Εισαγωγή στην Αποτίμηση Παραγώγων

Στέλιος Ξανθόπουλος

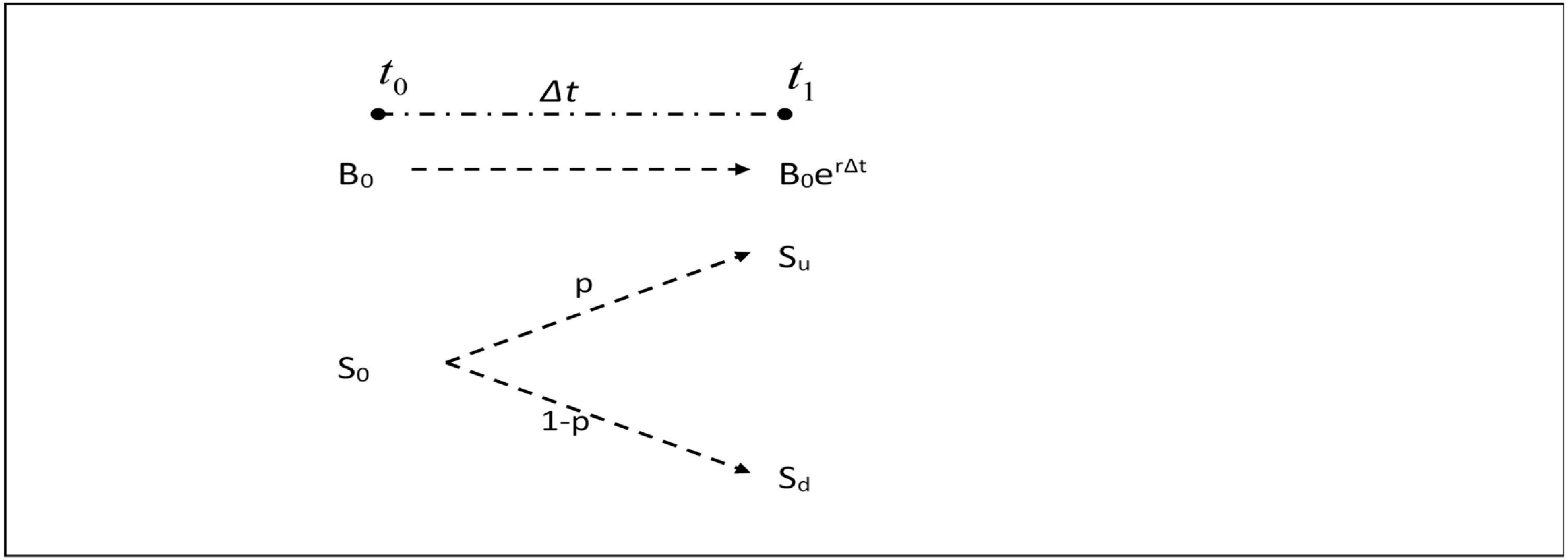
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Εισαγωγή στο διωνυμικό μοντέλο

Το διωνυμικό μοντέλο μιάς περιόδου

- **Η Αγορά**
- Δύο μόνο χρονικές στιγμές, t_0 και t_1 που καθορίζουν μια χρονική περίοδο $\Delta t = t_1 - t_0$
- Η αξία του χρήματος για αυτή τη χρονική περίοδο αντιπροσωπεύεται από ένα Τραπεζικό λογαριασμό με σταθερό επιτόκιο r, συνεχώς ανατοκιζόμενο
- Η αβεβαιότητα για το μέλλον αντιπροσωπεύεται από ένα αξιόγραφο S το οποίο την t_0 αξίζει S_0 και την t_1 θα λάβει μια από *δύο μόνο τιμές* $S_u > S_d$ με κάποιες πιθανότητες p και 1-p αντίστοιχα

Η Αγορά

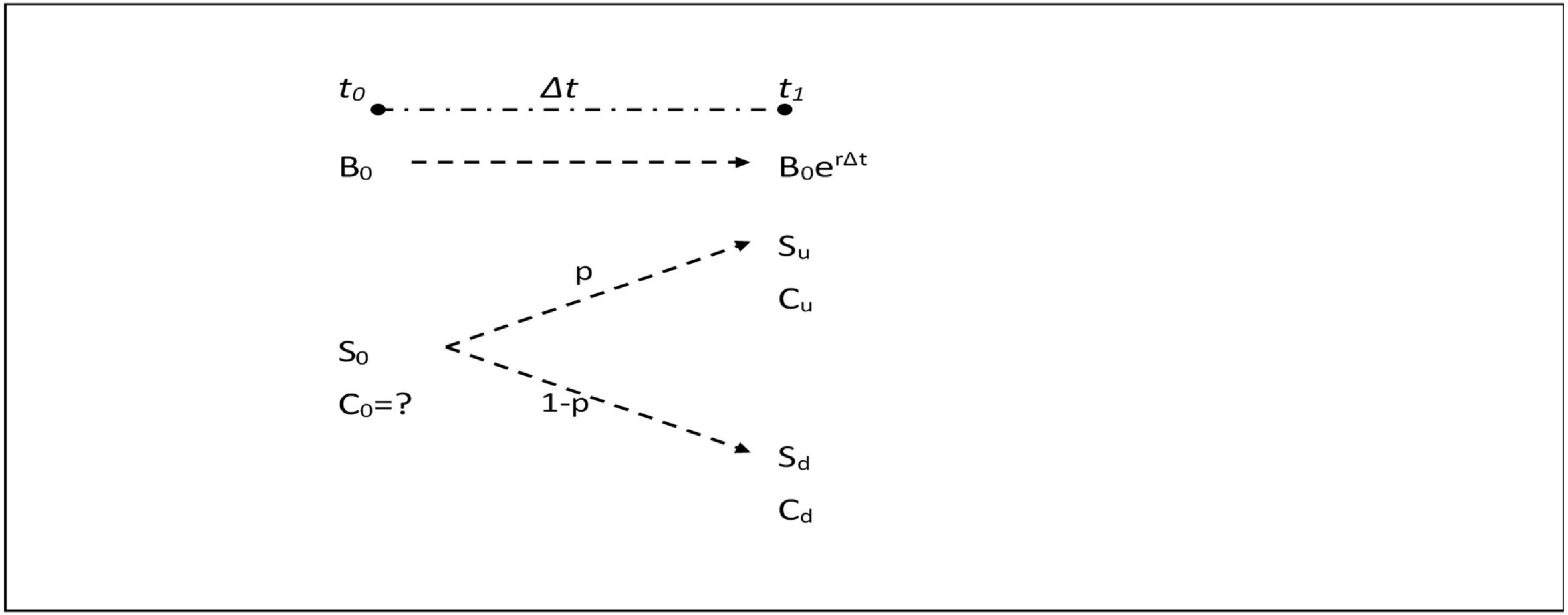


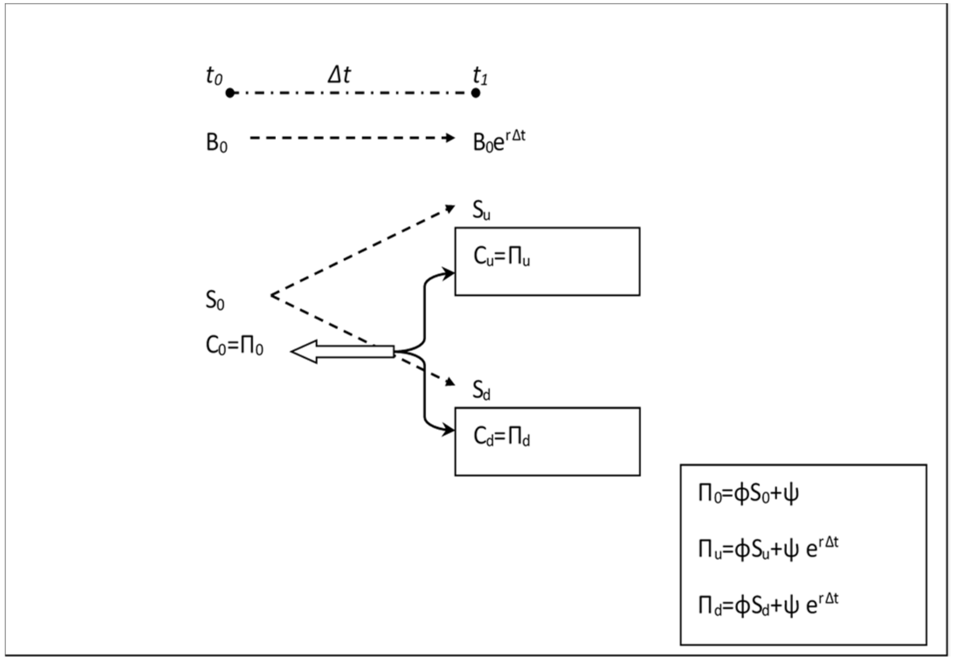
Για να μην υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage θα πρέπει προφανώς

$$S_d < S_0 \cdot e^{r\Delta t} < S_u$$

Το συμβόλαιο

Ποια πρέπει να είναι την χρονική στιγμή t_0 η τιμή C_0 του συμβολαίου C ώστε να μη δημιουργούνται ευκαιρίες arbitrage σε αυτήν την αγορά?





Η τιμολόγηση

Βρες φ και ψ ώστε

$C_u=\phi S_u+\psi\, e^{r\Delta t}$

$C_d=\phi S_d+\psi\, e^{r\Delta t}$

$$\phi=\frac{C_u-C_d}{S_u-S_d} \text{ και } \psi=e^{-r\Delta t}\frac{S_uC_d-S_dC_u}{S_u-S_d}$$

Τότε:

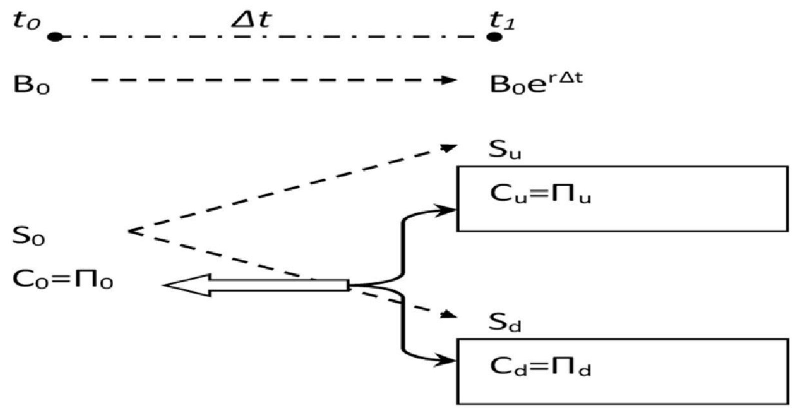
$$C_0=\underbrace{\frac{C_u-C_d}{S_u-S_d}}_{\phi}S_0+\underbrace{e^{-r\Delta t}\frac{S_uC_d-S_dC_u}{S_u-S_d}}_{\psi}$$

Risk neutral πιθανότητες

- Η τελευταία σχέση για το C_0 είναι ισοδύναμη με την

$$C_0 = \underbrace{e^{-r\Delta t}}_{\text{Παρούσα αξία}} \underbrace{\left[\underbrace{\left(\frac{S_0 e^{r\Delta t} - S_d}{S_u - S_d} \right)}_{0<q<1} C_u + \underbrace{\left(\frac{S_u - S_0 e^{r\Delta t}}{S_u - S_d} \right)}_{0<1-q<1} C_d \right]}_{\text{Μέση τιμή κάτω από το μέτρο πιθανότητας Q της τελικής αξίας του συμβολαίου}}$$

Συνοψίζοντας



$$q = \frac{S_0 \cdot e^{r\Delta t} - S_u}{S_u - S_d}$$

$$\phi = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$$

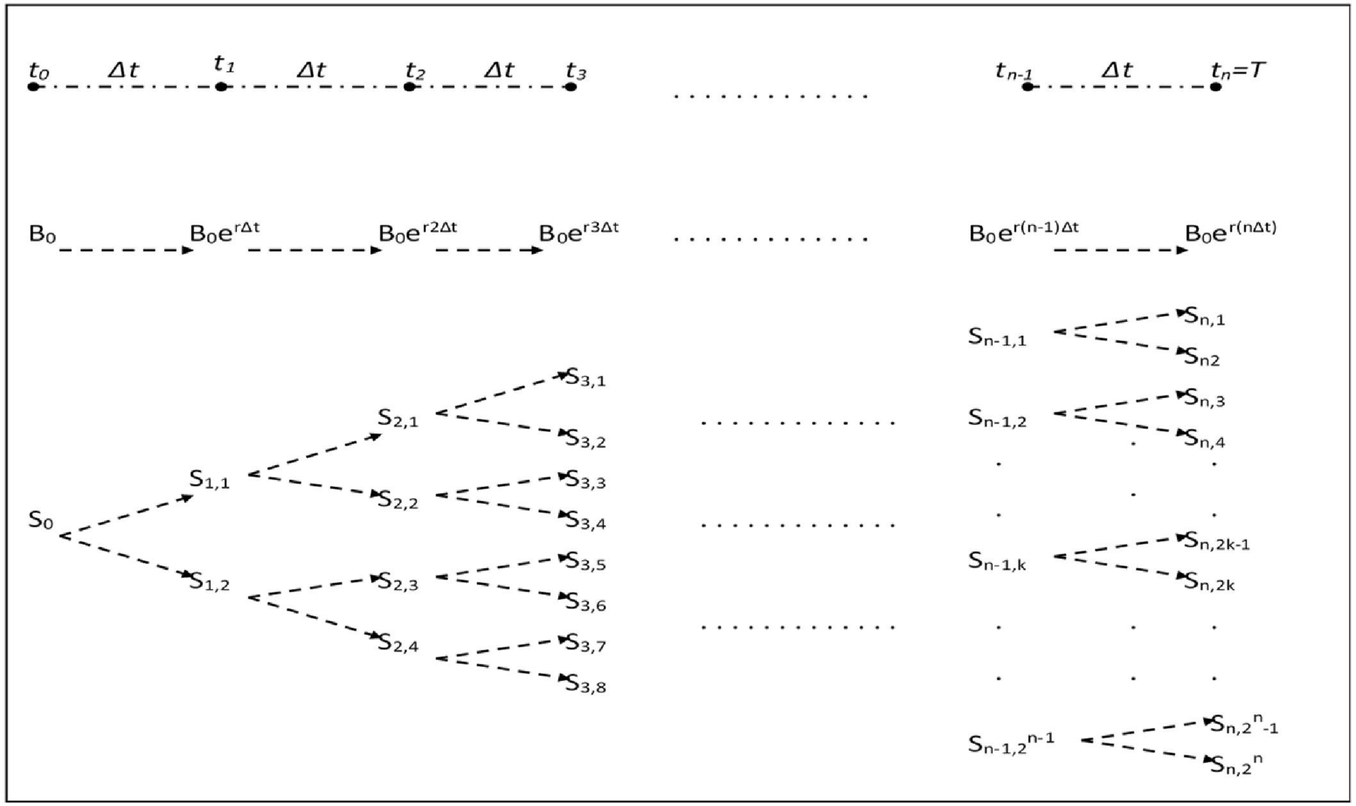
$$C_0 = e^{-r\cdot\Delta t} \cdot [q \cdot C_u + (1-q) \cdot C_d]$$

$\Pi_0 = \phi S_0 + \psi$

$\Pi_u = \phi S_u + \psi \; e^{r\Delta t}$

$\Pi_d = \phi S_d + \psi \; e^{r\Delta t}$

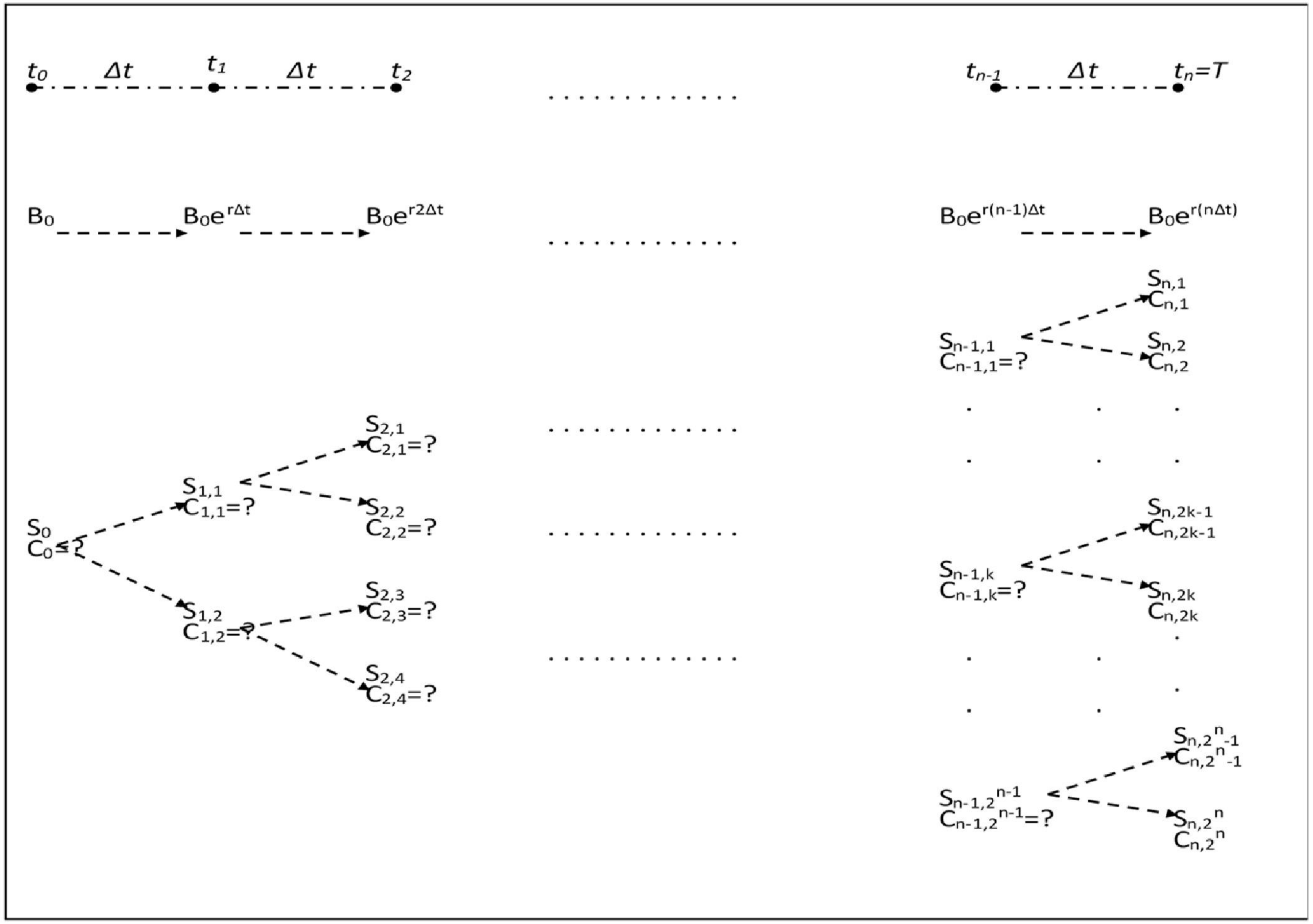
Το Διωνυμικό Μοντέλο Πολλών Περιόδων



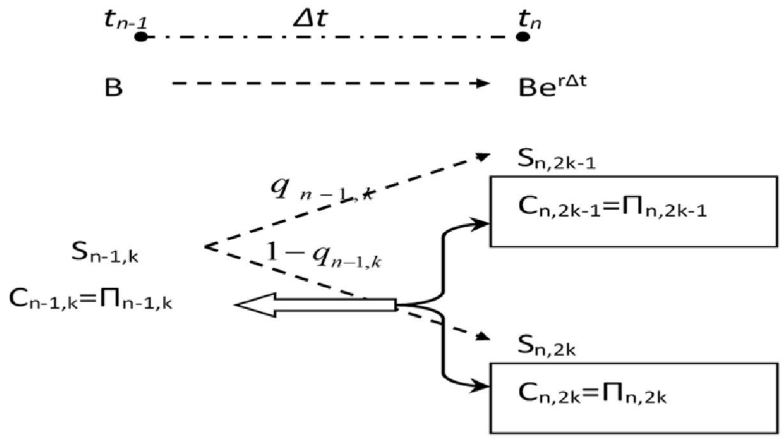
Για να μην υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage σε αυτή την αγορά θα πρέπει για όλα τα $t=1,2,\ldots,n$ και για όλα τα $k=1,2,\ldots,2^t$ να ισχύει ότι:

$$S_{t,2k} < S_{t-1,k} \cdot e^{r\cdot\Delta t} < S_{t,2k-1}$$

Το συμβόλαιο



=πολλά μοντέλα μιας περιόδου



$$q_{n-1,k}=\frac{S_{n-1,k}\cdot e^{r\Delta t}-S_{n,2k}}{S_{n,2k-1}-S_{n,2k}}$$

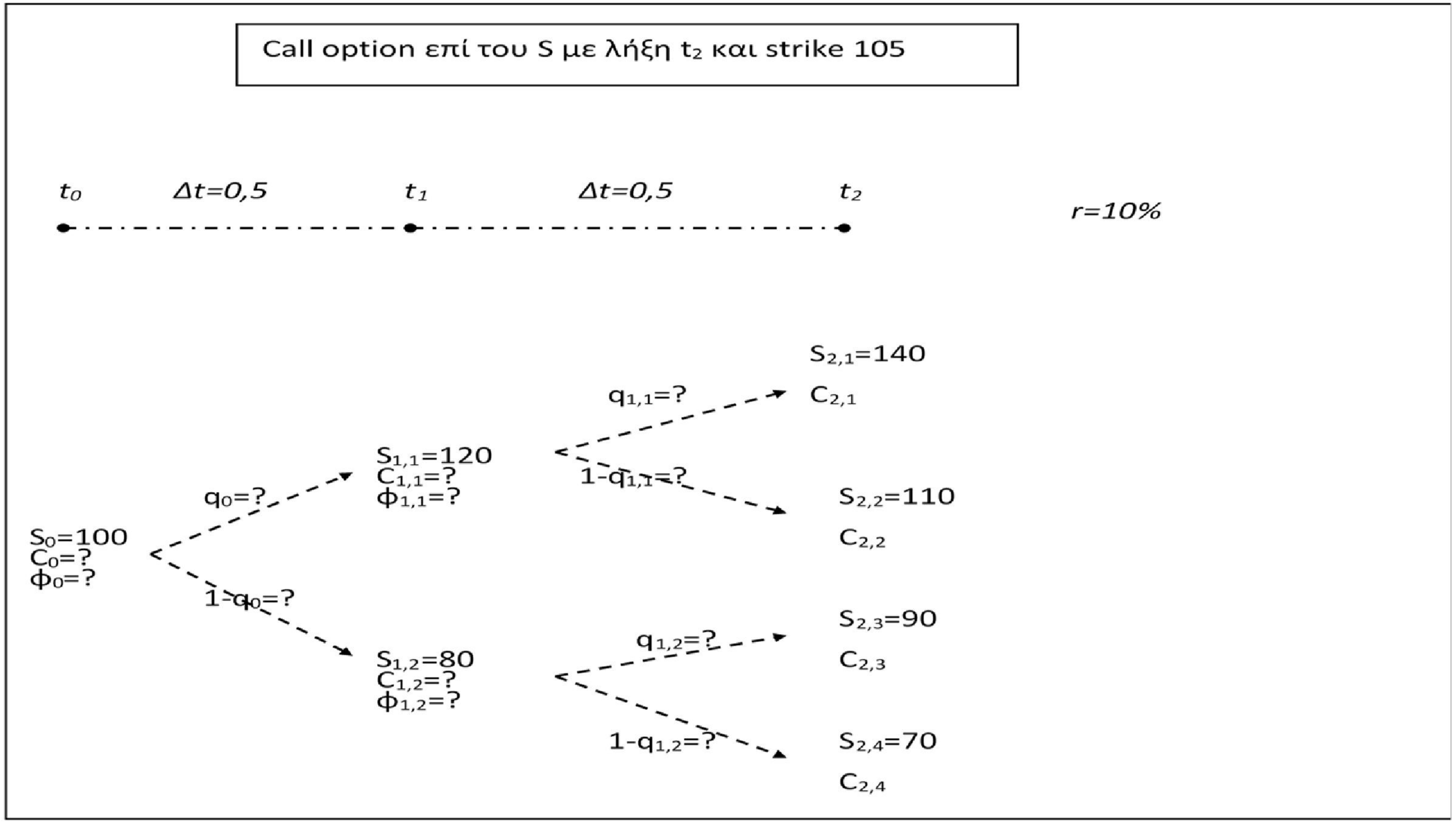
$$\phi_{n-1,k}=\frac{C_{n,2k-1}-C_{n,2k}}{S_{n,2k-1}-S_{n,2k}}$$

$$C_{n-1,k}=e^{-r\cdot\Delta t}\cdot[q\cdot C_{n,2k-1}+(1-q)\cdot C_{n,2k}]$$

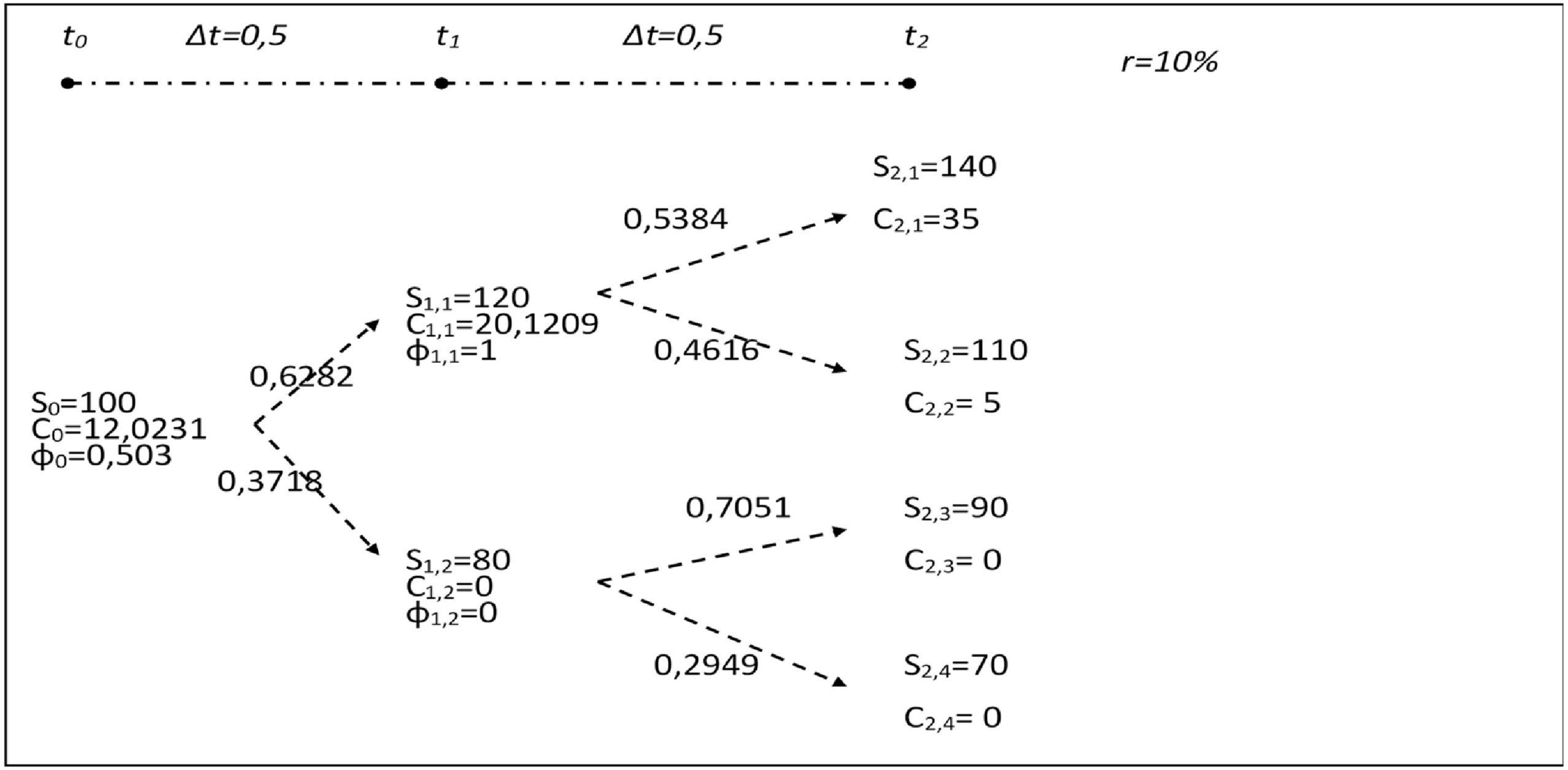
$$\Pi_{n-1,k}=\phi_{n-1,k}S_{n-1,k}+\psi_{n-1,k}$$

$$\Pi_{n,2k-1}=\phi_{n-1,k}S_{n,2k-1}+\psi_{n-1,k}\,e^{r\Delta t}$$

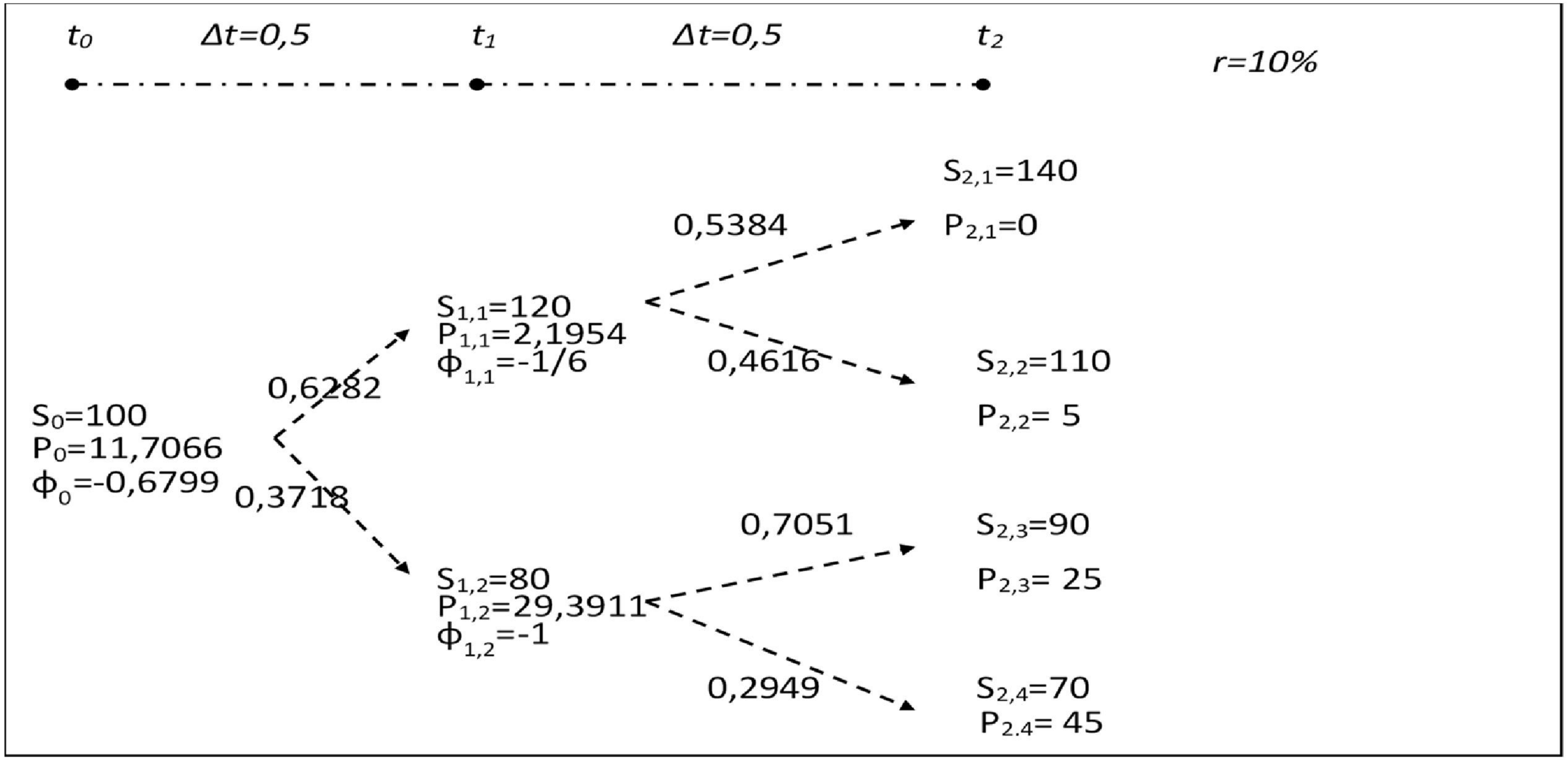
Παράδειγμα European Call



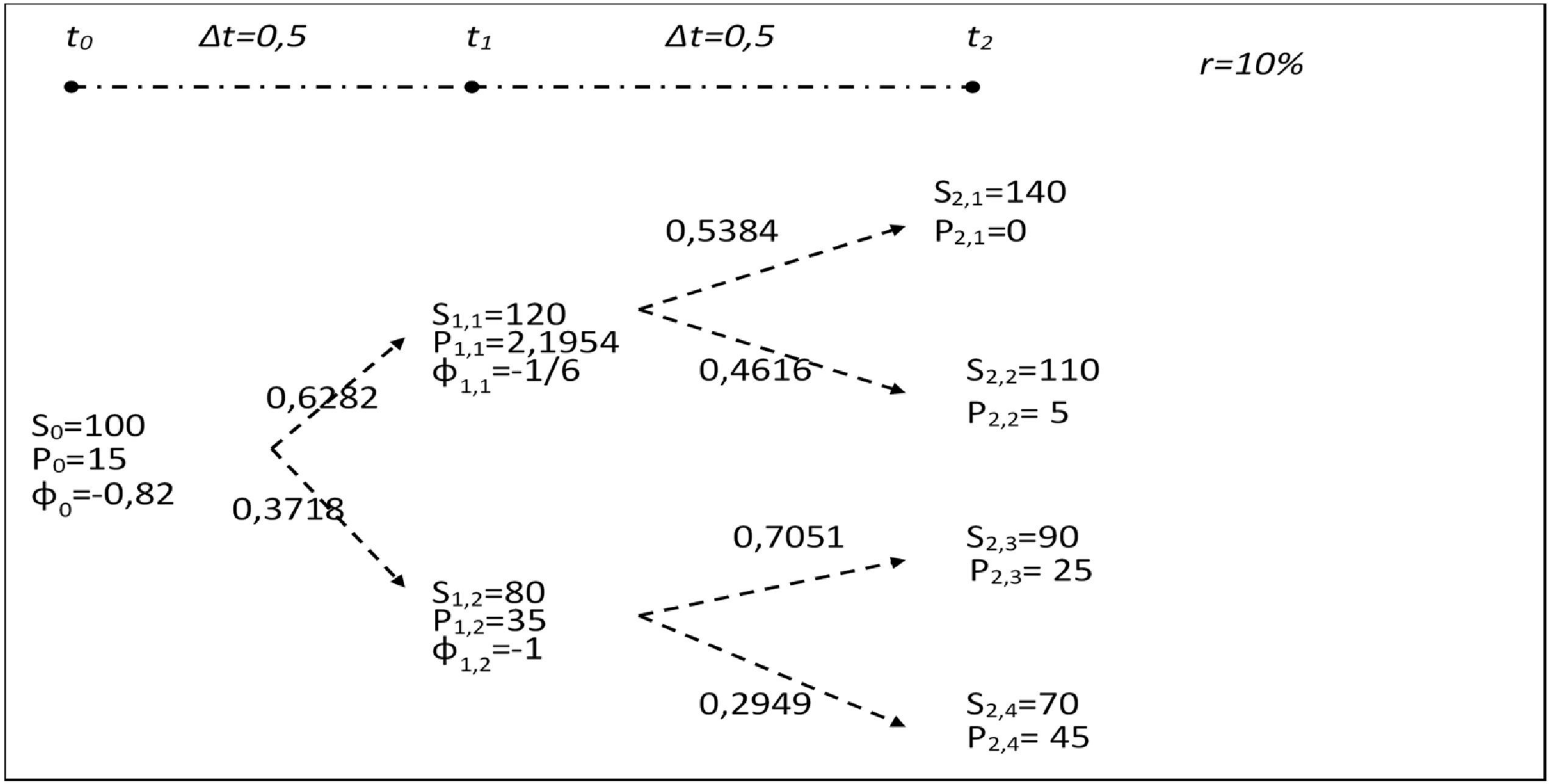
European Call λύση



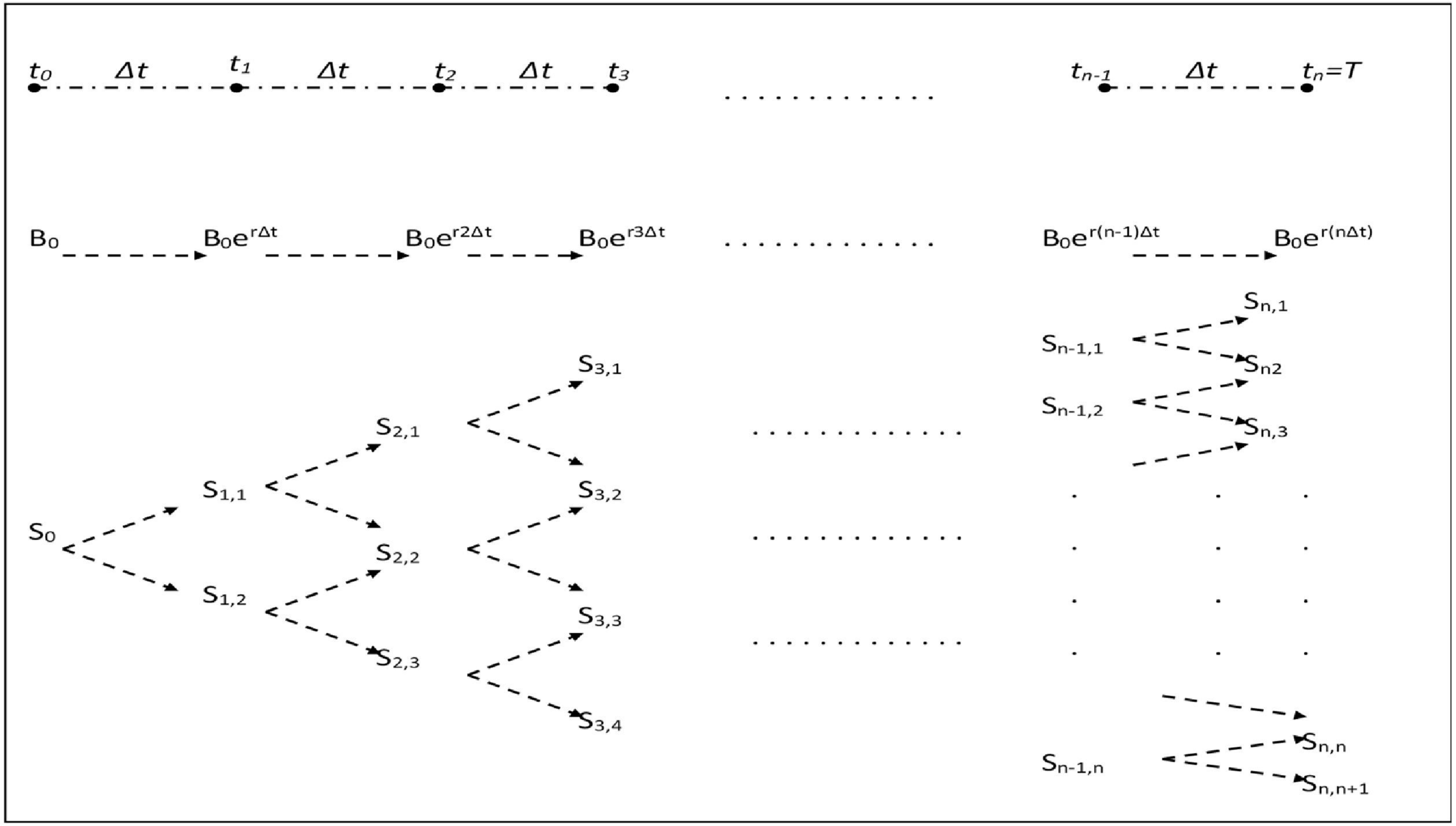
European Put (strike 115)



American Put (strike 115)



Αναδιπλούμενα δέντρα



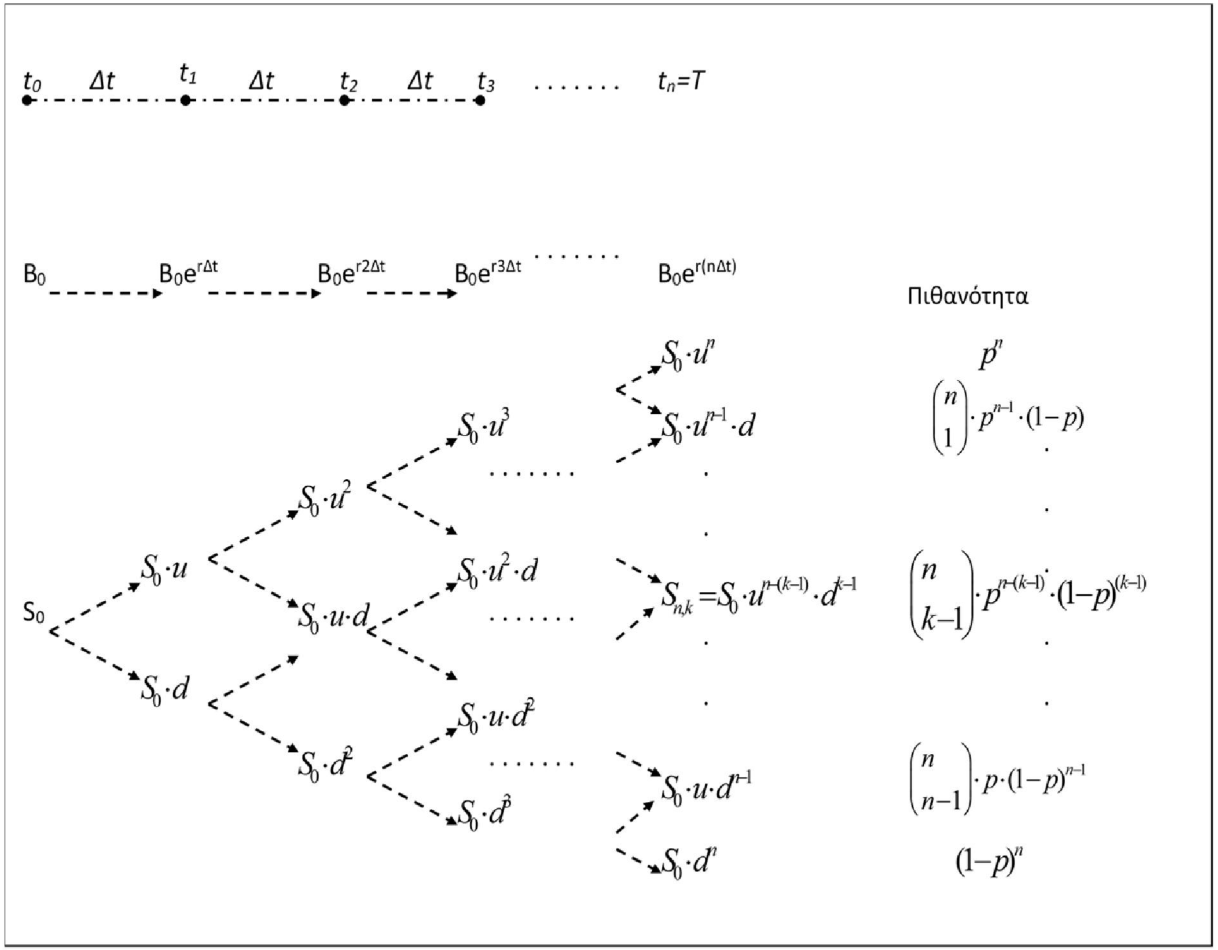
Απλοποίηση του μοντέλου

$$S(t_{k+1}) = \begin{cases} S(t_k)\cdot u & \text{με πιθανότητα } p \\ S(t_k)\cdot d & \text{με πιθανότητα } (1-p) \end{cases}$$

$$q = \frac{S_t \cdot e^{r\cdot\Delta t} - S_t \cdot d}{S_t \cdot u - S_t \cdot d} = \frac{e^{r\cdot\Delta t} - d}{u - d}$$

$$C_0 = e^{-r\cdot T} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot q^{(n-k)} \cdot (1-q)^k C_{n,k+1} = e^{-r\cdot T} \cdot \mathrm{E}_Q[C_n]$$

Πώς να διαλέξω όμως τα u, d και p?



Η λογαριθμοκανονική κατανομή των τιμών του αβέβαιου τίτλου

Αριθμητική απόδοση

- αριθμητική απόδοση του S στο διάστημα από t_1 έως t_2 ορίζεται ως $r_{[t_1,t_2]} = \frac{S_{t_2} - S_{t_1}}{S_{t_1}}$
- ισοδύναμο με το $S_{t_2} = S_{t_1}(1 + r_{[t_1,t_2]})$
- $r_{[t_1,t_3]} \neq r_{[t_1,t_2]} + r_{[t_2,t_3]}$, που δεν είναι ιδαίτερα βολικό

Γεωμετρική (ή λογαριθμική) απόδοση

- γεωμετρική (ή λογαριθμική) απόδοση του S στο διάστημα από t_1 έως t_2 ορίζεται ως $R_{[t_1,t_2]} = \ln\left(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}\right)$
- ισοδύναμο με το $S_{t_2} = S_{t_1}\exp(R_{[t_1,t_2]})$
- Παρατηρείστε ότι τώρα $R_{[t_1,t_3]} = R_{[t_1,t_2]} + R_{[t_2,t_3]}$

Οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή?

- Το πιο απλό ρεαλιστικό μοντέλο υποθέτει ότι οι (γεωμετρικές) **αποδόσεις** του υποκείμενου τίτλου (π.χ. μιας μετοχής) ακολουθούν **κανονική** κατανομή (και κατά συνέπεια οι *τιμές* της μετοχής ακολουθούν *λογαριθμοκανονική* κατανομή).
- Ας δούμε κάποιες ελάχιστες υποθέσεις κάτω από τις οποίες αυτό το μοντέλο αιτιολογείται

- Θεωρούμε μια πολύ μικρή χρονική περίοδο Δt
- χρονικές στιγμές $t_0 = 0, t_1 = \Delta t, t_2 = 2 \cdot \Delta t, \dots$.
- S_{t_k} τυχαία μεταβλητή της τιμής του τίτλου S την t_k
- $R_{\Delta t_k} \equiv R_{[t_{k-1}, t_k]} \equiv \ln\left(\frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}}\right)$
- ***<u>Υπόθεση:</u>* Οι αποδόσεις $\boldsymbol{R_{\Delta t_k}}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με κοινή μέση τιμή $\boldsymbol{\mu_{\Delta t}}$ και κοινή διακύμανση $\boldsymbol{\sigma^2_{\Delta t}}$**

- Έστω τώρα η χρ. στιγμή T=1 έτος
- $T = t_n = 1$ για κάποιο n, ή ισοδύναμα $\Delta t = \frac{1}{n}$
- $\mu = E[R_{[0,1]}],\ \sigma^2 = Var[R_{[0,1]}]$
- Προφανώς $R_{[0,1]} = R_{\Delta t_1} + \cdots + R_{\Delta t_n}$, οπότε
- $\mu = n \cdot \mu_{\Delta t} \Rightarrow \mu_{\Delta t} = \mu \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow \mu_{\Delta t} = \mu \cdot \Delta t$
- $\sigma^2 = n \cdot {\sigma^2}_{\Delta t} \Rightarrow {\sigma^2}_{\Delta t} = \sigma^2 \cdot \frac{1}{n} \Rightarrow {\sigma^2}_{\Delta t} = \sigma^2 \cdot \Delta t$

- Έστω τώρα οποιαδήποτε χρονική στιγμή $T = t_N = N \cdot \Delta t$, για μεγάλο N
- Έστω $R_T = R_{[0,T]} = \ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$
- Προφανώς $R_{[0,T]} = R_{\Delta t_1} + \cdots + R_{\Delta t_N}$, άρα
- $E(R_T) = N \cdot \mu_{\Delta t} = \mu \cdot N \cdot \Delta t = \mu \cdot T$ και
- $Var(R_T) = N \cdot {\sigma^2}_{\Delta t} = \sigma^2 \cdot N \cdot \Delta t = \sigma^2 \cdot T$ και
- Κεντρικό Οριακό Θεώρημα ⇒ $R_T \to N(\mu T, \sigma^2 T)$
- Άρα $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) \sim N(\mu T, \sigma^2 T)$ ή αλλιώς $\ln(S_T) \sim N(\ln(S_0) + \mu T, \sigma^2 T)$

<u>Παρατήρηση 1</u>: Εάν S_T ακολουθεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή, τότε η μέση τιμή της S_T δεδομένης της σημερινής τιμής S_0 *μπορεί να δειχθεί* ότι δίνεται από τη σχέση $E\left[S_T \mid S_0\right] = S_0 \cdot \exp\left[\mu \cdot T + \sigma^2 \cdot \frac{\mathrm{T}}{2}\right]$

<u>Παρατήρηση 2 (συνέχεια της προηγούμενης παρατήρησης)</u>

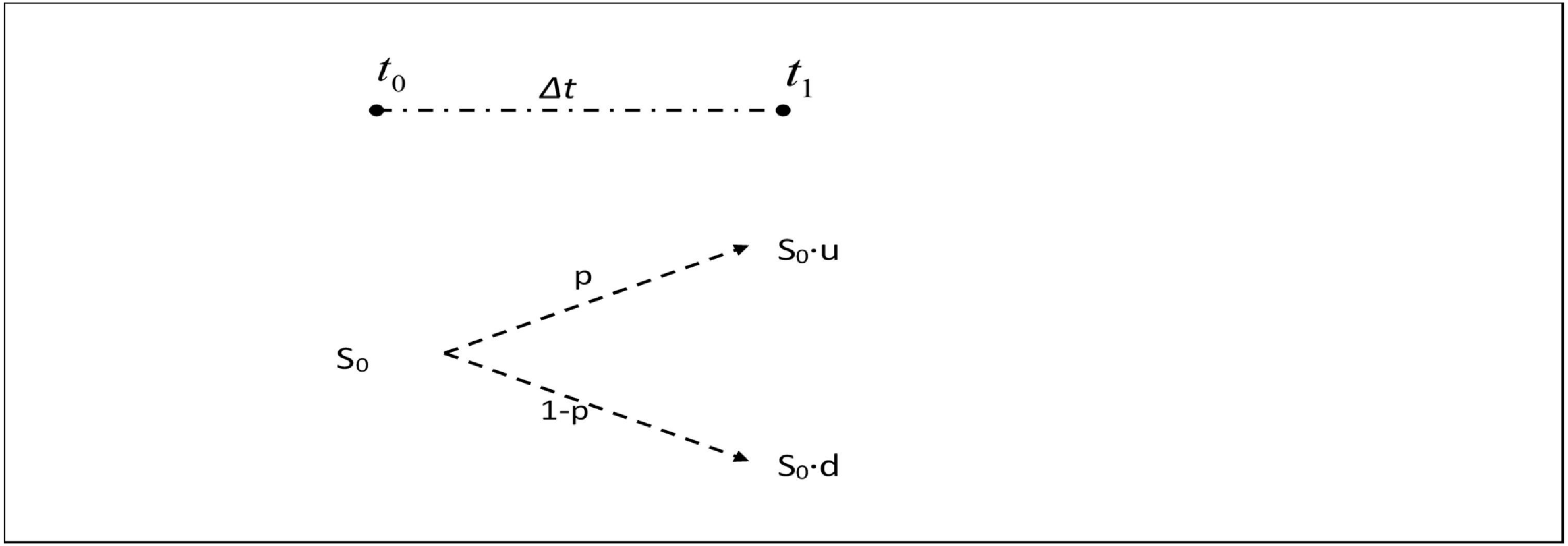
Το μέτρο των risk neutral πιθανοτήτων κατασκευάσθηκε έτσι ώστε κάτω από αυτό το μέτρο να ισχύει ότι $E_Q\left[S_T \mid S_0\right] = S_0 \cdot \exp\left[r \cdot T\right]$. Συγκρίνοντας αυτή τη σχέση με αυτή της προηγούμενης παρατήρησης συμπεραίνουμε ότι κάτω από το risk neutral μέτρο θα πρέπει να ισχύει $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$

Διωνυμικό μοντέλο με σταθερή τάση και θόρυβο

- Στην συνέχεια θα φτιάξουμε το διωνυμικό ανάλογο ενός μοντέλου που επιχειρεί να περιγράψει την εξέλιξη της τιμής του αβέβαιου τίτλου, εάν αυτή έχει σταθερή δεδομένη τάση μ και σταθερό δεδομένο θόρυβο σ.
- Καθώς η χρονική περίοδος Δt τείνει στο 0 , το διωνυμικό μοντέλο θα τείνει στη λογαριθμοκανονική κατανομή για την τιμή του αβέβαιου τίτλου.

Διωνυμικό δέντρο με μέση ετήσια απόδοση μ και volatility σ

- Πρώτα για μια περίοδο



- $S_1 = \begin{cases} S_0 \cdot u,\ \ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\ p \\ S_0 \cdot d, \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\ 1-p \end{cases}$
- $R_1 = \ln\left(\frac{S_1}{S_0}\right) = \begin{Bmatrix} \ln\left(\frac{S_0 \cdot u}{S_0}\right),\ \ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\ p \\ \ln\left(\frac{S_0 \cdot d}{S_0}\right),\ \ \ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\ 1-p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ln(u)\,,\ \ \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\ p \\ \ln(d)\,, \mu\varepsilon\ \pi\iota\theta\ 1-p \end{Bmatrix}$
- $\mu \cdot \Delta t = E(R_1) = p\ln(u) + (1-p)\ln(d)$
- $\sigma^2 \cdot \Delta t = Var(R_1) = E(R_1^2) - (\mu \cdot \Delta t)^2 =$

  $p(\ln(u))^2 + (1-p)(\ln(d))^2 - (\mu \cdot \Delta t)^2$
- Λύνοντας το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων ως προς u και d και λαμβάνοντας υπόψη ότι u>d καταλήγουμε στα

$$u = \exp\left(\mu \cdot \Delta t + \sqrt{\frac{1-p}{p}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right)$$
$$d = \exp\left(\mu \cdot \Delta t - \sqrt{\frac{p}{1-p}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right)$$

- Παρατηρείστε ότι αν επιλέξουμε p=1/2 οι προηγούμενες σχέσεις παίρνουν την πιο απλή μορφή

$$u = \exp\left(\mu \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right)$$
$$d = \exp\left(\mu \cdot \Delta t - \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right)$$

- <u>Για πολλές περιόδους</u>

Απλά έχουμε πολλά δέντρα μιας περιόδου όπως αυτό πο φτιάξαμε

- Ας δούμε χαρακτηριστικά τι γίνεται στη χρονική στιγμή $t_n = n \cdot \Delta t$

$$S_{t_n} = \left(S_0 \cdot u^{n-k} \cdot d^k\right)_{k=0,1,\ldots,n}$$

όπου το $S_0 \cdot u^{n-k} \cdot d^k$ έχει πιθανότητα $\binom{n}{k} p^{n-k}(1-p)^k$

- Αντικάθιστώντας τα u και d με τις εκφράσεις που βρήκαμε πριν έχουμε:

$$S_{t_n} = \left(S_0 \exp\left(\mu \Delta t + \sqrt{\frac{1-p}{p}} \sigma \sqrt{\Delta t}\right)^{n-k} \exp\left(\mu \Delta t - \sqrt{\frac{p}{1-p}} \sigma \sqrt{\Delta t}\right)^{k} \right)_{k=0,1,\ldots,n} =$$

$$\left(S_0 \cdot \exp\left(\mu \cdot n \cdot \Delta t + \frac{(1-p)(n-k)-pk}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right)\right)_{k=0,1,\ldots,n} =$$

$$\left(S_0 \cdot \exp\left(\mu \cdot t_n + \frac{(1-p)(n-k)-pk}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot \sigma \cdot \frac{\sqrt{t_n}}{\sqrt{n}}\right)\right)_{k=0,1,\ldots,n} =$$

$$S_0 \cdot \exp\left(\mu \cdot t_n + \frac{(1-p)X_n - p(n-X_n)}{\sqrt{p(1-p)n}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n}\right)$$

όπου X_n παριστάνει το πλήθος των ανοδικών κινήσεων σε n βήματα.

Επομένως:

$$S_{t_n} = S_0 \cdot \exp\left(\mu \cdot t_n + \underbrace{\frac{X_n - pn}{\sqrt{p(1-p)n}}}_{\to N(0,1)} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n}\right)$$ και άρα

$$\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right) = \mu \cdot t_n + \underbrace{\frac{X_n - pn}{\sqrt{p(1-p)n}}}_{\to N(0,1)} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n}$$

Συνεπώς:

$\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right) \to N(\mu t_n, \sigma^2 t_n)$ ή αλλιώς

$\ln\left(S_{t_n}\right) \to N(\ln(S_0) + \mu t_n, \sigma^2 t_n)$

- Για κάθε p θα έχω και ένα διαφορετικό δέντρο. Όμως όλα αυτά τα δέντρα θα έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση μt, την ίδια διακύμανση $σ^2t$ σε κάθε χρονική στιγμή t και επιπλέον ασυμπτωτικά οι αποδόσεις θα τείνουν στην κανονική κατανομή.
- Με αυτή την έννοια όλα αυτά τα δέντρα είναι «καλά» και συνεπώς μπορώ να διαλέξω το πιο απλό, δηλ. p=1/2

(προσέξτε ότι αυτές οι πιθανότητες p θεωρούνται ως οι πραγματικές πιθανότητες και όχι οι risk neutral).

Περιγραφή

Κάθε χρονική περίοδος είναι διάρκειας Δt.
Θεωρούμε τρείς καθορισμένες και σταθερές παραμέτρους
μ=τάση
σ=θόρυβος
r=επιτόκιο
όλα μετρημένα σε ετήσια βάση.
Η αξία B_t του τραπεζικού λογαριασμού B τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση

$B_t = B_0 \cdot e^{r \cdot t}$.

Η διαδικασία που θα ακολουθεί η τιμή του αξιόγραφου A, δίνεται από τη σχέση:

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t \cdot e^{\mu \cdot \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}}, & \text{με πιθανότητα } 1/2 \\ S_t \cdot e^{\mu \cdot \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t}}, & \text{με πιθανότητα } 1/2 \end{cases}$$

(Οι πιθανότητες ½ που αναφέρονται παραπάνω θεωρούμε ότι είναι οι *πραγματικές* πιθανότητες ανόδου και καθόδου σε κάθε σημείο.)

Παράδειγμα

S_0	100	
μ	50%	ανά έτος
σ	30%	ανά έτος
Δt	0,082192	30 ημέρες
r	4%	

		128,94
	113,55	
100,00		108,57
	95,61	
		91,41

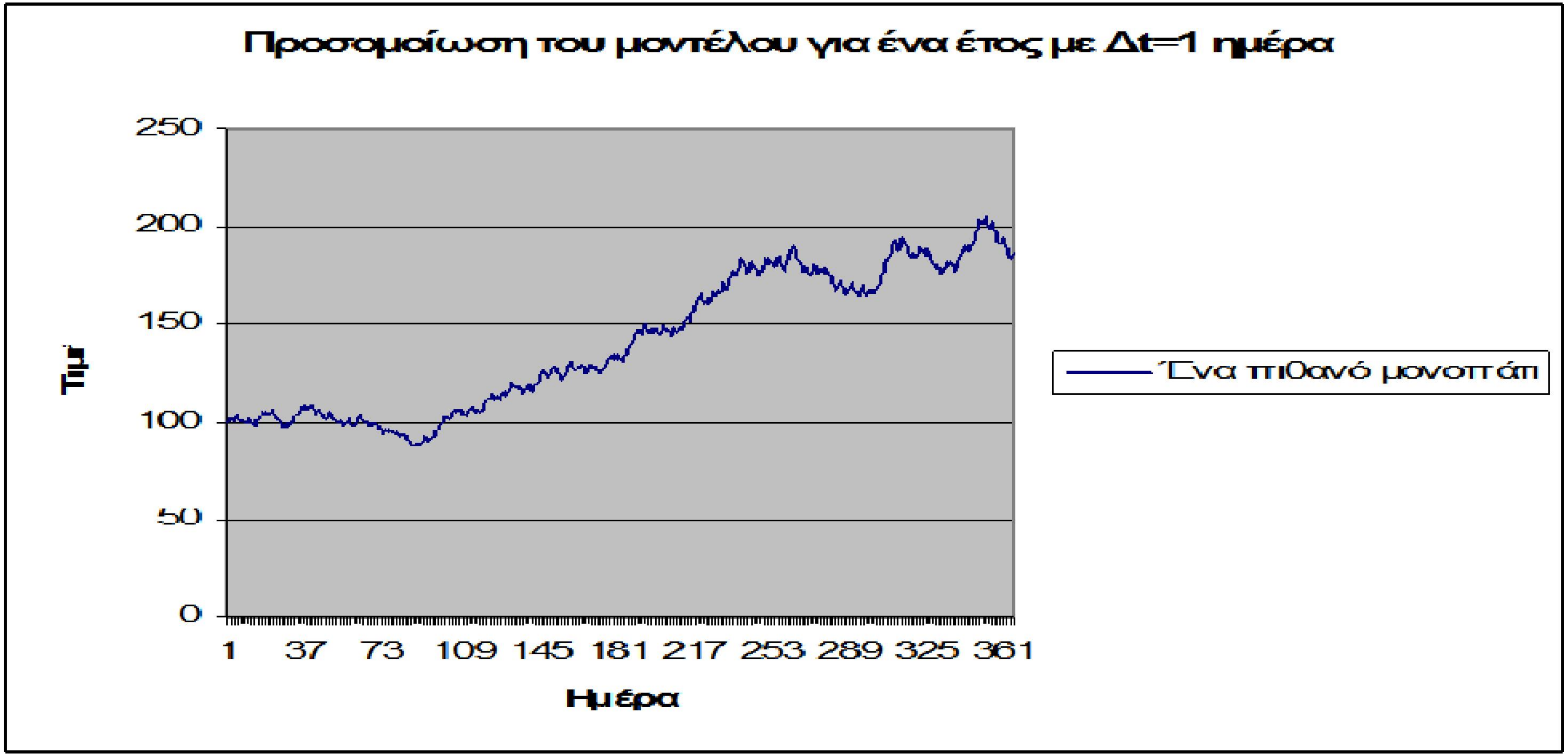
S_0	100	
μ	50%	ανά έτος
σ	30%	ανά έτος
Δt	0,027397	10 ημέρες
r	4%	

						146,25
					137,27	
				128,84		132,42
			120,93		124,29	
		113,51		116,66		119,90
	106,54		109,50		112,54	
100,00		102,78		105,63		108,57
	96,47		99,15		101,90	
		93,06		95,65		98,30
			89,77		92,27	
				86,60		89,01
					83,54	
						80,59

S_0	100	
μ	50%	ανά έτος
σ	30%	ανά έτος
Δt	0,013699	5 ημέρες
r	4%	

												165,46
											158,66	
										152,14		154,24
									145,89		147,90	
								139,89		141,82		143,78
							134,14		136,99		137,87	
						128,63		130,40		132,20		134,03
					123,34		125,05		126,77		128,52	
				118,28		119,91		121,56		123,24		124,94
			113,42		114,98		116,57		118,17		119,80	
		108,75		110,25		111,78		113,32		114,88		116,46
	104,29		105,72		107,18		108,66		110,16		111,68	
100,00		101,38		102,78		104,20		105,63		107,09		108,57
	97,21		98,55		99,91		101,29		102,69		104,11	
		94,50		95,81		97,13		98,47		99,83		101,20
			91,87		93,14		94,42		95,72		97,05	
				89,31		90,54		91,79		93,06		94,34
					86,82		88,02		89,23		90,46	
						84,40		85,57		86,75		87,94
							82,05		83,18		84,33	
								79,76		80,86		81,98
									77,54		78,61	
										75,38		76,42
											73,28	
												71,24

Το επόμενο διάγραμμα δείχνει ένα από τα μονοπάτια που θα μπορούσε να ακολουθήσει η τιμή της μετοχής στη διάρκεια ενός έτους στο αντίστοιχο δέντρο με Δt=1 ημέρα



Η κατανομή κάτω από το risk neutral μέτρο

- *Είδαμε προηγουμένως ότι η απόδοση* $\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right) \to N(\mu t_n, \sigma^2 t_n)$.
- *Αναρωτιόμαστε πώς να μοιάζει η κατανομή της απόδοσης* $\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right)$ *όταν αλλάξουμε τις πιθανότητες από p=1/2 στις risk neutral πιθανότητες q.*

- Η σχέση $\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right) = \mu \cdot t_n + \underbrace{\frac{X_n - pn}{\sqrt{p(1-p)n}}}_{\to N(0,1)} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n}$

που είδαμε παραπάνω παίρνει για p=1/2 τη μορφή:

$$\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right) = \mu \cdot t_n + \underbrace{\frac{2X_n - n}{\sqrt{n}}}_{\to N(0,1)} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n}$$

- Η κατανομή της επηρεάζεται μόνο από την κατανομή της διωνυμικής X_n.
- Το μόνο που αλλάζει με την αλλαγή μέτρου στην X_n είναι η πιθανότητα ανόδου που τώρα είναι η risk neutral πιθανότητα q αντί για ½.
- Επομένως η X_n εξακολουθεί να είναι διωνυμική αλλά με μέσο nq και διακύμανση nq(1-q).
- Άρα η $\frac{2X_n-n}{\sqrt{n}}$ εξακολουθεί να τείνει στην κανονική κατανομή αλλά τώρα με μέσο $\frac{2nq-n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}\,(2q-1)$ και διακύμανση $4q(1-q)$.

- Συνεπώς η $\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right) = \mu \cdot t_n + \frac{2X_n-n}{\sqrt{n}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n}$ εξακολουθεί να τείνει στην κανονική αλλά με μέσο $\mu \cdot t_n + \sqrt{n}\,(2q-1)\sigma\sqrt{t_n}$ και διακύμανση $4q(1-q) \cdot \sigma^2 \cdot t_n$.
- Ας υπολογίσουμε και ας αντικαταστήσουμε λοιπόν τα q ώστε να δούμε πως μοιάζει κάτω από το risk neutral μέτρο η μέση τιμή και η διακύμανση της απόδοσης

- Ας θυμηθούμε ότι

$$q = \frac{\exp(r\,\Delta t) - d}{u - d} = \frac{\exp(r\,\Delta t) - \exp(\mu \Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t})}{\exp(\mu \Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}) - \exp(\mu \Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t})}$$

- Εάν αντικαταστήσουμε όλες τις δυνάμεις του e σε αυτόν τον τύπο με το αντίστοιχο ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0 και επίσης θεωρήσουμε $\Delta t^k = 0$ για όλα τα k>1, λαμβάνουμε την εξής προσέγγιση:

$$q = \frac{1}{2}\left[1 - \sqrt{\Delta t}\left(\frac{\mu + \frac{\sigma^2}{2} - r}{\sigma}\right)\right]$$

- Αντικαθιστώντας τώρα με αυτό το q, παίρνουμε ότι

η $\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right) = \mu \cdot t_n + \frac{2X_n - n}{\sqrt{n}} \cdot \sigma \cdot \sqrt{t_n}$ εξακολουθεί να τείνει στην κανονική αλλά με μέσο $(r - \frac{\sigma^2}{2})t_n$ και διακύμανση που ασυμπτωτικά παραμένει η ίδια $\sigma^2 t_n$.

- Δηλαδή κάτω από το risk neutral μέτρο

$$\ln\left(\frac{S_{t_n}}{S_0}\right) \to N\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t_n, \sigma^2 t_n\right) \text{ ή αλλιώς}$$

$$\ln\left(S_{t_n}\right) \to N\left(\ln(S_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t_n, \sigma^2 t_n\right)$$

Το μοντέλο Cox-Ross-Rubinstein (CRR) για την τιμολόγηση παραγώγων

- Προσέξτε ότι η πραγματική μέση απόδοση μ του αβέβαιου τίτλου, έχει εξαφανιστεί από τον τύπο της κατανομής του S_t κάτω από το risk neutral μέτρο.
- Δηλαδή με όποιο μ και να είχα ξεκινήσει (π.χ. $\mu = 0$) θα κατέληγα στην ίδια σχέση

$$S_t = S_0 \cdot \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t} \cdot N(0,1)\right]$$

για την κατανομή του S_t κάτω από το risk neutral μέτρο. Αυτό μας κάνει να σκεφθούμε ότι για την τιμολόγηση των παραγώγων, δεν έχει σημασία ποια είναι η αναμενόμενη απόδοση μ του αβέβαιου τίτλου και ότι <u>αυτό που πραγματικά παίζει ρόλο είναι το volatility σ</u>. Άρα *για λόγους τιμολόγησης* παραγώγων θα μπορούσα να κατασκευάσω το διωνυμικό μου μοντέλο κατευθείαν και πιο απλά από τη σχέση

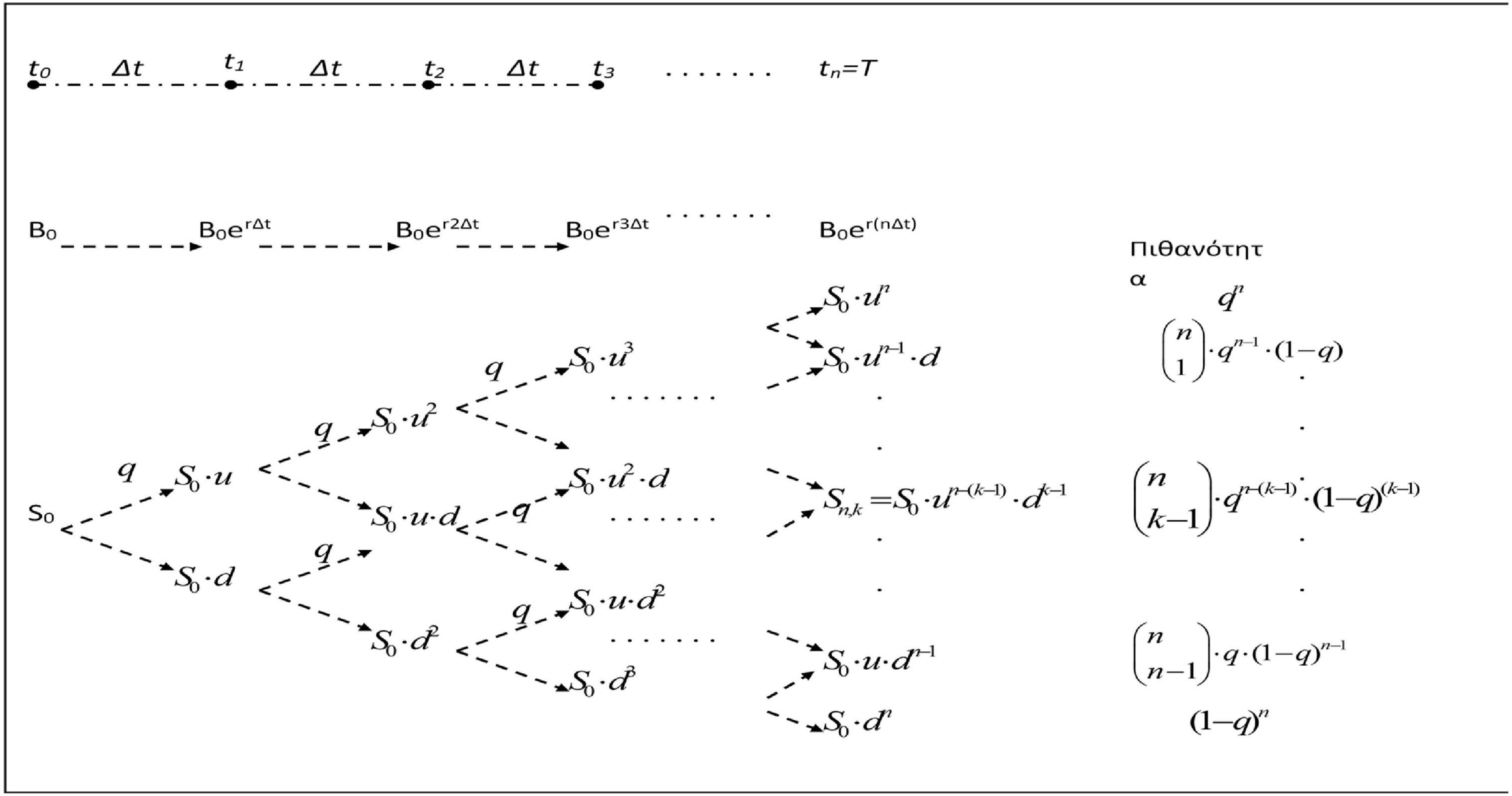
$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t \cdot e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ S_t \cdot e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{cases}$$

- Αυτό το τελευταίο μοντέλο ονομάζεται μοντέλο Cox, Ross, Rubinstein (CRR)

Τα (συνήθη) δέντρα τιμολόγησης παραγώγων πρακτικά

- Σύμφωνα με όσα έχουμε πει μέχρι στιγμής, σε μια αγορά που δεν επιτρέπει arbitrage κάθε παράγωγο μπορεί να τιμολογηθεί με την υπόθεση ότι η αγορά είναι risk neutral. Αυτό σημαίνει ότι για την αποτίμηση των παραγώγων μπορούμε να υποθέσουμε τα εξής:
- 1. Η αναμενόμενη απόδοση όλων των αξιόγραφων ισούται με το τραπεζικό επιτόκιο
- 2. Οι μελλοντικές χρηματοροές μπορούν να τιμολογηθούν βρίσκοντας την παρούσα αξία της αναμενόμενης τελικής τους αξίας.

- Στο επόμενο μοντέλο θέλουμε να προσδιορίσουμε τους παράγοντες u και d και τις risk neutral πιθανότητες q και 1-q ώστε το δέντρο που θα προκύψει να είναι συνεπές με τα παραπάνω και με την περιγραφή της τιμής μιας μετοχής που η απόδοση της έχει volatility σ.



t_0 Δt t_1 Δt t_2 Δt t_3 .... $t_n=T$
B_0 $B_0e^{r\Delta t}$ $B_0e^{r2\Delta t}$ $B_0e^{r3\Delta t}$ .... $B_0e^{r(n\Delta t)}$
Πιθανότητ
α
S_0
q
$S_0 \cdot u$
$S_0 \cdot d$
$S_0 \cdot u^2$
$S_0 \cdot u \cdot d$
$S_0 \cdot d^2$
$S_0 \cdot u^3$
$S_0 \cdot u^2 \cdot d$
$S_0 \cdot u \cdot d^2$
$S_0 \cdot d^3$
$S_0 \cdot u^n$
$S_0 \cdot u^{n-1} \cdot d$
$S_{n,k} = S_0 \cdot u^{n-(k-1)} \cdot d^{k-1}$
$S_0 \cdot u \cdot d^{n-1}$
$S_0 \cdot d^n$
q^n
$\binom{n}{1} \cdot q^{n-1} \cdot (1-q)$
$\binom{n}{k-1} \cdot q^{n-(k-1)} \cdot (1-q)^{(k-1)}$
$\binom{n}{n-1} \cdot q \cdot (1-q)^{n-1}$
$(1-q)^n$

Ισχύουν τα εξής

(1) $S_t e^{r\Delta t} = qS_t u + (1-q)S_t d$ (από risk neutrality)

(2) $S_t^2 \sigma^2 \Delta t = E_Q(S_{t+\Delta t}^2) - E_Q\left(S_{t+\Delta t}\right)^2$ (από volatility)

Οι παραπάνω εξισώσεις ισοδυναμούν με τις

(1’) $e^{r\cdot\Delta t} = q\cdot u + (1-q)\cdot d$

(2’) $\sigma^2 \cdot \Delta t = q\cdot u^2 + (1-q)\cdot d^2 - \left[q\cdot u + (1-q)\cdot d\right]^2$

Εάν υποθέσουμε μαζί με τις (1’) και (2’) την

(3^α) $u \cdot d = 1$

Καταλήγουμε στο μοντέλο

(A) $$u = \exp\left(\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right)$$

$$d = \exp\left(-\sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right) \qquad \text{(CRR model)}$$

$$q = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d}$$

(3^β) Αν θέσουμε q=1/2 και λύσουμε το σύστημα των (1’) και (2’) και αγνοώντας τις δυνάμεις του Δt με εκθέτη μεγαλύτερο από τη μονάδα, καταλήγουμε στο μοντέλο

(B) $$u = \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \Delta t + \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right]$$

$$d = \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \Delta t - \sigma \cdot \sqrt{\Delta t}\right]$$

Τιμολόγηση σε συνεχή χρόνο και η εξίσωση Black Scholes

- Κατά κάποιο τρόπο θα ζητήσουμε το χρονικό διάστημα Δt της προηγούμενης παραγράφου να είναι απειροστά μικρό και θα το ονομάσουμε dt, (το dt θα είναι τόσο ελάχιστο ώστε $dt^k = 0$ για κάθε κ>1).
- Επιπλέον θα ζητήσουμε (όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο) οι αποδόσεις ενός τίτλου σε διαφορετικά διαστήματα dt να είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες ακολουθώντας την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu^* dt$ και διακύμανση $\sigma^2 dt$.

- Ουσιαστικά λοιπόν θα ζητήσουμε η στιγμιαία απόδοση του υποκείμενου τίτλου να περιγράφεται ως

$$d \ln S_t = \mu^* dt + \sigma dW_t$$

όπου

- $d \ln S_t = \ln(S_{t+dt}) - \ln(S_t) = \ln\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right)$ παριστάνει τη στιγμιαία γεωμετρική απόδοση του τίτλου S στο διάστημα dt και
- $dW_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}$ με τα ε_t να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και να ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή.
- Υποθέτοντας επιπλέον ότι $dt^k = 0$ για κάθε κ>1, είναι σχετικά απλό να δείξει κανείς ότι $(dW_t)^2 = dt$

Λήμμα του Ito

Έστω ότι έχουμε τη διαδικασία Ito

$$dx_t = a(x_t, t)dt + b(x_t, t)dW_t$$

όπου a και b είναι συναρτήσεις των x_t και t

- Αν $Y_t = Y(x_t, t)$ είναι μια συνάρτηση των x_t και t τότε,

$$dY_t = \left(\frac{\partial Y_t}{\partial t} + \frac{\partial Y_t}{\partial x_t}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial x_t^2}b^2\right)dt + \frac{\partial Y_t}{\partial x_t}bdW_t$$

- [Αυτή η σχέση προκύπτει πολύ εύκολα (κάνοντας τις αντικαταστάσεις και τις σχετικές πράξεις) από την

$$dY_t = \frac{\partial Y_t}{\partial t}dt + \frac{\partial Y_t}{\partial x_t}dx_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y_t}{\partial x_t^2}{dx_t}^2$$

η οποία ουσιαστικά είναι το ανάπτυγμα Taylor για το διαφορικό της $Y_t = Y(x_t, t)$]

Παρατηρώντας ότι $S_t = \exp(\ln S_t)$, και εφαρμόζοντας το Λήμμα του Ito, μπορούμε να δούμε ότι η εξίσωση

$$d \ln S_t = \mu^* dt + \sigma dW_t$$

είναι ισοδύναμη με την παρακάτω εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική της τιμής του υποκείμενου τίτλου:

$$\boldsymbol{dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t}$$

(Γεωμετρική κίνηση Brown)

όπου

dS_t παριστάνει τη μεταβολή της τιμής του τίτλου S στο διάστημα dt,

$\mu = \mu^* + \dfrac{\sigma^2}{2}$

$dW_t = \varepsilon_t \sqrt{dt}$ με τα ε_t να είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και να ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή.

- (Απόδειξη: άσκηση)

Η διαφορική εξίσωση Black-Scholes

- Έστω $\boldsymbol{dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t}$
- Έστω παράγωγο F επί του S, δηλαδή ένα συμβόλαιο που η αξία του την t είναι μια συνάρτηση $F_t = F(t, S_t)$
- Το Λήμμα του Ito δίνει

$$dF_t = \frac{\partial F_t}{\partial t} dt + \frac{\partial F_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} {dS_t}^2$$

- Η προηγούμενη έκφραση γράφεται και ως εξής:
- $dF_t = \frac{\partial F_t}{\partial S_t} dS_t + \left(\frac{\partial F_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 {S_t}^2 \right) dt$
- Παρατηρούμε ότι η αβεβαιότητα στη μεταβολή της αξίας του παραγώγου προέρχεται μόνο από τον πρώτο όρο της εξίσωσης και οφείλεται αποκλειστικά στην αβεβαιότητα της μεταβολής της τιμής του υποκείμενου τίτλου. *Εάν απαλλαγούμε από αυτή την αβεβαιότητα, αυτό που θα προκύψει θα είναι βέβαιος τίτλος και άρα θα κερδίζει το risk free επιτόκιο.*

- Θεωρούμε την t ένα χαρτοφυλάκιο Π το οποίο να αποτελείται από:
    - μια long θέση σε μια μονάδα του παραγώγου F και
    - μια short θέση σε $\frac{\partial F_t}{\partial S_t}$ μονάδες του υποκείμενου τίτλου S.

- Η αξία του χαρτοφυλακίου Π την t θα είναι επομένως:

$$\Pi_t = F_t - \frac{\partial F_t}{\partial S_t} S_t$$

Η δυναμική της αξίας του χαρτοφυλακίου Π, θα δίνεται από τη σχέση

$$d\Pi_t = dF_t - \frac{\partial F_t}{\partial S_t} dS_t$$

στην οποία αν αντικαταστήσουμε το dF_t θα έχουμε ότι

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial F_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 {S_t}^2 \right) dt$$

όπου όπως αναμενόταν *δεν εμφανίζεται στοχαστικός όρος, άρα δεν υπάρχει αβεβαιότητα.*

Αυτό σημαίνει ότι στιγμιαία το χαρτοφυλάκιο Π κερδίζει το risk free επιτόκιο και άρα

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 {S_t}^2 = r\Pi_t$$

αντικαθιστώντας την αξία του Π_t στην τελευταία σχέση, έχουμε μια ντετερμινιστική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους:

***Διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton (BSM)** και την οποία πρέπει να ικανοποιεί κάθε παράγωγο F*

$$\frac{\partial F_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_t}{\partial S_t^2}\sigma^2 {S_t}^2 = r\left(F_t - \frac{\partial F_t}{\partial S_t}S_t\right)$$

- Αν επιπλέον γνωρίζουμε μια επιπλέον συνθήκη (όπως π.χ. είναι η αξία του παραγώγου στη λήξη), τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση και μας δίνει την non arbitrage τιμή του F τη χρονική στιγμή t. Η εξίσωση ενδέχεται να μην έχει αναλυτική λύση οπότε καταφεύγουμε σε αριθμητικές μεθόδους για τον προσδιορισμό μιας προσεγγιστικής λύσης.

Ο τύπος των Black-Scholes για Call option Ευρωπαϊκού τύπου

$$C_t = S_t \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(d_2)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}$$

και $N(\cdot)$ παριστάνει τη συνάρτηση της σωρευτικής τυπικής κανονικής κατανομής

Απόδειξη (άσκηση)

Από: Hull: Options futures and other derivatives, 9th ed.

- Λύστε την Άσκηση 15.17 (σελ.349)
- Σε αυτή την άσκηση δείχνετε ότι ο τύπος των Black Scholes για το Call Option ικανοποιεί όντως τη διαφορική εξίσωση των Black Scholes.

(α) Με τι ισούται το $N'(x)$?

(β) Δείξτε ότι $S_t N'(d_1) = Ke^{-r(T-t)} N'(d_2)$

(γ) Υπολογίστε τα $\frac{\partial d_1}{\partial S_t}$ και $\frac{\partial d_2}{\partial S_t}$

(δ) Δείξτε ότι $\frac{\partial C_t}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)} N(d_2) - S_t N'(d_1) \frac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$

(ε) Δείξτε ότι $\frac{\partial C_t}{\partial S_t} = N(d_1)$

(στ) Δείξτε ότι το C_t ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση των Black Scholes Merton

(ζ) Δείξτε ότι το C_t ικανοποιεί τη συνοριακή συνθήκη ενός call option Ευρωπαϊκού τύπου, δηλαδή ότι το $C_T = \max(S_T - K, 0)$

- Κοιτάξτε το παράρτημα του κεφαλαίου 13 στη σελίδα 298 του βιβλίου όπου αποδεικνύεται ο τύπος των Black Scholes για Call Options Ευρωπαϊκού τύπου **από το διωνυμικό μοντέλο**

- Κοιτάξτε το παράρτημα του κεφαλαίου 15 στη σελίδα 352 του βιβλίου όπου αποδεικνύεται ο τύπος των Black Scholes για Call Options Ευρωπαϊκού **χρησιμοποιώντας τη risk neutral valuation** μεθοδολογία (δηλαδή $C_t = e^{-r(T-t)}E_Q[\max(S_T - K, 0)]$, όπου Q το risk neutral μέτρο)