Ειδικά Θέματα Αναλογισμού ΙΙ

Εισαγωγή στην Θεωρία Χρεοκοπίας

1. Απαριθμήτριες Στοχαστικές Διαδικασίες

2. Θεωρία Χρεοκοπίας

Απαριθμήτριες Στοχαστικές Διαδικασίες

Απαριθμήτριες σ.δ.

▷ *Για ό,τι ακολουθεί (Ω, Σ, P) είναι ένας σταθερός χώρος πιθανότητας.*

Ορισμός. Μία ακολουθία τ.μ. $T := \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία άφιξης** (arrival process) αν υπάρχει ένα μηδενικό σύνολο $\Omega_T \in \Sigma$ έτσι ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$

(i) $T_0(\omega) = 0$, και

(ii) $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Προφανώς $T_n(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$. Το μηδενικό σύνολο Ω_T ονομάζεται το **μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της σ.δ. άφιξης T.

Ερμηνεία. Η τ.μ. T_n εκφράζει τον χρόνο εμφάνισης του n-του ενδεχομένου.

Απαριθμήτριες σ.δ.

Ορισμός. Για δοσμένη σ.δ. άφιξης T ορίζουμε

$$\boxed{W_n := T_n - T_{n-1} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}} \; .$$

Η ακολουθία τ.μ. $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία ενδιάμεσων χρόνων** (interarrival process) που επάγεται από την T. Προφανώς

$$\boxed{T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}} \; ,$$

και για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$ έχουμε $W_n(\omega) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ερμηνεία. Η τ.μ. W_n εκφράζει τον χρόνο που μεσολαβεί από την εμφάνιση του $(n-1)$-του ενδεχομένου μέχρι την εμφάνιση του n-του ενδεχομένου.

Απαριθμήτριες σ.δ.

◊ Αφού $W_n = T_n - T_{n-1}$ και $T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είναι προφανές ότι η σ.δ. άφιξης και η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων καθορίζουν αμοιβαία η μία την άλλη. Ειδικότερα, έχουμε το ακόλουθο χρήσιμο αποτέλεσμα:

Πρόταση 1.1. *Η ισότητα*

$$\sigma\big(\{T_k\}_{k\in\{0,1,\dots,n\}}\big) = \sigma\big(\{W_k\}_{k\in\{1,\dots,n\}}\big)$$

ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απαριθμήτριες σ.δ.

◊ Οι παραπάνω ορισμοί των σ.δ. T και W δεν αποκλείουν το ενδεχόμενο να εμφανιστούν **άπειρα ενδεχόμενα σε πεπερασμένο χρόνο**. Το ενδεχόμενο

$$\boxed{\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\right\}}\,.$$

καλείται **έκρηξη**.

Πρόταση 1.2. *Αν* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_P[T_n] < \infty$, *τότε* $P(\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}) = 1$.

Πόρισμα 1.3. *Αν* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_P[W_n] < \infty$, *τότε* $P(\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}) = 1$.

Απαριθμήτριες σ.δ.

Ορισμός. Μία οικογένεια τ.μ. $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία** (counting process) αν υπάρχει ένα μηδενικό σύνολο $\Omega_N \in \Sigma$ έτσι ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$:

(i) $N_0(\omega) = 0$,

(ii) $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$,

(iii) $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$,

(iv) $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \leq N_t(\omega) \leq \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$,

(v) $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Το μηδενικό σύνολο Ω_N ονομάζεται το **μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της απαριθμήτριας σ.δ. N.

Ερμηνεία. Η τ.μ. N_t εκφράζει τον πλήθος των συμβάντων που συμβαίνουν στο διάστημα $(0, t]$. Επιπλέον, η σ.δ. N περιορισμένη στον $\Omega \setminus \Omega_N$ παίρνει τιμές στο $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, έχει δεξιά συνεχείς τροχιές, παρουσιάζει άλματα μεγέθους (το πολύ) ένα, είναι μηδέν στο $t = 0$ και να αυξάνει στο άπειρο.

Απαριθμήτριες σ.δ.

◇ Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι κάθε σ.δ. άφιξης επάγει μία απαριθμήτρια σ.δ., και αντιστρόφως.

Θεώρημα 1.4. *(i) Έστω T μία σ.δ. άφιξης. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega$ θέτουμε*

$$\boxed{N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \le t\}}(\omega)}\ .$$

Τότε η $N := \{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μία απαριθμήτρια σ.δ. με μηδενικό σύνολο εξαίρεσης $\Omega_N = \Omega_T$ και

$$\boxed{T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}_0 \text{ και } \omega \in \Omega \setminus \Omega_T}\ .$$

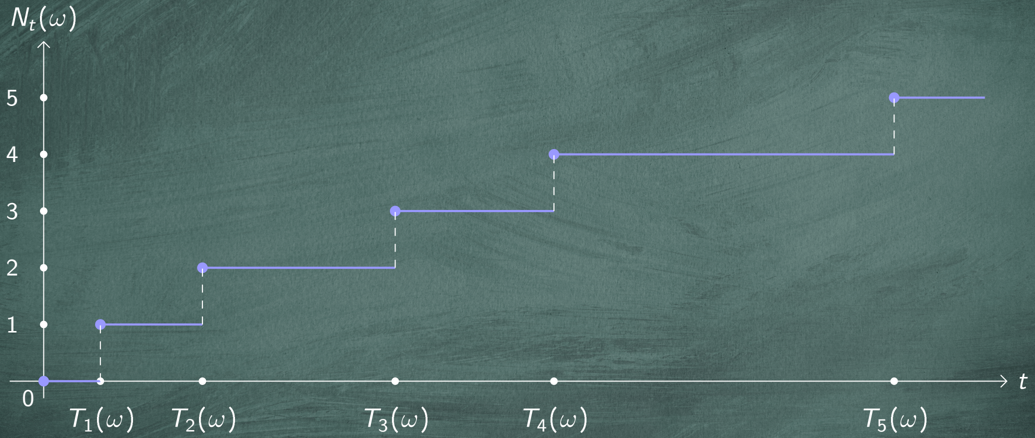
(ii) Έστω N μία απαριθμήτρια σ.δ.. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega$ θέτουμε

$$\boxed{T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}}$$

Τότε η $T := \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι μία σ.δ. άφιξης με μηδενικό σύνολο εξαίρεσης $\Omega_T = \Omega_N$ και

$$\boxed{N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \le t\}}(\omega) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}_+ \text{ και } \omega \in \Omega \setminus \Omega_N}\ .$$

Απαριθμήτριες σ.δ.



Απαριθμήτριες σ.δ.

▷ *Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι* $\Omega_N = \Omega_T = \varnothing$.

◇ Χάρη στην υπόθεση $\Omega_N = \Omega_T = \varnothing$, προκύπτουν δύο απλές αλλά εξαιρετικά χρήσιμες ταυτότητες, οι οποίες συνδέουν τα βασικά ενδεχόμενα της N και της T.

Πρόταση 1.5. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}_0$ *και* $t \in \mathbb{R}_+$ *ισχύουν τα ακόλουθα:*

(i) $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$, *και*

(ii) $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t\} \setminus \{T_{n+1} \leq t\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

◇ Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει η N και η T παράγουν την ίδια πληροφορία.

Πρόταση 1.6. $\sigma\big(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\big) = \sigma\big(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}\big)$.

Απαριθμήτριες σ.δ.

◇ Λαμβάνοντας υπόψη τα δύο προηγούμενα αποτελέσματα, μπορούμε να εκφράσουμε το ενδεχόμενο της έκρηξης ως ένα στοιχείο της $\sigma\big(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\big)$.

Πρόταση 1.7. *Για την πιθανότητα έκρηξης έχουμε*

$$\boxed{P\Big(\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}\Big) = P\Big(\bigcup_{t\in\mathbb{N}}\{N_t = \infty\}\Big) = P\Big(\bigcup_{t\in(0,\infty)}\{N_t = \infty\}\Big)}\,.$$

Πόρισμα 1.8. *Αν $N_t \in \mathcal{L}^1(P)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, τότε η πιθανότητα έκρηξης είναι ίση με 0.*

Martingales

◇ Όσο αυξάνεται ο χρόνος, τόσο αυξάνεται η γνώση μας για το τι συνέβη στο παρελθόν. Το ερώτημα που προκύπτει λοιπόν είναι πως θα μπορούσαμε να μοντελοποιήσουμε μαθηματικά την πληροφορία.

Ορισμός. Μία οικογένεια $\mathcal{G} := \{\mathcal{G}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **διύλιση** (filtration), αν η $\mathcal{G}$ είναι αύξουσα, δηλαδή

$$t_1 \leq t_2 \Rightarrow \mathcal{G}_{t_1} \subseteq \mathcal{G}_{t_2}.$$

▷ Στην πράξη η $\mathcal{G}_t$ παριστάνει την πληροφορία σε χρόνο t. Η $\mathcal{G}_t$ περιέχει όλα τα ενδεχόμενα A, ώστε σε χρόνο t να μπορεί να ελεγχθεί, αν το A έχει πραγματοποιηθεί ή όχι.

Martingales

Ορισμός. Μία σ.δ. $Z := \{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι **προσαρμοσμένη** (adapted) στην διύλιση $\mathcal{G} := \{\mathcal{G}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η Z_t είναι $\mathcal{G}_t$-μετρήσιμη.

▷ Για μία σ.δ. $Z := \{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θέτουμε

$$\boxed{\mathcal{F}_t^Z := \sigma\Big(\bigcup_{s\le t} \sigma(Z_s)\Big) \ \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}_+ \text{ και } \mathcal{F}^Z := \{\mathcal{F}_t^Z\}_{t\in\mathbb{R}_+}} \ .$$

Η $\mathcal{F}^Z$ καλείται **κανονική διύλιση** της Z και είναι η **ελάχιστη διύλιση** στην οποία η Z είναι προσαρμοσμένη, δηλαδή αν $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία άλλη διύλιση, στην οποία είναι προσαρμοσμένη η Z, τότε $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{H}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Martingales

Ορισμός. Έστω $Z := \{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία σ.δ. και $\mathcal{G} := \{\mathcal{G}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Η Z είναι ένα $(P,\mathcal{G})$-**martingale**, αν

(m1) $Z_t \in \mathcal{L}^1(P)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$,

(m2) η Z είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{G}$,

(m3) για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ ισχύει

$$\boxed{\mathbb{E}_P[Z_t \mid \mathcal{G}_s] = Z_s \;\; P\restriction\mathcal{G}_s\text{-σ.β.}}\,.$$

Παρατηρήσεις. (α) Η ιδιότητα (m3) είναι γνωστή στην βιβλιογραφία ως martingale ιδιότητα (martingale property).

(β) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής η ιδιότητα (m3) μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή:

$$\boxed{\int_A Z_t\, dP = \int_A Z_s\, dP}$$

για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και $A \in \mathcal{G}_s$.

Απαριθμήτριες σ.δ. με στάσιμες & ανεξάρτητες προσαυξήσεις

◇ Για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$, η **προσαύξηση** μίας απαριθμήτριας σ.δ. N στο διάστημα $(s, t]$ ορίζεται ως

$$\boxed{N_t - N_s := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{s < T_n \leq t\}}} .$$

◇ Μία απαριθμήτριας σ.δ. N έχει:

(α) **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$, με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, η οικογένεια $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j \in \{1,\ldots,m\}}$ είναι ανεξάρτητη, και

(β) **στάσιμες προσαυξήσεις** αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m, h \in \mathbb{R}_+$, με $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, η οικογένεια $\{N_{t_j+h} - N_{t_{j-1}+h}\}_{j \in \{1,\ldots,m\}}$ έχει την ίδια κατανομή με την $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j \in \{1,\ldots,m\}}$.

Θεώρημα 1.9. *Αν η N έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και $N_t \in \mathcal{L}^1(P)$, τότε η σ.δ. $\{N_t - \mathbb{E}_P[N_t]\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(P, \mathcal{F}^N)$-martingale, όπου $\mathcal{F}^N$ είναι η κανονική διύλιση της N.*

Η σ.δ. Poisson

<u>Ορισμός</u>. Μία απαριθμήτρια σ.δ. N καλείται **σ.δ. Poisson** με ένταση $\alpha \in (0, \infty)$ (συμβ. $\mathbf{PP}(\alpha)$) αν έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και $P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, δηλαδή

$$\boxed{P(\{N_t = n\}) = \frac{(\alpha t)^n}{n!} \cdot e^{-\alpha t} \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}_+ \text{ και } n \in \mathbb{N}_0} .$$

<u>Παρατήρηση</u>. Αν η N είναι μία $\mathbf{PP}(\alpha)$, τότε:

(α) $\boxed{\mathbb{E}_P[N_t] = \mathbb{V}ar_P[N_t] = \alpha t}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$,

(β) $\boxed{P_{N_{t+h}-N_t} = P_{N_h} = \mathbf{P}(\alpha h)}$ για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$, και

(γ) $\boxed{P\left(\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\right\}\right) = 0}$.

Η σ.δ. Poisson

◊ Το επόμενο αποτέλεσμα παρουσιάζει ένα πολύ ενδιαφέρον χαρακτηρισμό των σ.δ. Poisson.

Θεώρημα 1.10. *Έστω $\alpha \in (0, \infty)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων W είναι ανεξάρτητη και ισόνομη με $P_{W_1} = \mathbf{Exp}(\alpha)$.

(ii) Η απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μία $\mathbf{PP}(\alpha)$.

(iii) Η απαριθμήτρια σ.δ. N έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και $\mathbb{E}_P[N_t] = \alpha t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

(iv) Η σ.δ. $\{N_t - \alpha t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι ένα $(P, \mathcal{F}^N)$-martingale.

Θεωρία Χρεοκοπίας

Σύνθετες απαριθμήτριες σ.δ.

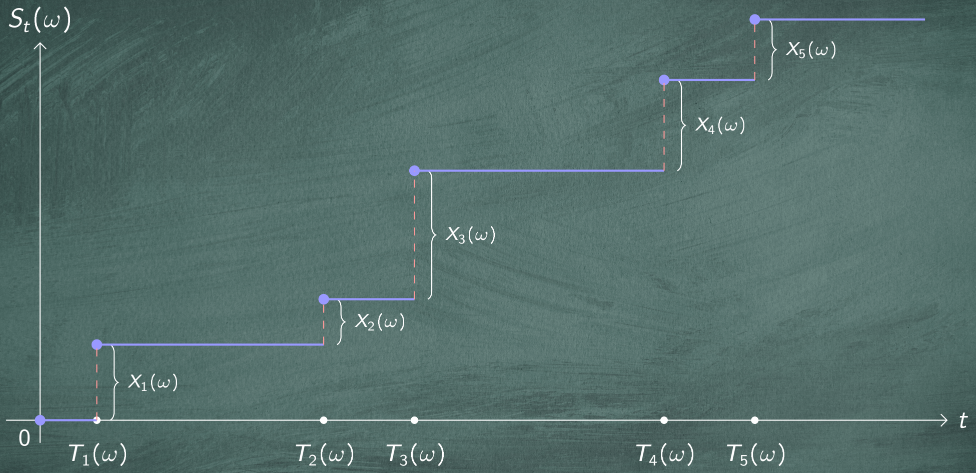
Ορισμός. Έστω N μία απαριθμήτρια σ.δ. και $X := \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία τ.μ. που ικανοποιεί για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τη σχέση $P(\{X_n > 0\}) = 1$. Η σ.δ. $S := \{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ από τη σχέση

$$\boxed{S_t := \begin{cases} \sum_{n=1}^{N_t} X_n, & \text{αν } N_t \geq 1 \\ 0, & \text{αν } N_t = 0 \end{cases}}$$

καλείται η **σύνθετη απαριθμήτρια σ.δ.** (compound counting process) που επάγεται από τις N και X.

Ερμηνεία. Η τ.μ. X_n εκφράζει τον μέγεθος της n-οστης απαίτησης, ενώ η τ.μ. S_t εκφράζει την συνολική αποζημίωση που έχει πληρωθεί από μία ασφαλιστική εταιρεία μέχρι τον χρόνο t. Η σ.δ. X ονομάζεται **σ.δ απαιτήσεων** (claim size process), ενώ η σ.δ. S καλείται **σ.δ συνολικών απαιτήσεων** (aggregate claims size process).

Σύνθετες απαριθμήτριες σ.δ.



▷ *Για ό,τι ακολουθεί υποθέτουμε ότι η σ.δ. X αποτελείται από P-ανεξάρτητες και P-ισόνομες τ.μ. (P-i.i.d.), καθώς και ότι η N και η X είναι (από κοινού) P-ανεξάρτητες.*

Σύνθετες απαριθμήτριες σ.δ.

◇ Τα επόμενα αποτελέσματα μας δίνει τύπους για τον υπολογισμό της κατανομής και των ροπών της τ.μ. S_t.

Πρόταση 2.1. *Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ ισχύει*

$$\boxed{P_{S_t}(B) = P(\{S_t \in B\}) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} P(\{N_t = n\}) \cdot P\Big(\Big\{\sum_{k=1}^{n} X_k \in B\Big\}\Big)}\ .$$

Πρόταση 2.2 (Ταυτότητες Wald). *Αν $N_t \in \mathcal{L}^1(P)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $X_1 \in \mathcal{L}^1(P)$, τότε*

$$\boxed{\mathbb{E}_P[S_t] = \mathbb{E}_P[N_t] \cdot \mathbb{E}_P[X_1] \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}_+}$$

και

$$\boxed{\mathbb{V}ar_P[S_t] = \mathbb{E}_P[N_t] \cdot \mathbb{V}ar_P[X_1] + \mathbb{E}_P^2[X_1] \cdot \mathbb{V}ar_P[N_t] \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}_+}\ .$$

Σύνθετες απαριθμήτριες σ.δ.

◇ Αν η απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μία **PP**(α), τότε η σ.δ. συνολικών απαιτήσεων καλείται **σύνθετη σ.δ. Poisson με παραμέτρους** α **και** P_{X_1} (συμβ. CPP(α, P_{X_1})).

Παρατήρηση. Αν S είναι μία CPP(α, P_{X_1}) και $X_1 \in \mathcal{L}^1(P)$, τότε

$$\boxed{\mathbb{E}_P[S_t] = \alpha \mathbb{E}_P[X_1] t \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}_+}$$

και

$$\boxed{\mathbb{V}ar_P[S_t] = \alpha \mathbb{E}_P[X_1^2] t \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}_+}\,.$$

Σύνθετες απαριθμήτριες σ.δ.

◇ Για κάθε $u, t \in \mathbb{R}_+$ με $u \leq t$, η **προσαύξηση** μίας σ.δ. συνολικών απαιτήσεων S στο διάστημα $(u, t]$ ορίζεται ως

$$\boxed{S_t - S_u := \sum_{k=N_u+1}^{N_t} X_k} \,.$$

Θεώρημα 2.3. *Έστω S μία σ.δ. συνολικών απαιτήσεων που επάγεται από το ζευγάρι (N, X). Αν η N έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, τότε το ίδιο ισχύει και για την S.*

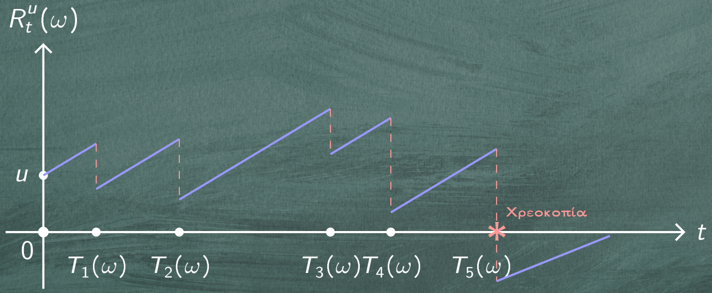
Πόρισμα 2.4. *Αν S είναι μία $CPP(\alpha, P_{X_1})$, τότε η S έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.*

Στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Ορισμός. Η **σ.δ. πλεονάσματος** $R^u := \{R_t^u\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ από τη σχέση

$$\boxed{R_t^u = u + ct - S_t}\ ,$$

όπου $u \in \mathbb{R}_+$ είναι το **αρχικό αποθεματικό**, $c \in (0, \infty)$ είναι η **ένταση ασφαλίστρου**, και S είναι μία σ.δ. συνολικών απαιτήσεων.



Πιθανότητα χρεοκοπίας

Ορισμοί. (α) Η συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ με τύπο

$$\boxed{\psi(u) := P\Big(\{\inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u < 0\}\Big) \quad \text{για κάθε } u \in \mathbb{R}_+}$$

καλείται **πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό** u.

(β) Η τ.μ.

$$\boxed{\tau_u := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : R_t^u < 0\} \quad (\inf \varnothing = \infty)}$$

καλείται **χρόνος χρεοκοπίας**. Προφανώς

$$\boxed{\psi(u) = P\big(\{\tau_u < \infty\}\big) \quad \text{για κάθε } u \in \mathbb{R}_+} \; .$$

Παρατήρηση. Η ψ είναι φθίνουσα συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού u. Επιπλέον

$$\boxed{\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0} \; .$$

Πιθανότητα χρεοκοπίας

◇ Διαισθητικά, ο χρόνος χρεοκοπίας πρέπει να είναι μία από τις τ.μ. T_n. Για να διατυπώσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα με μαθηματική ακρίβεια, θεωρούμε την ακόλουθη διακριτοποίηση της σ.δ. R^u. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\boxed{G_n := cW_n - X_n}$$

και την ακολουθία $G := \{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Επιπλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ θέτουμε

$$\boxed{C_n^u := \begin{cases} u + \sum_{k=1}^n G_k, & \text{αν } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{αν } n = 0 \end{cases}}$$

και $C^u := \{C_n^u\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Πρόταση 2.5. *Για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί τη σχέση*

$$\boxed{\psi(u) = P\left(\{\inf_{n\in\mathbb{N}_0} C_n^u < 0\}\right)}\ .$$

Παρατήρηση. Αν η σ.δ. N δεν έχει μηδενική πιθανότητα έκρηξης, τότε η Πρόταση 2.5 **δεν ισχύει**.

Πιθανότητα χρεοκοπίας

◊ Στην περίπτωση που η G είναι P-i.i.d. και $G_1 \in \mathcal{L}^1(P)$, η Πρόταση 3.1 μας δίνει ένα πρώτο αποτέλεσμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Θεώρημα 2.6. *Αν η G είναι P-i.i.d. και $G_1 \in \mathcal{L}^1(P)$, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $\mathbb{E}_P[G_1] \le 0$,

(ii) $\psi(u) = 1$ *για κάθε* $u \in \mathbb{R}_+$.

Παρατήρηση. Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.6 προκύπτει η ακόλουθη ισοδυναμία

$$\boxed{\psi(u) < 1 \ \text{ για κάθε } u \in \mathbb{R}_+ \Longleftrightarrow \mathbb{E}_P[G_1] > 0} \ .$$

Η συνθήκη

$$\boxed{\mathbb{E}_P[G_1] > 0 \Longleftrightarrow c > \frac{\mathbb{E}_P[X_1]}{\mathbb{E}_P[W_1]}}$$

καλείται **συνθήκη καθαρού κέρδους** (net-profit condition).

Χρεοκοπία σε πεπερασμένο χρόνο

◊ Η πιθανότητα χρεοκοπίας, όπως ορίστηκε παραπάνω, αναφέρεται σε άπειρο χρόνο. Στην πράξη, παρουσιάζει ενδιαφέρον η μελέτη του ενδεχομένου της χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο.

Ορισμός. Η συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}_+^2 \to [0,1]$ με τύπο

$$\boxed{\psi(u,t) := P\Big(\{\inf_{0\le s\le t} R_s^u < 0\}\Big) = P\Big(\{\tau_u < t\}\Big) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}_+}$$

καλείται **πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο**.

Παρατήρηση. Για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\psi(u,t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του u και αύξουσα συνάρτηση του t, δηλαδή

$$\boxed{u_1 \le u_2 \Rightarrow \psi(u_1,t) \ge \psi(u_2,t) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}_+}$$

και

$$\boxed{t_1 \le t_2 \Rightarrow \psi(u,t_1) \le \psi(u,t_2) \quad \text{για κάθε } u \in \mathbb{R}_+}.$$

(ii) $\boxed{\lim_{t\to\infty} \psi(u,t) = \psi(u) \quad \text{για κάθε } u \in \mathbb{R}_+}.$