

## Ειδικά Θέματα Αναλογισμού II

### Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

1 Χώροι Μέτρου

2 Μέτρο του Lebesgue στον  $\mathbb{R}$

3 Θεωρία Ολοκλήρωσης

4 Θεωρία Πιθανοτήτων

# Χώροι Μέτρου

## Μετρήσιμοι χώροι

Ορισμός. Έστω  $\Omega$  ένα σύνολο. Μία  **$\sigma$ -άλγεβρα** ( $\sigma$ -algebra) υποσυνόλων του  $\Omega$  είναι μία οικογένεια  $\Sigma$  υποσυνόλων του  $\Omega$ , ώστε:

( $\sigma$ 1)  $\emptyset \in \Sigma$ ,

( $\sigma$ 2) για κάθε  $E \in \Sigma$ , το συμπλήρωμά του  $\Omega \setminus E$  ανήκει στο  $\Sigma$ ,

( $\sigma$ 3) για κάθε ακολουθία  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  στη  $\Sigma$ , η ένωσή των στοιχείων της  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$  ανήκει στο  $\Sigma$ .

Ορισμός Ένα ζευγάρι  $(\Omega, \Sigma)$ , όπου  $\Omega$  είναι ένα σύνολο και  $\Sigma$  είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ , ονομάζεται **μετρήσιμος χώρος** (measurable space)

## Μετρήσιμοι χώροι

Παράδειγμα. Για κάθε  $\Omega$ , η οικογένεια  $\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$  είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$  (η **τετριμμένη**  $\sigma$ -άλγεβρα). Το **δυναμοσύνολο**  $\mathcal{P}(\Omega)$ , δηλαδή το σύνολο όλων των υποσυνόλων του  $\Omega$ , είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$  (η **διακριτή**  $\sigma$ -άλγεβρα).

▷ Αυτές είναι βεβαίως η **μικρότερη** και η **μεγαλύτερη**  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ , αντίστοιχα.

Παράδειγμα. Αν  $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$  τότε οι παρακάτω οικογένειες είναι **(όλες οι δυνατές)**  $\sigma$ -άλγεβρες υποσυνόλων του  $\Omega$ :

- (i)  $\Sigma_1 := \{\emptyset, \Omega\}$ ,
- (ii)  $\Sigma_2 := \mathcal{P}(\Omega)$ ,
- (iii)  $\Sigma_3 := \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}$ ,
- (iv)  $\Sigma_4 := \{\emptyset, \Omega, \{\omega_2\}, \{\omega_1, \omega_3\}\}$ ,
- (v)  $\Sigma_5 := \{\emptyset, \Omega, \{\omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2\}\}$ .

## Μετρήσιμοι χώροι

Παράδειγμα. Αν  $\Omega, \Theta \neq \emptyset$ ,  $T$  μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Theta$  και  $g: \Omega \rightarrow \Theta$  μία απεικόνιση, τότε η οικογένεια συνόλων

$$g^{-1}[T] := \{g^{-1}[B] : B \in T\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$$

είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ . Η  $g^{-1}(T)$  ονομάζεται η ( $\sigma$ -άλγεβρα) **αντίστροφη εικόνα της  $T$  μέσω της  $g$ .**

Παράδειγμα. Αν  $\Omega \neq \emptyset$ ,  $\Sigma$  μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$  και  $A \subseteq \Omega$  με  $A \neq \emptyset$ , τότε η οικογένεια συνόλων:

$$\Sigma_A := \{A \cap B : B \in \Sigma\}$$

είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $A$ , η οποία ονομάζεται το **ίχνος της  $\Sigma$  στο  $A$** . Το σύνολο αναφοράς για την  $\sigma$ -άλγεβρα  $\Sigma_A$  είναι το  $A$  **αντί του**  $\Omega$ , και το συμπλήρωμα ενός στοιχείου της  $\Sigma_A$  σχηματίζεται **αναφορικά** με το  $A$ . Ιδιαίτέρως, αν  $A \in \Sigma$  τότε

$$\Sigma_A = \{B : B \subseteq A, B \in \Sigma\}.$$

## Μετρήσιμοι χώροι

Πρόταση 1.1. Αν  $\Sigma$  είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ , τότε αυτή έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- (i)  $\Omega \in \Sigma$ ,
- (ii)  $E \cup F \in \Sigma$  για όλα τα  $E, F \in \Sigma$ ,
- (iii)  $E \cap F \in \Sigma$  για όλα τα  $E, F \in \Sigma$ ,
- (iv)  $E \setminus F \in \Sigma$  για όλα τα  $E, F \in \Sigma$ ,
- (v) για κάθε ακολουθία  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  στο  $\Sigma$  ισχύει  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n \in \Sigma$ .

Άσκηση 1. Αν  $\Omega$  είναι ένα σύνολο,  $I$  είναι ένα μη κενό σύνολο δεικτών και  $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$  είναι μία οικογένεια  $\sigma$ -αλγεβρών υποσυνόλων του  $\Omega$ , να δειχθεί ότι η

$$\Sigma_I := \bigcap_{i \in I} \Sigma_i$$

είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ .

## Μετρήσιμοι χώροι

Ορισμός. Αν  $\Omega$  είναι ένα σύνολο και  $\mathcal{G}$  είναι ένα υποσύνολο του  $\mathcal{P}(\Omega)$ , τότε υπάρχει η ελάχιστη  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ , που περιέχει το  $\mathcal{G}$ , και συμβολίζεται με  $\sigma(\mathcal{G})$ . Η  $\sigma(\mathcal{G})$  ονομάζεται η  $\sigma$ -άλγεβρα η **παραγόμενη** από το  $\mathcal{G}$ , το δε σύνολο  $\mathcal{G}$  ονομάζεται **γεννήτορας** της  $\sigma(\mathcal{G})$ .

▷ Αν το σύστημα  $\mathcal{G}$  είναι το ίδιο μία  $\sigma$ -άλγεβρα, τότε  $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{G})$ .

Παράδειγμα. Αν  $\Omega$  είναι ένα σύνολο και  $A \subseteq \Omega$ , τότε η  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$  που παράγεται από το  $A$  είναι η

$$\sigma(A) = \{\emptyset, \Omega, A, \Omega \setminus A\}.$$

Παράδειγμα. Η  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$  που παράγεται από το σύνολο  $\mathcal{G} := \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$  είναι το  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

Παράδειγμα. Αν  $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  και  $\mathcal{G} := \{\{1\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}\}$ , τότε

$$\sigma(\mathcal{G}) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 3, 4, 5, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{3, 5\}\}.$$

## Μετρήσιμοι χώροι

Ορισμός. **(α)** Ένα σύνολο  $G \subseteq \mathbb{R}$  ονομάζεται **ανοικτό** (open), αν για κάθε  $x \in G$  υπάρχει  $r > 0$  ώστε

$$(x - r, x + r) \subseteq G .$$

**(β)** Ομοίως για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  με  $n \geq 2$  ένα σύνολο  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ονομάζεται **ανοικτό**, αν για κάθε  $x \in U$  υπάρχει  $r > 0$  ώστε

$$\{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\} \subseteq U ,$$

όπου για  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$  γράφουμε  $\|z\| := \left(\sum_{k=1}^n |z_k|\right)^{\frac{1}{2}}$ . Έτσι η  $\|x - y\| = \|y - x\|$  είναι η συνηθισμένη **Ευκλείδεια απόσταση** από το  $x$  στο  $y$ .

## Μετρήσιμοι χώροι

Παράδειγμα. Κάθε ανοικτό διάστημα είναι ανοικτό σύνολο.

Πράγματι, έστω  $x \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$  και  $r := \frac{b-a}{2} - \left| \frac{a+b}{2} - x \right| > 0$ . Για κάθε  $z \in (x-r, x+r)$  έχουμε

$$\left| z - \frac{a+b}{2} \right| \leq \left| \frac{a+b}{2} - x \right| + |x-z| < \left| \frac{a+b}{2} - x \right| + r = \left| \frac{a+b}{2} - x \right| + \frac{b-a}{2} - \left| \frac{a+b}{2} - x \right| = \frac{b-a}{2},$$

επομένως

$$-\frac{b-a}{2} < z - \frac{a+b}{2} < \frac{b-a}{2}$$

ή ισοδύναμα  $a < z < b$ , δηλαδή  $z \in (a, b)$ . Άρα  $(x-r, x+r) \subseteq (a, b)$ .

## Μετρήσιμοι χώροι

Θεώρημα 1.2. Ισχύουν τα εξής:

- (i) Τα  $\mathbb{R}$  και  $\emptyset$  είναι ανοικτά σύνολα.
- (ii) Αυθαίρετες ενώσεις ανοικτών συνόλων είναι ανοικτά σύνολα.
- (iii) Πεπερασμένες τομές ανοικτών συνόλων είναι ανοικτά σύνολα.

Παρατήρηση. Άπειρες τομές ανοικτών συνόλων **δεν είναι κατ' ανάγκη ανοικτό σύνολο.**

Πράγματι, αν

$$A_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

έχουμε

$$\{0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$$

και το σύνολο  $\{0\}$  **δεν είναι ανοικτό.**

## Μετρήσιμοι χώροι

Ορισμός. Ένα σύνολο  $A \subseteq \mathbb{R}$  ή του  $\mathbb{R}^n$  ονομάζεται **κλειστό** (closed), αν το συμπλήρωμά του  $A^c$  είναι ανοικτό.

Θεώρημα 1.3. Ισχύουν τα εξής:

- (i) Τα  $\mathbb{R}$  και  $\emptyset$  είναι κλειστά σύνολα.
- (ii) Αυθαίρετες τομές κλειστών συνόλων είναι κλειστά σύνολα.
- (iii) Πεπερασμένες ενώσεις κλειστών συνόλων είναι κλειστά σύνολα.
- (iv) Αν  $A$  είναι κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  και  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  μία ακολουθία στοιχείων του  $A$ , τότε αν υπάρχει το  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  θα ισχύει  $x \in A$ .

Θεώρημα 1.4. Κάθε ανοικτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  είναι ένωση μίας αριθμήσιμης οικογένειας ανά δύο ξένων ανοικτών διαστημάτων.

## Μετρήσιμοι χώροι

Παρατήρηση. Η ένωση μίας αριθμήσιμης οικογένειας κλειστών υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$  **δεν είναι κατ' ανάγκη κλειστό σύνολο.**

Πράγματι, το σύνολο  $\mathbb{Q}$  των ρητών αριθμών μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\},$$

όπου προφανώς κάθε σύνολο  $\{q\}$  είναι ένα κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  **(γιατί;)**. Το  $\mathbb{Q}$  όμως δεν είναι κλειστό **(γιατί;)**

## Μετρήσιμοι χώροι

◇ Έτσι αν ενδιαφερόμαστε για  $\sigma$ -άλγεβρες υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$ , που περιέχουν όλα τα κλειστά σύνολα, πρέπει να θεωρήσουμε πιο γενικούς τύπους συνόλων απ' ό,τι τα ανοικτά και κλειστά. Αυτό μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός. **Σύνολα Borel** στον  $\mathbb{R}$  ή στον  $\mathbb{R}^n$  είναι τα στοιχεία της  $\sigma$ -άλγεβρας υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$  ή του  $\mathbb{R}^n$ , που παράγεται από την οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$  ή του  $\mathbb{R}^n$ , αντίστοιχα. Η αντίστοιχη  $\sigma$ -άλγεβρα στο  $\mathbb{R}$  ή στο  $\mathbb{R}^n$  ονομάζεται  **$\sigma$ -άλγεβρα του Borel** ή **Borel  $\sigma$ -άλγεβρα** στον  $\mathbb{R}$  ή στον  $\mathbb{R}^n$  και συμβολίζεται με  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  ή  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ , αντίστοιχα.

Πρόταση 1.5. (i) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $\{x\} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ .

(ii) Κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  είναι στοιχείο της  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ .

(iii) Κάθε διάστημα του  $\mathbb{R}$  είναι στοιχείο της  $\mathfrak{B}$ .

(iv) Η  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  είναι η ελάχιστη  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$ , που περιέχει όλα τα κλειστά υποσύνολα του  $\mathbb{R}$ .

(v) Η  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  είναι η ελάχιστη  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$ , που περιέχει όλα τα ανοικτά διαστήματα του  $\mathbb{R}$ .

# Χώροι μέτρου

Ορισμός. Ένας **χώρος μέτρου** (measure space) είναι μία τριάδα  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ , όπου:

- (i)  $(\Omega, \Sigma)$  είναι ένας μετρήσιμος χώρος,
- (ii)  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, 1]$  είναι μία **συνολοσυνάρτηση**, ώστε

$$(\mu 1) \quad \boxed{\mu(\emptyset) = 0},$$

( $\mu 2$ ) για κάθε ακολουθία  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ξένων ανά δύο στοιχείων της  $\Sigma$  ισχύει

$$\boxed{P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(E_n)}.$$

◇ Η ιδιότητα ( $\mu 2$ ) ονομάζεται **αριθμήσιμη προσθετικότητα** (countable additivity).

## Χώροι μέτρου

▷ Το μέτρο  $\mu$  ονομάζεται:

(α) **μέτρο πιθανότητας** (probability measure) αν

$$\mu(\Omega) = 1 ,$$

(β) **πεπερασμένο** (finite) αν

$$\mu(\Omega) < \infty ,$$

(γ)  **$\sigma$ -πεπερασμένο** ( $\sigma$ -finite), αν υπάρχει ακολουθία  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  στοιχείων της  $\Sigma$  ώστε

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \Omega \text{ και } \mu(E_n) < \infty \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} .$$

Ο αντίστοιχος χώρος  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ονομάζεται χώρος **πιθανότητας** (probability space) ή **πεπερασμένου μέτρου** ή  **$\sigma$ -πεπερασμένου μέτρου**, αντίστοιχα.

# Χώροι μέτρου

Πρόταση 1.6. Έστω  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ένας χώρος μέτρου. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Αν  $E, F \in \Sigma$  και  $E \subseteq F$  τότε

$$\mu(E) \leq \mu(F) .$$

(ii) Για κάθε ακολουθία  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  στοιχείων της  $\Sigma$  ισχύει

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) .$$

(iii) Για κάθε αύξουσα ακολουθία  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  στοιχείων της  $\Sigma$  ισχύει

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) .$$

(iv) Αν  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  είναι μία ακολουθία στοιχείων της  $\Sigma$  με  $E_{n+1} \subseteq E_n$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , και αν κάποιο από τα  $\mu(E_n)$  είναι πεπερασμένο, τότε ισχύει

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) .$$

## Χώροι μέτρου

Παρατήρηση. Στην ιδιότητα (iv) είναι ουσιώδες να έχουμε

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n) < \infty.$$

Πράγματι, αν  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$  και

$$\mu(E) := \sum_{x \in E} h(x) \quad \text{για κάθε } E \in \Sigma,$$

όπου  $h(x) := 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{N}$ , τότε για την ακολουθία  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  με

$$E_n := \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}$$

ισχύει  $E_{n+1} \subseteq E_n$  για όλα τα  $n \in \mathbb{N}$  αλλά

$$\mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \mu(\emptyset) = 0 < \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

## Χώροι μέτρου

Παράδειγμα 8. **(α)** Έστω  $(\Omega, \Sigma)$  οποιοσδήποτε μετρήσιμος χώρος. Ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, \infty]$  με

$$\mu(A) := \begin{cases} n, & \text{αν } \text{card}A = n \\ \infty, & \text{αν το } A \text{ είναι άπειρο.} \end{cases}$$

Τότε το  $\mu$  είναι ένα μέτρο επάνω στην  $\Sigma$  **(γιατί;)** και ονομάζεται **αριθμητικό μέτρο** (counting measure).

**(β)** Το **νορμαρισμένο αριθμητικό μέτρο** (normalized counting measure)  $\nu$ , που ορίζεται επάνω σε έναν μετρήσιμο χώρο  $(\Omega, \Sigma)$  με πεπερασμένο σύνολο  $\Omega := \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  είναι το αριθμητικό μέτρο  $\mu$  επάνω στον χώρο  $(\Omega, \Sigma)$  διαιρεμένο με  $\text{card}\Omega = n \in \mathbb{N}$ , δηλαδή

$$\nu(A) := \frac{\mu(A)}{n} \quad \text{για όλα τα } A \in \Sigma .$$

Ισχύει  $\nu(\Omega) = 1$  **(γιατί;)**.

## Χώροι μέτρου

Παράδειγμα 9 ( $n$  ρίψεις ενός κανονικού νομίσματος). Θεωρούμε τον μετρήσιμο χώρο  $(\Omega, \Sigma)$  με

$$\Omega := \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_j \in \{0, 1\} \forall j \in \{1, \dots, n\}\} \text{ και } \Sigma := \mathcal{P}(\Omega).$$

Προφανώς

$$\text{card} \Omega = 2^n < \infty.$$

Κάθε  $\omega_j$  μπορεί να ερμηνευθεί ως η έκβαση της  $j$  ρίψης με  $\omega_j = 1$  όταν το αποτέλεσμα της  $j$  ρίψης είναι «κορώνα» και με  $\omega_j = 0$  όταν το αποτέλεσμα της  $j$  ρίψης είναι «γράμματα». Το μέτρο  $\nu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  είναι το νορμαρισμένο αριθμητικό μέτρο επάνω στον μετρήσιμο χώρο  $(\Omega, \Sigma)$ .

Παράδειγμα 10. Έστω  $(\Omega, \Sigma)$  οποιοσδήποτε μετρήσιμος χώρος. Για κάθε  $x \in \Omega$  ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση  $\delta_x : \Sigma \rightarrow [0, 1]$  με

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A. \end{cases}$$

Τότε το  $\delta_x$  είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στον  $(\Omega, \Sigma)$  (**γιατί:**) και ονομάζεται το **μέτρο Dirac** στο  $x \in \Omega$ .

## Χώροι μέτρου

Άσκηση 2. Έστω  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  χώρος μέτρου,  $\Theta$  ένα μη κενό σύνολο και  $g : \Omega \rightarrow \Theta$  συνάρτηση. Θέτουμε

$$T := \{F : F \subseteq \Theta, g^{-1}[F] \in \Sigma\}$$

και

$$\nu(F) := \mu(g^{-1}[F]) \quad \text{για κάθε } F \in T.$$

Να αποδειχθεί ότι η τριάδα  $(\Theta, T, \nu)$  είναι ένας χώρος μέτρου.

◇ Το μέτρο  $\nu$  της παραπάνω άσκησης ονομάζεται **μέτρο εικόνα** (image measure) του  $\mu$  μέσω της  $g$ .

## Χώροι μέτρου

Ορισμός. Έστω  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ένας χώρος μέτρου. Ένα σύνολο  $N \in \Sigma$  ονομάζεται  **$\mu$ -μηδενικό σύνολο** ή απλώς **μηδενικό σύνολο** (null set or negligible set), αν

$$\mu(N) = 0.$$

◇ Θέτουμε

$$\Sigma_0 := \{N \in \Sigma : \mu(N) = 0\}$$

για το σύνολο όλων των στοιχείων της  $\Sigma$ , που είναι μηδενικού μέτρου.

◇ Ο χώρος μέτρου  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ονομάζεται **πλήρης** (ή το μέτρο  $\mu$  ονομάζεται **πλήρες**), αν για κάθε  $N \in \Sigma_0$  και για κάθε  $A \subseteq N$  ισχύει  $A \in \Sigma$  (επομένως  $A \in \Sigma_0$ ).

# Μέτρο του Lebesgue στον $\mathbb{R}$

## Εξωτερικά μέτρα και κατασκευή του Καραθεοδωρή

▷ Τα εξωτερικά μέτρα, που επινοήθηκαν από τον Καραθεοδωρή, παρέχουν την πιο σπουδαία μέθοδο κατασκευής μέτρων. Η μέθοδος Καραθεοδωρή εφαρμόζεται για την κατασκευή του μέτρου Lebesgue στον χώρο  $\mathbb{R}^n$  καθώς και για την περιγραφή όλων των πεπερασμένων μέτρων στον μετρήσιμο χώρο  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ .

# Εξωτερικά μέτρα και κατασκευή του Καραθεοδωρή

Ορισμός. Έστω  $\Omega$  ένα σύνολο. Μία συνολοσυνάρτηση  $\theta : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$  ονομάζεται **εξωτερικό μέτρο** (outer measure), αν

$$(θ1) \quad \theta(\emptyset) = 0,$$

(θ2) για κάθε  $A \subseteq B \subseteq \Omega$  ισχύει

$$\theta(A) \leq \theta(B),$$

(θ3) για κάθε ακολουθία  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  στο  $\mathcal{P}(\Omega)$  ισχύει

$$\theta\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \theta(A_n).$$

Η ιδιότητα (θ3) ονομάζεται **αριθμήσιμη υποπροσθετικότητα** (countable subadditivity).

## Εξωτερικά μέτρα και κατασκευή του Καραθεοδωρή

Θεώρημα 4 (Μέθοδος Καραθεοδωρή). Έστω  $\Omega$  οποιοδήποτε σύνολο και  $\theta$  ένα εξωτερικό μέτρο στο  $\Omega$ . Θέτουμε

$$\Sigma_\theta := \{E \subseteq \Omega : \theta(A) = \theta(A \cap E) + \theta(A \setminus E) \text{ για κάθε } A \subseteq \Omega\}.$$

Τότε το σύστημα  $\Sigma_\theta$  είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ . Επί πλέον, αν  $\mu : \Sigma_\theta \rightarrow [0, \infty]$  είναι η συνολοσυνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$\mu(E) := \theta(E) \text{ για κάθε } E \in \Sigma_\theta,$$

τότε η τριάδα  $(\Omega, \Sigma_\theta, \mu)$  είναι ένας πλήρης χώρος μέτρου.

## Μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$

Ορισμός. Ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση  $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  θέτοντας

$$\lambda^*(A) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda(I_k) : \{I_k\}_{k \in \mathbb{N}} \text{ ακολουθία ημιάνοικτων διαστημάτων στον } \mathbb{R} \text{ με } A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right\}$$

για κάθε  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Παρατηρούμε ότι **κάθε**  $A \subseteq \mathbb{R}$  μπορεί να καλυφθεί από μία ακολουθία ημιάνοικτων διαστημάτων, π.χ.  $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$ . Επομένως στον παραπάνω ορισμό έχουμε πάντα ένα μη κενό σύνολο για να μπορούμε να θεωρήσουμε το infimum του στο διάστημα  $[0, \infty]$ . Άρα το  $\lambda^*(A)$  ορίζεται πάντα στο διάστημα  $[0, \infty]$ . Η συνολοσυνάρτηση  $\lambda^*$  ονομάζεται το **εξωτερικό μέτρο Lebesgue στον  $\mathbb{R}$**  (Lebesgue outer measure).

◇ Η παραπάνω ονομασία αυτή δικαιολογείται από τον ισχυρισμό (α) της ακόλουθης πρότασης:

Πρόταση 4. Ισχύουν τα παρακάτω:

- (α) η συνολοσυνάρτηση  $\lambda^*$  είναι ένα εξωτερικό μέτρο στον  $\mathbb{R}$ ,
- (β) για κάθε ημιάνοικτο διάστημα  $I \subseteq \mathbb{R}$  ισχύει

$$\lambda^*(I) = \lambda(I) .$$

## Εξωτερικά μέτρα και κατασκευή του Καραθεοδωρή

Θεώρημα 5 (Παραγωγή εξωτερικών μέτρων). Έστω  $\Omega$  οποιοδήποτε σύνολο και  $\mathcal{E}$  μία οικογένεια υποσυνόλων του  $\Omega$ , ώστε  $\Omega, \emptyset \in \mathcal{E}$ . Αν  $\nu: \mathcal{E} \rightarrow [0, \infty]$  είναι μία συνολοσυνάρτηση με  $\nu(\emptyset) = 0$ , τότε η συνολοσυνάρτηση

$$\nu^*(A) := \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(E_n) : E_n \in \mathcal{E} \ \forall n \in \mathbb{N}, A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right\},$$

όπου  $A$  είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του  $\Omega$ , ορίζει ένα εξωτερικό μέτρο στο  $\Omega$ .

## Μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$

▷ Για ό,τι ακολουθεί, με τον όρο **ημιάνοικτο διάστημα** στον  $\mathbb{R}$  εννοούμε ένα σύνολο της μορφής

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \text{ για } a, b \in \mathbb{R} .$$

Επιτρέπεται να ισχύει  $b \leq a$  στον παραπάνω τύπο. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε

$$[a, b) = \emptyset .$$

▷ Αν  $I \subseteq \mathbb{R}$  είναι ένα ημιάνοικτο διάστημα, τότε

$$I = \emptyset \text{ ή } I = [\inf I, \sup I)$$

Επομένως τα ακραία σημεία του είναι καλά ορισμένα. Έτσι επιτρέπεται να ορίσουμε το **μήκος**  $\lambda$  του ημιάνοικτου διαστήματος  $[a, b)$  ως

$$\lambda([a, b)) := \begin{cases} b - a, & \text{αν } a < b \\ 0, & \text{αν } a \geq b. \end{cases}$$

## Μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$

Αφού σύμφωνα με την Πρόταση 4 η συνολοσυνάρτηση  $\lambda^*$  είναι ένα εξωτερικό μέτρο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο Καραθεοδωρή (Θεώρημα 4) για να κατασκευάσουμε ένα μέτρο  $\lambda$  με πεδίο ορισμού την  $\sigma$ -άλγεβρα  $\Sigma_{\lambda^*}$ , όπως αυτή ορίζεται στο Θεώρημα 4. Αυτό το μέτρο  $\lambda$  ονομάζεται το **μέτρο Lebesgue στον  $\mathbb{R}$**  (Lebesgue measure). Τα σύνολα  $E \in \Sigma_{\lambda^*}$  για τα οποία ορίζεται το  $\lambda(E)$  ονομάζονται **Lebesgue μετρήσιμα σύνολα** ενώ η  $\sigma$ -άλγεβρα  $\Sigma_{\lambda^*}$  ονομάζεται η  **$\sigma$ -άλγεβρα Lebesgue στον  $\mathbb{R}$** . Σύμφωνα με το Θεώρημα 4 του Καραθεοδωρή ο χώρος μέτρου  $(\mathbb{R}, \Sigma_{\lambda^*}, \lambda)$  είναι πλήρης. Τα σύνολα μηδενικού μέτρου  $\lambda$ , δηλαδή τα στοιχεία του

$$(\Sigma_{\lambda^*})_0 = \{N \in \Sigma_{\lambda^*} : \lambda(N) = 0\},$$

ονομάζονται **Lebesgue μηδενικά σύνολα στον  $\mathbb{R}$** .

## Μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$

Πρόταση 5. Όλα τα σύνολα Borel στον  $\mathbb{R}$  είναι Lebesgue μετρήσιμα, δηλαδή

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subseteq \Sigma_{\lambda^*} .$$

Ιδιαίτερως, το ίδιο ισχύει για όλα τα ανοικτά σύνολα και όλα τα σύνολα των παρακάτω κλάσεων:

- (i) ανοικτά διαστήματα της μορφής  $(a, b)$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $(a, \infty)$ ,  $(-\infty, +\infty)$ , όπου  $a < b \in \mathbb{R}$ ,
- (ii) κλειστά διαστήματα της μορφής  $[a, b]$ , όπου  $a < b \in \mathbb{R}$ ,
- (iii) ημιάνοικτα διαστήματα της μορφής  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$ , όπου  $a < b \in \mathbb{R}$ .

Επί πλέον ισχύει ο παρακάτω τύπος για τα μέτρα τέτοιων συνόλων

$$\lambda((a, b)) = \lambda([a, b]) = \lambda([a, b)) = \lambda((a, b]) = b - a \quad \forall a \leq b \in \mathbb{R} .$$

Το μέτρο Lebesgue μη φραγμένων διαστημάτων είναι άπειρο. Επίσης κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  είναι Lebesgue μετρήσιμο και έχει μέτρο Lebesgue 0.

## Μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}$

Παρατηρήσεις. (α) Ο περιορισμός  $\lambda|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$  του μέτρου Lebesgue  $\lambda$  στην  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  είναι επίσης ένα μέτρο, το οποίο ονομάζεται το **μέτρο Lebesgue στην  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$**  ή το **μέτρο Borel-Lebesgue στον  $\mathbb{R}$**  και συμβολίζεται πάλι με  $\lambda$ .

(β) Ένα οποιοδήποτε μέτρο στον μετρήσιμο χώρο  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  ονομάζεται **μέτρο Borel στον  $\mathbb{R}$** .

◇ Παρακάτω θα μελετήσουμε ένα τρόπο κατασκευής όλων των Borel μέτρων πιθανότητας στον  $\mathbb{R}$ .

## Μέτρο Lebesgue-Stieltjes και συναρτήσεις κατανομής

Πρόταση 6. Έστω  $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$  ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στον  $\mathbb{R}$ . Ορίζουμε την συνάρτηση  $F_\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τον τύπο

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

Η συνάρτηση  $F_\mu$  είναι φραγμένη, αύξουσα, δεξιά συνεχής και ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\mu(x) = 0 .$$

Θεώρημα 6. Έστω  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία φραγμένη, αύξουσα, δεξιά συνεχής συνάρτηση με  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ . Τότε υπάρχει ένα μοναδικό πεπερασμένο μέτρο Borel  $\mu_F$  στον  $\mathbb{R}$ , ώστε

$$\mu_F((-\infty, x]) = F(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

Το μέτρο  $\mu_F$  καλείται το **μέτρο Lebesgue-Stieltjes** που παράγεται από την  $F$ .

## Μέτρο Lebesgue-Stieltjes και συναρτήσεις κατανομής

Παρατηρήσεις. (α) Μία συνάρτηση  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  φραγμένη, αύξουσα και δεξιά συνεχής με  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής** (distribution function). Η  $F$  ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** (probability distribution function) ακριβώς τότε όταν επί πλέον ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 .$$

(β) Από την Πρόταση 6 και το Θεώρημα 6 έπεται ότι η αντιστοιχία  $F \mapsto \mu_F$  είναι μία 1-1 και επί συνάρτηση από το σύνολο όλων των συναρτήσεων κατανομής στο σύνολο όλων των πεπερασμένων μέτρων Borel στο  $\mathbb{R}$ .

(γ) Γενικότερα (από ό,τι στο Θεώρημα 6) αν η  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μία αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση, τότε υπάρχει ένα μέτρο Borel  $\mu_F$  στο  $\mathbb{R}$ , ώστε

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$$

για κάθε  $a, b \in [-\infty, +\infty]$  με  $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ . Για την επιλογή  $F(x) := id_{\mathbb{R}}(x) = x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , ισχύει  $\mu_F = \lambda$ , όπου  $\lambda$  είναι το μέτρο του Lebesgue στον  $\mathbb{R}$ .

# Θεωρία Ολοκλήρωσης

## Μετρήσιμες συναρτήσεις

Στην πρώτη αυτή ενότητα αναπτύσσονται ιδέες, που έχουν σχέση με  $\sigma$ -άλγεβρες συνόλων. Ο σκοπός είναι η ανάπτυξη της έννοιας της μετρήσιμης συνάρτησης και διαφόρων συναφών τεχνικών. Το καλύτερο παράδειγμα μίας  $\sigma$ -άλγεβρας, που θα μπορούσε να έρθει στο μυαλό μας, όταν διαβάζουμε αυτή την παράγραφο, είναι ίσως η  $\sigma$ -άλγεβρα του Borel επάνω στον  $\mathbb{R}$  ή στον  $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, +\infty]$ . Ένα δεύτερο καλό παράδειγμα είναι η  $\sigma$ -άλγεβρα των Lebesgue μετρήσιμων συνόλων επάνω στον  $\mathbb{R}$  ή στον  $\overline{\mathbb{R}}$ . Η χρησιμότητα των μετρήσιμων συναρτήσεων στην Θεωρία Ολοκλήρωσης οφείλεται κυρίως στις εξής δύο ιδιότητες (που δεν έχουν οι συνεχείς συναρτήσεις).

- (i) Το (κατά σημείο) όριο μίας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη συνάρτηση και
- (ii) κάθε μετρήσιμη συνάρτηση είναι (κατά σημείο) όριο μίας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων, που παίρνουν πεπερασμένο πλήθος τιμών.

## Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός. Ένα σύνολο  $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$  ονομάζεται **Borel σύνολο στον  $\overline{\mathbb{R}}$** , αν  $E \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ .

Λήμμα 1. Το σύστημα όλων των Borel συνόλων στο  $\overline{\mathbb{R}}$  είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα στο  $\overline{\mathbb{R}}$ , την οποία συμβολίζουμε με  $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}})$ .

Πρόταση 3.1. Έστω  $(\Omega, \Sigma)$  ένας μετρήσιμος χώρος. Τότε για κάθε συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- (i)  $\{x \in \Omega : f(x) < a\} \in \Sigma$  για κάθε  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ,
- (ii)  $\{x \in \Omega : f(x) \leq a\} \in \Sigma$  για κάθε  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ,
- (iii)  $\{x \in \Omega : f(x) > a\} \in \Sigma$  για κάθε  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ,
- (iv)  $\{x \in \Omega : f(x) \geq a\} \in \Sigma$  για κάθε  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ .
- (v)  $\{x \in \Omega : f(x) \leq q\} \in \Sigma$  για κάθε  $q \in \mathbb{Q}$ .

## Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός. Έστω  $(\Omega, \Sigma)$  ένας μετρήσιμος χώρος. Μία συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ονομάζεται **μετρήσιμη** (measurable) ή  **$\Sigma$ -μετρήσιμη** ή **τυχαία μεταβλητή** (random variable, αν ικανοποιεί μία οποιαδήποτε από τις συνθήκες (i)-(v) της Πρότασης 3.1.

◇ Με  $\mathcal{M}$  συμβολίζουμε το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , και με  $\mathcal{M}_+$  το σύνολο όλων των μη αρνητικών  $f \in \mathcal{M}$ .

◇ Αν  $(\Omega, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$  ή  $(\Omega, \Sigma) = (\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n))$ , τότε κάθε μετρήσιμη συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ονομάζεται **Borel-μετρήσιμη**.

◇ Αν  $\Omega = \mathbb{R}$  ή  $\Omega = \mathbb{R}^n$  και  $\Sigma$  είναι η  $\sigma$ -άλγεβρα του Lebesgue στον  $\mathbb{R}$  (ή στον  $\mathbb{R}^n$ ), τότε κάθε μετρήσιμη συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ονομάζεται **Lebesgue-μετρήσιμη**.

## Μετρήσιμες συναρτήσεις

Παράδειγμα 11. Έστω  $(\Omega, \Sigma)$  ένας μετρήσιμος χώρος και  $A \subseteq \Omega$ . Η συνάρτηση  $\mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , που ορίζεται από την σχέση

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$$

ονομάζεται η **δείκτρια συνάρτηση του συνόλου**  $A$  (indicator function). Η  $\mathbb{1}_A$  είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν  $A \in \Sigma$ .

Πράγματι, αν η  $\mathbb{1}_A$  είναι μετρήσιμη, τότε σύμφωνα με την Πρόταση 3.1 ισχύει

$$A = \{x \in \Omega : \mathbb{1}_A(x) = 1\} = \mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = \{x \in \Omega : \mathbb{1}_A(x) \geq 1\} \in \Sigma.$$

Αντιστρόφως, αν υποθέσουμε ότι  $A \in \Sigma$ , τότε η μετρησιμότητα της  $\mathbb{1}_A$  μπορεί να αποδειχθεί ως εξής. Έστω  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Τότε

$$\{\mathbb{1}_A \leq a\} = \{x \in \Omega : \mathbb{1}_A(x) \leq a\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{αν } a < 0 \\ \Omega \setminus A, & \text{αν } 0 \leq a < 1 \\ \Omega, & \text{αν } a \geq 1. \end{cases}$$

## Μετρήσιμες συναρτήσεις

Παρατηρήσεις. **(α)** Κάθε Borel μετρήσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n \geq 1$ ) είναι Lebesgue μετρήσιμη, αφού  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \Sigma_{\lambda_n^*}$ . Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά, αφού υπάρχει  $A \in \Sigma_{\lambda_n^*} \setminus \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , άρα η συνάρτηση  $f := \chi_A$  είναι Lebesgue αλλά όχι Borel μετρήσιμη.

**(β)** Κάθε συνεχής συνάρτηση  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subseteq \mathbb{R}$ ) είναι Borel μετρήσιμη.

**(γ)** Κάθε μονότονη συνάρτηση  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subseteq \mathbb{R}$ ) είναι Borel μετρήσιμη.

## Μετρήσιμες συναρτήσεις

Πρόταση 3.2. Έστω  $(\Omega, \Sigma)$  μετρήσιμος χώρος και  $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Οι συναρτήσεις  $f \wedge g, f \vee g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , με

$$(f \wedge g)(\omega) := \min \{f(\omega), g(\omega)\} \quad \text{για κάθε } \omega \in \Omega$$

και

$$(f \vee g)(\omega) := \max \{f(\omega), g(\omega)\} \quad \text{για κάθε } \omega \in \Omega$$

είναι μετρήσιμες.

(ii) Οι συναρτήσεις

$$f^+ := f \vee 0 \quad \text{και} \quad f^- := (-f) \vee 0$$

είναι μετρήσιμες.

## Μετρήσιμες συναρτήσεις

Πρόταση 3.3. Έστω  $(\Omega, \Sigma)$  ένας μετρήσιμος χώρος, και  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων  $f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Η συνάρτηση  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  με τύπο

$$(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(\omega) := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega) \quad \text{για κάθε } \omega \in \Omega$$

είναι μετρήσιμη.

(ii) Η συνάρτηση  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , με τύπο

$$(\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n)(\omega) := \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(\omega) \quad \text{για κάθε } \omega \in \Omega$$

είναι μετρήσιμη.

(iii) Η συνάρτηση  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , αν υπάρχει (δηλαδή αν η ακολουθία  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει κατά σημείο), είναι μετρήσιμη.

## Μετρήσιμες συναρτήσεις

Πρόταση 3.4. Έστω  $(\Omega, \Sigma)$  ένας μετρήσιμος χώρος και  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , συναρτήσεις. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) Αν η  $f$  είναι σταθερή, τότε είναι μετρήσιμη.
- (ii) Αν οι  $f, g$  είναι μετρήσιμες, τότε η  $f + g$  είναι μετρήσιμη.
- (iii) Αν η  $f$  είναι μετρήσιμη και  $c \in \mathbb{R}$ , τότε η  $c \cdot f$  είναι μετρήσιμη.
- (iv) Αν οι  $f, g$  είναι μετρήσιμες, τότε η  $f \cdot g$  είναι μετρήσιμη.
- (v) Αν οι  $f, g$  είναι μετρήσιμες, τότε η συνάρτηση  $f/g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου

$$(f/g)(\omega) := \begin{cases} f(\omega)/g(\omega), & \text{αν } g(\omega) \neq 0 \\ 0, & \text{αν } g(\omega) = 0, \end{cases}$$

είναι μετρήσιμη.

- (vi) Αν η  $f$  είναι μετρήσιμη, τότε η  $|f|$  είναι μετρήσιμη.

## Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός. Έστω  $(\Omega, \Sigma)$  ένας μετρήσιμος χώρος. Μία μετρήσιμη συνάρτηση  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται **απλή** (simple) ή **κλιμακωτή** συνάρτηση (step function), αν το σύνολο  $s(\Omega)$  των τιμών της είναι πεπερασμένο.

◇ Με  $\mathcal{S}$  συμβολίζουμε το σύνολο όλων των απλών συναρτήσεων  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , και με  $\mathcal{S}_+$  το σύνολο όλων των μη αρνητικών συναρτήσεων  $s \in \mathcal{S}$ .

## Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός. Αν  $s : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μία απλή συνάρτηση, τότε υπάρχει μία μοναδική, πεπερασμένη, μετρήσιμη διαμέριση  $\{A_1, \dots, A_n\}$  μη κενών υποσυνόλων του  $\Omega$  και μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί  $a_1, \dots, a_n$  με  $a_i \neq a_j$  για κάθε  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  με  $i \neq j$ , ώστε

$$s = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \mathbb{1}_{A_k} .$$

Η παραπάνω παράσταση ονομάζεται η **κανονική μορφή** της  $s$ . Προκύπτει, αν γράψουμε

$$s(\Omega) = \{a_1, \dots, a_n\}$$

και θέσουμε

$$A_k := s^{-1}(\{a_k\}) \text{ για κάθε } k \in \{1, \dots, n\} .$$

## Μετρήσιμες συναρτήσεις

Θεώρημα 3.5. Έστω  $(\Omega, \Sigma)$  μετρήσιμος χώρος και  $f : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$  μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  απλών συναρτήσεων  $s_n : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  ώστε

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n .$$

Αν η  $f$  είναι φραγμένη, τότε η  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $f$ .

Πόρισμα 3.6. Έστω  $(\Omega, \Sigma)$  μετρήσιμος χώρος και  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει μία ακολουθία  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  απλών συναρτήσεων, ώστε  $f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  και η ακολουθία  $(|s_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αύξουσα. Αν η  $f$  είναι φραγμένη, τότε η  $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  συγκλίνει ομοιόμορφα.

# Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Για την εισαγωγή της έννοιας του ολοκληρώματος Lebesgue προχωρούμε σε τρία βήματα:

- 1 Πρώτα ορίζουμε το ολοκλήρωμα για απλές μη αρνητικές συναρτήσεις,
- 2 μετά με την βοήθεια μονότονων ακολουθιών επεκτείνουμε τον ορισμό για οποιεσδήποτε μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις,
- 3 τέλος με την βοήθεια του δευτέρου βήματος εισάγουμε την έννοια των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

# Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Ορισμός. Έστω  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ένας χώρος μέτρου και  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  μια απλή συνάρτηση με κανονική παράσταση

$$f = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \mathbb{1}_{A_k} \text{ όπου } a_1, \dots, a_n \geq 0 \text{ και } A_1, \dots, A_n \in \Sigma \text{ ξένα ανά δύο.}$$

Η ποσότητα  $\sum_{k=1}^n a_k \cdot \mu(A_k) \in [0, \infty]$  ονομάζεται το **ολοκλήρωμα Lebesgue** της  $f$  (ως προς  $\mu$ ) και συμβολίζεται με

$$\int_{\Omega} f \, d\mu \text{ ή } \int f \, d\mu \text{ ή } \int f(\omega) \, d\mu(\omega) \text{ ή } \int_{\Omega} f(\omega) \, \mu(d\omega).$$

◇ Αν στο παραπάνω άθροισμα εμφανίζεται ο όρος  $0 \cdot (+\infty)$ , τότε θέτουμε  $0 \cdot (+\infty) = 0$ . Προφανώς ισχύει  $\int f \, d\mu \in [0, \infty]$ .

## Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Πρόταση 3.7. Έστω  $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  απλές συναρτήσεις και  $a \geq 0$ . Τότε:

$$(i) \int \mathbb{1}_A d\mu = \int_A d\mu = \mu(A) \text{ για κάθε } A \in \Sigma,$$

$$(ii) \int a \cdot f d\mu = a \cdot \int f d\mu,$$

$$(iii) \int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu,$$

$$(iv) \text{ αν } f \leq g \text{ τότε } \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

## Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Ορισμός. Έστω  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  ένας χώρος μέτρου και  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  μία μετρήσιμη συνάρτηση. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5 υπάρχει αύξουσα ακολουθία  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  απλών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ , ώστε  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ . Το **ολοκλήρωμα Lebesgue** της  $f$  (ως προς  $\mu$ ) ορίζεται ως εξής:

$$\int f \, d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

◇ Αν  $A \in \Sigma$  τότε το ολοκλήρωμα Lebesgue της  $f$  (ως προς  $\mu$ ) επάνω στο  $A$  ορίζεται ως εξής:

$$\int_A f \, d\mu := \int f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu.$$

## Το ολοκλήρωμα Lebesgue

▷ Η έννοια του ολοκληρώματος στον παραπάνω ορισμό είναι καλά ορισμένη, διότι το ολοκλήρωμα δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  των απλών συναρτήσεων. Η απόδειξη αυτού του γεγονότος έπεται από το πόρισμα του παρακάτω αποτελέσματος.

Θεώρημα 3.8. Για κάθε αύξουσα ακολουθία  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  απλών συναρτήσεων  $f_n : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  και για κάθε απλή συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ , ώστε  $f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ , ισχύει

$$\int f \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu .$$

Πόρισμα 3.9. Αν  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  και  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αύξουσες ακολουθίες απλών συναρτήσεων  $f_n, g_n : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  με  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ , τότε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu .$$

## Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Πρόταση 3.10. Έστω  $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  μετρήσιμες συναρτήσεις,  $A, B \in \Sigma$  και  $a \geq 0$ . Τότε

$$(i) \int a \cdot f \, d\mu = a \cdot \int f \, d\mu,$$

$$(ii) \int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu,$$

$$(iii) \text{ αν } f \leq g \text{ τότε } \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu,$$

$$(iv) \text{ αν } A \subseteq B \text{ τότε } \int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu,$$

$$(v) \text{ αν } \mu(A) = 0 \text{ ή αν } f(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in A, \text{ τότε } \int_A f \, d\mu = 0.$$

Θεώρημα 3.11. Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  ισχύει

$$\int f \, d\mu = 0 \iff f(\omega) = 0 \text{ για } \mu\text{-σχεδόν όλα τα } \omega \in \Omega .$$

## Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Ορισμός. (α) Έστω  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  μία μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε

$$\int_A f \, d\mu := \int_A f^+ \, d\mu - \int_A f^- \, d\mu \quad \text{για κάθε } A \in \Sigma ,$$

με την προϋπόθεση, ότι τουλάχιστον ένα από τα ολοκληρώματα  $\int_A f^+ \, d\mu$  και  $\int_A f^- \, d\mu$  είναι πεπερασμένο. Τότε το  $\int_A f \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}}$  ονομάζεται το **ολοκλήρωμα Lebesgue** της  $f$  (ως προς  $\mu$ ) επάνω στο  $A$ .

(β) Μία μετρήσιμη συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  ονομάζεται **Lebesgue ολοκληρώσιμη** (ως προς  $\mu$ ), αν

$$\int |f| \, d\mu < \infty .$$

◇ Με  $\mathcal{L}^1(\mu)$  συμβολίζουμε το σύνολο όλων των Lebesgue ολοκληρώσιμων (ως προς  $\mu$ ) συναρτήσεων  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Επίσης

$$\mathcal{L}_+^1(\mu) := \{f \in \mathcal{L}^1(\mu) : f \geq 0\} .$$

## Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Πρόταση 3.12 (Συνθήκες ολοκληρωσιμότητας). Για κάθε συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i)  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ,

(ii)  $f^+, f^- \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ,

(iii) υπάρχουν συναρτήσεις  $p, q : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ , ώστε  $p, q \in \mathcal{L}^1(\mu)$  και  $f = p - q$ ,

(iv) η  $f$  είναι μετρήσιμη και υπάρχει  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ , ώστε  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  και  $|f| \leq g$ ,

(v) η  $f$  είναι μετρήσιμη και  $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ .

# Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Πρόταση 3.13. Έστω  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  και  $c \in \mathbb{R}$ . Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) αν  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  τότε  $f + g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  και

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu ,$$

(ii) αν  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  τότε  $c \cdot f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  και

$$\int c \cdot f d\mu = c \cdot \int f d\mu ,$$

(iii) αν  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  και  $f \geq 0$  τότε

$$\int f d\mu \geq 0 ,$$

(iv) αν  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  και  $f \leq g$  τότε

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu ,$$

(v) αν  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$  τότε

$$|f| \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad \text{και} \quad \left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu .$$

## Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Θεώρημα 3.14. Έστω  $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ . Τότε ισχύουν τα εξής:

(a) αν  $f(\omega) = g(\omega)$  για  $\mu$ -σχεδόν όλα τα  $\omega \in \Omega$ , τότε

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu .$$

(b)  $f(\omega) = 0$  για  $\mu$ -σχεδόν όλα τα  $\omega \in \Omega \iff \int_A f \, d\mu = 0$  για κάθε  $A \in \Sigma$ .

# Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Παρατήρηση. Υπάρχουν Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, που δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμες.

Πράγματι, έστω  $f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ . Αφού το  $\mathbb{Q}$  είναι αριθμήσιμο σύνολο, προκύπτει  $\lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$ , άρα  $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ .

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Riemann  $\int_0^1 f(x) dx$ , επιλέγουμε μία διαμέριση  $\Delta := \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1\}$  του  $[0, 1]$ . Σε κάθε υποδιάστημα  $[x_{k-1}, x_k]$  του  $[0, 1]$  υπάρχουν  $q_k \in \mathbb{Q} \cap [x_{k-1}, x_k]$  με  $f(q_k) = 1$  και  $r_k \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [x_{k-1}, x_k]$  με  $f(r_k) = 0$ . Προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα Riemann από το άνω άθροισμα

$$\sum_{k=1}^n f(q_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n 1 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 1$$

και από το κάτω άθροισμα

$$\sum_{k=1}^n f(r_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0 .$$

Ανεξάρτητα από την «λεπτότητα» της διαμέρισης, το άνω άθροισμα είναι πάντα 1 και το κάτω 0. Άρα η  $f$  **δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη**.

## Θεωρήματα σύγκλισης

Ό,τι έχουμε δει μέχρι εδώ δεν μπορεί να δικαιολογηθεί από οποιοδήποτε (μέχρι εδώ) θεώρημα, ότι είναι εντελώς σημαντικό. Τώρα ερχόμαστε στην καρδιά της μοντέρνας Θεωρίας Ολοκλήρωσης, τα «Θεωρήματα σύγκλισης», που περιγράφουν συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορούμε να ολοκληρώσουμε το όριο μιας ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Σε αντίθεση με το ολοκλήρωμα του Riemann για το ολοκλήρωμα του Lebesgue ισχύουν ουσιαδώς καλύτερα θεωρήματα σύγκλισης.

*Για ό,τι ακολουθεί η τριάδα  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  είναι ένας χώρος μέτρου.*

## Θεωρήματα σύγκλισης

Θεώρημα 3.14 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης). (α) Έστω  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων στον  $\mathcal{M}_+$ . Θέτουμε  $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ . Τότε

$$f \in \mathcal{M}_+ \text{ και } \int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

(β) Έστω  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  αύξουσα ακολουθία συναρτήσεων στον  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , ώστε  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu < \infty$ . Τότε

$$g := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ και } \int g \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu.$$

Πόρισμα 3.15 (Beppo Levi). Έστω  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στον  $\mathcal{M}_+$ , και  $f := \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$ . Τότε

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

## Θεωρήματα σύγκλισης

Πόρισμα 3.16. Έστω  $f \in \mathcal{M}_+$ . Θέτουμε:

$$\nu := \nu(\mu, f) : \Sigma \rightarrow [0, \infty] \text{ με } \nu(A) := \int_A f \, d\mu \text{ για κάθε } A \in \Sigma$$

(το  $\nu$  ονομάζεται το **αόριστο ολοκλήρωμα της  $f$  ως προς  $\mu$** ). Τότε:

- (i) το  $\nu$  είναι ένα μέτρο,
- (ii) αν  $A \in \Sigma$  και  $\mu(A) = 0$  τότε  $\nu(A) = 0$  (ακριβώς τότε το  $\nu$  ονομάζεται **απόλυτα συνεχές ως προς  $\mu$**  και συμβολίζεται με  $\nu \ll \mu$ ),
- (iii) αν  $g \in \mathcal{M}_+$ , τότε

$$\int g \, d\nu = \int g \cdot f \, d\mu.$$

## Θεωρήματα σύγκλισης

Το επόμενο αποτέλεσμα, γνωστό ως το Λήμμα Fatou, μπορεί να θεωρηθεί επίσης ως πόρισμα του Θεωρήματος 3.14 και περιέχει μία γενίκευση του Θεωρήματος 3.14 για ακολουθίες συναρτήσεων από τον χώρο  $\mathcal{M}_+$ , οι οποίες δεν συγκλίνουν κατ' ανάγκη.

Λήμμα Fatou. (i) Έστω  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  μία ακολουθία συναρτήσεων στον  $\mathcal{M}_+$ . Τότε

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu .$$

(ii) Έστω  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ακολουθία συναρτήσεων στον  $\mathcal{L}_+^1(\mu)$ . Υποθέτουμε ότι  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu < \infty$ . Τότε

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} g_n \in \mathcal{L}^1(\mu) \text{ και } \int \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu .$$

## Θεωρήματα σύγκλισης

Θεώρημα 3.17 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης). Έστω  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  μία ακολουθία συναρτήσεων στον  $\mathcal{M}$ , ώστε να υπάρχει το όριο  $f(\omega) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) \in \mathbb{R}$  για  $\mu$ -σχεδόν όλα τα  $\omega \in \Omega$ . Επί πλέον υποθέτουμε, ότι υπάρχει  $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$  ώστε  $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και για  $\mu$ -σχεδόν όλα τα  $\omega \in \Omega$ . Τότε  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ,  $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , υπάρχει το  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \in \mathbb{R}$ , και ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

## Θεωρήματα σύγκλισης

Πόρισμα 3.18 (Συνεχής εξάρτηση ολοκληρώματος από παράμετρο). Έστω  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α)  $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(\bullet, t) \in \mathcal{L}^1(\mu),$

(β) για  $\mu$ -σχεδόν όλα τα  $\omega \in \Omega$  η συνάρτηση  $f(\omega, \bullet) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής σε κάθε σημείο  $t_0 \in \mathbb{R},$

(γ)  $\exists \delta > 0 \exists g \in \mathcal{L}_+^1(\mu) \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) |f(\bullet, t)| \leq g$   $\mu$ -σχεδόν παντού.

Τότε η συνάρτηση  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$  που ορίζεται από τον τύπο

$$F(t) := \int f(\omega, t) d\mu(\omega) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

είναι συνεχής στο  $t_0 \in \mathbb{R},$  και επίσης η συνάρτηση  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}^1(\mu),$  που ορίζεται από τον τύπο

$$F(t) := f(\bullet, t) \in \mathcal{L}^1(\mu) \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

είναι συνεχής στο  $t_0 \in \mathbb{R}.$

## Θεωρήματα σύγκλισης

Πόρισμα 3.19. Έστω  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  ανοικτό διάστημα και  $f : \Omega \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) το ολοκλήρωμα  $F(t) := \int f(\omega, t) d\mu(\omega)$  ορίζεται για κάθε  $t \in (a, b)$ ,

(β) η μερική παράγωγος  $\frac{\partial f}{\partial t}$  της  $f$  ως προς την δεύτερη μεταβλητή ορίζεται παντού στο  $\Omega \times (a, b)$ ,

(γ) υπάρχει συνάρτηση  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  με  $\int g d\mu < \infty$  ώστε

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t) \right| \leq g(\omega) \quad \text{για κάθε } (\omega, t) \in \Omega \times (a, b) .$$

Τότε υπάρχουν η παράγωγος  $F'(t)$  και το ολοκλήρωμα  $\int \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t) d\mu(\omega)$  για κάθε  $t \in (a, b)$ , και ισχύει

$$F'(t) = \int \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t) d\mu(\omega) \quad \text{για κάθε } t \in (a, b) .$$

# Θεωρία Πιθανοτήτων

## Βασικές έννοιες

Ορισμοί. (α) Ένας **χώρος πιθανότητας** (χ.π. για συντομία) (probability space) είναι ένας χώρος μέτρου  $(\Omega, \Sigma, P)$  με  $P(\Omega) = 1$ . Το σύνολο  $\Omega$  ονομάζεται ο **δειγματικός χώρος** (sample space) και μπορεί να θεωρηθεί ως το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης. Τα στοιχεία της  $\sigma$ -άλγεβρας  $\Sigma$  ονομάζονται **ενδεχόμενα** (events) και το μέτρο  $P$  ονομάζεται **μέτρο πιθανότητας** και αντιστοιχεί σε κάθε ενδεχόμενο  $A \in \Sigma$  έναν αριθμό  $P(A)$  στο διάστημα  $[0, 1]$ , ο οποίος παριστάνει την πιθανότητα πραγματοποίησης του  $A$ .

(β) Έστω  $(\Omega, \Sigma, P)$  ένας χ.π.. Κάθε μετρήσιμη συνάρτηση  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή** (τ.μ. για συντομία) (random variable). Αν  $X_1, \dots, X_n$  είναι τυχαίες μεταβλητές, τότε η απεικόνιση  $X := (X_1, \dots, X_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  είναι  $\Sigma$ - $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ -μετρήσιμη και ονομάζεται **τυχαίο διάνυσμα** (τ.δ. για συντομία) (random vector).

## Βασικές έννοιες

Ορισμός. Έστω  $(\Omega, \Sigma, P)$  ένας χ.π. και  $X$  μία τ.μ.. Η συνολοσυνάρτηση  $P_X : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  με τύπο

$$P_X(B) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) := P(\{X \in B\}) = P(X^{-1}[B])$$

για κάθε  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  ονομάζεται **κατανομή πιθανότητας** της τ.μ.  $X$ . Η  $P_X$  παράγει την **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** (σ.κ.π. για συντομία) (probability distribution function)  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  που ορίζεται από τον τύπο

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Παρατήρηση. Η συνολοσυνάρτηση  $P_X$  είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ .

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι η συνολοσυνάρτηση  $P_X$  είναι το μέτρο εικόνα του  $P$  μέσω της  $X$ , και επομένως από την Άσκηση 2 έπεται ότι η  $P_X$  είναι ένα μέτρο στην  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ . Επιπλέον, καθώς

$$P_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}[\mathbb{R}]) = P(\Omega) = 1$$

έπεται ότι το  $P_X$  είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ .

## Βασικές έννοιες

Ορισμός. Έστω  $(\Omega, \Sigma, P)$  ένας χ.π. και  $X := (X_1, \dots, X_n)$  ένα τ.δ. Η συνολοσυνάρτηση  $P_X : \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$ , που ορίζεται από τον τύπο

$$P_X(B) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) := P(\{X \in B\})$$

ονομάζεται **κατανομή πιθανότητας** του τ.δ.  $X$  ή **από κοινού κατανομή πιθανότητας** των τ.μ.  $X_1, \dots, X_n$ . Η  $P_X$  παράγει την σ.κ.π.  $F_X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ , που ορίζεται από τον τύπο

$$F_X(x) := P_X\left(\bigcap_{k=1}^n (-\infty, x_k]\right) = P\left(\bigcap_{k \leq n} \{X_k \leq x_k\}\right)$$

για κάθε  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Παρατήρηση. Η συνολοσυνάρτηση  $P_X$  είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ .

## Βασικές έννοιες

Ορισμός. Έστω  $(\Omega, \Sigma)$  μ.χ. και  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  μία τ.μ.. Το σύστημα συνόλων

$$\sigma(X) := \{X^{-1}[B] : B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$$

είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$  και ονομάζεται η  $\sigma$ -άλγεβρα η παραγόμενη από την  $X$ .

Παρατήρηση. Για την  $\sigma(X)$  ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i)  $\sigma(X) \subseteq \Sigma$ ,
- (ii) η  $\sigma(X)$  είναι η ελάχιστη  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ , ώστε η  $X$  να είναι  $\sigma(X)$ -μετρήσιμη.

## Βασικές έννοιες

Ορισμός. Έστω  $(\Omega, \Sigma)$  μ.χ. και  $I$  ένα μη κενό σύνολο δεικτών. Για μία οικογένεια  $\{X_i\}_{i \in I}$  τ.μ. ορίζουμε την  $\sigma$ -άλγεβρα

$$\sigma(\{X_i\}_{i \in I}) := \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(X_i)\right).$$

Τότε η  $\sigma(\{X_i\}_{i \in I})$  είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$  και ονομάζεται η  **$\sigma$ -άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια  $\{X_i\}_{i \in I}$ .**

Παρατήρηση. Για την  $\sigma(\{X_i\}_{i \in I})$  ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i)  $\sigma(\{X_i\}_{i \in I}) \subseteq \Sigma$ ,
- (ii) η  $\sigma(\{X_i\}_{i \in I})$  είναι η ελάχιστη  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ , ώστε κάθε  $X_i$  να είναι  $\sigma(\{X_i\}_{i \in I})$ -μετρήσιμη.

## Βασικές έννοιες

Για ό,τι ακολουθεί η τριάδα  $(\Omega, \Sigma, P)$  είναι ένας χώρος πιθανότητας, και  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μία τυχαία μεταβλητή.

(α) Η  $X$  ονομάζεται **διακριτή** (discrete), αν το σύνολο τιμών της  $R_X$  είναι **αριθμήσιμο**, δηλαδή

$$R_X = \{x_k \in \mathbb{R} : k \in \mathcal{K} \subseteq \mathbb{N}\} .$$

Προφανώς η  $X$  είναι διακριτή, αν και μόνο αν ισχύει

$$X(\omega) = \sum_{k \in \mathcal{K}} x_k \cdot \mathbb{1}_{A_k}(\omega) ,$$

όπου  $\{A_k : k \in \mathcal{K}\}$  είναι μία διαμέριση του  $\Omega$ . Σε αυτή την περίπτωση, οι (πιθανοθεωρητικές) ιδιότητες της ορίζονται πλήρως από την **συνάρτηση (μάζας) πιθανότητας** (σ.π.) (probability (mass) function)  $f_X : R_X \rightarrow [0, 1]$ , που ορίζεται από την σχέση

$$f_X(x) := P(\{X = x\}) \quad \text{για κάθε } x \in R_X .$$

## Βασικές έννοιες

Η σ.κ.π.  $F_X$  της  $X$  δίνεται από την σχέση

$$F_X(x) = \sum_{y \leq x} f_X(y) \quad \text{για κάθε } x \in R_X .$$

Από την παραπάνω σχέση έπεται ότι

$$P_X(B) = \sum_{x \in B} f_X(x) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) ,$$

όπου το δεύτερο μέρος είναι ένα αριθμησιμο άθροισμα, αφού  $f_X(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R} \setminus R_X$ .

## Βασικές έννοιες

(β) Η  $X$  ονομάζεται **συνεχής** (continuous), αν το σύνολο τιμών της  $X$  έχει την πληθικότητα  $c$  του συνεχούς (δηλαδή τόσα στοιχεία όσα και το σύνολο των πραγματικών αριθμών) και

$$P_X(\{x\}) = 0 \text{ για κάθε } x \in R_X .$$

Προφανώς η  $X$  είναι συνεχής αν και μόνο αν η  $F_X$  είναι συνεχής συνάρτηση.

(γ) Η  $X$  ονομάζεται **μεικτή**, αν το σύνολο τιμών της έχει την πληθικότητα  $c$  του συνεχούς και υπάρχει μία ακολουθία  $\{x_n\}_{n \in \mathcal{K}}$ , όπου  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{N}$ , στοιχείων του  $R_X$ , ώστε

$$P_X(\{x_n\}) > 0 \text{ για κάθε } n \in \mathcal{K}$$

και

$$P_X(\{x\}) = 0 \text{ για κάθε } x \in R_X \setminus \{x_n : n \in \mathcal{K}\} .$$

## Βασικές έννοιες

(δ) Η  $X$  ονομάζεται **απόλυτα συνεχής** (absolutely continuous), αν είναι συνεχής τ.μ. και επιπλέον υπάρχει μία Borel μετρήσιμη συνάρτηση  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , ώστε

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) \lambda(dt) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

Η συνάρτηση  $f_X$  του παραπάνω τύπου ονομάζεται **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (σ.π.π.) (probability density function) της τ.μ.  $X$ . Επιπλέον, για κάθε  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  έχουμε

$$P_X(B) = \int_B f_X(x) \lambda(dx) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) .$$

Έτσι αν η  $X$  είναι απόλυτα συνεχής, τότε η κ.π.  $P_X$  της  $X$  είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue  $\lambda$ .

## Βασικές έννοιες

Ορισμός. Η τιμή

$$\mathbb{E}_P[X] := \int X dP := \int X(\omega) P(d\omega)$$

(εφόσον υπάρχει) ονομάζεται η **μέση τιμή** (mean value) ή η **αναμενόμενη τιμή** (expected value) της  $X$ .

◇ Προφανώς

$$X \in \mathcal{L}^1(P) \implies \mathbb{E}_P[X] \in \mathbb{R} .$$

◇ Έτσι η μέση τιμή  $\mathbb{E}_P[X]$  είναι το ολοκλήρωμα της μετρήσιμης συνάρτησης  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ως προς  $P$ , και επομένως όλα τα αποτελέσματα της Θεωρίας Ολοκλήρωσης είναι εφαρμόσιμα εδώ. Ο ίδιος ορισμός χρησιμοποιείται αν η  $X$  παίρνει τιμές στον  $\overline{\mathbb{R}}$ .

## Βασικές έννοιες

Σε πολλές περιπτώσεις είναι δύσκολο να υπολογίσουμε την μέση τιμή  $\mathbb{E}_P[X]$  ολοκληρώνοντας επάνω στον χώρο  $\Omega$ . Το παρακάτω αποτέλεσμα μας δίνει την δυνατότητα υπολογισμού της  $\mathbb{E}_P[X]$ , μέσω ενός ολοκληρώματος ως προς την κατανομή πιθανότητας  $P_X$ , δηλαδή ως προς το μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την σ.κ.π.  $F_X$  της τ.μ.  $X$ .

Θεώρημα 4.1. Έστω  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία Borel μετρήσιμη συνάρτηση και  $Y := h \circ X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Τότε

$$\mathbb{E}_P[Y] = \int_{\mathbb{R}} h(x) P_X(dx) = \int_{\mathbb{R}} h(x) F_X(dx)$$

με την έννοια, ότι αν υπάρχει το ένα από τα δύο ολοκληρώματα, τότε υπάρχει και το άλλο, και ισχύει η ισότητα. Ιδιαίτερως,

(α) αν  $h \circ X \in \mathcal{L}^1(P)$  τότε  $\mathbb{E}_P[Y] \in \mathbb{R}$  και ισχύει η ισότητα,

(β) αν επί πλέον η  $X$  είναι απολύτως συνεχής με σ.π.π.  $f_X$ , και οι συναρτήσεις  $h \cdot f_X$  και  $|h \cdot f_X|$  έχουν γενικευμένα ολοκληρώματα Riemann με τιμές στο  $\mathbb{R}$ , τότε

$$\mathbb{E}_P[Y] = \int_{\mathbb{R}} h(x) \cdot f_X(x) dx$$

## Βασικές έννοιες

Ορισμός. Έστω  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  μία τ.μ.. Η  $X$  ονομάζεται **τετραγωνικά ολοκληρώσιμη** (square integrable), αν

$$\int |X|^2 dP < \infty .$$

◇ Ο χώρος όλων των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών συμβολίζεται με  $\mathcal{L}^2(P)$ .

Ορισμός. Έστω  $X \in \mathcal{L}^1(P)$ . Αν υπάρχει η τιμή

$$\text{Var}_P[X] := \mathbb{E}_P[(X - \mathbb{E}_P[X])^2] \in \overline{\mathbb{R}} ,$$

τότε αυτή ονομάζεται η **διακύμανση** (variance) της  $X$ . Αν  $X \in \mathcal{L}^2(P)$ , τότε  $\text{Var}_P[X] \in \mathbb{R}$ .

Παρατήρηση. Αν  $X \in \mathcal{L}^2(P)$  τότε  $X \in \mathcal{L}^1(P)$ .

## Ανεξαρτησία

Ορισμοί. Έστω  $I$  ένα μη κενό σύνολο δεικτών.

(α) Μία οικογένεια  $\{E_i\}_{i \in I}$  στοιχείων της  $\Sigma$  ονομάζεται  **$P$ -ανεξάρτητη** ( $P$ -independent) αν για κάθε πεπερασμένο σύνολο  $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$  ισχύει

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n E_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^n P(E_{i_j}) .$$

(β) Μία οικογένεια  $\{\Delta_i\}_{i \in I}$  συστημάτων ενδεχομένων με  $\Delta_i \subseteq \Sigma$  για κάθε  $i \in I$  ονομάζεται  **$P$ -ανεξάρτητη** αν για κάθε πεπερασμένο σύνολο  $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$  και για κάθε επιλογή ενδεχομένων  $E_{i_j} \in \Delta_{i_j}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , ισχύει

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n E_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^n P(E_{i_j}) .$$

(γ) Μία οικογένεια  $\{X_i\}_{i \in I}$  τ.μ. επάνω στον μ.χ.  $(\Omega, \Sigma)$  ονομάζεται  **$P$ -ανεξάρτητη** αν για κάθε πεπερασμένο σύνολο  $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$  και για κάθε επιλογή  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n \{X_{i_j} \leq \alpha_j\}\right) = \prod_{j=1}^n P(\{X_{i_j} \leq \alpha_j\}) .$$

## Ανεξαρτησία

Θεώρημα 4.2. Έστω  $I$  ένα μη κενό σύνολο δεικτών και  $\{\Delta_i\}_{i \in I}$  μία  $P$ -ανεξάρτητη οικογένεια συστημάτων ενδεχομένων του  $\Omega$ , ώστε κάθε  $\Delta_i$  να είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές. Τότε η οικογένεια  $\{\sigma(\Delta_i)\}_{i \in I}$  είναι ανεξάρτητη.

Παρατηρήσεις (α) Μία οικογένεια  $\{X_i\}_{i \in I}$  τ.μ. είναι  $P$ -ανεξάρτητη αν και μόνο αν η οικογένεια  $\{\sigma(X_i)\}_{i \in I}$  είναι  $P$ -ανεξάρτητη.

(β) Άμεση συνέπεια του (α) είναι ότι μία οικογένεια  $\{X_i\}_{i \in I}$  τ.μ. είναι  $P$ -ανεξάρτητη αν και μόνο αν

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n X_{i_j}^{-1}[B_{i_j}]\right) = \prod_{j=1}^n P\left(X_{i_j}^{-1}[B_{i_j}]\right)$$

για κάθε πεπερασμένο σύνολο δεικτών  $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq I$  και για κάθε επιλογή  $B_{i_j} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ .

(γ) Μία οικογένεια  $\{E_i\}_{i \in I}$  στην  $\sigma$ -άλγεβρα  $\Sigma$  είναι  $P$ -ανεξάρτητη αν και μόνο αν η οικογένεια  $\{\mathbb{1}_{E_i}\}_{i \in I}$  τ.μ. είναι  $P$ -ανεξάρτητη.

## Ανεξαρτησία

Πόρισμα 4.3. Έστω  $\{X_i\}_{i \in I}$  μία  $P$ -ανεξάρτητη οικογένεια τ.μ., και  $\{h_i\}_{i \in I}$  μία οικογένεια Borel μετρήσιμων συναρτήσεων από το  $\mathbb{R}$  στο  $\mathbb{R}$ . Τότε η οικογένεια  $\{h_i \circ X_i\}_{i \in I}$  είναι  $P$ -ανεξάρτητη.

Πόρισμα 4.4. Έστω  $\{\Delta_i\}_{i \in I}$  μία  $P$ -ανεξάρτητη οικογένεια συστημάτων ενδεχομένων του  $\Omega$ , ώστε κάθε  $\Delta_i$  να είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές. Αν  $\{I_j\}_{j \in J}$  είναι μία οικογένεια ανά δύο ξένων υποσυνόλων του  $I$ , και αν  $\Sigma_j := \sigma(\bigcup_{i \in I_j} \Delta_i)$  για κάθε  $j \in J$ , τότε η οικογένεια  $\{\Sigma_j\}_{j \in J}$  είναι  $P$ -ανεξάρτητη.

Πόρισμα 4.5. Έστω  $\{X_1, \dots, X_n\}$  μία  $P$ -ανεξάρτητη οικογένεια τ.μ.,  $\{I_1, \dots, I_k\}$  ( $k \geq 2$ ), μία οικογένεια ανά δύο ξένων υποσυνόλων του  $\{1, \dots, n\}$ , και  $\{Y_1, \dots, Y_k\}$  μία οικογένεια τυχαίων διανυσμάτων  $Y_j := (X_i : i \in I_j) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{|I_j|}$  για κάθε  $j \in \{1, \dots, k\}$ , όπου με  $|I_j|$  συμβολίζεται η πληθικότητα του  $I_j$ . Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Η οικογένεια  $\{Y_1, \dots, Y_k\}$  είναι  $P$ -ανεξάρτητη.

(ii) Αν για κάθε  $j \in \{1, \dots, k\}$  η συνάρτηση  $h_j : \mathbb{R}^{|I_j|} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τ.μ., τότε η οικογένεια  $\{h_1 \circ Y_1, \dots, h_k \circ Y_k\}$  είναι  $P$ -ανεξάρτητη.

## Ανεξαρτησία

Παράδειγμα. Έστω  $(\Omega, \Sigma, P)$  χώρος πιθανότητας με  $\Omega := \{1, \dots, 6\}$ ,  $\Sigma := \mathcal{P}(\Omega)$  και  $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+$  με τύπο

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} \text{ για κάθε } A \subseteq \Omega$$

(ρίψη ενός κανονικού ζαριού). Έστω επί πλέον  $A_1 := \{2, 4, 6\}$  και  $A_2 := \{1, 2\}$ . Τότε

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(A_1) \cdot P(A_2) .$$

Αυτό αντανακλά μία **συγκεκριμένη ανεξαρτησία** των ενδεχομένων  $A_1$  και  $A_2$ . Από την πραγματοποίηση του  $A_1$  μπορεί κάποιος να συμπεράνει, ότι π.χ. μόνο η τιμή 2 μπορεί να έρθει, επειδή η 2 είναι μία από τις ισοπίθανες τιμές 2, 4, 6 του  $A_1$ . Όμως, η πιθανότητα να συμβεί το  $A_2$  παραμένει ίση με  $\frac{1}{3}$ . Η πραγματοποίηση του  $A_1$  δεν επηρεάζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του  $A_2$ , και αντιστρόφως.

## Ανεξαρτησία

Αντίθετα, για  $A_3 := \{1\}$  ισχύει

$$P(A_1 \cap A_3) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = P(A_1) \cdot P(A_3)$$

και πραγματικά από την πραγματοποίηση του  $A_1$  έπεται, ότι δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί το  $A_3$ .  
Ομοίως

$$P(A_2 \cap A_3) = P(\{1\}) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = P(A_2) \cdot P(A_3) .$$

Επομένως οι οικογένειες  $\{A_1, A_3\}$  και  $\{A_2, A_3\}$  **δεν είναι στοχαστικά ανεξάρτητες**.

## Ανεξαρτησία

Έστω  $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ . Από την σχέση

$$P\left(\bigcap_{j=1}^n A_j\right) = \prod_{j=1}^n P(A_j)$$

**δεν μπορούμε να συμπεράνουμε** την ανεξαρτησία της οικογένειας  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , ούτε ακόμη την ανεξαρτησία της  $\{A_i, A_j\}$  για  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  με  $i \neq j$ , όπως δείχνει το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα. Έστω  $\Omega := \{0, 1\}^3$ ,  $\Sigma := \mathcal{P}(\Omega)$  και

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \text{για κάθε } A \subseteq \Omega$$

(τρεις φορές ρίψη ενός κανονικού νομίσματος). Θεωρούμε τα ενδεχόμενα  $A := \{\text{τουλάχιστον δύο φορές } 0\}$ ,  $B := \{\text{πρώτη ρίψη } 1\}$  και  $C = A$ . Τότε η οικογένεια  $\{A, B, C\}$  είναι  $P$ -ανεξάρτητη, αλλά

$$P(A \cap C) = P(A) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(C) .$$

## Ανεξαρτησία

Επίσης, από την ανεξαρτησία της κάθε οικογένειας δύο ενδεχομένων **δεν έπεται γενικά** η ανεξαρτησία της οικογένειας  $\{A_1, \dots, A_n\}$ , όπως δείχνει το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα. Έστω  $\Omega := \{0, 1\}^2$ ,  $\Sigma := \mathcal{P}(\Omega)$  και

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \text{για κάθε } A \subseteq \Omega$$

(δύο φορές ρίψη ενός κανονικού νομίσματος). Θεωρούμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα  $A := \{(0, 0), (0, 1)\}$ ,  $B := \{(0, 0), (1, 0)\}$  και  $C := \{(0, 1), (1, 0)\}$ . Τότε οι οικογένειες  $\{A, B\}$ ,  $\{A, C\}$  και  $\{B, C\}$  είναι  $P$ -ανεξάρτητες, αλλά

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

## Ανεξαρτησία

Δεν έχουμε περιγράψει ακόμη την κοινή κατανομή πιθανότητας μιας άπειρης οικογένειας τυχαίων μεταβλητών. Όμως, αφού η ανεξαρτησία μιας οικογένειας τυχαίων μεταβλητών καθορίζεται από την συμπεριφορά πεπερασμένων υπό-οικογενειών, μπορούμε να προσεγγίσουμε αυτήν την περιγραφή μέσω του παρακάτω αποτελέσματος.

Θεώρημα 4.6. Έστω  $X = (X_1, \dots, X_n)$  ένα τ.δ.. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) Η οικογένεια  $\{X_1, \dots, X_n\}$  είναι  $P$ -ανεξάρτητη.
- (ii) Η κ.π.  $P_X$  μπορεί να εκφραστεί ως ένα γινόμενο πιθανοτήτων  $P_1, \dots, P_n : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ .
- (iii) Η  $P_X$  είναι το μέτρο γινόμενο των κ.π.  $P_{X_1}, \dots, P_{X_n}$  των τ.μ.  $X_1, \dots, X_n$ .
- (iv)  $F_X(x) = \prod_{j=1}^n F_{X_j}(x_j)$  για κάθε  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

## Ανεξαρτησία

Πόρισμα 4.7. Αν το τ.δ.  $X = (X_1, \dots, X_n)$  έχει μία σ.π.π.  $f_X$ , τότε κάθε  $X_i$  έχει μία πυκνότητα  $f_{X_i}$ . Επιπλέον, σε αυτήν την περίπτωση η οικογένεια  $\{X_1, \dots, X_n\}$  είναι  $P$ -ανεξάρτητη, αν και μόνο αν υπάρχει  $N \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  με  $\lambda_n(N) = 0$ , ώστε

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

για κάθε  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus N$ .

Πόρισμα 4.8. Αν η οικογένεια  $\{X_1, \dots, X_n\}$  είναι  $P$ -ανεξάρτητη και κάθε τ.μ.  $X_i$  έχει μία σ.π.π.  $f_{X_i}$ , το τυχαίο διάνυσμα  $X = (X_1, \dots, X_n)$  έχει μία πυκνότητα  $f_X$ , που δίνεται από τον τύπο

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1}^n f_{X_j}(x_j)$$

για κάθε  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Παρατήρηση. Αν κάθε μία από τις τ.μ.  $X_1, \dots, X_n$  έχει μία σ.π.π., τότε **δεν έπεται γενικά** ότι το τυχαίο διάνυσμα  $(X_1, \dots, X_n)$  έχει μία σ.π.π.. Έτσι, το Πόρισμα 4.8 είναι **λάθος** χωρίς την υπόθεση της  $P$ -ανεξαρτησίας.

## Ανεξαρτησία

Πρόταση 4.9. Έστω  $\{X_1, \dots, X_n\}$  μία ανεξάρτητη οικογένεια τ.μ.. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Αν  $X_j \in \mathcal{L}^1(P)$  για κάθε  $j \in \{1, \dots, n\}$  τότε  $\prod_{j=1}^n X_j \in \mathcal{L}^1(P)$  και

$$\mathbb{E}_P \left[ \prod_{j=1}^n X_j \right] = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}_P[X_j].$$

(ii)  $\text{Var}_P \left[ \sum_{j=1}^n X_j \right] = \sum_{j=1}^n \text{Var}_P[X_j]$  (ισότητα Bienaymé).

## Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς μία $\sigma$ -άλγεβρα

Ορισμός. Έστω  $X \in \mathcal{L}^1(P)$  και  $\mathcal{G} \subseteq \Sigma$  μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ . Μία **δεσμευμένη μέση τιμή της  $X$  δοθείσης της  $\mathcal{G}$**  είναι μία τ.μ.  $\mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , με τις εξής ιδιότητες:

- (i) η  $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$  είναι  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη,
- (ii) για κάθε  $A \in \mathcal{G}$  ισχύει ότι

$$\int_A \mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}] dP = \int_A X dP .$$

Παρατηρήσεις. (α) Η έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής με δέσμευση επάνω σε μία  $\sigma$ -άλγεβρα επεκτείνει την δέσμευση επάνω σε μία τ.μ.  $Y$ , με την έννοια, ότι

$$\mathbb{E}_P[X | \sigma(Y)] = \mathbb{E}_P[X | Y] \quad P \upharpoonright \sigma(Y)\text{-}\sigma.\beta. .$$

(β) Η δεσμευμένη μέση τιμή  $\mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}]$  **δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη**. Η  $\mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}]$  είναι **ουσιωδώς μονοσήμαντη** μόνο με την έννοια, ότι αν οι  $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$  και  $Z$  είναι δεσμευμένες μέσες τιμές της  $X$  δοθείσης της  $\sigma$ -άλγεβρας  $\mathcal{G}$ , τότε

$$\mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}] = Z \quad P \upharpoonright \mathcal{G}\text{-}\sigma.\beta. .$$

## Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς μία $\sigma$ -άλγεβρα

Παράδειγμα. Αν  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  τότε

$$\mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}_P[X] \text{ } P\uparrow\mathcal{G}\text{-}\sigma\text{-}\beta.$$

Πράγματι, αν  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  τότε κάθε σταθερή τ.μ. είναι  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη. Επομένως, αφού

$$\int_{\Omega} X dP = \mathbb{E}_P[X] = \int_{\Omega} \mathbb{E}_P[X] dP$$

και

$$\int_{\emptyset} X dP = 0 = \int_{\emptyset} \mathbb{E}_P[X] dP,$$

έχουμε  $\mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X] \text{ } P\uparrow\mathcal{G}\text{-}\sigma\text{-}\beta.$

## Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς μία $\sigma$ -άλγεβρα

Παράδειγμα. Αν η  $X$  είναι  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη, τότε

$$\mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}] = X \text{ } P \upharpoonright \mathcal{G}\text{-}\sigma\text{-}\beta.$$

Πράγματι, αφού ισχύει η προφανής ταυτότητα

$$\int_A X dP = \int_A X dP \text{ για κάθε } A \in \mathcal{G}$$

και η  $X$  είναι  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη, θα έχουμε ότι  $\mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}] = X \text{ } P \upharpoonright \mathcal{G}\text{-}\sigma\text{-}\beta.$

## Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς μία $\sigma$ -άλγεβρα

Παράδειγμα. Για κάθε  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  ισχύει

$$\mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}] | B] = \mathbb{E}_P[X | B].$$

Πράγματι, για κάθε  $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  ισχύει

$$\int_B \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] dP = \int_B X dP,$$

επομένως

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] | B] := \frac{1}{P(B)} \int_B \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] dP = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP = \mathbb{E}[X | B].$$

## Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς μία $\sigma$ -άλγεβρα

Παράδειγμα. Αν  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  τότε

$$\mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}_P[X] \text{ } P\uparrow\mathcal{G}\text{-σ.β.} .$$

Πράγματι, αν  $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$  τότε κάθε σταθερή τ.μ. είναι  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη. Επομένως, αφού

$$\int_{\Omega} X dP = \mathbb{E}_P[X] = \int_{\Omega} \mathbb{E}_P[X] dP$$

και

$$\int_{\emptyset} X dP = 0 = \int_{\emptyset} \mathbb{E}_P[X] dP,$$

έχουμε  $\mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X] \text{ } P\uparrow\mathcal{G}\text{-σ.β.}$ .

## Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς μία $\sigma$ -άλγεβρα

Παράδειγμα. Αν η  $X$  είναι  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη, τότε

$$\mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}] = X \text{ } P \upharpoonright \mathcal{G}\text{-}\sigma\text{-}\beta.$$

Πράγματι, αφού ισχύει η προφανής ταυτότητα

$$\int_A X dP = \int_A X dP \text{ για κάθε } A \in \mathcal{G}$$

και η  $X$  είναι  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη, θα έχουμε ότι  $\mathbb{E}_P[X | \mathcal{G}] = X \text{ } P \upharpoonright \mathcal{G}\text{-}\sigma\text{-}\beta.$

## Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς μία $\sigma$ -άλγεβρα

Πρόταση 4.10. Έστω  $X, Y$  τ.μ. με  $X, Y \in \mathcal{L}^1(P)$  και  $T \subseteq \Sigma$  μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ . Η δεσμευμένη μέση τιμή  $\mathbb{E}_P[\bullet | T]$  ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- (i)  $\mathbb{E}_P[a \cdot X + b \cdot Y | T] = a \cdot \mathbb{E}_P[X | T] + b \cdot \mathbb{E}_P[Y | T]$   $P \upharpoonright T$ -σ.β. για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $\mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[X | T]] = \mathbb{E}_P[X]$ ,
- (iii) αν η  $X$  είναι  $T$ -μετρήσιμη, τότε  $\mathbb{E}_P[X \cdot Y | T] = X \cdot \mathbb{E}_P[Y | T]$   $P \upharpoonright T$ -σ.β.,
- (iv) αν η  $X$  είναι ανεξάρτητη της  $T$ , τότε  $\mathbb{E}_P[X | T] = \mathbb{E}_P[X]$   $P \upharpoonright T$ -σ.β.,
- (v) [ιδιότητα του πύργου (tower property)] αν  $H \subseteq T \subseteq \Sigma$  είναι μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ , τότε  $\mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[X | T] | H] = \mathbb{E}_P[X | H]$   $P \upharpoonright H$ -σ.β.,
- (vi) αν  $X \geq Y$   $P$ -σ.β., τότε  $\mathbb{E}_P[X | T] \geq \mathbb{E}_P[Y | T]$   $P \upharpoonright T$ -σ.β..

Παρατήρηση. Άμεση συνέπεια της ιδιότητας (vi) είναι ότι αν  $0 \leq X \leq 1$   $P$ -σ.β., τότε

$$0 \leq \mathbb{E}_P[X | T] \leq 1 \text{ } P \upharpoonright T\text{-σ.β.,}$$

## Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς μία $\sigma$ -άλγεβρα

Πρόταση 4.11 (Ανισότητα Jensen για δεσμευμένες μέσες τιμές). Έστω  $X$  μία με  $X \in \mathcal{L}^1(P)$ ,  $T \subseteq \Sigma$  μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$  και  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία συνάρτηση. Ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Αν η συνάρτηση  $\varphi$  είναι **κοίλη** (concave), δηλαδή

$$\varphi(\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y) \geq \alpha \cdot \varphi(x) + (1 - \alpha) \cdot \varphi(y)$$

για κάθε  $\alpha \in [0, 1]$  και  $x, y \in \mathbb{R}$ , τότε

$$\varphi(\mathbb{E}_P[X \mid T]) \geq \mathbb{E}_P[\varphi \circ X \mid T] \quad P \upharpoonright T\text{-}\sigma.\beta.$$

και  $\varphi(X) \in \mathcal{L}^1(P)$ .

(ii) Αν η συνάρτηση  $\varphi$  είναι **κυρτή** (convex), δηλαδή

$$\varphi(\alpha \cdot x + (1 - \alpha) \cdot y) \leq \alpha \cdot \varphi(x) + (1 - \alpha) \cdot \varphi(y)$$

για κάθε  $\alpha \in [0, 1]$  και  $x, y \in \mathbb{R}$ , και  $\varphi \circ X \in \mathcal{L}^1(P)$ , τότε

$$\varphi(\mathbb{E}_P[X \mid T]) \leq \mathbb{E}_P[\varphi \circ X \mid T] \quad P \upharpoonright T\text{-}\sigma.\beta..$$

## Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς μία $\sigma$ -άλγεβρα

Θεώρημα 4.12 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για δεσμευμένες μέσες τιμές). Έστω  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  μία ακολουθία τ.μ. και  $T \subseteq \Sigma$  μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ . Αν η ακολουθία  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αύξουσα  $P$ -σ.β. και  $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ , τότε η ακολουθία  $\{\mathbb{E}_P[X_n | T]\}_{n \in \mathbb{N}}$  είναι αύξουσα  $P \upharpoonright T$ -σ.β. και

$$\mathbb{E}_P[X | T] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_P[X_n | T] \quad P \upharpoonright T\text{-σ.β.}$$

Θεώρημα 4.13 (Λήμμα Fatou για δεσμευμένες μέσες τιμές). Έστω  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  μία ακολουθία θετικών τ.μ. με  $X_n \in \mathcal{L}^1(P)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , και  $T \subseteq \Sigma$  μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ . Αν  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_P[X_n] < \infty$ , τότε

$$\mathbb{E}_P[\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n | T] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_P[X_n | T] \quad P \upharpoonright T\text{-σ.β.}$$

Θεώρημα 4.14 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για δεσμευμένες μέσες τιμές). Έστω  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  μία ακολουθία θετικών τ.μ. με  $X_n \in \mathcal{L}^1(P)$  για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , και  $T \subseteq \Sigma$  μία  $\sigma$ -άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$ . Αν  $W = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$   $P$ -σ.β. και υπάρχει  $Z \in \mathcal{L}^1(P)$  ώστε  $|X_n| \leq Z$   $P$ -σ.β. για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , τότε

$$\mathbb{E}_P[W | T] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_P[X_n | T] \quad P \upharpoonright T\text{-σ.β.}$$