ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Επικ. Καθ. Στέλιος Ζήμερας

Τμήμα Μαθηματικών

Κατεύθυνση Στατιστικής και Αναλογιστικών – Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

2017

Συνεχείς κατανομές

Επιθυμούμε να παράγουμε αριθμούς από μία κατανομή με συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \Pr(X \le x),\ x \in R$$

και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x),\ \ x \in R$$

Ολες οι μέθοδοι βασίζονται στη δημιουργία μίας

ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών U~U(0,1) οι οποίες μετά από κατάλληλο μετασχηματισμό δίνουν τις X.

Συνεχείς κατανομές

- **Η μέθοδος της αντιστροφής**

Η μέθοδος αντιστροφής εφαρμόζεται όταν η F έχει αντίστροφη F^{-1}.

Πρόταση. Αν U~ U(0,1) και F είναι μία οποιαδήποτε συνάρτηση κατανομής, τότε η τυχαία μεταβλητή

$$X = F^{-1}(U)$$

έχει συνάρτηση κατανομής F.

B1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό U~ U(0,1)

B2. Θέτουμε

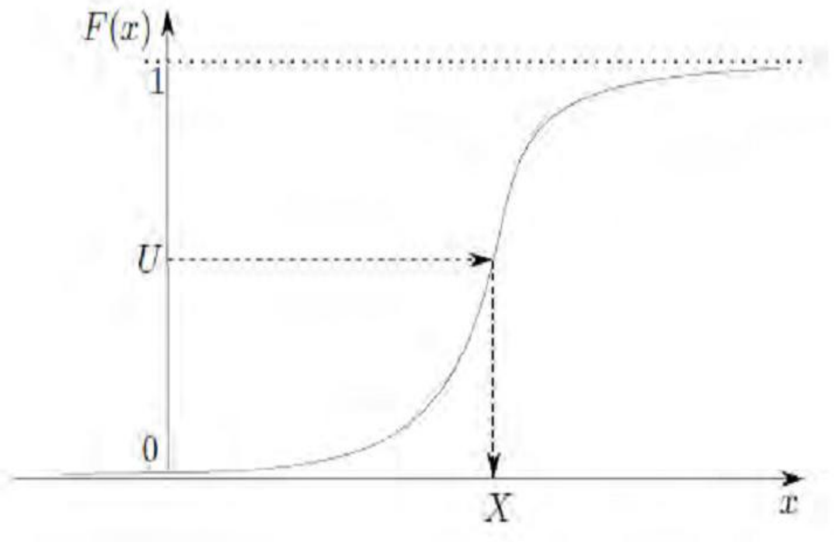
$$\boxed{X = F^{-1}(U)}$$

Συνεχείς κατανομές

Θεώρημα: Έστω U τ.μ. με ομοιόμορφη κατανομή στο (0,1). Για κάθε συνεχή τ.μ. με συν. κατανομής F(x) αν ορίσουμε την τ.μ. X ως $X=F^{-1}(U)$ τότε η τ.μ. X θα έχει σ.κ. F(x).

Απόδειξη

$$F(X)=P(X\le x)=P\left(F^{-1}(U)\le x\right)=P\left(F\left(F^{-1}(U)\right)\le F(U)\right)=P\left(U\le F(x)\right)=F(x)$$



Αρκεί να μπορεί να βρεθεί η συνάρτηση $F^{-1}(x)$

Συνεχείς κατανομές

- **Η μέθοδος της αντιστροφής**

Θεώρημα: Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F(x). Υποθέτουμε ότι ηF(x) είναι γνησίως αύξουσα. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή Y= F(x). Η τυχαία μεταβλητή Y έχει συνάρτηση κατανομής $F_y(y) = y$, 0<y<1.

Απόδειξη: Η συνάρτηση κατανομής της Y είναι

$$P(Y \le y) = P(F(X) \le y), 0<y<1$$

Η F(x) είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως, το ενδεχόμενο {F(x)≤y) είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο $\{X \le F^{-1}(y)\}$.

$$P(Y \le y) = P\left(X \le F^{-1}(y)\right) = F\left(F^{-1}(y)\right) = y, 0 < y < 1$$

Συνεχείς κατανομές

Παράδειγμα:

Εστω η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

Τότε

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{d(1+e^{-t})}{(1+e^{-t})^2} = \frac{1}{1+e^{-x}}, \qquad \infty < x < \infty$$

Επομένως, η τυχαία μεταβλητή $Y = \dfrac{1}{1+e^{-X}}$

έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$g(y) = 1, \qquad 0<y<1$$

Συνεχείς κατανομές

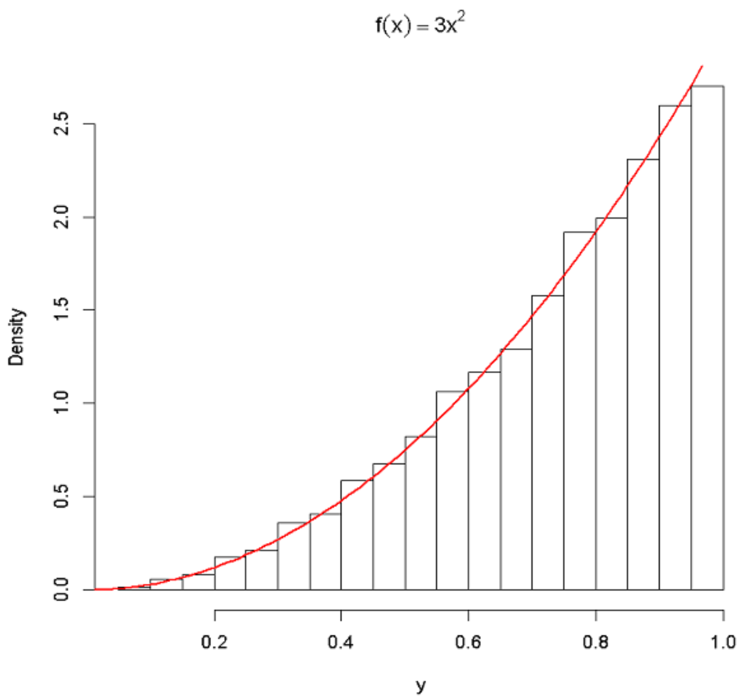
Παράδειγμα

Αν σ.π.π

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, x\in(0,1)\\ 0,\ \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon}\end{cases} \Rightarrow F(x)=\begin{cases}0,\ x<1\\ x^3, x\in(0,1)\\ 1,\ x\geq 1\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$F^{-1}(x)=\begin{cases}0,\ x<1\\ \sqrt[3]{x}, x\in(0,1)\\ 1,\ x\geq 1\end{cases}$$



Συνεχείς κατανομές

Ομοιόμορφη κατανομή στο(α,β) (U(a,b))

Έστω μια συνεχής κατανομή με σ.π.π. την f(x), τότε η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της κατανομής θα είναι η

$$F(x) = \int_{\infty}^{x} f(x)dx$$

Έστω η τυχαία μεταβλητή U που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1).

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ομοιόμορφης κατανομής είναι:

$$f(x) = \frac{1}{\beta - \alpha} \qquad \alpha < x < \beta$$

Συνεχείς κατανομές

Άρα η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας της ομοιόμορφης κατανομής είναι:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x)dx = \int_{\alpha}^{x} \frac{1}{\beta - \alpha} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{x} dx = \frac{1}{\beta - \alpha} \quad x\Big]_{\alpha}^{x} = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}$$

Για την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1) (α=0, β=1) έχουμε:

$$F(x) = \frac{x - 0}{1 - 0} = x.$$

$$F(u) = u \Leftrightarrow P(U \leq u) = u.$$

Συνεχείς κατανομές

Για να δημιουργήσουμε ένα δείγμα x μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί μια συνεχή κατανομή με δεδομένο ένα δείγμα u της τυχαίας μεταβλητής U που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1), πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση G τέτοια ώστε:

$$x = G(u) \quad \Rightarrow \quad P(X \le x) = P(U \le u).$$

Έστω ότι υπάρχει αυτή η συνάρτηση G, τότε έχουμε

$$P(X \le x) = P(U \le u) \Leftrightarrow F_X(x) = F_U(u) \Leftrightarrow F_X(G(u)) = F_U(u) \Leftrightarrow F_X(G(u)) = u \Leftrightarrow$$

$$F_X \circ G = I \Leftrightarrow G = F_X^{-1}.$$

Συνεχείς κατανομές

Επίσης αν υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της αθροιστικής συνάρτησης πιθανότητας, δηλαδή υπάρχει η F_X^{-1} τότε έχουμε:

$$P(X \le x) = P(U \le u) \Leftrightarrow F_X(x) = F_U(u) \Leftrightarrow F_X(x) = u \Leftrightarrow F_X^{-1}(F_X(x)) = F_X^{-1}(u) \Leftrightarrow$$

$$I_X(x) = F_X^{-1}(u) \Leftrightarrow x = F_X^{-1}(u).$$

$$G = F_X^{-1}.$$

Συνεχείς κατανομές

Επομένως μια δειγματοληψία, με τη μέθοδο της αντίστροφης, από μία συνεχή κατανομή ακολουθεί τα επόμενα βήματα:

B1. Ολοκληρώνουμε την f(x) και παίρνουμε την F(x).

B2. Βρίσκουμε την αντίστροφη $F^{-1}(x)$ της F(x).

B3. Παράγουμε ένα τυχαίο δείγμα u από την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1).

B4. Θέτουμε $\chi = F^{-1}(u)$.

Συνεχείς κατανομές

Εναλλακτικά

B1.Ολοκληρώνουμε την f(x) και παίρνουμε την F(x).

B2. Παράγουμε ένα τυχαίο δείγμα u από την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1).

B3. Θέτουμε u = F(x) και λύνουμε ως προς x.

B4. Το x είναι ένα τυχαίο δείγμα της τυχαίας μεταβλητής X

Συνεχείς κατανομές

Επομένως

B1. $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(x)dx=\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{\beta-\alpha}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{x}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\quad x]_{\alpha}^{x}=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$

B2. Παράγουμε ένα τυχαίο δείγμα u από την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1).

B3. Θέτουμε $u=\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\Leftrightarrow x-\alpha=u(\beta-\alpha)\Leftrightarrow x=\alpha+u(\beta-\alpha)$

Συνεχείς κατανομές

Παράδειγμα

Να γίνει δειγματοληψία, με τη μέθοδο της αντίστροφης, από μια συνεχή κατανομή που έχει την εξής συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x)\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 4x & 0 \le x \le 0.5 \\ 4(1-x) & 0.5 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}.$$

Συνεχείς κατανομές

Β1. $F(x) = \int_0^x f(x)dx$

διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) Έστω 0 ≤ x ≤ 0.5 τότε $F(x) = \int_0^x 4x\,dx = 2x^2.$

β) Έστω 0.5 ≤ x ≤ 1 τότε

$$F(x) = \int_0^x f(x)dx = \int_0^{0.5} 4x\,dx + \int_{0.5}^x 4(1-x)dx =$$

$$= 2x^2\Big]_0^{0.5} + \int_{0.5}^x 4\,dx - \int_{0.5}^x 4x\,dx = 2(0.5)^2 - 0 + 4x\Big]_{0.5}^x - 2x^2\Big]_{0.5}^x =$$

$$= 0.5 + 4x - 4\cdot(0.5) - 2x^2 + 2(0.5)^2 = 0.5 + 4x - 2 - 2x^2 + 0.5 =$$

$$= -2x^2 + 4x - 1.$$

Συνεχείς κατανομές

Επομένως

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x^2 & 0\le x\le 0.5\\ -2x^2+4x-1 & 0.5\le x\le 1\\ 1 & x>1\end{cases}.$$

B2. Παράγουμε ένα τυχαίο δείγμα u από την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1).

B3. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Συνεχείς κατανομές

α) Εάν u ≤ 0.5 τότε έχουμε

$$u = 2x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{u}{2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{u}{2}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{\frac{u}{2}} \quad \text{και} \quad x = -\sqrt{\frac{u}{2}}.$$

Η τιμή $x = -\sqrt{\frac{u}{2}}$ απορρίπτεται αφού πρέπει x ≥ 0.

Επομένως $x = \sqrt{\frac{u}{2}}$.

Συνεχείς κατανομές

β) Εάν u ≥0.5 τότε έχουμε

$$u = -2x^2 + 4x - 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 + u = 0 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 2 \cdot (1+u)}}{4} \Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{\frac{1-u}{2}} \quad \text{και} \quad x_2 = 1 - \sqrt{\frac{1-u}{2}}.$$

Η τιμή $x_1 = 1 + \sqrt{\frac{1-u}{2}}$ απορρίπτεται αφού πρέπει x≥1.

Επομένως $$x = 1 + \sqrt{\frac{1-u}{2}}.$$

Συνεχείς κατανομές

Εκθετική κατανομή (Exp(λ)).

Αν μία τ.μ. X ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ > 0, τότε θα έχει σ.π.π. και σ.κ. αντίστοιχα

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \ \ x > 0 .$$

Η F είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση στο (0,∞)

$$F(x) = u \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda x} = u \Leftrightarrow e^{-\lambda x} = 1 - u \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-u) .$$

Συνεχείς κατανομές

B1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό U~ U(0,1)

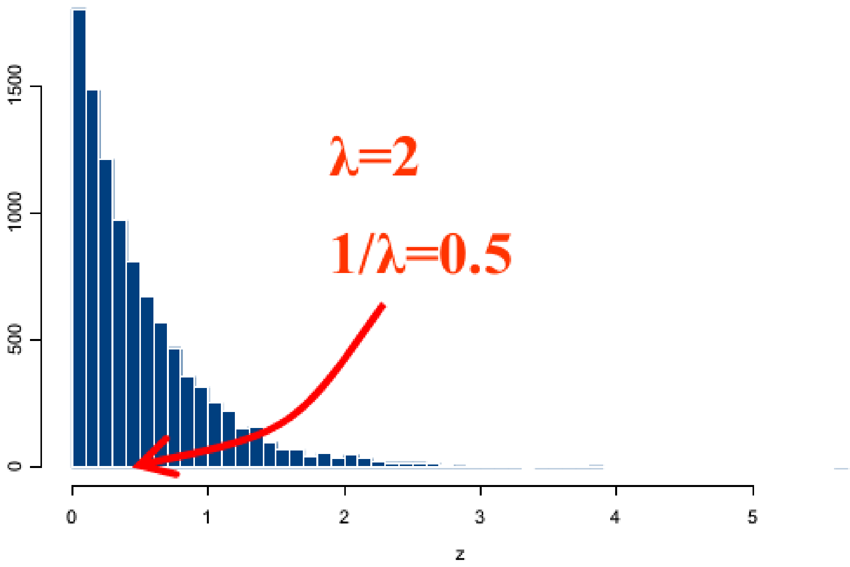
B2. Θέτουμε

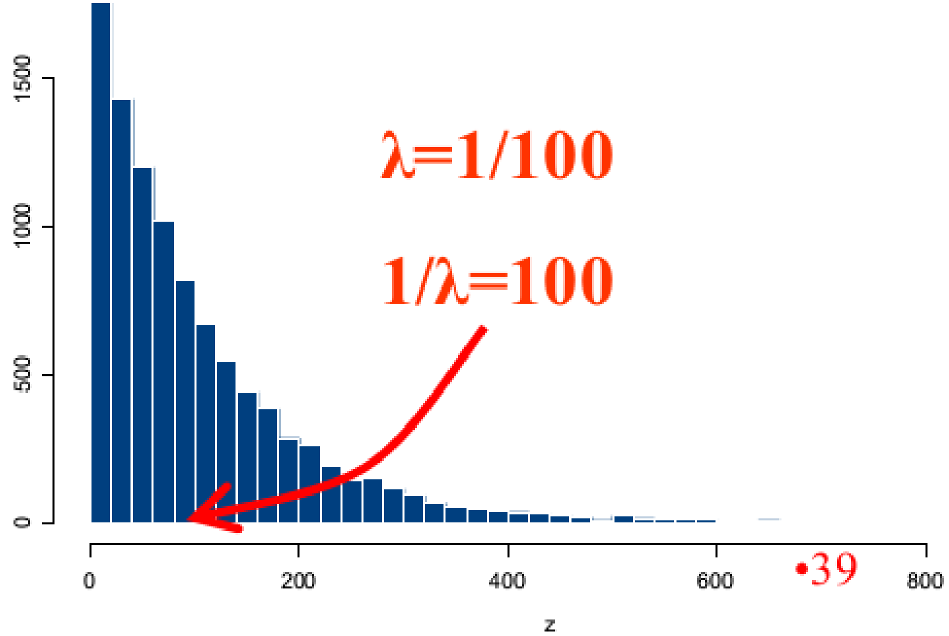
$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U).$$

Επειδή και η 1−U~ U(0,1) όταν U~ U(0,1)

$$X = -\lambda^{-1}\ln U$$

Συνεχείς κατανομές





Συνεχείς κατανομές

```
lam = 2;
n = 1000;
uni = rand(1,n);
X = -log(uni)/lam;
```

Συνεχείς κατανομές

κατανομή Γάμμα (G(a,λ))

Αν μία τ.μ. Χ ακολουθεί την κατανομή γάμμα με παραμέτρους a, λ > 0, τότε θα έχει σ.π.π. και σ.κ. αντίστοιχα

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, x > 0, \quad \text{και} \quad F(y) = \int_0^y \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} dx, \; y > 0 .$$

Συνεχείς κατανομές

- Αν και η F αντιστρέφεται, η αντίστροφή της δεν μπορεί να παρασταθεί με έναν κλειστό αναλυτικό τύπο
- Είναι γνωστό ότι το άθροισμα $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, n το πλήθος ανεξάρτητων τ.μ. από την εκθετική με παράμετρο λ, ακολουθεί κατανομή γάμμα με παραμέτρους (n, λ).
- Επομένως, αν Ui~ U(0,1), i=1,2,...,n, είναι ανεξάρ τητες τ.μ., τότε οι τ.μ. $X_i = -\lambda^{-1} \ln U_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda),\ i=1,2,\ldots,n,$

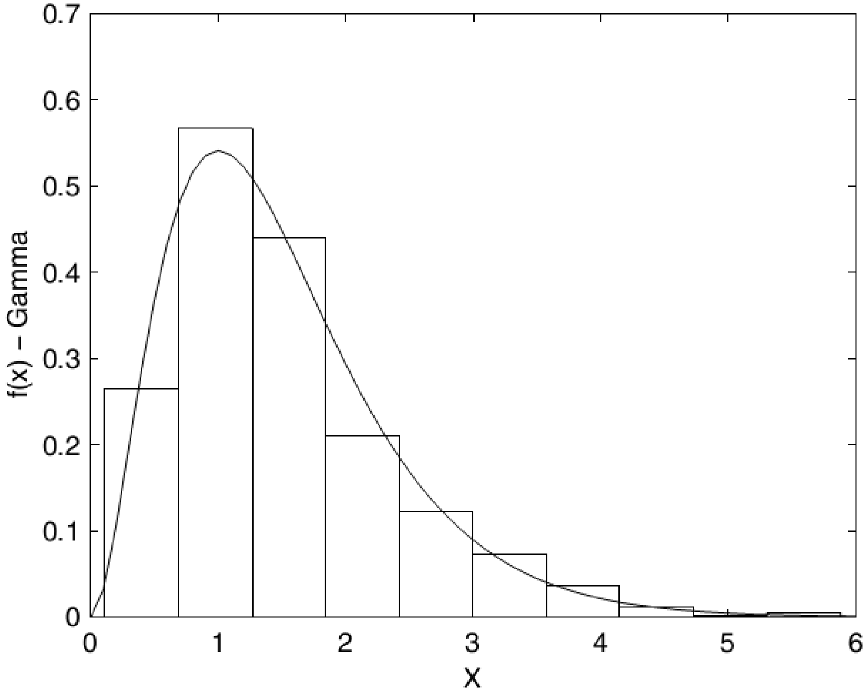
$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda} \ln U_i = -\frac{1}{\lambda} \ln \prod_{i=1}^{n} U_i$$

Συνεχείς κατανομές

B1. Παράγουμε n τυχαίους αριθμούς $U_1, U_2, \ldots, U_n \sim U(0,1)$

B2. Θέτουμε

$$X = -\frac{1}{\lambda}\ln(U_1 U_2 \cdots U_n)$$



Συνεχείς κατανομές

```
n = 1000;
α = 3;
lam = 2;
U = rand(α,n);
logU = -log(U)/lam;
X = sum(logU);
```

Συνεχείς κατανομές

κατανομή x^2

Είναι ειδική περίπτωση της Γάμμα κατανομής με σ.π.π

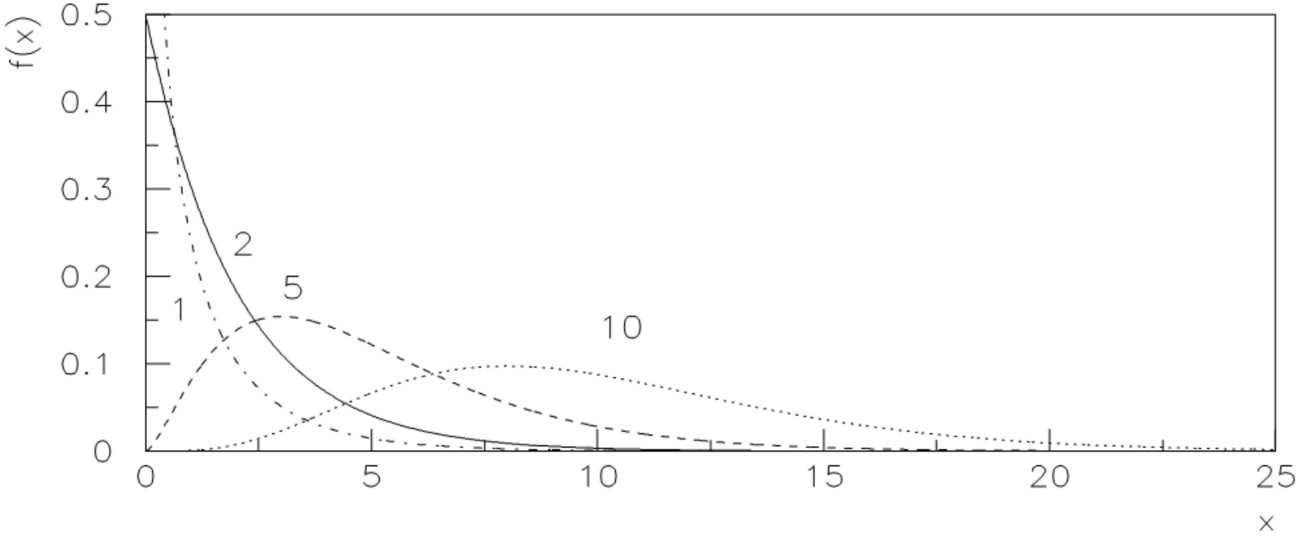
$$f(x;n) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

όπου $x \geq 0$ και n βαθμοί ελευθερίας

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\frac{x}{2}} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-y} 2dy = \\ &= \frac{\gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = P\left(\frac{n}{2}, \frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Συνεχείς κατανομές



Προσέγγιση από Γάμμα με $\lambda=1/2$ και $\alpha=n/2$

Συνεχείς κατανομές

Περίπτωση 1: n=άρτιος=2k

$$X = -2\log\left(\prod_{i=1}^{k} U_i\right).$$

Περίπτωση 1: n=περιττός=2k+1

$$X = Z^2 - 2\log\left(\prod_{i=1}^{k} U_i\right).$$

Συνεχείς κατανομές

```
function X = chdist(n,nu)
rm = rem(nu,2);k = floor(nu/2);
if rm == 0
        U = rand(k,n);
        if k ~= 1
        X = -2*log(prod(U));
    else
        X = -2*log(U);
end
else
    U = rand(k,n);Z = randn(1,n);
    if k ~= 1
      X = Z.^2-2*log(prod(U));
    else
    X = Z.^2-2*log(U);
    end
end
```

rem(a,b)=υπόλοιπο διαφοράς a/b πχ: rem(23,5)= 3

floor(a)=κοντινή ακεραία τιμή α πχ: floor(23.5)= 24

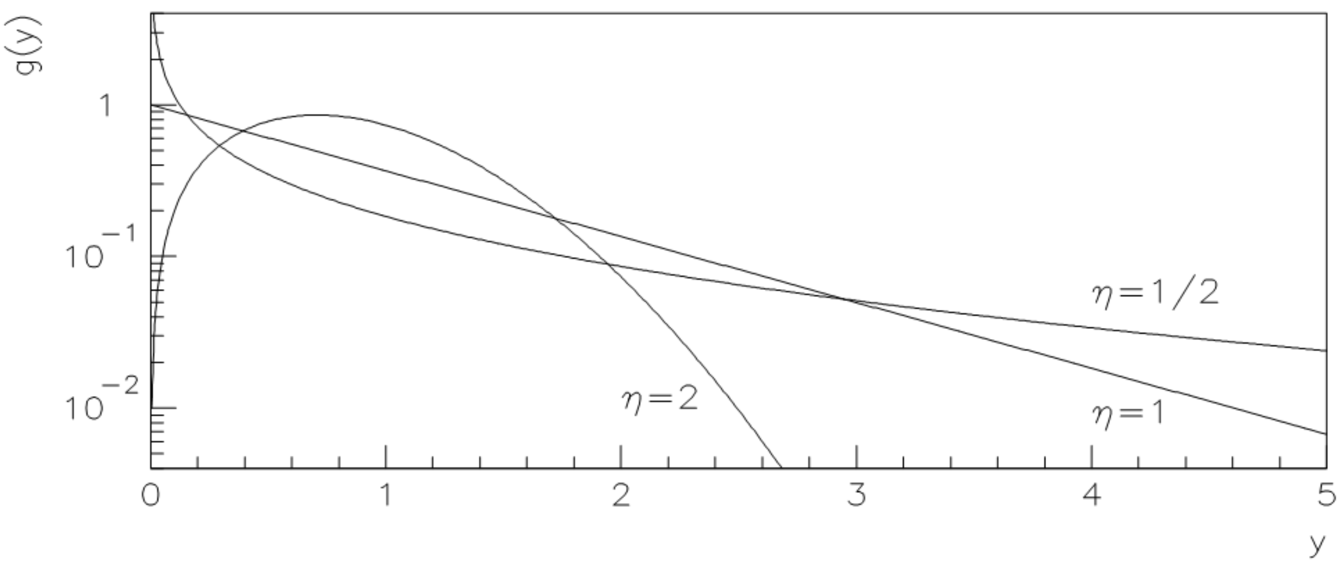
~= λογική αποτέλεσμα αν κ~=1 όχι ίσο (διάφορο)

Συνεχείς κατανομές

Κατανομή Weibull

σ.π.π

$$f(x;\eta,\sigma) = \frac{\eta}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta}}$$



Συνεχείς κατανομές

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής F(x)

$$F(x) = \int_0^x f(u)du = \int_0^x \frac{\eta}{\sigma}\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{\eta-1} e^{-\left(\frac{u}{\sigma}\right)^{\eta}} du = \int_0^{(x/\sigma)^{\eta}} e^{-y} dy = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta}}$$

Για προσομοίωση τιμών

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\eta}} = U \Rightarrow x = \sigma\left(-\ln U\right)^{\frac{1}{\eta}}$$

Συνεχείς κατανομές

Εναλλακτικά

$$f_X(x) = Wei(x \mid \lambda, \kappa) = \lambda\kappa(\lambda x)^{\kappa-1} e^{-(\lambda x)^{\kappa}} 1(x>0),\ \lambda > 0$$

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F_X(x) = \left\{1 - e^{-(\lambda x)^{\kappa}}\right\} 1(x>0) \Rightarrow F_X^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}\left\{-\log(1-x)\right\}^{1/\kappa},\ 0 < x < 1$$

$$\frac{1}{\lambda}\left\{-\log(u)\right\}^{1/\kappa} \sim Wei(\lambda, \kappa)$$

$$Wei(\lambda, 1) = Exp(\lambda)$$

Συνεχείς κατανομές

Κατανομή Pareto

σ.π.π.

$$f(x;\alpha,k) = \alpha k^{\alpha} / x^{\alpha+1}$$

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \int_{k}^{x} f(u)du = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{\alpha}$$

Για προσομοίωση τιμών

$$F(x) = 1 - \left(\frac{k}{x}\right)^{a} = U \Rightarrow x = \frac{k}{(1-U)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

Παραδείγματα

Να εφαρμοσθεί η μέθοδος της αντιστροφής για σ.π.π.

$$f(x) = \min(x, 2-x),\ 0 \leq x < 2$$

Ισοδύναμα γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Συνάρτηση κατανομής F(x)

$$0 \leq x < 1: \quad F(x) = \int_0^x z dz = \frac{x^2}{2}$$
$$1 \leq x < 2: \quad F(x) = \int_0^1 z dz + \int_1^x (2-z) dz = 2x - \frac{x^2}{2} - 1$$

Παραδείγματα

Αντίστροφη της F(x)

$0 \le x < 1: \quad U = \frac{X^2}{2} \Rightarrow X = \pm\sqrt{2U}$ Δεκτό το +.

$1 \le x < 2: \quad U = 2X - \frac{X^2}{2} - 1 \Rightarrow X = 2 \pm \sqrt{2(1-U)}$ Δεκτό το -.

$0 \le X < 1 \quad \Rightarrow 0 \le \sqrt{2U} < 1 \Rightarrow 0 \le U < \frac{1}{2}$

$1 \le X < 2 \quad \Rightarrow 1 \le 2 - \sqrt{2(1-U)} < 2 \Rightarrow 0 < \sqrt{2(1-U)} \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le U < 1$

$$X = \begin{cases} \sqrt{2U} & 0 \le U < \frac{1}{2} \\ 2 - \sqrt{2(1-U)} & \frac{1}{2} \le U < 1 \end{cases}$$

Παραδείγματα

Γεννήτρια τυχαίων αριθμών X με σ.π.π

$$. \; f(x) = x+1/2 \, , \; 0 < x < 1 \, .$$

Αντίστροφος μετασχηματισμός:

$$F(x)=\int_0^x (t+0.5)dt=0.5\left[\int_0^x 2t\,dt+\int_0^x dt\right]=0.5\left[x^2+x\right]=U$$

Ρίζες τριωνύμου

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{1+8U}}{2}$$

$$x^2+x-2U=0:$$

$$x_2=\frac{-1-\sqrt{1+8U}}{2}$$

X>0, και γι' αυτό απορρίπτουμε τη γεννήτρια x_2.

Παραδείγματα

Δειγματοληψία από δυωνυμική κατανομή B(n,p) με προσέγγιση κανονικής κατανομής

Για $n \rightarrow \propto$ μια δυωνυμική κατανομή B(n, p) προσεγγίζει μία κανονική κατανομή N(np, np(1-p)).

- ✓ np > 5 όταν $p \leq \frac{1}{2}$
- ✓ n(1-p) > 5 όταν $p \geq \frac{1}{2}$.

B1. Παίρνουμε ένα δείγμα z από την κανονική κατανομή N(0,1).

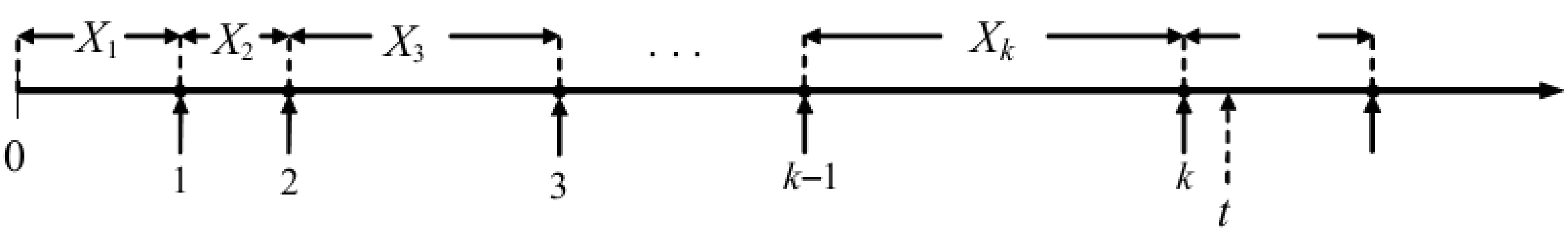
B2. Θέτουμε $x = np + z\sqrt{np(1-p)}$.

Παραδείγματα

Τυχαίοι αριθμοί από την κατανομή Poisson μέσω της εκθετικής κατανομής

Αν N_t είναι το πλήθος των συμβάντων στο χρονικό διάστημα [0,t], και X_1, X_2, ... είναι οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ συμβάντων, τότε

$$N_t = \max\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\}.$$



αν $X_1, X_2, \ldots \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, η τ.μ. $N_t = \max\{n : \sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\} \sim \mathrm{Po}(\lambda t)$.

Παραδείγματα

Γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{k} X_i \sim \boxed{G(k,\lambda))}$$

Αλλά οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ συμβάντων σε μία ανέλιξη Poisson με ένταση λ είναι ανεξάρτητοι και ακολουθούν εκθετική κατανομή Exp(λ)

$$X_1, X_2, \ldots \sim \mathrm{Exp}(\lambda),$$

$$\Pr(N_t \geq k) = \Pr\left(\sum_{i=1}^{k} X_i \leq t\right) = \boxed{\int_0^t \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x} dx}$$

Παραδείγματα

Επομένως

$$\Pr(N_t = k) = \Pr(N_t \geq k) - \Pr(N_t \geq k+1) = \int_0^t \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda^{k+1}}{k!} x^k e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^t e^{-\lambda x} x^{k-1} (k - \lambda x) dx = \frac{\lambda^k}{k!} \left[e^{-\lambda x} x^k \right]_0^t = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} .$$

Άρα $U_1, U_2, \ldots \sim \mathrm{U}(0,1)$

$$N_1 = \max\{n \geq 0 : -\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda} \ln U_i \leq 1\} = \max\{n \geq 0 : -\frac{1}{\lambda} \ln \prod_{i=1}^n U_i \leq 1\}$$

$$= \max\{n \geq 0 : \prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda}\} .$$

ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ

Παραδείγματα

B1. Θέτουμε i= 0 και P = 1

B2. Παράγουμε ένα τυχαίο αριθμό U από την U(0,1) και θέτουμε P = P·U

B3. Εάν $P<e^{-\lambda}$ τότε θέτουμε N= i και σταματάμε. Διαφορετικά, θέτουμε i= i + 1 και γυρίζουμε στο B2.

$$\prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-\lambda}$$

Συνεχείς κατανομές

Η μέθοδος της σύνθεσης

Η μέθοδος της σύνθεσης χρησιμοποιείται για την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μίξεις κατανομών.

$$p_i = P(X = i) = ap_i^{(1)} + (1 - a)p_i^{(2)}, \qquad i = 0,1, \dots$$

$$\left\{p_i^{(1)}, i = 0,1,2,\dots\right\} \Rightarrow F_1$$

$$\left\{p_i^{(2)}, i = 0,1,2,\dots\right\} \Rightarrow F_2$$

Συνεχείς κατανομές

B1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό U~ U(0,1)

B2. Εάν U < a τότε παράγουμε X~ F1, ενώ αν U ≥ a τότε παράγουμε X~ F2.

Να γίνει δειγματοληψία από την πυκνότητα

$$f_X(x) = p\lambda_1 e^{\lambda_1 x} 1(x<0) + (1-p)\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} 1(x \geq 0),$$

$$f_{X_1}(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} 1(x<0) \qquad f_{X_2}(x) = \lambda_2 e^{\lambda_2 x} 1(x \geq 0)$$

Συνεχείς κατανομές

$$F_X(x) = p\lambda_1 \int_{-\infty}^{x} e^{\lambda_1 t} 1(t<0)\,dt + (1-p)\lambda_2 \int_{-\infty}^{x} e^{-\lambda_2 t} 1(t \ge 0)\,dt = \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 x} & x \le 0 \\ 1-(1-p)e^{-\lambda_2 x} & x \ge 0 \end{Bmatrix}$$

$$= p \cdot \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 x} & x \le 0 \\ 1 & x \ge 0 \end{Bmatrix} + (1-p) \cdot \begin{Bmatrix} 0 & x \le 0 \\ 1-e^{-\lambda_2 x} & x \ge 0 \end{Bmatrix}$$

B1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό U~ U(0,1)

B2. Θέτουμε X ίσον

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{\lambda_1}\log(u_2) & u_1 < p \\ -\frac{1}{\lambda_2}\log(u_2) & u_1 \ge p \end{Bmatrix}$$