ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Επικ. Καθ. Στέλιος Ζήμερας
Τμήμα Μαθηματικών
Κατεύθυνση Στατιστικής και Αναλογιστικών – Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

2017

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Η μέθοδος αυτή οφείλεται στον von Neumann και χρησιμοποιείται όταν ο αντίστροφος μετασχηματισμός δεν μπορεί να εφαρμοσθεί.

Εστω f(x) ≥0 η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π) της X γιά την οποία δεν μπορούμε να βρούμε την F ή την F^{-1}.

Βρίσκουμε μία συνάρτηση g(x) η οποία είναι ≥f(x) γιά κάθε x που ανήκει στο (–∞,+∞). Η g(x) δεν είναι σ.π.π αφού

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx \geq \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx$$

Και μετασχηματίζουμε την g(x) σε σ.π.π.:

$$\boxed{h(x) = g(x)/c}$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Αλγόριθμος:

α. Γέννησε την τ.μ. Y με σ.π.π. την h

(εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό στην Y): γέννησε την U_1 ~U(0,1) και λύσε την εξίσωση

$$U_1 = \int_{-\infty}^{Y} h(y)dy \Rightarrow Y = ...$$

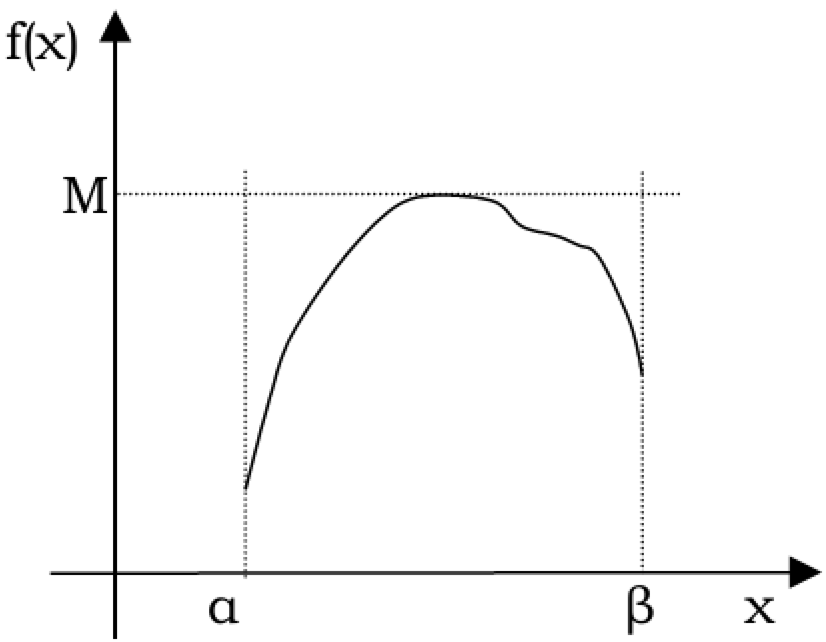
β. Γέννησε την U~U(0,1)

γ. Αν U ≤f(Y)/g(Y), τότε αποδέξου την Y: X=Y,

αλλιώς απόρριψέ την και επανάλαβε από το βήμα (α).

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

- Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται επίσης στις περιπτώσεις όπου η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x) δεν είναι ολοκληρώσιμη.
- Έστω ότι έχουμε την παρακάτω φραγμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:



$0 \le f(x) \le M \quad \text{για} \quad \alpha \le x \le \beta.$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

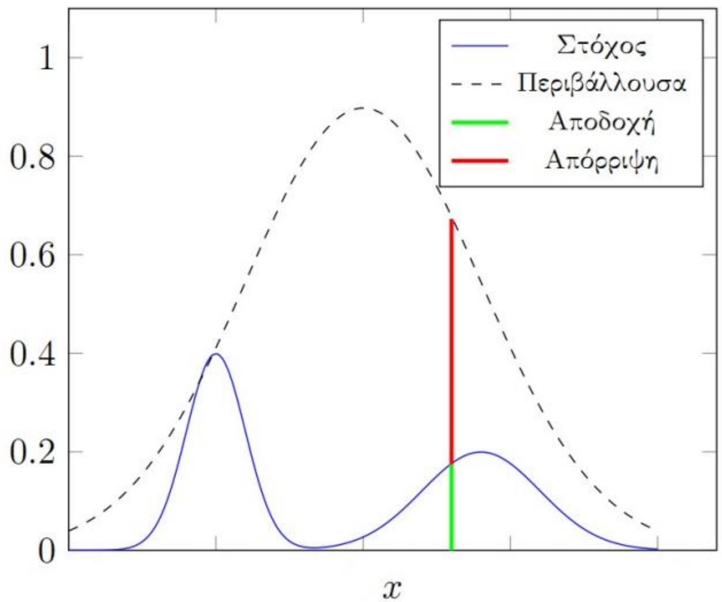
Αλγόριθμος

1. Επέλεξε μια σταθερά c, έτσι ώστε $cf(x) \leq 1$ για $\alpha \leq x \leq \beta$
2. Γεννήστε δύο τυχαία δείγματα u_1, u_2 από μία ομοιόμορφη κατανομή U(0,1).
3. Θέσε $x = \alpha + (\beta-\alpha)u_1$.
4. Εάν $u_2 \leq cf(\alpha + (\beta-\alpha)u_1)$ τότε το x που υπολογίσαμε στο 3ο βήμα είναι αποδεκτό ως δείγμα της φραγμένης συνεχής κατανομή. Σε αντίθετη περίπτωση γεννάμε δύο νέα τυχαία δείγματα u_1, u_2 και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 3 και 4.

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

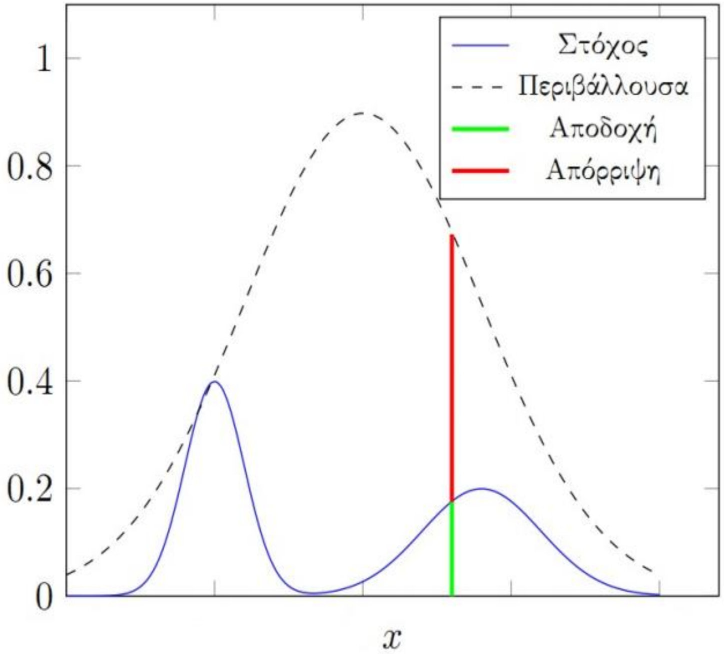
- **Αλγόριθμος (παραλλαγή)**

1. Δημιουργούμε 2 τυχαίους αριθμούς U_1 και U_2
2. Θέτουμε $X=\alpha+(b-\alpha)\ U_1$ και $Y=c\ U_2$
3. Δεχόμαστε X αν $Y<f(X)$ αλλιώς απορρίπτουμε και επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.



Δημιουργούμε σημεία (X,Y) ομοιόμορφα κατανεμημένα στο ορθογώνιο (α,b)x(0,c) μέχρις ότου κάποιο σημείο βρεθεί κάτω από την καμπύλη της f(x)

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής



Η συντεταγμένη του σημείου αυτού είναι η μεταβλητή που ζητάμε

$$
\begin{aligned}
\Pr[x \leq X < x + dx / Y < f(X)] &= \frac{\Pr[x \leq X < x + dx,\ Y < f(X)]}{\Pr[Y < f(X)]} \\
&= \frac{[dx/(b-a)]\,[f(x)/c]}{1/[(b-a)c]} = f(x)dx, \quad a < x < b
\end{aligned}
$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Παράδειγμα

Να γίνει δειγματοληψία, με τη μέθοδο της απόρριψης, από μια συνεχή κατανομή που έχει την εξής συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x)\begin{cases} 0 & x<0 \\ 4x & 0\le x\le 0.5 \\ 4(1-x) & 0.5\le x\le 1 \\ 0 & x>1 \end{cases}.$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Πρέπει $cf(x) \leq 1$. Έχουμε για κάθε x στο διάστημα [0, 1]

$$c \cdot f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 0.5 \\ 2(1-x) & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

1. Άρα $$\boxed{c = \frac{1}{2}}$$

2. Γεννάμε δύο τυχαία δείγματα u_1, u_2 από μία ομοιόμορφη κατανομή U(0,1). Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

α) $0 \le u_1 \le 0.5$ $\Rightarrow$ $\alpha \le x \le \beta$

3. Θέτουμε $x = 0 + (0.5 - 0)u_1 \Rightarrow x = 0.5u_1$

$$x = \alpha + (\beta - \alpha)u_1$$

4. Εάν $u_2 \le 2(0.5u_1) \Rightarrow u_2 \le u_1$ τότε το τυχαίο δείγμα της κατανομής θα είναι το $x = 0.5u_1$, αλλιώς επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2, 3 και 4 της μεθόδου.

$$u_2 \le cf(\alpha + (\beta - \alpha)u_1)$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

β) $0.5 \leq u1 \leq 1$

3. Θέτουμε $x = 0.5 + (1 - 0.5)u_1 \Rightarrow x = 0.5 + 0.5u_1$
4. Εάν $u_2 \leq 2(1 - 0.5 - 0.5u_1) \Rightarrow u_2 \leq 2(0.5 - 0.5u_1) \Rightarrow u_2 \leq 1 - u_1$ τότε το τυχαίο δείγμα της κατανομής θα είναι το $x = 0.5 + 0.5u_1$, αλλιώς επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2, 3 και 4 της μεθόδου.

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Επομένως μια δειγματοληψία, με τη μέθοδο της αντίστροφης, από μία συνεχή κατανομή ακολουθεί τα επόμενα βήματα:

B1. Ολοκληρώνουμε την f(x) και παίρνουμε την F(x).

B2. Βρίσκουμε την αντίστροφη $F^{-1}(x)$ της F(x).

B3. Παράγουμε ένα τυχαίο δείγμα u από την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1).

B4. Θέτουμε $\chi = F^{-1}(u)$.

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Διακριτή περίπτωση

Επιθυμούμε την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μία κατανομή με σ.π.π.

$$p_j = P(X = j),\ j = 0,1,\dots$$

Επίσης μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μια διαφορετική συνάρτηση

$$q_j = \Pr(Y = j), j = 0,1,\dots$$

με σχέση $F_X < F_y$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Επομένως μπορούμε να παράγουμε τυχαίους αριθμούς Υ από την q_j και στην συνέχεια να αποδεχτούμε με πιθανότητα $\boxed{\dfrac{p_X}{q_Y}}$

θέτοντας Χ=Υ. Στην περίπτωση που απορριφτεί επαναλαμβάνουμε την διαδικασία.

Επομένως αν υπάρχει c σταθερά για κάθε j, όπου

$$\boxed{\frac{p_i}{q_j} \leq c}$$

τότε:

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

B1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό Y από κατανομή με σ.π. q_j

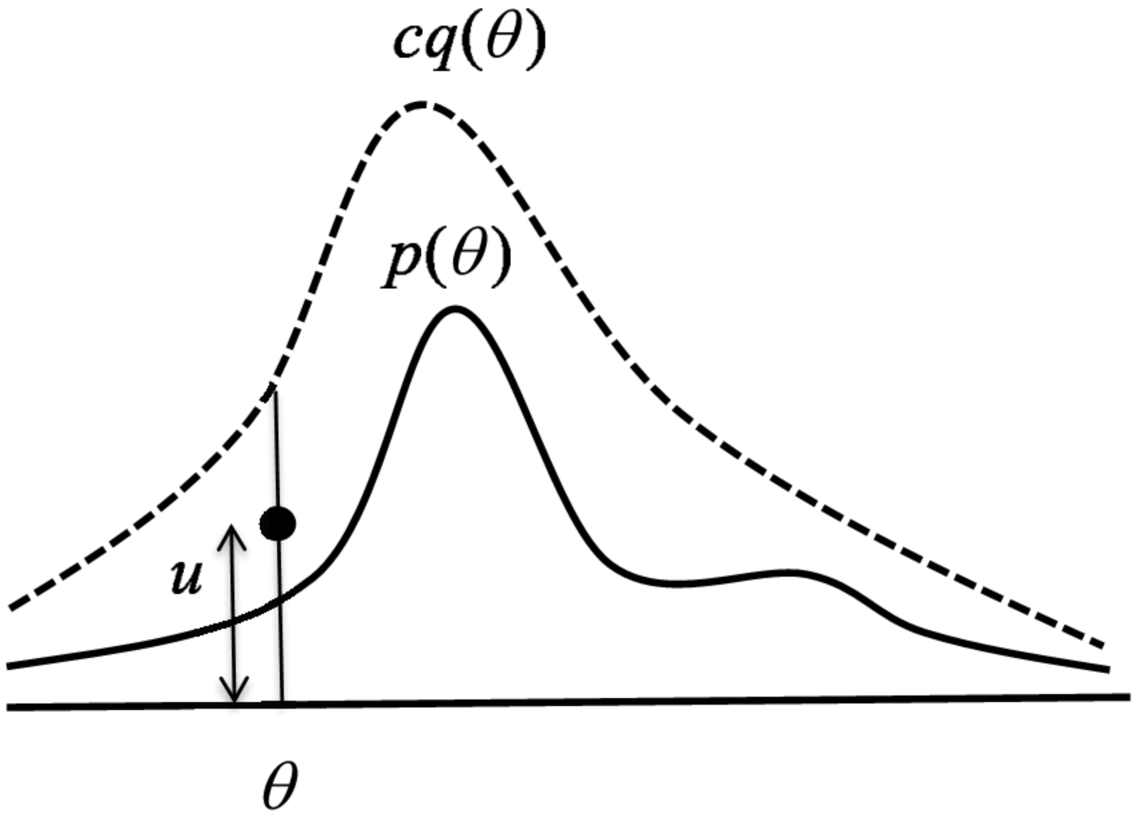
B2. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό U ~ U(0,1)

B3. Εάν $U < p_Y/cq_Y$, θέτουμε X= Y και σταματάμε. Εάν όχι, επιστρέφουμε στο B1.

- κατά μέσο όρο χρειάζονται E(N)=c επαναλήψεις.
- για να αποφύγουμε πολλές επαναλήψεις θα πρέπει να πάρουμε όσο το δυνατό μικρότερο c.

$$c = \sup\{\frac{p_j}{q_j}, j = 0,1,\ldots\}.$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής



Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Παράδειγμα

Θέλουμε να παράγουμε τ.α. με την μέθοδο της απόρριψης-αποδοχής από την κατανομή με πιθανότητες

$$p_1=0.11,\ p_2=0.12,\ p_3=0.09,\ p_4=0.08,\ p_5=0.12,\ p_6=0.1,\ p_7=0.09,\ p_8=0.09,\ p_9=0.1,\ p_{10}=0.1$$

- παράγουμε τυχαίο αριθμό Y από τη ομοιόμορφη στο {1,2,...,10} κατανομή με $q_j = P(Y=j)=0.1,\ \ j=1,2,\ldots,10$
- γίνεται αποδεκτός με πιθανότητα p_Y/q_Y
- σταθερά c υπολογίζεται με βάση

$$\boxed{c=\max\{\frac{p_i}{q_i}, i=0,1,\ldots,10\}=\max\{10\,p_i, j=0,1,\ldots,10\}=10\cdot 0.12=1.2}$$

$q_i=1/n \Rightarrow p_i/q_i = np_i = 10p_i$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

B1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U_1 \sim U(0,1)$

B2. Θέτουμε $Y \sim U\{1,\ldots,10\}$ $\Rightarrow$ $Y = \lfloor 10 \cdot U_1 \rfloor + 1$ q

B3. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U_2 \sim U(0,1)$ p

B4. Εάν

$$U_2 < \frac{p_Y}{c q_Y} = \frac{p_Y}{0.12}$$

θέτουμε X= Y και σταματάμε. Εάν όχι, επιστρέφουμε στο 1.

Ομοιόμορφη στο{1, 2, ..., n} κατανομή(U{1,2,...,n})

B1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό $U \sim U(0,1)$

B2. Θέτουμε $X = \lfloor nU \rfloor + 1$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Παράδειγμα

$$p_j = .06,\ .06,\ .06,\ .06,\ .06,\ .15,\ .13,\ .14,\ .15,\ .13$$

$$q_j = 1/10 \quad \Longrightarrow \quad c = \max\left(\frac{p_j}{q_j}\right) = 10(.15) = 1.5.$$

```
p = [6 6 6 6 6 15 13 14 15 13]/100; N = 10000;
for i = 1:N, k = 0;
while 1, k = k + 1;
j = 1 + floor(10*rand);
if rand < p(j)/.15
X(i) = j; C(i) = k; break
end
end
end
```

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Συνεχής περίπτωση

επιθυμούμε την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μία συνεχή κατανομή με σ.π.π. $f(x)$, $x \in R$

μπορούμε εύκολα να παράγουμε τυχαίους αριθμούς από μία άλλη συνεχή κατανομή με σ.π.π $g(x)$, $x \in R$.

Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό Y από την κατανομή με σ.π.π. g

Αποδεχόμαστε θέτουμε X = Y με πιθανότητα ανάλογη του πηλίκου

$$\boxed{\frac{f(Y)}{g(Y)}}$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

- Επομένως αν υπάρχει c<∝ σταθερά για κάθε x με

$$\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} < c}$$

τότε:

B1. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό Y από κατανομή με σ.π.π. g.

B2. Παράγουμε έναν τυχαίο αριθμό U ~ U(0,1).

B3. Εάν $U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}$

τότε θέτουμε X = Y και σταματάμε. Εάν όχι, επιστρέφουμε στο 1.

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

- β) κατά μέσο όρο χρειάζονται E(N)=c επαναλήψεις.
- για να αποφύγουμε πολλές επαναλήψεις θα πρέπει να πάρουμε όσο το δυνατό μικρότερο c.

$$c = \sup\{\frac{f(x)}{g(x)}, x : g(x) \neq 0\}\,.$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Κατανομή Βήτα (Be(a,b)).

Σ.π.π.

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, \ \ x \in (0,1), \quad a, b > 0.$$

Βοηθητική κατανομή χρησιμοποιήσουμε την U(0,1), δηλαδή g(x) = 1, x∈(0,1)

Η σταθερά c θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \leq c, \ \ x \in (0,1),$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Αρκεί να βρούμε το μέγιστο της f στο(0,1)

a< 1 τότε $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$

b< 1 τότε $\lim_{x\uparrow 1} f(x) = \infty$

a = 1, b> 1 τότε $f(x) = b(1-x)^{b-1}$ ⇨ φθίνουσα στο (0,1)

$$c = f(0) = b$$

a > 1, b= 1 τότε $f(x) = ax^{a-1}$ ⇨ αύξουσα στο (0,1)

$$c = f(1) = a.$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

a, b >1 σημείο με μέγιστη τιμή

$$\frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{d}{dx}\left(\ln\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} + (a-1)\ln x + (b-1)\ln(1-x)\right) = \frac{a-1}{x} - \frac{b-1}{1-x}$$

$$\frac{a-1}{x} - \frac{b-1}{1-x} = 0 \Leftrightarrow (1-x)(a-1) - x(b-1) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = \frac{a-1}{a+b-2}}\,.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{a-1}{x} - \frac{b-1}{1-x}\right) = -\frac{a-1}{x^2} - \frac{b-1}{(1-x)^2} < 0\,,$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Επομένως η σταθερά c δίνεται από

$$\boxed{c = f(x_0) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{(a-1)^{a-1}(b-1)^{b-1}}{(a+b-2)^{a+b-2}}\,.}$$

B1. Παράγουμε τυχαίους αριθμούς U_1, U_2 ~ U(0,1).

B2. Εάν

$$U_2 \le \frac{f(U_1)}{c} = \frac{(a+b-2)^{a+b-2}}{(a-1)^{a-1}(b-1)^{b-1}} U_1^{a-1}(1-U_1)^{b-1}$$

τότε θέτουμε X = U_1 και σταματάμε. Εάν όχι, επιστρέφουμε στο 1.

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

κατανομή Γάμμα(G(a,λ)

Σ.π.π.

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, x > 0 \quad (a > 0, \lambda > 0)$$

Βοηθητική κατανομή χρησιμοποιήσουμε την exp(θ)

δηλ: g(x)=exp(θ), x$\in$(0, +$\propto$)

Η σταθερά c θα πρέπει να ικανοποιεί την

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{a-1} e^{-x}}{\Gamma(a)\theta e^{-\theta x}} = \frac{x^{a-1} e^{(\theta-1)x}}{\Gamma(a)\theta} \leq c, \ \ x > 0\,.$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Η σταθερά c θα πρέπει να ικανοποιεί την

G(a,1)

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^{a-1}e^{-x}}{\Gamma(a)\theta e^{-\theta x}} = \frac{x^{a-1}e^{(\theta-1)x}}{\Gamma(a)\theta} \le c, \quad x > 0\,.$$

Exp(θ)

θ < 1, a > 1 τότε

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{1}{\Gamma(a)\theta}\frac{d}{dx}x^{a-1}e^{(\theta-1)x} = \frac{1}{\Gamma(a)\theta}((a-1)x^{a-2}e^{(\theta-1)x} + x^{a-1}(\theta-1)e^{(\theta-1)x})$$

$$= \frac{x^{a-2}}{\Gamma(a)\theta}(a-1+x(\theta-1))e^{(\theta-1)x} = 0,$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Μέγιστο σημείο

$$a-1+x(\theta-1)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{a-1}{1-\theta}>0.}$$

$$c=h(x_0)=h\left(\frac{a-1}{1-\theta}\right)=\left(\frac{a-1}{1-\theta}\right)^{a-1}\frac{e^{-(a-1)}}{\Gamma(a)\theta}.$$

Προσομοίωση από οποιαδήποτε εκθετική συνάρτηση θ<1

$$\frac{d}{d\theta}c'(\theta)=\frac{-(1-a)(1-\theta)^{1-a-1}\theta-(1-\theta)^{1-a}}{\theta^2}=\frac{a\theta-1}{\theta^2}(1-\theta)^{-a}=0 \Leftrightarrow \boxed{\theta=\frac{1}{a}}$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

σταθερά c

$$c = h(x_0) = h\left(\frac{a-1}{1-\theta}\right) = \left(\frac{a-1}{1-\theta}\right)^{a-1} \frac{e^{-(a-1)}}{\Gamma(a)\theta}.$$

$$\Big\Downarrow \quad \theta = \frac{1}{a}$$

$$\boxed{c = \left(\frac{a-1}{1-1/a}\right)^{a-1} \frac{e^{-(a-1)}}{\Gamma(a)(1/a)} = \frac{a^a e^{-(a-1)}}{\Gamma(a)}.}$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

B1. Παράγουμε U_1 ~ U(0,1) και θέτουμε Y = − α ln (U) = (δηλ. Y ~ Exp(1/a))

B2. ΠαράγουμεU_2~ U(0,1).

B3. Εάν

$$U_2 \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)} = \left(Ye^{1-Y/a} / a\right)^{a-1}$$

τότε θέτουμε Z = Y και πάμε στο 4

B4. Θέτουμε $\boxed{X = Z/\lambda.}$

αν Z~ G(a,1) τότε η X = Z/λ~ G(a,λ).

Z~ G(a,1) προσομοιώνεται από exp(θ)

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Παράδειγμα

Προσομοίωση Beta(2; 4)

Προτεινόμενη βοηθητική g(x) = 1, 0 < x < 1

$$f(x) = 20x(1-x)^3 \quad 0 < x < 1$$

$$g(x) = 1 \quad 0 < x < 1$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 20x(1-x)^3$$

$$\boxed{x = \frac{1}{4}}$$

$$\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{135}{64} \Rightarrow \boxed{\frac{f(x)}{cg(x)} = \frac{256}{27}x(1-x)^3}$$

ελαχιστοποίηση

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

B1: Παίρνουμε δύο τιμές U_1,U_2 από την ομοιόμορφη στο U ~ U(0,1)

B2: Αν

$$U_2 \leq \frac{256}{27} U_1 (1 - U_1)^3$$

θέτουμε X=U_1 και σταματούμε. Αλλιώς πηγαίνουμε στο B1.

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

```
n = 1;
while(n == 1)
U 1 = rand;
U 2 = rand;
if U 2 <= 256/27 * U 1 * (1 -  U 1)^3
X = U 1;
n = 0;
end
end
```

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

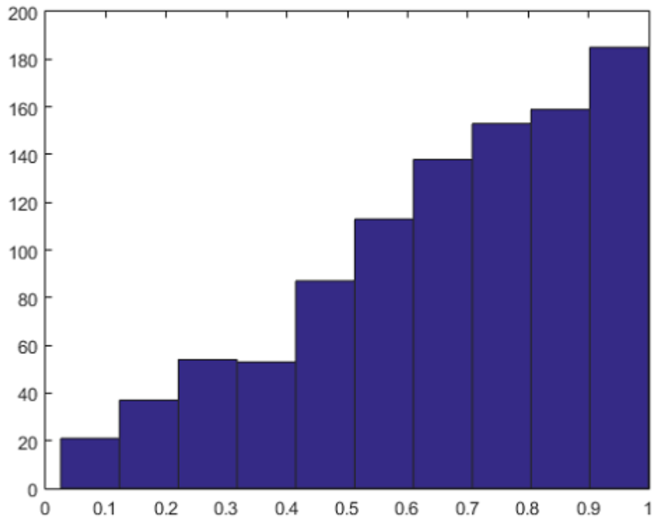
Παράδειγμα

Beta(2,1), for $0 \leq x \leq 1$.

$$\max\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = 2.$$

$g(x) = 2x$

```
j = 1;
while i < 1000 % 1000 παρατηρήσεις
y = rand; % Y ~  U[0, 1]
u = rand; % U ~ U [0, 1]
if u <= y % αποδοχή αν U < 2Y/2
x(j) = y; j = j + 1; i = i + 1;
end
end
```



Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \frac{k}{\theta}\left(\frac{k-\theta}{\lambda}\right)^{k-1} exp\left\{-\left(\frac{x-\theta}{\lambda}\right)^{\lambda}\right\}$$

Το προβλημα ανάγεται στην παραγωγή τυχαίων αριθμών Z που ακολουθούν κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_0(z) = Cexp\left\{-\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\lambda}\right\}$$

$$C = \frac{k}{\theta}\left(\frac{k-\theta}{\lambda}\right)^{k-1}.$$

Οι αριθμοί X που θέλουμε προκύπτουν εύκολα με το μετασχηματισμό X = Z + θ

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Για τη συνάρτηση δε γνωρίζουμε αν πρόκειται για συνάρτηση πυκνότητας για κάθε τιμή των παραμέτρων κ,λ,θ.

Για την παράμετρο κ θα πρέπει να ισχύει ο περιορισμός $\kappa > \theta$ εφόσον η ποσότητα κ-θ υψώνεται σε πραγματικό εκθέτη. Για τον ίδιο λόγο πρέπει επίσης $\lambda > 0$.

Για να είναι η f_0 συνάρτηση πυκνότητας, πρέπει να είναι μη αρνητική στο πεδίο ορισμού της και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x)dx = 1$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Στην περίπτωση που ικανοποιούνται αυτές οι δύο προϋποθέσεις, η αθροιστική συνάρτηση κατανομής δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$F_0(x) = C \int_{-\infty}^{x} exp\left\{-\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\lambda}\right\} dy$$

Ο ευθύς υπολογισμός της αντίστροφης της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής $F^{-1}(y)$ προφανώς είναι πολύ δύσκολος, αν όχι αδύνατος. Επομένως δε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της αντιστροφής για την προσομοίωση της κατανομής.

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Παρατηρούμε ότι η παράμετρος λ είναι αυτή που καθορίζει τις επιτρεπόμενες τιμές των άλλων παραμέτρων, οπότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

λ= 1

Η συνάρτηση πυκνότητας γίνεται $f_0(x) = \frac{k}{\theta}(k-\theta)^{k-1}e^{-x}$

που είναι η πυκνότητα της εκθετικης κατανομης με παράμετρο λ = 1 εφόσον

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{\theta}(k-\theta)^{k-1}\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1 \Leftrightarrow \frac{k}{\theta}(k-\theta)^{k-1} = 1$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

- Επομένως εάν λ = 1 και επιπλέον για τα κ και θ ισχύει η συνθήκη $\frac{k}{\theta}(k-\theta)^{k-1} = 1$ η κατανομή είναι η

εκθετική και προσομοιωνεται ευκολα με τη μέθοδο της αντιστροφής.

λ = 2

η δοθείσα συνάρτηση γίνεται

$$f(x) = \frac{k}{\theta}\left(\frac{k-\theta}{2}\right)^{k-1} exp\left\{-\left(\frac{x-\theta}{2}\right)^{2}\right\}$$

που είναι η κανονική κατανομή.

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Συγκρίνοντας την f (x) με την πυκνότητα της κανονικής N(μ,σ²)

$$f_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left\{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Παίρνουμε

$$\sigma = \sqrt{2}$$

$$\mu = \theta$$

$$f(x) = \frac{k}{\theta}\left(\frac{k-\theta}{2}\right)^{k-1} exp\left\{-\left(\frac{x-\theta}{2}\right)^2\right\}$$

$$\frac{k}{\theta}\left(\frac{k-\theta}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Επομένως εάν $\lambda = 2$ και ισχύει η παραπάνω σχέση για τα κ και θ, τότε η δοθείσα κατανομή είναι κανονική $N(\theta; 2)$ και μπορεί να προσομοιωθεί με τη μέθοδο της απόρριψης-αποδοχής.

Εάν τώρα το λ δεν ανήκει σε κάποια από τις παραπάνω περιπτώσεις, δε

μπορούμε (ή είναι πολύ δύσκολο) να υπολογίσουμε αναλυτικά το ολοκλήρωμα και στη συνέχεια να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων κ, θ για τις οποίες γίνεται ίσο με τη μονάδα.

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

Αυτό που μπορούμε να κάνουμε στην περίπτωση αυτή είναι να υπολογίσουμε αριθμητικά το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x)dx = C\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\lambda}\right\}dx$$

Τότε η συνάρτηση

$$f_d(x) = \frac{f_0(x)}{I} = \frac{exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\lambda}\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty} exp\left\{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\lambda}\right\}dx}$$

θα είναι συνάρτηση πυκνότητας εφόσον Ι < $\propto$. παρατηρούμε ότι η σταθερά C έχει απλοποιηθεί, οι τιμές τους καθορίζονται από την τιμή της λ.

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

1. Επιλέγουμε μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας g(x)
2. Βρίσκουμε μια σταθερά c ώστε $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$
3. Παίρνουμε μία τυχαία τιμη u ομοιὀμορφα κατανεμημένη στο (0, 1).
4. Κατασκευάζουμε μία τυχαία τιμή v από τη g
5. Αν $cu \leq \frac{f(v)}{g(v)},$ το v γίνεται αποδεκτό.
6. Διαφορετικά το v απορρίπτεται και επιστρέφουμε στο βήμα 3

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

καλύτερη επιλογή θα ήταν η $g(x) = e^{-x}$.

ποια πρέπει να είναι η τιμή της σταθεράς c στην περίπτωση αυτή

$$h(x) = \frac{f_d(x)}{g(x)} = \frac{1}{I} exp\left\{x - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\lambda}\right\}$$

Παρατηρούμε ότι γίνεται μέγιστη όταν η συνάρτηση

$$a(x) = x - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\lambda}$$

παίρνει τη μέγιστη τιμή της

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

μονοτονία της a(x):

$$a'(x) = 1 - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\lambda-1}$$

$$a''(x) = -\frac{\lambda-1}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\lambda-2}$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μέγιστο εφόσον a’’(x) < 0 δηλαδή λ > 1

$$1 - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\lambda-1} = 0 \Leftrightarrow x = \lambda$$

$$c = h(\lambda) = \frac{e^{\lambda-1}}{I}$$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

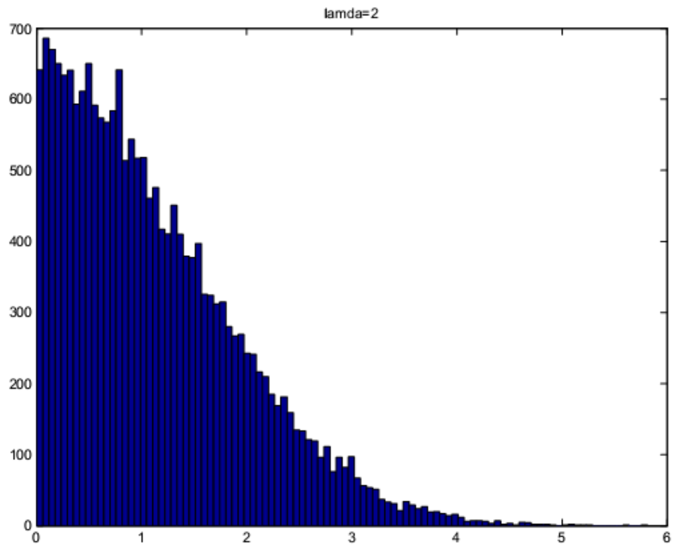
Αποτελέσματα

παράγονται 20000 τυχαίοι αριθμοί που ακολουθούν κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

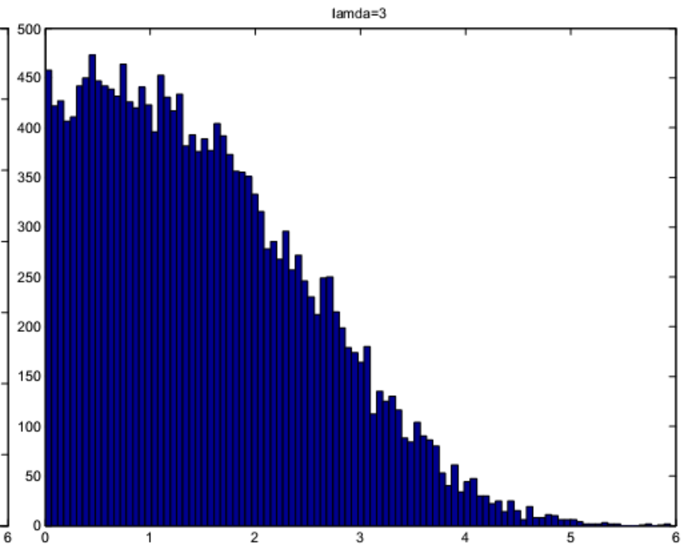
$$f_0(z) = Cexp\left\{-\left(\frac{z}{\lambda}\right)^{\lambda}\right\}$$

	Μέση τιμή		Διασπορά	
λ	Μέσω pdf	Acc.-Rej.	Μέσω pdf	Acc.-Rej.
2	1.1284	1.1315	0.7268	0.7278
3	1.5164	1.5274	1.0601	1.0732
4	1.9555	1.9733	1.5839	1.6078
5	2.4159	2.4144	2.2732	2.2546
6	2.8877	2.9012	3.1247	3.1449
7	3.3665	3.3641	4.1384	4.1436

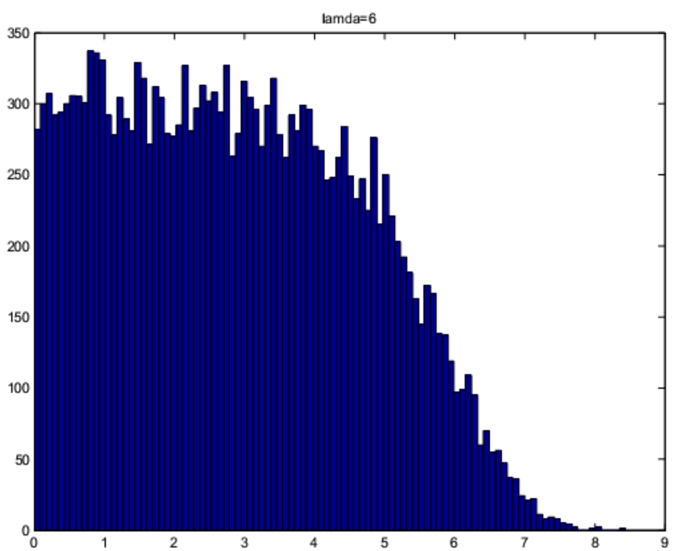
Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής



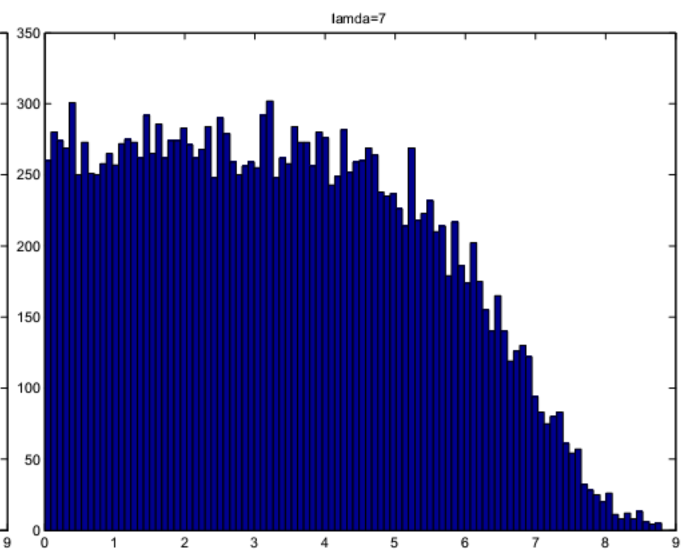
(α′) $\lambda = 2$



(β′) $\lambda = 3$



(α′) $\lambda = 6$



(β′) $\lambda = 7$

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

```
lam = 7;
th = 0; % theta, to pairnoume miden, apla metatopizei to istogramma
xmin = 0; % Pedio orismou [xmin, inf)
% Orizoume ti sunartisi f(x) me ti voitheia ton handlers gia na mporoume na
% allazoume tis parametrous sto idio arxeio
f = (@(x) exp( -(x/lam).^lam ));
% VIMA 1. Ypologizo to olokliroma I sto [0,inf) tis f(x) gia tis parapano
% parametrous
I = quadgk(f,xmin,inf); % Integral of function pdf(x) on (0,Inf):
% VIMA 2. Kataskevazo ti sunartisi puknotitas fd(x) = f(x)/I
fd = (@(x) exp( -(x/lam).^lam )/I);
% Oloklironoume tin fd(x) sto (0,Inf) gia na epalitheusoume oti einai
% sunartisi puknotitas. Prepei na paroume apotelema polu konta sti monada
Id = quadgk(fd,xmin,inf);
disp 'O parakato arithmos prepei na einai polu konta sto 1'
disp(Id)
```

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

```
% VIMA 3. Algorithmos acceptance-rejection
% fd(x): I sunartisi puknotitas ap tin opoia theloume na paroume tuxaious
%       arithmous
% g(x) : Sunartisi puknotitas apo tin opoia mporoume na paroume tuxaious
%       arithmous pou epilegetai etsi oste f(x)/g(x) <= c. Epilegoume
%       g(x)=exp(-x) afou i c*g(x) frasei apo pano tin f(x) AN lam >1
lamg = 1; % parametros lamda tis g(x)
g = (@(x) exp(-x));
c = exp(lam-1)/l; % f(x)/g(x) <= c
N = 20000;    % Plithos tuxaion arithmon pou theloume na paraxoume
X = zeros(1,N);
for i = 1:N
accept = false;
while accept == false
u = rand();
```

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

```
v = rndexp(lamg,1); % Parago tyxaio arithmo pou akolouthei Exp(1), rndexp.m
if c*u <= fd(v)/g(v)
X(i) = v+th;  % Edo prosthetoume to theta afou oi arithmoi pou pairnoume einai sto [th,inf)
accept = true;
end
end
End
```

```
function [E] = rndexp(lam,N)
u = rand(1,N);
E = -log(u)/lam;
end
```

$\longrightarrow$ rndexp(lam,N)

Μέθοδος απόρριψης-αποδοχής

```
hist(X,100);
title(strcat('lamda=',num2str(lam)))
 % Ypologismow tis mesis timis apo ti sunartisi puknotitas: Oloklironoume to
% x*fd(x)
xfd = (@(x) x.*exp( -(x./lam).^lam )/I);
expect = quadgk(xfd,xmin,inf) + th;
% Ypologismow tis 2is ropis apo ti sunartisi puknotitas: Oloklironoume to
% x^2*fd(x)
x2fd = (@(x) (x.^2).*exp( -(x./lam).^lam )/I);
expect2 = quadgk(x2fd,xmin,inf) + th;
disp(strcat('Mesi timi paragomenon arithmon, lamda=',num2str(lam)))
disp '     pdf      reject-accept'
disp([expect mean(X)])
disp(strcat('Diaspora timi paragomenon arithmon, lamda=',num2str(lam)))
disp '     pdf      reject-accept'
disp([expect2-expect^2 var(X)])
```