Ειδικά Θέματα Ασφαλίσεων Ζωής ΙΙ

Συναρτήσεις και Πίνακες Θνησιμότητας

Διάρκεια ζωής νεογέννητου ατόμου

• Έστω X η συνεχής (μη αρνητική) τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) που εκφράζει την **διάρκεια ζωής ενός (νεογέννητου) ατόμου**. Η X έχει σύνολο τιμών $R_X = [0, \infty)$ ή $R_X = [0, \omega]$, όπου ω είναι ένα θετικός πραγματικός αριθμός. Η μεταβλητή $\omega \in [0, \infty]$ καλείται **οριακή ηλικία** και παριστάνει την ηλικία στην οποία ο θάνατος θεωρείται βέβαιο γεγονός. Στην αναλογιστική πρακτική θεωρούμε ότι $\omega = 110$ ή $\omega = 120$.

⋄ *Για ό,τι ακολουθεί με (x) θα συμβολίζουμε ένα άτομο ηλικίας x.*

▷ Ορίζουμε την **συνάρτηση επιβίωσης** της X ως

$$S(x) := P(X > x) \ \text{ για κάθε } x \in R_X.$$

Η $S(x)$ εκφράζει την πιθανότητα νεογέννητο άτομο να επιβιώσει πέρα από την ηλικία x. Προφανώς

$$S(0) = 1 \ \text{ και } \lim_{x \to \omega} S(x) = 0.$$

▷ Η **συνάρτηση κατανομής** της X ορίζεται ως

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - S(x) \ \text{ για κάθε } x \in R_X$$

και εκφράζει την πιθανότητα ένα νεογέννητο άτομο να πεθάνει πριν την ηλικία x. Προφανώς

$$F(0) = 0 \ \text{ και } \lim_{x \to \omega} F(x) = 1.$$

Διάρκεια ζωής νεογέννητου ατόμου

▷ Η **συνάρτηση κατανομής** της X ορίζεται ως

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - S(x) \ \text{ για κάθε } x \in R_X$$

και εκφράζει την πιθανότητα ένα νεογέννητο άτομο να πεθάνει πριν την ηλικία x. Προφανώς

$$F(0) = 0 \ \text{ και } \lim_{x \to \omega} F(x) = 1.$$

▷ Η **ένταση θνησιμότητας** για τον (x)

$$\mu_x := \frac{f(x)}{S(x)} \ \text{ για κάθε } x \in R_X,$$

όπου f είναι η σ.π.π. της τ.μ X. Επιπλέον έχουμε

$$S(x) = e^{-\int_0^x \mu_u \, du} \ \text{ για κάθε } x \in R_X.$$

Υπολειπόμενος χρόνος ζωής ατόμου ηλικίας x

- Για κάθε $x \in R_X$ μπορούμε να ορίσουμε την συνεχή τ.μ.

$$T_x := X - x \mid X > x.$$

Η τ.μ. T_x εκφράζει τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής του (x). Το σύνολο τιμών της T_x είναι $R_{T_x} = [0, \omega - x)$. Προφανώς $T_0 = X$.Προφανώς $T_0 = X$.

▷ Η συνάρτηση επιβίωσης της T_x είναι

$$_tp_x := S_{T_x}(t) = P(T_x > t) \quad \text{για κάθε } t \in [0, \omega - x).$$

Η $_tp_x$ εκφράζει την πιθανότητα το (x) να επιβιώσει τουλάχιστον για t έτη. Προφανώς

$$_0p_x = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{t \to \omega - x} {}_tp_x = 0.$$

Για δοσμένο x έχουμε:

$$_tp_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} = e^{-\int_x^{x+t} \mu_u \, du} \quad \text{για κάθε } t \in [0, \omega - x).$$

Υπολειπόμενος χρόνος ζωής ατόμου ηλικίας x

▷ Αντίστοιχα μπορούνε να ορίσουμε και την συνάρτηση κατανομής της T_x ως

$$ {}_tq_x := F_{T_x}(t) = P(T_x \le t) \ \text{ για κάθε } t \in [0, \omega - x). $$

Η ${}_tq_x$ εκφράζει την πιθανότητα το (x) να πεθάνει μέσα στα επόμενα t έτη. Προφανώς

$$ {}_0q_x = 0 \ \text{ και } \ \lim_{t \to \omega - x} {}_tp_x = 1. $$

Για δοσμένο x και για κάθε $t \in [0, \omega - x)$ έχουμε:

$$ {}_tp_x +_t q_x = 1 $$

και

$$ {}_tq_x = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{S(x) - S(x+t)}{S(x)}. $$

Υπολειπόμενος χρόνος ζωής ατόμου ηλικίας x

▷ Συμβολίζουμε με ${}_{t|u}q_x$ την πιθανότητα το (x) να ζήσει t χρόνια και να πεθάνει στα επόμενα u ή ισοδύναμα το (x) να πεθάνει μεταξύ των ηλικιών $x+t$ και $x+t+u$. Επομένως

$$ {}_{t|u}q_x := P(t < T_x \leq t+u) = {}_{t+u}q_x - {}_{t}q_x = {}_{t}p_x - {}_{t+u}p_x = {}_{t}p_x \cdot {}_{u}q_{x+t} $$

Προφανώς

$$ {}_{0|u}q_x = {}_{u}q_x. $$

▷ Η σ.π.π.της τ.μ. T_x δίνεται από τη σχέση

$$ f_{T_x}(t) = {}_{t}p_x \cdot \mu_{x+t} \quad \text{για κάθε } t \in [0, \omega - x). $$

Για κάθε $t, u \in [0, \omega - x)$ με $t + u \in [0, \omega - x)$ έχουμε

$$ {}_{t|u}q_x = \int_t^{t+u} {}_{s}p_x \cdot \mu_{x+s}\, ds. $$

Υπολειπόμενος χρόνος ζωής ατόμου ηλικίας x

▷ Ο **αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος ζωής** του (x) συμβολίζεται με $\mathring{e}_x$ και δίνεται από την σχέση

$$\mathring{e}_x := \mathbb{E}[T_x] = \int_0^{\omega-x} t \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}\, dt.$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\mathring{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_tp_x\, dt.$$

Γενικότερα, για κάθε $k \in \{1, 2, \ldots\}$ έχουμε

$$\mathbb{E}[T_x^k] = \int_0^{\omega-x} t^k \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t}\, dt = \int_0^{\omega-x} t^{k-1} \cdot {}_tp_x\, dt.$$

▷ Ο **αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος ζωής του** (x) **μεταξύ των ηλικιών** x **και** $x+t$ συμβολίζεται με $\mathring{e}_{x:\overline{t}|}$ και δίνεται από την σχέση

$$\mathring{e}_{x:\overline{t}|} = \int_0^{t} {}_up_x\, du.$$

Προφανώς

$$\lim_{t\to\omega-x} \mathring{e}_{x:\overline{t}|} = \mathring{e}_x.$$

Ακέραιος υπολειπόμενος χρόνος ζωής ατόμου ηλικίας x

• Για κάθε $x \in R_X$ μπορούμε να ορίσουμε την διακριτή τ.μ. $K_x := \lfloor T_x \rfloor$. Η τ.μ. K_x εκφράζει τον ακέραιο υπολειπόμενο χρόνο ζωής του (x). Το σύνολο τιμών της K_x είναι $R_{K_x} = \{0, 1, \ldots, \lfloor \omega - x \rfloor - 1\}$ αν $\omega \in (0, \infty)$, ή $R_{K_x} = \mathbb{N}_0$ αν $\omega = \infty$. Προφανώς

$$K_x = k \Longleftrightarrow k \leq T_x < k + 1.$$

▷ Η συνάρτηση πιθανότητας της K_x είναι

$$P(K_x = k) = {}_kp_x - {}_{k+1}p_x = {}_kp_x \cdot q_{x+k} = {}_{k|}q_x \quad \text{για κάθε } k \in R_{K_x}.$$

Η συνάρτηση πιθανότητας της K_x είναι

$$P(K_x \leq k) = {}_{k+1}q_x \quad \text{για κάθε } k \in R_{K_x}.$$

Ο **αναμενόμενος ακέραιος υπολειπόμενος χρόνος ζωής** του (x) συμβολίζεται με e_x και δίνεται από την σχέση

$$e_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x.$$

Ο **αναμενόμενος ακέραιος υπολειπόμενος χρόνος ζωής** του (x) μεταξύ των ηλικιών x και $x + n$συμβολίζεται με $e_{x:\overline{n}|}$ και δίνεται από την σχέση

$$e_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_kp_x.$$

Πίνακες επιβίωσης

Οι **πίνακες επιβίωσης** αποτελούνται από μια μη αύξουσα ακολουθία l_x, $x \in \{0, 1, \ldots, \lfloor \omega \rfloor\}$, που αναπαριστά τον αριθμό των ατόμων που είναι ζωντανά στην αρχή της ηλικίας x. Ο αριθμός των ατόμων στη χρονική στιγμή 0, l_0, ονομάζεται **ρίζα** του πίνακα.

Επειδή ένας πίνακας μετρά τους επιζώντες, μπορεί κανείς να υπολογίσει την πιθανότητα επιβίωσης ${}_tp_x$ από τα l_x. Η πιθανότητα ο (x) να φτάσει στην ηλικία $x + t$ είναι

$$ {}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}, $$

ενώ η πιθανότητα να πεθάνει πριν την ηλικία $x + t$ είναι

$$ {}_tq_x = 1 - {}_tp_x = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{{}_td_x}{l_x}, $$

όπου ${}_td_x$ είναι ο αριθμός θανάτων μεταξύ των ηλικιών x και $x + t$.

Πίνακες επιβίωσης

Υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι για να δημιουργηθεί ένας πίνακας επιβίωσης με το πακέτο `lifecontingencies`. Μια άμεση προσέγγιση είναι να δοθούν απευθείας οι τιμές x και l_x, όπως δείχνει ο παρακάτω κώδικας:

```
> newLifeTable1 <-new("lifetable", x=seq(0,10,1),lx=seq(from=1000,to=0,by=-100),
                        name="Sample life table 1"); newLifeTable1
```

Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να παρέχει τις πιθανότητες επιβίωσης/θνησιμότητας για ένα έτος (p_x, q_x) και να δημιουργήσει έναν πίνακα επιβίωσης χρησιμοποιώντας συναρτήσεις ευκολίας, όπως δείχνει ο παρακάτω κώδικας:

```
> newLifeTable2 <-probs2lifetable(probs=seq(from=0.1,to=1,by=0.1),
                      radix=100000,type="qx",name="Sample life table 2"); newLifeTable2
```

Χρησιμοποιώντας εντολές όπως οι `head`, `tail`, `plot`, και `summary` μπορούμε να πάρουμε παραπάνω δεδομένα για τους πίνακες που κατασκευάσαμε.

Πίνακες επιβίωσης

Στο output της παραπάνω κατασκευής πινάκων επιβίωσης, η τελευταία είσοδος του πίνακα δεν εμφανίζεται γιατί περιέχει μηδενικά στοιχεία (στο παράδειγμά μας έχουμε ${}_9p_x = 0$). Το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να λυθεί με την χρήση του ακόλουθου κώδικα:

```
> x <- newLifeTable1@x
> lx <- newLifeTable1@lx
> px <- lx[-1] / lx[-length(lx)]
> px <- c(px, 0)
> ex <- sapply(seq(lx), function(i) { if (i == length(lx)) { 0 }
    else { sum(lx[(i+1):length(lx)] / lx[i]) } })
> full_table <- data.frame( x = x, lx = lx, px = px, ex = ex ); full_table
```

Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας τον ενδεικτικό πίνακα επιβίωσης της Society of Actuaries (SoA), υπολογίστε:

(i) Την πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας 65 να πεθάνει πριν φτάσει τα 85.

(ii) Την πιθανότητα ένα ασφαλισμένο άτομο ηλικίας 25 να επιβιώσει μέχρι τα 65.

(iii) Τον αναμενόμενο ακέραιο υπολειπόμενο χρόνος ζωής ενός νεογέννητου ατόμου.

(iv) Τον αναμενόμενο ακέραιο υπολειπόμενο χρόνος ζωής μεταξύ των ηλικιών 50 και 60.

Ο ενδεικτικός πίνακας επιβίωσης της SoA μπορεί να φορτωθεί με την εντολή:

```
> data(soa08Act).
```

Ο αριθμός των επιζώντων ηλικίας 65 είναι:

```
> soa08Act@lx[soa08Act@x==65]
```

Παράδειγμα

(i) Για να υπολογίσουμε την πρώτη πιθανότητα, μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε:

```
> 1-soa08Act@lx[soa08Act@x==85]/soa08Act@lx[soa08Act@x==65]
```

είτε τη συνάρτηση qxt

```
> qxt(soa08Act, 65,20)
```

(ii) Για τον υπολογισμό της δεύτερης πιθανότητας, μπορούμε είτε να χρησιμοποιήσουμε:

```
> soa08Act@lx[soa08Act@x==65]/soa08Act@lx[soa08Act@x==25]
```

είτε τη συνάρτηση pxt

```
> pxt(soa08Act, 25,40)
```

Παράδειγμα

(iii) Τον αναμενόμενο ακέραιο υπολειπόμενο χρόνος ζωής κατά τη γέννηση, μπορούμε να τον υπολογίσουμε είτε με έναν από τους δύο παρακάτω άμεσους τρόπους

```
> sum(soa08Act@lx[soa08Act@x%in%(1:140)]/soa08Act@lx[soa08Act@x==0])
```

ή

```
> sum(pxt(soa08Act, 0, 1:140))
```

είτε με χρήση της συνάρτησης `exn`, χρησιμοποιώντας την εντολή

```
> exn(object = soa08Act)
```

Παράδειγμα

(iv) Για τον υπολογισμό του αναμενόμενου ακέραιου υπολειπόμενου χρόνου ζωής μεταξύ των ηλικιών 50 και 60 μπορούμε να κάνουμε ένα από τα ακόλουθα

```
> sum(soa08Act@lx[soa08Act@x%in%(51:60)]/soa08Act@lx[soa08Act@x==50])
```

ή

```
> sum(pxt(soa08Act, 50, 1:10))
```

είτε με χρήση της συνάρτησης exn, χρησιμοποιώντας την εντολή

```
> exn(object = soa08Act, x=50, n=60-50, type="curtate")
```

• Για τον υπολογισμό του αναμενόμενου χρόνου ζωής, χρησιμοποιούμε πάλι την συνάρτηση `exn` με μόνη διαφορά ότι αντικαθιστούμε το `type="curtate"` με `type="complete"`.

Μέθοδος γραμμικής παρεμβολής

Υποθέτουμε ότι για κάθε ηλικία x και για $t \in [0,1)$ η συνάρτηση επιβίωσης της T_x

$$S_{T_x}(t) = {}_tp_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

είναι γραμμική συνάρτηση του t. Η υπόθεση εδώ είναι ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι γραμμικές κατά τμήματα, δηλαδή γραμμικές σε κάθε έτος ηλικίας $[x, x+1)$ αλλά με διαφορετική κάθε φορά κλίση. Έτσι μετατρέπουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις σε μία πολυγωνική γραμμή που αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα τα οποία προκύπτουν αν ενώσουμε τα σημεία που αντιστοιχούν στις ακέραιες ηλικίες. Επομένως, αν η l_{x+t} είναι γραμμική για $t \in [0,1)$, η τιμή l_{x+t} προκύπτει από τις γνωστές τιμές l_x και l_{x+1} με *γραμμική παρεμβολή*, δηλαδή

$$l_{x+t} = (1-t) \cdot l_x + t \cdot l_{x+1} = l_x - t \cdot (l_x - l_{x+1}) = l_x - t \cdot d_x.$$

Άρα

$$t \cdot d_x = l_x - l_{x+t}.$$

Μέθοδος γραμμικής παρεμβολής

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση επιβίωσης $S(x+t)$ πρέπει να ικανοποιεί την γραμμική σχέση

$$S(x+t) = a_x + b_x \cdot t \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{N}_0 \text{ και } t \in [0,1),$$

όπου

$$a_x = S(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad b_x = S(x+1) - S(x) \leq 0.$$

Έτσι, η σ.π.π. της τ.μ. X είναι σταθερή στο διάστημα $[x, x+1)$ και ίση με

$$f(x+t) = -\frac{d}{dx} S(x+t) = -b_x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{N}_0 \text{ και } t \in [0,1).$$

Επομένως οι θάνατοι στο διάστημα $[x, x+1)$ ακολουθούν την *ομοιόμορφη κατανομή*.

Μέθοδος γραμμικής παρεμβολής

Για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ και $t \in [0, 1)$ έχουμε

$$l_{x+t} = l_x - t \cdot d_x = l_x - t \cdot (l_x - l_{x+1}) \Rightarrow \frac{l_{x+t}}{l_x} = 1 - t \cdot \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x}.$$

Άρα

$${}_t p_x = 1 - t \cdot q_x \Leftrightarrow {}_t\, q_x = t \cdot q_x.$$

Επιπλέον, καθώς

$$f_{T_x}(t) = -\frac{d}{dt}\,{}_t p_x = \frac{d}{dt} t \cdot q_x = q_x$$

προκύπτει ότι η ένταση θνησιμότητας είναι

$$\mu_{x+t} = \frac{q_x}{1 - t \cdot q_x}.$$

Μέθοδος εκθετικής παρεμβολής

Σύμφωνα με την υπόθεση της εκθετικής παρεμβολής η συναρτησιακή μορφή της συνάρτησης επιβίωσης της T_x γίνεται

$$ {}_tp_x = e^{a_x + b_x \cdot t} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{N}_0 \text{ και } t \in [0,1). $$

Καθώς όμως

$$ {}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+u}\,du} = e^{a_x + b_x \cdot t} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{N}_0 \text{ και } t \in [0,1) $$

έπεται ότι

$$ \mu_{x+t} = -b_x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{N}_0 \text{ και } t \in [0,1). $$

Δηλαδή η δεύτερη μέθοδος υποθέτει ότι *η ένταση θνησιμότητας είναι σταθερή μέσα σε κάθε έτος ηλικίας*. Επομένως, η ένταση θνησιμότητας είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση με διαφορετική σταθερή τιμή σε κάθε ηλικιακό έτος $[x, x+1)$. Δηλαδή

$$ \mu_{x+t} = \mu_x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{N}_0 \text{ και } t \in [0,1). $$

Μέθοδος εκθετικής παρεμβολής

Γνωρίζουμε ότι

$$p_x = e^{-\int_0^1 \mu_{x+u}\,du} = e^{-\mu_x} \Rightarrow \mu_x = -\ln p_x.$$

Επομένως, για κάθε $t \in [0,1)$ έχουμε

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+u}\,du} = e^{-t\cdot\mu_x} \Rightarrow {}_tp_x = \left(p_x\right)^t \Leftrightarrow {}_tq_x = 1 - \left(p_x\right)^t.$$

Έτσι, η τυχαία μεταβλητή T_x στο διάστημα $[0,1)$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda = \mu_x = -\ln p_x$.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο (80) να πεθάνει στους επόμενους 6 μήνες χρησιμοποιώντας

(i) την μέθοδο γραμμικής παρεμβολής,

(ii) την μέθοδο εκθετικής παρεμβολής.

Για τον υπολογισμό της πρώτης πιθανότητας χρησιμοποιούμε την εντολή

```
> pxt(object=soa08Act,x=80,t=0.5, fractional="linear")
```

ενώ για τον υπολογισμό της δεύτερης πιθανότητας την εντολή

```
> pxt(object=soa08Act,x=80,t=0.5, fractional="constant force")
```