ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ

ΕΞΕΤΑΣΗ 24/01/2019

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

(Κάθε άλλη επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή).

1. (i) Από τη γραφική επίλυση του π.γ.π. (βλ. ενδεικτικές απαντήσεις εξέτασης της 17/01/2019) προκύπτει ότι η βέλτιστη λύση (κορυφή 3) είναι το σημείο τομής της γραμμής $A =$ περιοριστική ευθεία συσκευασίας και αποστολής, και της γραμμής $B =$ περιοριστική ευθεία φινιρίσματος. Η κορυφή 3 αποτελεί βέλτιστη λύση με την προϋπόθεση ότι ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\text{Κλίση γραμμής } B \leq \text{ κλίση γραμμής αντικειμενικής συνάρτησης } \leq \text{ κλίση γραμμής A}} \tag{1}$$

Γράφουμε τις εξισώσεις των ευθειών στη μορφή κλίσης-τεταγμένης κι έχουμε τα εξής:

γραμμή $A \rightarrow \frac{1}{8}R + \frac{1}{4}C = 100 \Rightarrow \frac{1}{4}C = -\frac{1}{8}R + 100 \Rightarrow C = -\frac{4}{8}R + 400 \Rightarrow C = -\frac{1}{2}R + 400 \Rightarrow$ κλίση γραμμής $A = -\frac{1}{2}$

γραμμή $B \rightarrow \frac{1}{2}R + \frac{1}{3}C = 300 \Rightarrow \frac{1}{3}C = -\frac{1}{2}R + 300 \Rightarrow C = -\frac{3}{2}R + 900 \Rightarrow$ κλίση γραμμής $B = -\frac{3}{2}$

αντικειμενική ευθεία $\rightarrow$ συμβολίζουμε με C_R το κέρδος ανά συμβατικό γάντι, με C_c το κέρδος ανά γάντι υποδοχής, και με P την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης. Τότε $P = C_R \cdot R + C_C \cdot C \Rightarrow C_C \cdot C = -C_R \cdot R + P \Rightarrow C = -\frac{C_R}{C_C} \cdot R + \frac{P}{C_C} \Rightarrow$ κλίση αντικειμενικής ευθείας $= -\frac{C_R}{C_C}$. Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{C_R}{C_C} \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{2} \leq \frac{C_R}{C_C} \leq \frac{3}{2}} \tag{2}$$

Για τον υπολογισμό του εύρους αριστότητας της συνεισφοράς στο κέρδος των συμβατικών γαντιών διατηρούμε σταθερή τη συνεισφορά στο κέρδος των γαντιών υποδοχής ($C_C = 8$), οπότε η (2) γίνεται $\frac{1}{2} \leq \frac{C_R}{8} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 1 \leq 2 \cdot \frac{C_R}{8} \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \frac{C_R}{4} \leq 3 \Rightarrow 4 \leq C_R \leq 12$. Αυτό σημαίνει ότι, με τους υπόλοιπους συντελεστές σταθερούς, αν η συνεισφορά στο κέρδος ανά συμβατικό γάντι λάβει τιμή μεταξύ \$4 και \$12, τότε η λύση $R = 500$, $C = 150$ θα συνεχίζει να είναι βέλτιστη. Όμοια με παραπάνω, θέτοντας $C_R = 5$ από την (2) έχουμε ότι $\frac{1}{2} \leq \frac{5}{C_C} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{C_C}{5} \leq 2 \Rightarrow 5 \cdot \frac{2}{3} \leq C_C \leq 2 \cdot 5 \Rightarrow \frac{10}{3} \leq C_C \leq 10 \Rightarrow 3,33 \leq C_C \leq 10$. Αυτό σημαίνει ότι, με τους υπόλοιπους συντελεστές σταθερούς, αν η συνεισφορά στο κέρδος ανά γάντι υποδοχής λάβει τιμή μεταξύ \$3,33 και \$10, τότε η λύση $R = 500$, $C = 150$ θα συνεχίζει να είναι βέλτιστη.

(ii) Έστω ότι θέλουμε ν' αυξήσουμε τον συντελεστή της μεταβλητής R στην αντικειμενική συνάρτηση, κατά μία ποσότητα Δ, από 5 σε $5 + \Delta$. Τότε η αντικειμενική συνάρτηση γίνεται $z = (5 + \Delta)R + 8C$. Ο βέλτιστος πίνακας Simplex (βλ. ενδεικτικές απαντήσεις της εξέτασης της 17/01/2019) είναι ο

Πίνακας 1

Βασικές μεταβλητές	R	C	S_1	S_2	S_3	**Λύση**
S_1	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	–5	175
R	1	0	0	3	–4	500
C	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	6	150
z	0	0	0	3	28	3700

Αν αυξηθεί ο συντελεστής της R κατά Δ, η νέα γραμμή της z φαίνεται στον παρακάτω

Πίνακας 2

Βασικές μεταβλητές	R	C	S_1	S_2	S_3	Λύση
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
z	0	0	0	$3+3\varDelta$	$28-4\varDelta$	$3700+500\varDelta$

όπου οι συντελεστές των $\varDelta$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές των μεταβλητών στη γραμμή R του Πίνακα 1 εκτός των συντελεστών των μεταβλητών R, C, S_1 που παραμένουν μηδέν δεδομένου ότι οι μεταβλητές αυτές είναι βασικές. Από το κριτήριο βελτιστοποίησης θα πρέπει οι συντελεστές των μη βασικών μεταβλητών να είναι μη αρνητικοί. Άρα $3 + 3\varDelta \geq 0 \Rightarrow 3\varDelta \geq -3 \Rightarrow \varDelta \geq -1$ και $28 - 4\varDelta \geq 0 \Rightarrow 4\varDelta \leq 28 \Rightarrow \varDelta \leq 7$. Δηλ. $-1 \leq \varDelta \leq 7 \Rightarrow -1+5 \leq 5+\varDelta \leq 7+5 \Rightarrow 4 \leq 5+\varDelta \leq 12$ που σημαίνει ότι το εύρος αριστότητας για τον συντελεστή κέρδους των συμβατικών γαντιών είναι το $[4, 12]$. Υποθέτουμε τώρα ότι αυξάνεται ο συντελεστής της μεταβλητής C, κατά μία ποσότητα $\varDelta$, από 8 σε $8+\varDelta$. Τότε η αντικειμενική συνάρτηση γράφεται $z = 5R + (8 + \varDelta)C$. Η νέα γραμμή της z φαίνεται στον

Πίνακας 3

Βασικές μεταβλητές	R	C	S_1	S_2	S_3	Λύση
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
z	0	0	0	$3-\frac{3}{2}\varDelta$	$28+6\varDelta$	$3700+150\varDelta$

Από το κριτήριο μη αρνητικότητας των βασικών μεταβλητών έχουμε ότι $3 - \frac{3}{2}\varDelta \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\varDelta \leq 3 \Rightarrow \varDelta \leq 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$ και $28 + 6\varDelta \geq 0 \Rightarrow 6\varDelta \geq -28 \Rightarrow \varDelta \geq -\frac{28}{6} \Rightarrow \varDelta \geq -\frac{14}{3}$. Δηλ. $-\frac{14}{3} \leq \varDelta \leq 2 \Rightarrow -\frac{14}{3} + 8 \leq 8 + \varDelta \leq 8 + 2 \Rightarrow -\frac{14}{3} + \frac{24}{3} \leq 8 + \varDelta \leq 10 \Rightarrow \frac{10}{3} \leq 8 + \varDelta \leq 10 \Rightarrow 3,33 \leq 8 + \varDelta \leq 10$ που σημαίνει ότι το εύρος αριστότητας για τον συντελεστή κέρδους των γαντιών υποδοχής είναι το $[3,33,\ 10]$.

(iii) Από τον βέλτιστο πίνακα Simplex έχουμε ότι η δυϊκή τιμή του πρώτου περιορισμού είναι 0 (= το τελευταίο στοιχείο της στήλης S_1). Άρα μεταβολές στις ώρες κοπής και ραφής δεν έχουν επίπτωση στο κέρδος αν όλοι οι υπόλοιποι συντελεστές παραμείνουν σταθεροί. Η δυϊκή τιμή του δεύτερου περιορισμού είναι 3 (= το τελευταίο στοιχείο της στήλης S_2). Αυτό σημαίνει ότι για κάθε επιπλέον ώρα φινιρίσματος που διατίθεται, ενώ όλοι οι υπόλοιποι συντελεστές του προβλήματος παραμένουν σταθεροί, το κέρδος θα αυξάνεται κατά \$3 (και δυϊκά για την περίπτωση της μείωσης). Η δυϊκή τιμή του τρίτου περιορισμού είναι 28(= το τελευταίο στοιχείο της στήλης S_3). Αυτό σημαίνει ότι για κάθε επιπλέον ώρα συσκευασίας και αποστολής που διατίθεται, ενώ όλοι οι υπόλοιποι συντελεστές του προβλήματος παραμένουν σταθεροί, το κέρδος θα αυξάνεται κατά \$28 (και δυϊκά για την περίπτωση της μείωσης).

(iv) Ο πρώτος περιορισμός ή περιορισμός κοπής και ραφής είναι μη δεσμευτικός δεδομένου ότι $S_1 = 175$. Αυτό σημαίνει, όπως είδαμε, ότι μένουν αχρησιμοποίητες 175 ώρες. Άρα όσο κι αν αυξηθούν οι ώρες κοπής και ραφής η επίδραση στο συνολικό κέρδος θα συνεχίσει να είναι μηδενική. Μηδενική θα συνεχίσει να είναι και η επίδραση στο κέρδος αν οι ώρες κοπής και ραφής μειωθούν κατά 175 και γίνουν $900 - 175 = 725$. Άρα το εύρος εφικτότητας, για την δυϊκή τιμή μηδέν, είναι το $[725, +\infty)$ για το δεξί μέλος του πρώτου περιορισμού. Υποθέτουμε τώρα ότι το δεξί μέλος του δεύτερου περιορισμού ή περιορισμού φινιρίσματος αυξάνεται, κατά μία ποσότητα Δ, από 300 σε $300 + \Delta$. Τότε οι τιμές των βασικών μεταβλητών μεταβάλλονται όπως στον παρακάτω

Πίνακας 4

Βασικές μεταβλητές	$\cdots$	**Λύση**
S_1	$\cdots$	$175-\frac{3}{4}\Delta$
R	$\cdots$	$500+3\Delta$
C	$\cdots$	$150-\frac{3}{2}\Delta$
z	$\cdots$	$3700+3\Delta$

όπου οι συντελεστές των $\varDelta$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές της στήλης S_2 στον βέλτιστο πίνακα Simplex. Οι βασικές μεταβλητές όμως πρέπει να είναι μη αρνητικές. Άρα $175 - \frac{3}{4}\varDelta \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{4}\varDelta \leq 175 \Rightarrow \varDelta \leq \frac{4}{3} \cdot 175 = 233, 33$, $500 + 3\varDelta \geq 0 \Rightarrow 3\varDelta \geq -500 \Rightarrow \varDelta \geq -\frac{500}{3} = -166, 67$, $150 - \frac{3}{2}\varDelta \geq 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\varDelta \leq 150 \Rightarrow \varDelta \leq \frac{2}{3} \cdot 150 \Rightarrow \varDelta \leq 100$. Από τις προηγούμενες ανισότητες προκύπτει ότι $-166, 67 \leq \varDelta \leq 100 \Rightarrow -166, 67 + 300 \leq 300 + \varDelta \leq 300 + 100 \Rightarrow 133, 33 \leq 300 + \varDelta \leq 400$. Άρα το εύρος εφικτότητας, για την δυϊκή τιμή 3, του δεξιού μέλους του δεύτερου περιορισμού είναι το $[133, 33,\ 400]$. Με άλλα λόγια αν το δεξί μέλος αυτού του περιορισμού παίρνει τιμές στο παραπάνω διάστημα, τότε η δυϊκή τιμή του περιορισμού αυτού θα έχει την ίδια τιμή 3.

Υποθέτουμε, τέλος, ότι το δεξί μέλος του τρίτου περιορισμού (ή περιορισμού συσκευασίας και αποστολής) αυξάνεται, κατά μία ποσότητα $\varDelta$, από 100 σε $100+\varDelta$. Τότε οι τιμές των βασικών μεταβλητών μεταβάλλονται όπως στον

Πίνακας 5

Βασικές μεταβλητές	…	**Λύση**
S_1	…	$175-5\varDelta$
R	…	$500-4\varDelta$
C	…	$150+6\varDelta$
z	…	$3700+28\varDelta$

$175 - 5\varDelta \geq 0 \Rightarrow 5\varDelta \leq 175 \Rightarrow \varDelta \leq 35$, $500 - 4\varDelta \geq 0 \Rightarrow 4\varDelta \leq 500 \Rightarrow \varDelta \leq 125$, $150+6\varDelta \geq 0 \Rightarrow 6\varDelta \geq -150 \Rightarrow \varDelta \geq -25$. Από τις ανισότητες αυτές προκύπτει ότι $-25 \leq \varDelta \leq 35 \Rightarrow 100-25 \leq 100+\varDelta \leq 100+35 \Rightarrow 75 \leq 100+\varDelta \leq 135$. Άρα το εύρος εφικτότητας, για την δυϊκή τιμή 28, του δεξιού μέλους του τρίτου περιορισμού είναι το [75, 135]. Με άλλα λόγια αν το δεξί μέλος αυτού του περιορισμού παίρνει τιμές στο παραπάνω διάστημα, τότε η δυϊκή τιμή αυτού του περιορισμού θα έχει την ίδια τιμή 28. Ο πρώτος περιορισμός είναι μη δεσμευτικός δεδομένου ότι $S_1 = 175$. Οι υπόλοιποι δύο περιορισμοί είναι δεσμευτικοί δεδομένου ότι $S_2 = S_3 = 0$

(χρησιμοποιούνται δηλ. όλοι οι διατιθέμενες ώρες κατά περίπτωση).

2 (i) Αρχικά παρατηρούμε ότι το πρόβλημα είναι ισορροπημένο δεδομένου ότι συνολική προσφορά $= 30+20 = 50 = 25+15+10 =$ συνολική ζήτηση. Προέλευση $1 =$ Jefferson City, Προέλευση $2 =$ Omaha, Προορισμός $1 =$ Des Moines, Προορισμός $2 =$ Kansas City, Προορισμός $3 =$ St. Louis. Για τις προσφορές έχουμε ότι $a_1 = 30$, $a_2 = 20$, και για τις ζητήσεις ότι $b_1 = 25$, $b_2 = 15$, $b_3 = 10$. Για τα κόστη μεταφοράς (ανά μονάδα προϊόντος) ισχύει ότι $c_{11} = 14$, $c_{12} = 9$, $c_{13} = 7$, $c_{21} = 8$, $c_{22} = 10$, $c_{23} = 5$. Έστω x_{ij} οι μονάδες προϊόντος που μεταφέρονται από τον i-προορισμό στην j-προέλευση, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$. Ο πίνακας μεταφοράς του προβλήματος είναι ο

Πίνακας 1

	Des Moines (1)	Kansas City (2)	St. Louis (3)	Προσφορά
Jefferson City (1)	14 x_{11}	9 x_{12}	7 x_{13}	30
Omaha (2)	8 x_{21}	10 x_{22}	5 x_{23}	20
Ζήτηση	25	15	10	

Το αντίστοιχο μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού (σε κανονική μορφή) είναι το

$$\min z = \sum_{i=1}^{z} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{3} x_{ij} = a_i = \begin{cases} 30, & i = 1 \\ 20, & i = 2 \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{ij} = b_j = \begin{cases} 25, & j = 1 \\ 15, & j = 2 \\ 10, & j = 3 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.$$

(ii) Προσδιορίζουμε την αρχική βασική εφικτή λύση με τον αλγόριθμο του ελάχιστου κόστους. Στον Πίνακα 1 το κελί με το ελάχιστο κόστος είναι το $(2, 3)$ οπότε θέτουμε $\boxed{x_{23} = \min(20, 10) = 10}$. Ικανοποιείται έτσι η ζήτηση του St. Louis και η αντίστοιχη στήλη διαγράφεται. Το υπόλοιπο προσφοράς της Omaha είναι $20-10=10$ μονάδες προϊόντος και προκύπτει ο επόμενος

Πίνακας 2

	Des Moines	Kansas City	Προσφορά
Jefferson City	14 x_{11}	9 x_{12}	30
Omaha	8 x_{21}	10 x_{22}	10
Ζήτηση	25	15	

κελί ελάχιστου κόστους $=(2,1) \Rightarrow \boxed{x_{21}=\min(10,\ 25)=10}$. Άρα εξαντλείται η προσφορά της Omaha και η αντίστοιχη γραμμή διαγράφεται. Το υπόλοιπο ζήτησης της Des Moines είναι $25-10=15$ οπότε προκύπτει ο

Πίνακας 3

	Des Moines	Kansas City	Προσφορά
Jefferson City	14 x_{11}	9 x_{12}	30
Ζήτηση	15	15	

κελί ελάχιστου κόστους $=(1,\ 2) \Rightarrow \boxed{x_{12}=\min(30,\ 15)=15}$ και η ζήτηση της Kansas City εξαντλείται. Η σχετική στήλη διαγράφεται και το υπόλοιπο προσφοράς της Jefferson City είναι $30-15=15$. Έτσι προκύπτει ο

Πίνακας 4

	Des Moines	Προσφορά
Jefferson City	14 x_{11}	15
Ζήτηση	15	

Θέτουμε $\boxed{x_{11} = 15}$ και ο αλγόριθμος τερματίζει. Παρατηρούμε ότι οι βασικές μεταβλητές είναι $4 = m + n - 1 = 2 + 3 - 1$ και συνεπώς η λύση που βρήκαμε είναι μη εκφυλισμένη. Άρα μπορούμε να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη λύση με εφαρμογή της μεθόδου MODI. Στον αρχικό πίνακα μεταφοράς αναγράφουμε τις βασικές μεταβλητές της αρχικής βασικής εφικτής λύσης και τις αντίστοιχες τιμές τους.

Πίνακας 1

	Des Moines (1)	Kansas City (2)	St. Louis (3)	Προσφορά
Jefferson City (1)	− 14 $x_{11} = 15$	9 $x_{12} = 15$	7 +	30
Omaha (2)	8 $x_{21} = 10$ +	10	− 5 $x_{23} = 10$	20
Ζήτηση	25	15	10	

Αντιστοιχούμε σε κάθε κελί βασικής μεταβλητής τους πολ/στές u_i και v_j και προσδιορίζουμε τις τιμές τους από το σύστημα $c_{i_j} = u_i + v_j$ θέτοντας $u_1 = 0$. Προκύπτουν τα ακόλουθα:

Για την $x_{11} \to c_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow 14 = u_1 + v_1$

Για την $x_{12} \to c_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow 9 = u_1 + v_2$

Για την $x_{21} \to c_{21} = u_2 + v_1 \Rightarrow 8 = u_2 + v_1$

Για την $x_{23} \to c_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow 5 = u_2 + v_3$.

Αν $u_1 = 0$ τότε προκύπτουν οι τιμές $v_1 = 14$, $v_2 = 9$, $u_2 = -6$, $v_3 = 11$. Υπολογίζουμε τους δείκτες βελτίωσης $c_{i_j} - u_i - v_j$ για κάθε μη βασική μεταβλητή:

Για την $x_{13} \to c_{13} - u_1 - v_3 = 7 - 0 - 11 = -4$

Για την $x_{22} \to c_{22} - u_2 - v_2 = 10 + 6 - 9 = 7$

Εφόσον υπάρχει αρνητικός δείκτης βελτίωσης η παραπάνω λύση δεν είναι βέλτιστη. Εισερχόμενη μεταβλητή είναι η μη βασική μεταβλητή με τον μικρότερο αρνητικό δείκτη βελτίωσης δηλ. η x_{13}. Ο μέγιστος δυνατός βρόχος με κορυφή στο κελί (1, 3) έχει τις υπόλοιπες κορυφές του στα κελιά (των βασικών μεταβλητών) (1, 1), (2, 1) και (2, 3) (βλ. τον προηγούμενο πίνακα στον οποίο εμφανίζονται και οι αυξομειώσεις των μεταβλητών κατά περίπτωση). Εξερχόμενη μεταβλητή είναι εκείνη, μεταξύ των μεταβλητών του βρόχου που μειώνονται, που έχει τη μικρότερη τιμή δηλ. η x_{23}. Άρα θέτουμε $x_{23} = 0$ και αναπροσαρμόζουμε τις τιμές των υπόλοιπων μεταβλητών του βρόχου προσθέτοντας ή αφαιρώντας την αρχική της τιμή ($= 10$). Οι υπόλοιπες βασικές μεταβλητές εκτός βρόχου παραμένουν ως έχουν. Έτσι προκύπτει ο

Πίνακας 5

	Des Moines (1)	Kansas City (2)	St. Louis (3)	Προσφορά
Jefferson City (1)	$\boxed{14}$ $x_{11} = 5$	$\boxed{9}$ $x_{12} = 15$	$\boxed{7}$ $x_{13} = 10$	30
Omaha (2)	$\boxed{8}$ $x_{21} = 20$	$\boxed{10}$	$\boxed{5}$	20
Ζήτηση	25	15	10	

Επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα βήματα

Για την $x_{11} \to c_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow 14 = u_1 + v_1$

Για την $x_{12} \to c_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow 9 = u_1 + v_2$

Για την $x_{13} \to c_{13} = u_1 + v_3 \Rightarrow 7 = u_1 + v_3$

Για την $x_{21} \to c_{21} = u_2 + v_1 \Rightarrow 8 = u_2 + v_1$.

Αν $u_1 = 0$ τότε προκύπτουν οι τιμές $v_1 = 14$, $v_2 = 9$, $v_3 = 7$, $u_2 = -6$.

Για την $x_{22} \to c_{22} - u_2 - v_2 = 10 + 6 - 9 = 7$

Για την $x_{23} \to c_{23} - u_2 - v_3 = 5 + 6 - 7 = 4$.

Εφόσον για κάθε μη βασική μεταβλητή ο αντίστοιχος δείκτης βελτίωσης είναι μη αρνητικός, η βασική εφικτή λύση με βασικές μεταβλητές τις $x_{11} = 5$, $x_{12} = 15$, $x_{13} = 10$, $x_{21} = 20$, είναι η βέλτιστη.

Το ελάχιστο συνολικό κόστος ισούται με $14 \cdot 5 + 9 \cdot 15 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 20 = 70 + 135 + 70 + 160 = 435$ χρηματικές μονάδες.