2, \quad S_3, \quad S_4, \quad S_5, \quad S_6 \quad \geq 0$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ D \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 630 \\ 600 \\ 708 \\ 135 \\ 500 \\ 360 \end{pmatrix}$$

$$S,\quad D,\quad S_1,\quad S_2,\quad S_3,\quad S_4,\quad S_5,\quad S_6 \quad \geq 0$$

Προκύπτουν $m = 6$ εξισώσεις και $n = 8$ μεταβλητές οπότε πρέπει να μηδενισθούν $n - m = 8 - 6 = 2$ μεταβλητές. Στον πίνακα του συστήματος όμως υπάρχουν μόνο 4 στήλες του 6×6 μοναδιαίου υποπίνακα με τις μονάδες να αντιστοιχούν στους 4 πρώτους περιορισμούς και στις μεταβλητές S_1, S_2, S_3, S_4 αντίστοιχα. Για να δημιουργήσουμε και τις υπόλοιπες στήλες προσθέτουμε δύο τεχνητές μεταβλητές R_1, R_2 στον 5ο και στον 6ο περιορισμό αντίστοιχα. Έτσι λύνουμε, σε πρώτη φάση, το π.γ.π.

$$\begin{aligned} \min r &= R_1 + R_2 \\ \frac{7}{10}S + \quad D + \quad S_1 \quad &= 630 \\ \frac{1}{2}S + \quad \frac{5}{6}D + \quad S_2 \quad &= 600 \\ S + \quad \frac{2}{3}D + \quad S_3 \quad &= 708 \\ \frac{1}{10}S + \quad \frac{1}{4}D + \quad S_4 \quad &= 135 \\ S - S_5 + \quad R_1 \quad &= 500 \\ D - S_6 + \quad R_2 \quad &= 360 \end{aligned}$$

$$S,\quad D,\quad S_1,\quad S_2,\quad S_3,\quad S_4,\quad S_5,\quad S_6,\quad R_1,\quad R_2 \quad \geq 0$$

ή σε μορφή πινάκων (το ισοδύναμο)

$$\max r_1 = -R_1 - R_2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ D \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 630 \\ 600 \\ 708 \\ 135 \\ 500 \\ 360 \end{pmatrix}$$

$$S, \quad D, \quad S_1, \quad S_2, \quad S_3, \quad S_4, \quad S_5, \quad S_6, \quad R_1, \quad R_1 \quad \geq 0$$

Πρέπει να μηδενισθούν $n - m = 10 - 6 = 4$ μεταβλητές. Παρατηρούμε ότι οι μεταβλητές $S_1, S_2, S_3, S_4, R_1, R_2$ αντιστοιχούν σε στήλες μοναδιαίου υποπίνακα οπότε θέτουμε $S = D = S_5 = S_6 = 0$. Επιπλέον εκφράζουμε τις βασικές μεταβλητές R_1, R_2 στην έκφραση της αντικειμενικής συνάρτησης r_1 συναρτήσει των μη βασικών μεταβλητών. Από τον 5ο περιορισμό προκύπτει ότι $R_1 = 500 - S + S_5$ και από τον 6ο περιορισμό ότι $R_2 = 360 - D + S_6$. Αντικαθιστώντας στην αντικειμενική συνάρτηση προκύπτει ότι $r_1 = -(500 - S + S_5) - (360 - D + S_6) = -500 + S - S_5 - 360 + D - S_6 = S + D - S_5 - S_6 - 860$. Άρα το ισοδύναμο π.γ.π. είναι

$$\max r_1 = S + D + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 - S_5 - S_6 + 0R_1 + 0R_2 - 860$$

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{10} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ D \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 630 \\ 600 \\ 708 \\ 135 \\ 500 \\ 360 \end{pmatrix}$$

$$S, \quad D, \quad S_1, \quad S_2, \quad S_3, \quad S_4, \quad S_5, \quad S_6 \quad R_1, \quad R_2 \quad \geq 0$$

Ο αρχικός πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	S	D	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	R_1	R_2	**Λύση**
S_1	$\frac{7}{10}$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	630
S_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	0	1	0	0	0	0	0	0	600
S_3	1	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	0	0	0	0	708
S_4	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	1	0	0	0	0	135
R_1	1	0	0	0	0	0	–1	0	1	0	500
R_2	0	1	0	0	0	0	0	–1	0	1	360
r_1	–1	–1	0	0	0	0	1	1	0	0	–860

Ο δεύτερος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	S	D	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	R_1	R_2	**Λύση**
S_1	0	1	1	0	0	0	$\frac{7}{10}$	0	$-\frac{7}{10}$	0	280
S_2	0	$\frac{5}{6}$	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	350
S_3	0	$\frac{2}{3}$	0	0	1	0	1	0	–1	0	208
S_4	0	$\frac{1}{4}$	0	0	0	1	$\frac{1}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$	0	85
S	1	0	0	0	0	0	–1	0	1	0	500
R_2	0	1	0	0	0	0	0	–1	0	1	360
r_1	0	–1	0	0	0	0	0	1	1	0	–360

Ο τρίτος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	S	D	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	R_1	R_2	**Λύση**
D	0	1	1	0	0	0	$\frac{7}{10}$	0	$-\frac{7}{10}$	0	280
S_2	0	0	$-\frac{5}{6}$	1	0	0	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{350}{3}$
S_3	1	$-\frac{1}{3}$	–1	0	1	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{7}{10}$	0	428
S_4	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{20}$	$-\frac{1}{10}$	0	0	1	$-\frac{7}{100}$	0	$\frac{7}{100}$	0	107
S	1	–1	–1	0	0	0	$-\frac{17}{10}$	0	$\frac{17}{10}$	0	220
R_2	0	1	0	0	0	0	0	–1	0	1	360
r_1	0	–1	0	0	0	0	0	1	1	0	–360

Αν προσπαθήσουμε να επαναλάβουμε τον αλγόριθμο ώστε να κατασκευάσουμε τον τέταρτο πίνακα Simplex οδηγούμαστε στην αντίφαση η μεταβλητή D να είναι ταυτόχρονα εισερχόμενη και εξερχόμενη. Παρατηρούμε εδώ ότι στον τελευταίο πίνακα η τεχνητή μεταβλητή R_2 παραμένει βασική με συντελεστή 0 στην τελευταία γραμμή (δηλ. στην γραμμή της αντικειμενικής συνάρτησης). Το πρόβλημα της φάσης 1 δεν λύνεται και συνεπώς ούτε το αρχικό πρόβλημα λύνεται. Και στις περιπτώσεις αυτές η γραφική μέθοδος, αν εφαρμόζεται, παράγει γρηγορότερο αποτέλεσμα.

δ) Εκφυλισμένη βέλτιστη λύση

Θεωρούμε το εξής π.γ.π.

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 9x_2 \\ x_1 + \ 4x_2 &\le 8 \\ x_1 + \ 2x_2 &\le 4 \\ x_1, \quad x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Η κανονική του μορφή είναι

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 9x_2 + 0S_1 + 0S_2 \\ x_1 + \ 4x_2 + \ S_1 \quad &= 8 \\ x_1 + \ 2x_2 + \quad S_2 &= 4 \\ x_1, \quad x_2 \quad S_1, S_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

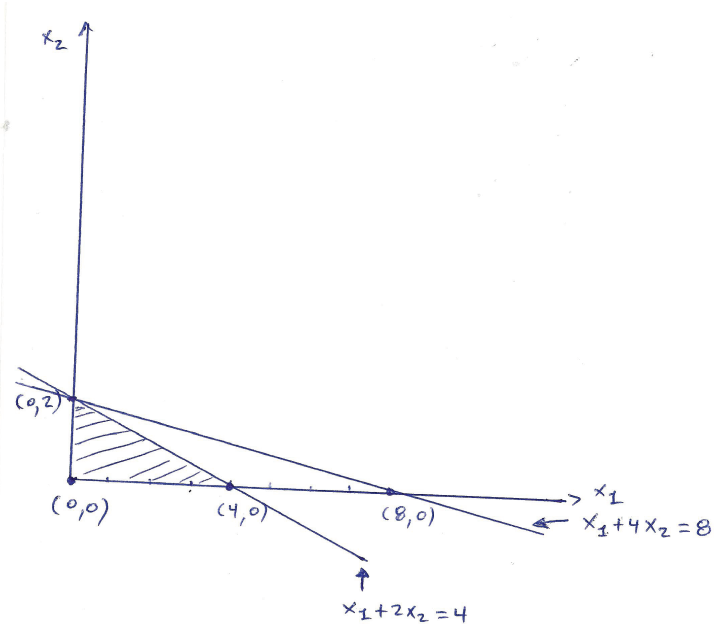
Ο πρώτος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	S_1	S_2	**Λύση**
S_1	1	4	1	0	8
S_2	1	2	0	1	4
z	–3	–9	0	0	0

Παρατηρούμε ότι οι S_1, S_2 ισοβαθμούν για εξερχόμενες μεταβλητές. Επιλέγουμε στην τύχη την S_1 οπότε ο δεύτερος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	S_1	S_2	**Λύση**
x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2
S_2	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	0
z	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18

Παρατηρούμε ότι η βασική μεταβλητή S_2 έχει τιμή 0. Η λύση αυτή ονομάζεται ***εκφυλισμένη βασική εφικτή λύση***. Αυτό συνήθως σημαίνει ότι υπάρχει ένας πλεονάζων περιορισμός. Πράγματι στην γραφική επίλυση του προβλήματος βλέπουμε ότι η εφικτή περιοχή του προβλήματος καθορίζεται από τον δεύτερο περιορισμό και τους περιορισμούς μη αρνητικότητας, οπότε ο πρώτος περιορισμός είναι πλεονάζων.



Ο τρίτος πίνακας Simplex είναι

Βασικές μεταβλητές	x_1	x_2	S_1	S_2	**Λύση**
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2
x_1	1	0	-1	2	0
z	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18

οπότε προκύπτει η βέλτιστη λύση $(x_1, x_2, S_1, S_2) = (0, 2, 0, 0)$ με τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης $z = 18$. Μια τέτοια λύση που έχει τουλάχιστον μια βασική μεταβλητή (εδώ την x_1) ίση με 0 ονομάζεται ***εκφυλισμένη βέλτιστη λύση***. Παρατηρούμε επίσης ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν άλλαξε από το προηγούμενο βήμα. Στην γραφική επίλυση, η βέλτιστη λύση είναι σημείο τομής τριών περιοριστικών ευθειών (όχι δύο). Σε περιπτώσεις εκφυλισμένων λύσεων υπάρχει ο κίνδυνος ο αλγόριθμος Simplex να πέσει σε βρόχο δηλ. να επαναλαμβάνει την ίδια αλληλουχία λύσεων και η τιμή της z να παραμένει σταθερή ώστε ακόμα και να μη μπορεί να βρεθεί η βέλτιστη λύση. Αυτό είναι γνωστό και ως ***φαινόμενο της ανακύκλωσης***. Στην πράξη δεν έχει αναφερθεί ποτέ τέτοιο φαινόμενο. Αν συμβεί απλά σταματάμε πριν την βέλτιστη λύση δεδομένου ότι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης δεν αλλάζει.