Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά Ι

Νικόλαος Χαλιδιάς

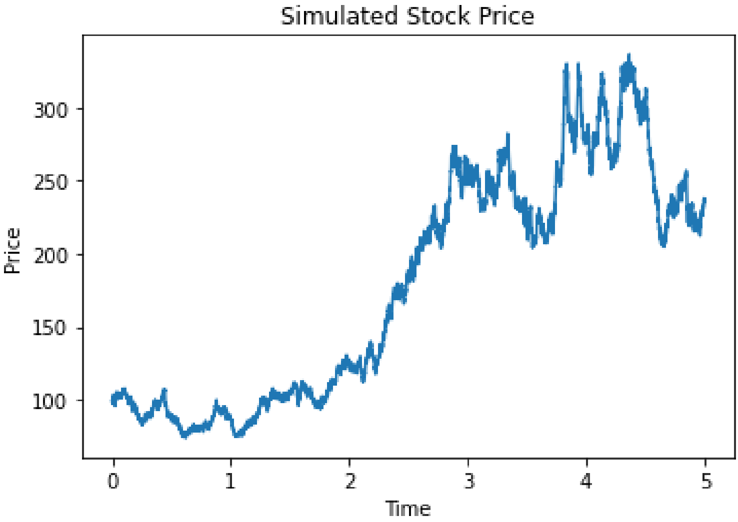
2024

Μετοχές I

Θα ασχοληθούμε με τις συναλλαγές που γίνονται στο χρηματιστήριο ξεκινώντας από τις μετοχές.
Μετοχή (μιας εταιρείας) είναι ένας τίτλος ο οποίος αντιστοιχεί σε ένα μερίδιο αξίας της εταιρείας.
Η τιμή μιας μετοχής προκύπτει έπειτα από καθημερινή διαπραγμάτευση. Οι κάτοχοι, δηλαδή, των μετοχών που θέλουν να πουλήσουν κάποιες το δηλώνουν στο Χρηματιστήριο (δίνοντας ίσως μια κατώτερη τιμή) και οι ενδιαφερόμενοι αγοράζουν. Αν εκδηλώσουν ενδιαφέρον αγοράς για περισσότερες μετοχές από ότι πωλούνται τότε προφανώς η τιμή ανεβαίνει, αλλιώς κατεβαίνει. Η τελευταία τιμή πώλησης στη συγκεκριμένη ημέρα είναι και η τιμή της μετοχής εκείνη την ημέρα.

Μετοχές II

Είναι προφανές ότι κανείς δεν μπορεί να προβλέψει με σιγουριά την αυριανή τιμή της μετοχής όμως μπορεί να μαντέψει ότι πιθανόν αύριο να εκδηλωθεί ιδιαίτερο ενδιαφέρον αγοράς διότι η εταιρεία πρόκειται να επεκτείνει τις δραστηριότητες της κτλ. Όμως δεν μπορεί κανείς να προβλέψει πόσο θα ανέβει, αν συμβεί κάτι τέτοιο τελικά.


Simulated Stock Price
Price
300
250
200
150
100
0
1
2
3
4
5
Time

Παράγωγα

Εκτός από τις μετοχές μπορεί να βρει κανείς και άλλα χρηματοοικονομικά προϊόντα.
Θα μελετήσουμε αρκετά τα λεγόμενα παράγωγα (options) τα οποία είναι γραμμένα σε μια μετοχή.
Τα παράγωγα είναι συμβόλαια μεταξύ δυο μερών: του πωλητή και του αγοραστή.

Ποια είναι η μορφή των πιο κοινών παραγώγων;

θα περιγράψουμε τώρα τα δυο πιο κοινά παράγωγα ή αλλιώς συμβόλαια προαίρεσης.
Έστω μια μετοχή με σημερινή τιμή S_0, K ένα ποσό το οποίο ονομάζεται τιμή εξάσκησης και T μια μελλοντική χρονική στιγμή, για παράδειγμα 3 μήνες.
Το πρώτο είναι το λεγόμενο συμβόλαιο αγοράς (call option) και το δεύτερο το συμβόλαιο πώλησης (put option). Ο πωλητής αυτού του συμβολαίου, αφού λάβει το αντίστοιχο αντίτιμο πουλώντας το, είναι υποχρεωμένος να δώσει το ποσό

$$\begin{aligned} (S_T - K)^+ &= \max(S_T - K, 0) \quad \text{call option} \\ (K - S_T)^+ &= \max(K - S_T, 0) \quad \text{put option} \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται συνήθως συναρτήσεις απολαβής.

Στην πραγματικότητα ο πωλητής ενός συμβολαίου αγοράς είναι υποχρεωμένος να παραδώσει στον αγοραστή μια μετοχή στην τιμή K, αν $S_T > K$, ενώ ενός συμβολαίου πώλησης είναι υποχρεωμένος να αγοράσει μια μετοχή στην τιμή K, αν $S_T < K$. Στην πρώτη περίπτωση ο αγοραστής μπορεί να πουλήσει την μετοχή στην τρέχουσα τιμή και επομένως θα έχει κέρδος το ποσό $(S_T - K)^+$. Στην δεύτερη περίπτωση μπορεί να αγοράσει την μετοχή στην τιμή $S_T < K$ και να την πουλήσει στην τιμή K στον πωλητή του συμβολαίου και επομένως θα έχει κέρδος το ποσό $(K - S_T)^+$.

Σημειώστε ότι στα παραπάνω πάντοτε ο πωλητής έχει την υποχρέωση ενώ ο αγοραστής το δικαίωμα να προβεί στην ανάλογη κίνηση.

Χρησιμοποιήστε παρακάτω πραγματικά δεδομένα για μια μετοχή και τα αντίστοιχα συμβόλαια αγοράς και πώλησης. Υποθέστε ότι αγοράσατε ένα συμβόλαιο αγοράς με μια τιμή εξάσκησης που εσείς έχετε διαλέξει και στο ποσό που εμφανίζεται στην ιστοσελίδα.
Η μελλοντική τιμή της μετοχής είναι άγνωστη αλλά σίγουρα είναι τ.ω. $x \geq 0$. Σχεδιάστε το γράφημα του ποσού που θα έχετε στη λήξη του συμβολαίου τη χρονική στιγμή T. Το ίδιο αν εσείς έχετε πουλήσει αυτό το συμβόλαιο αγοράς και παρόμοια για το συμβόλαιο πώλησης.

Για παράδειγμα αν έχω αγοράσει ένα συμβόλαιο αγοράς με τιμή εξάσκησης $K = 220$ στη τιμή $Y = 30$ τότε το κέρδος μου στο χρόνο T θα είναι ίσο με

$$(S_T - K)^+ - Y = (S_T - 220)^+ - 30$$

Η τιμή S_T είναι άγνωστη και μπορεί να είναι ένας αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδέν. Η συνάρτηση κέρδους θα είναι η

$$\Pi(x) = (x - 220)^+ - 30$$

Τη συνάρτηση αυτή μπορούμε εύκολα να τη σχεδιάσουμε με κατάλληλο λογισμικό. Αν το κάνουμε, παρατηρούμε ότι παίρνει και αρνητικές τιμές, δηλαδή υπάρχει περίπτωση να έχουμε και ζημιά.

Ποια είναι η χρησιμότητα των συμβολαίων προαίρεσης (παραγώγων); I

Υποθέστε ότι έχετε τόσα χρήματα όσο κοστίζει σήμερα η μετοχή και πιστεύετε ότι σε ένα χρόνο πρόκειται να διπλασιαστεί. Κάνοντας τους κατάλληλους πειραματισμούς με πραγματικά δεδομένα δείτε τι είναι πιο συμφέρον: να αγοράσετε μια μετοχή ή να αγοράσετε μερικά call options;

Ποια είναι η χρησιμότητα των συμβολαίων προαίρεσης (παραγώγων); II

Κάνοντας παρόμοιους πειραματισμούς με πραγματικά δεδομένα θα καταλήξετε στο εξής συμπέρασμα: τα συμβόλαια αγοράς πολλαπλασιάζουν το κέρδος στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής ανέβει αρκετά αλλά στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής βρεθεί κάτω από τη τιμή εξάσκησης τα χρήματα χάνονται. Παρομοίως, για τα συμβόλαια πώλησης θα καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι λειτουργούν ως εξασφάλιση διότι στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής βρεθεί κάτω από τη τιμή εξάσκησης τότε λαμβάνεις και το αντίστοιχο ποσό.

Ποια είναι η χρησιμότητα των συμβολαίων προαίρεσης (παραγώγων); III

Αγοράζοντας ένα συμβόλαιο μπορείς να το κρατήσεις μέχρι να λήξει ή να το πουλήσεις πριν τη λήξη του. Η τιμή πώλησης καθορίζεται σύμφωνα με την προσφορά και τη ζήτηση. Επομένως, ενδέχεται να αποκομίσει κανείς κέρδος πουλώντας το νωρίτερα από τη λήξη προκειμένου να λάβει την αντίστοιχη διαφορά.

Ποια είναι η χρησιμότητα των συμβολαίων προαίρεσης (παραγώγων); IV

Θα δούμε παρακάτω ότι χρησιμοποιώντας κατάλληλα τα χρηματοοικονομικά αυτά εργαλεία μπορούμε να κατασκευάσουμε πολύπλοκα χαρτοφυλάκια προκειμένου να έχουμε τις ιδιότητες που χρειαζόμαστε.

θα δώσουμε παρακάτω ένα παράδειγμα προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.
Να βρεθούν τα x_1, x_2, x_3 έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η ποσότητα

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

δεδομένου των παρακάτω προϋποθέσεων

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Το παραπάνω πρόβλημα γράφεται συνήθως ως εξής

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{δεδομένου ότι} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Ένα τέτοιο πρόβλημα μπορεί να έχει λύση (ή ακόμη και άπειρες λύσεις) ή να μην έχει. Περισσότερα μπορεί να δει κανείς σε αντίστοιχα βιβλία.
Χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο επιλυτή βρίσκουμε ότι το μέγιστο επιτυγχάνεται όταν $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$ και είναι ίσο με τον αριθμό 13.

Θα δούμε πως μπορεί να εφαρμοσθούν τα παραπάνω στην κατασκευή χαρτοφυλακίου.
Έστω $S_0 = 238$, $C(230) = 65$, $P(200) = 30$ όπου S_0 είναι η σημερινή αξία της μετοχής, $C(230)$ είναι η αξία ενός συμβολαίου αγοράς με τιμή εξάσκησης 230 και $P(200)$ είναι η αξία ενός συμβολαίου πώλησης με τιμή εξάσκησης 200.
Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να επενδύσουμε 1.000 Ευρώ στα παραπάνω. Για παράδειγμα μπορώ να κατασκευάσω ένα χαρτοφυλάκιο του οποίου η συνάρτηση κέρδους να είναι

$$\Pi(x) = \frac{200}{238}x + \frac{300}{65}(x-230)^+ + \frac{500}{30}(200-x)^+ - 1000$$

Σχεδιάζοντας το γράφημα της συνάρτησης κέρδους διαπιστώνουμε ότι η μέγιστη πιθανή ζημιά σε όλα τα σενάρια είναι περίπου 832 Ευρώ.

Υπάρχει άραγε διαφορετική κατανομή του ποσού των 1.000 Ευρώ έτσι ώστε η μέγιστη πιθανή ζημιά να είναι μικρότερη; Αν ναι, ποια είναι η κατανομή που μας οδηγεί σε χαρτοφυλάκιο με την μικρότερη πιθανή ζημιά;

Θα μετατρέψουμε το παραπάνω ερώτημα σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια γραμμική συνάρτηση $f(x)$ και θέλουμε να ισχύει ότι $f(x) \geq -D$ για κάθε $x \geq 0$. Πως μπορούμε να το πετύχουμε αυτό;
Αρκεί να απαιτήσουμε $f(0) \geq -D$ και $f^{'}(0+) \geq 0$ οπότε θα είμαστε βέβαιοι ότι η συνάρτηση αυτή πάντοτε θα ικανοποιεί το ζητούμενο. Αυτό το συμπέρασμα μπορεί εύκολα να γενικευθεί για μια συνάρτηση η οποία είναι τμηματικά γραμμική με πεπερασμένους βέβαια κλάδους.

Η συνάρτηση κέρδους $\Pi(x)$ είναι τμηματικά γραμμική επομένως ισχύει η επόμενη ισοδυναμία

$$\Big(\Pi(x) \geq -D \;\; \text{για κάθε } x \geq 0\Big) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \Pi(0) \geq -D, \\ \Pi(200) \geq -D, \\ \Pi(230) \geq -D, \\ \Pi^{'}(230+) \geq 0 \end{array} \right.$$

όπου

$$\Pi(x) = ax + b(x-230)^{+} + c(200-x)^{+} - 1000$$

και κάποιο D.

ή διαφορετικά

$$\Big(\Pi(x) \geq -D \ \text{ για κάθε } x \geq 0\Big) \iff \begin{cases} 200c - 1000 \geq -D, \\ 200a - 1000 \geq -D, \\ 230a - 1000 \geq -D, \\ a + b \geq 0 \end{cases}$$

Επομένως τα χαρτοφυλάκια των οποίων οι παράμετροι a, b, c ικανοποιούν τις παραπάνω ανισώσεις καθώς και την ισότητα $238a + 65b + 30c = 1000$ έχουν ως μέγιστη πιθανή ζημιά τον αριθμό D.
Ποιο είναι το μικρότερο D έτσι ώστε να υπάρχει χαρτοφυλάκιο με μέγιστη πιθανή ζημιά τον αριθμό αυτό;

Για να το βρούμε αυτό αρκεί να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

$$
\begin{array}{lrl}
\min & D & \\
\text{δεδομένου ότι} & 200c - 1000 + D \geq & 0 \\
& 200a - 1000 + D \geq & 0 \\
& 230a - 1000 + D \geq & 0 \\
& a + b \geq & 0 \\
& 238a + 65b + 30c = & 1000
\end{array}
$$

Συμβολίζοντας με $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = D$ δημιουργούμε το επόμενο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

$$
\begin{array}{lrl}
\max & -x_4 & \\
\text{δεδομένου ότι} & 200x_3 - 1000 + x_4 \geq & 0 \\
& 200x_1 - 1000 + x_4 \geq & 0 \\
& 230x_1 - 1000 + x_4 \geq & 0 \\
& x_1 + x_2 \geq & 0 \\
& 238x_1 + 65x_2 + 30x_3 = & 1000
\end{array}
$$

Λύνοντας το πρόβλημα αυτό βρίσκουμε $a = 4.9, b = -4.9, c = 5$ και η μέγιστη πιθανή ζημιά είναι 20 Ευρώ. Όπου υπάρχει αρνητικό πρόσημο σημαίνει πώληση του αντίστοιχου αγαθού. Αν θέλουμε όλα να είναι θετικά τότε το πρόβλημα θα έχει ως λύση $a = 3.5, b = 0, c = 5$ και η μέγιστη πιθανή ζημιά θα είναι περίπου 286 Ευρώ.

Είδαμε παραπάνω πως μπορεί ο επενδυτής να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο με τη μικρότερη πιθανή ζημιά. Παρόλα αυτά μπορεί να πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής πρόκειται να ανέβει. Ένας τρόπος για να κατασκευάσει αντίστοιχο κερδοφόρο χαρτοφυλάκιο είναι να απαιτήσει η κλίση της ευθείας του τελευταίου κλάδου να είναι αρκετά μεγάλη. Δηλαδή $x_1 + x_2 \geq M$ για κάποιο $M > 0$. Όσο μεγαλύτερο είναι το M τόσο περισσότερο κέρδος θα έχει στην περίπτωση ανόδου της μετοχής. Όμως αντίστοιχα θα αυξάνεται και η μέγιστη πιθανή ζημιά. Επομένως, ο επενδυτής είναι αυτός που θα επιλέξει το χαρτοφυλάκιο που του ταιριάζει.
Για παράδειγμα, επιλέγοντας $M = 6.5$ προκύπτει ότι $a = 2.84, b = 3.65, c = 2$ ενώ η μέγιστη πιθανή ζημιά γίνεται τώρα 432 Ευρώ.

Μια άλλη οπτική κατασκευής χαρτοφυλακίου είναι να υποθέσει/προβλέψει ο επενδυτής ότι η τιμή της μετοχής στο χρόνο T θα βρεθεί στο διάστημα (a, b).
Ας υποθέσουμε ότι πιστεύει ότι θα βρεθεί στο διάστημα $(220, 250)$. Τότε θέλει να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο να είναι κερδοφόρο στη περίπτωση που πράγματι βρεθεί σε αυτό το διάστημα. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να ισχύει $\Pi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (220, 250)$.
Πιο συγκεκριμένα μπορεί να επιλύσει το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.

Με την επίλυση του παρακάτω προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού θα υπολογίσει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα έχει ζημιά μικρότερη ή ίση των 500 Ευρώ και ταυτόχρονα θα έχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος αν η αξία της μετοχής βρεθεί στο παραπάνω διάστημα.

$$
\begin{array}{lrcl}
\max & x_4 + x_5 + x_6 & & \\
\text{δεδομένου ότι} & 200x_3 - 500 & \geq & 0 \\
& 200x_1 - 500 & \geq & 0 \\
& 220x_1 - 1000 - x_4 & \geq & 0 \\
& 230x_1 - 1000 - x_5 & \geq & 0 \\
& 250x_1 + 20x_2 - 1000 - x_6 & \geq & 0 \\
& x_1 + x_2 & \geq & 0 \\
& 238x_1 + 65x_2 + 30x_3 & = & 1000
\end{array}
$$

Οι παραπάνω ανισότητες προκύπτουν ως εξής: Εφόσον θέλουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο να είναι κερδοφόρο στο διάστημα $(220, 250)$ τότε θα πρέπει να απαιτήσουμε
$\Pi(220) \geq D_1, \Pi(230) \geq D_2, \Pi(250) \geq D_3$ για όσο μεγαλύτερα D_1, D_2, D_3 γίνεται.
Από την άλλη μεριά, για να πετύχουμε το εν λόγω χαρτοφυλάκιο να μην έχει ζημιά μεγαλύτερη από 500 Ευρώ θα πρέπει να απαιτήσουμε $\Pi(x) \geq -500$ για κάθε $x \geq 0$. Για να γίνει αυτό αρκεί να απαιτήσουμε
$\Pi(0) \geq -500, \Pi(200) \geq -500, \Pi^{'}(230+) \geq 0.$

Χρήσιμες Ισοδυναμίες I

Αν στην αγορά υπάρχουν n το πλήθος συμβόλαια αγοράς και πώλησης με τιμές εξάσκησης $K_1 < \cdots < K_n$ τότε έχουμε τις εξής ισοδυναμίες

$$\Big(\Pi(x) \geq -D \;\; \text{για κάθε } x \geq 0\Big) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \Pi(0) \geq -D, \\ \Pi(K_1) \geq -D, \\ \vdots, \\ \Pi(K_n) \geq -D, \\ \Pi^{'}(K_n+) \geq 0 \end{array} \right.$$

Χρήσιμες Ισοδυναμίες II

$$\Big(\Pi(x) \geq 0 \;\; \text{για κάθε } x \in (a,b)\Big) \Longleftrightarrow \begin{cases} \Pi(K_i) \geq D_i, \;\text{για κάθε } K_i \in (a,b) \\ \Pi(a) \geq D_a, \\ \Pi(b) \geq D_b, \\ \Pi^{'}(K_n+) \geq M \text{ αν } K_n \in (a,b) \\ D_i, D_a, D_b \geq 0 \end{cases}$$

Έστω ότι ένας επενδυτής θέλει να επενδύσει το ποσό Y σε μια μετοχή και στα αντίστοιχα συμβόλαια αγοράς και πώλησης. Ας υποθέσουμε ότι προβλέπει ότι η τιμή της μετοχής θα βρεθεί στο διάστημα (c, v) στο χρόνο T. Τότε μπορεί να τοποθετήσει το ποσό Y αφού λύσει το παρακάτω πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού.
Δεδομένου μιας αποδεκτής ζημιάς D να βρεθούν οι συντελεστές $a, b, \gamma_i, \delta_i, D_c, D_v, D_i, M$

$$\begin{aligned}
\max \quad & w_c D_c + w_1 D_1 + \cdots w_l D_l + w_v D_v + w_M M \\
\text{δεδομένου ότι} \quad & \Pi(x) \geq -D \text{ για κάθε } x \geq 0 \\
& \Pi(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in (c, v) \\
& ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i) = Y
\end{aligned} \tag{1}$$

όπου w_c, w_v, w_i, w_M βάρη τα οποία έχει επιλέξει ο επενδυτής.

Η παραπάνω κατασκευή μπορεί να γίνει προκειμένου να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκιο το οποίο να είναι κερδοφόρο σε οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ και όχι κατά ανάγκη σε διάστημα. Μάλιστα, όσο μικρότερο είναι το σύνολο αυτό τόσο μεγαλύτερο θα είναι και το κέρδος του επενδυτή στην περίπτωση που η πρόβλεψη του γίνει πραγματικότητα. Αρα, στο πρόβλημα της κατασκευής ενός κερδοφόρου χαρτοφυλακίου σημαντικό ρόλο θα παίξει η πρόβλεψη του επενδυτή και πόσο συγκεκριμένη είναι. Απλές κατασκευές που είναι υποπεριπτώσεις της παραπάνω μεθοδολογίας είναι οι στρατηγικές bull spread, bear spread, butterfly, straddle κ.α. Μπορεί να δει κανείς στο βιβλίο Mathematics for Finance, στο εδάφιο 9.3 περισσότερα για τις στρατηγικές αυτές.

Σημειώστε ότι σε αυτό το μάθημα δεν θα αναφέρουμε καθόλου τεχνικές πρόβλεψης παρότι είναι χρήσιμες. Αυτό που κάνουμε εδώ είναι δεδομένου μιας πρόβλεψης να κατασκευάσουμε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο το οποίο να είναι κατά το δυνατόν πιο κερδοφόρο αν επαληθευτεί η πρόβλεψη αυτή.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε και άλλα χαρτοφυλάκια λύνοντας προβλήματα βελτιστοποίησης.
Για παράδειγμα ο επενδυτής ενδιαφέρεται να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο όπου η μέγιστη πιθανή ζημιά να είναι μικρότερη ή ίση από 500 Ευρώ. Όπως είδαμε υπάρχουν τέτοια χαρτοφυλάκια και μάλιστα πολλά.
Από όλα αυτά τα χαρτοφυλάκια μπορούμε να διαλέξουμε εκείνο το οποίο έχει την μικρότερη διακύμανση ή κάτι τέτοιο. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να υποθέσουμε ότι η S_T ακολουθεί μια γνωστή κατανομή και επομένως να κάνουμε μια πρόβλεψη για την μελλοντική συμπεριφορά της τιμής της μετοχής. Εδώ ο τύπος της πρόβλεψης που κάνουμε είναι διαφορετικός από την προηγούμενη περίπτωση.

Επομένως θα πρέπει να λυθεί το επόμενο πρόβλημα βελτιστοποίησης.

$$
\begin{array}{lrl}
\min & w_1 \operatorname{Var} \Pi(S_T) - w_2 \mathbb{E}(\Pi(S_T) | S_T \in G) & \\
\text{δεδομένου ότι} & 200c - 1000 + 500 \geq & 0 \\
 & 200a - 1000 + 500 \geq & 0 \\
 & 230a - 1000 + 500 \geq & 0 \\
 & a + b \geq & 0 \\
 & 238a + 65b + 30c = & 1000
\end{array}
$$

όπου $G \subseteq \mathbb{R}_+$ είναι ένα σύνολο στο οποίο προβλέπει ο επενδυτής ότι θα βρεθεί η μετοχή στο χρόνο T ενώ w_1, w_2 βάρη τα οποία θα επιλεγούν από τον επενδυτή.

Το χαρτοφυλάκιο που θα προκύψει θα έχει μέγιστη πιθανή ζημιά μικρότερη ή ίση των 500 Ευρώ σε όλα τα πιθανά σενάρια. Η κατασκευή αυτή είναι μια γενίκευση της κατασκευής κατά Markowitz που θα δούμε παρακάτω διότι λαμβάνει υπόψη τα διαθέσιμα συμβόλαια προαίρεσης.

Στο πρόβλημα της κατασκευής χαρτοφυλακίου η έννοια της πρόβλεψης διαδραματίζει σημαντικό ρόλο διότι το κέρδος του επενδυτή είναι τόσο μεγάλο όσο πιο συγκεκριμένη είναι η πρόβλεψη, αρκεί βέβαια να προκύψει και αληθινή.
Σε αυτό λοιπόν το πρόβλημα η θεωρία πιθανοτήτων, η στατιστική, η στοχαστική ανάλυση και ειδικότερα οι στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, μηχανική μάθηση κ.α. παίζουν σημαντικό ρόλο.

Έστω ότι η σημερινή τιμή της μετοχής είναι S_0, έστω ότι υπάρχει ένα συμβόλαιο αγοράς με αξία $C(K)$ και ένα συμβόλαιο πώλησης με αξία $P(K)$. Υποθέτουμε επίσης ότι μπορούμε να επενδύσουμε σε τραπεζικό λογαριασμό με μηδενικό επιτόκιο για ευκολία.

Κατασκευάστε ένα χαρτοφυλάκιο επενδύοντας το ποσό των 100 Ευρώ στα παραπάνω το οποίο να έχει τη μικρότερη πιθανή ζημιά. Θα παρατηρήσουμε ότι το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι μη φραγμένο το οποίο σημαίνει (θεωρητικά) ότι μπορούμε να έχουμε απεριόριστο κέρδος! Λύστε το ίδιο πρόβλημα απαιτώντας το πλήθος των συμβολαίων προαίρεσης να είναι στο διάστημα $[-1, 1]$. Τότε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού θα μας δώσει το χαρτοφυλάκιο εκείνο με την μικρότερη πιθανή ζημιά η οποία συνήθως θα είναι αρνητική, δηλαδή θα έχουμε σίγουρο κέρδος. Το πρόβλημα αυτό θα πρέπει να επιλυθεί λαμβάνοντας υπόψη όλα τα συμβόλαια προαίρεσης που είναι διαθέσιμα στην αγορά προκειμένου να βρεθεί ο βέλτιστος συνδυασμός.

Θα δούμε παρακάτω πως αυτό σχετίζεται με την λεγόμενη αναλογία αγοράς - πώλησης (put - call parity).
Πράγματι αυτό μπορεί να συμβεί στην πράξη όμως θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας το κόστος συναλλαγής καθώς και το bid - ask spread πριν προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο.

ΟΡΙΣΜΟΣ (Ευκαιρία σίγουρου κέρδους - Arbitrage)

Θα λέμε ότι στην αγορά υπάρχει ευκαιρία σίγουρου κέρδους (Arbitrage) αν μπορώ να κατασκευάσω χαρτοφυλάκιο του οποίου η συνάρτηση κέρδους να έχει τις παρακάτω ιδιότητες

$$\begin{aligned} \Pi(x) &\geq 0 \quad \text{για κάθε } x \geq 0 \\ \Pi(x) &> 0 \quad \text{για κάποια } x \geq 0 \end{aligned}$$

Για καλύτερα αποτελέσματα θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας όλα τα συμβόλαια αγοράς και πώλησης και επομένως να επιλύσουμε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού όπως το παρακάτω: να βρεθούν οι παράμετροι $a, b, \gamma_i, \delta_i, D$ έτσι ώστε να ισχύουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} & \min D \\ \text{δεδομένου ότι} \quad & aS_0 + b + \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = Y \quad (2) \\ & \Pi(x) \geq -D \text{ για κάθε } x \geq 0 \\ & \gamma_i, \delta_i \in [-1, 1] \end{aligned}$$

όπου $C(K_i), P(K_i)$ είναι οι σημερινές τιμές της δικαιωμάτων.

Αναλογία αγοράς - πώλησης put - call parity I

Ας υποθέσουμε ότι στην αγορά υπάρχει μια μετοχή με αξία S_0, ένα συμβόλαιο αγοράς με αξία $C(K)$, ένα συμβόλαιο πώλησης με αξία $P(K)$, τραπεζικός λογαριασμός με επιτόκιο r. Τα συμβόλαια αυτά έχουν ως υποκείμενη μετοχή την παραπάνω καθώς και την ίδια ημερομηνία λήξης.
Τότε αν δεν ισχύει η παρακάτω σχέση (δείτε θεώρημα 7.1 στο βιβλίο Mathematics for Finance)

$$C(K) + Ke^{-rT} = S_0 + P(K) \text{ (Αναλογία αγοράς - πώλησης)}$$

θα υπάρχει ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Η απόδειξη είναι απλή.

Αναλογία αγοράς - πώλησης put - call parity II

Έστω ότι

$$C(K) + Ke^{-rT} > S_0 + P(K)$$

Τότε θα αγοράσουμε ένα συμβόλαιο πώλησης και μια μετοχή και θα πουλήσουμε ένα συμβόλαιο αγοράς. Το ποσό (είτε αρνητικό είτε θετικό) θα το τοποθετήσουμε/δανειστούμε στον/από τον τραπεζικό λογαριασμό. Στο χρόνο T θα έχουμε σίγουρο κέρδος (δείτε το).
Αν

$$C(K) + Ke^{-rT} < S_0 + P(K)$$

τότε μπορούμε να αγοράσουμε ένα συμβόλαιο αγοράς και να πουλήσουμε μια μετοχή και ένα συμβόλαιο πώλησης. Το ποσό (είτε αρνητικό είτε θετικό) θα το τοποθετήσουμε/δανειστούμε στον/από τον τραπεζικό λογαριασμό. Στο χρόνο T θα έχουμε σίγουρο κέρδος (δείτε το).

Αναλογία αγοράς - πώλησης put - call parity III

Πως σχετίζεται αυτό με την επίλυση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού 2; Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού αυτό είναι μια γενίκευση της αναλογίας αγοράς - πώλησης διότι θα εντοπίσει το χαρτοφυλάκιο με την μεγαλύτερη παρουσία ευκαιρίας σίγουρου κέρδους.
Στην πράξη, αν προσπαθήσουμε να επαναλάβουμε άπειρες φορές την διαδικασία αυτή δεν θα τα καταφέρουμε διότι αυτό θα οδηγήσει σε αλλαγή των τιμών και άρα θα εξαφανιστεί η ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Επιπλέον, στην πράξη θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τα κόστη συναλλαγής καθώς και το bid - ask spread.

Για να αναπτύξουμε την θεωρία αυτή θα παρουσιάσουμε αρχικά τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που προέρχονται κυρίως από τη θεωρία πιθανοτήτων.
Ξεκινάμε με την έννοια της συνδιακύμανσης δυο τυχαίων μεταβλητών X, Y η οποία περιγράφει τον τρόπο που αλλάζει η μια τυχαία μεταβλητή σε σχέση με την άλλη. Ορίζεται ως εξής,

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τη συνδιακύμανση.

- $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathrm{Var}(X)$,
- $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$,
- $\mathrm{Cov}(X + Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)$,
- $\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{m} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} Cov(X_i, Y_i)$,
- $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$
- $\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

Έστω ότι μπορούμε να επενδύσουμε το ποσό V σε n το πλήθος μετοχές. Δηλαδή, θέλουμε να αγοράσουμε k_i μετοχές από την S_i όπου $i = 1, \cdots, n$. Συμβολίζουμε με

$$w_i = \frac{k_i S_i^0}{\sum_{j=1}^{n} k_j S_j^0}$$

όπου ισχύει προφανώς ότι

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

δηλαδή θα ξοδέψουμε το ποσό $w_i V$ για αγορά k_i μετοχών της S_i. Ψάχνουμε να βρούμε τα w_i τέτοια ώστε το κέρδος μας στο χρόνο T να είναι το μέγιστο με το ελάχιστο δυνατόν ρίσκο.

Η απόδοση της κάθε μετοχής μ_i στη χρονική περίοδο $[0, T]$ είναι μια τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε

$$\frac{S_i^T}{S_i^0} = 1 + \mu_i$$

όπου S_i^0 και S_i^T είναι η τιμή της μετοχής στο χρόνο 0 και στο χρόνο T αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε από ιστορικά δεδομένα τη μέση τιμή m_i της απόδοσης μ_i, τη διακύμανση σ_i της απόδοσης καθώς και την συνδιακύμανση σ_{ij} των αποδόσεων των μετοχών S_i και S_j. Θα υποθέσουμε ότι οι ίδιες τιμές θα ισχύουν και στη χρονική περίοδο $[0, T]$. Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή 0 έτσι ώστε τη χρονική στιγμή T να έχει τη μέγιστη απόδοση κατά μέση τιμή m και τη μικρότερη δυνατή διακύμανση.

Η απόδοση μ του χαρτοφυλακίου συνολικά θα είναι τ.ω.

$$\frac{V^T}{V} = 1 + \mu$$

οπότε

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n k_i(S_i^T - S_i^0)}{V} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i k_i S_i^0}{V} = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i$$

Επομένως, η μέση τιμή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου θα

$$m = \mathbb{E}(\mu) = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathbb{E}(\mu_i)$$

Η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με

$$\sigma = \mathrm{Var}(\mu) = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Αν θέσουμε $\mathbf{w}^t = (w_1, \cdots, w_n)$, $\boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_{ij}]$ και $\mathbf{m}^t = (m_1, \cdots, m_n)$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^t\mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t\mathbf{m} &= m, \\ \mathbf{w}^t\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} &= \sigma \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{1}^t = (1, \cdots, 1)$ και $\mathbf{w}^t$ είναι ο ανάστροφος του $\mathbf{w}$. Σημειώστε ότι, αφού η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι πάντοτε θετικός αριθμός τότε, ο πίνακας συνδιακυμάνσεων Σ είναι θετικά ορισμένος.

Το πρόβλημά μας έχει αναχθεί σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με προϋποθέσεις. Θεωρούμε ως m_0 μια απαιτούμενη μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου μας και θέλουμε να υπολογίσουμε τα w_i έτσι ώστε να έχουμε την ελάχιστη δυνατή διακύμανση του χαρτοφυλακίου, δηλαδή επίλυση του παρακάτω προβλήματος

$$\min \quad \mathbf{w}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}$$

κάτω από τις προϋποθέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^t \mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t \mathbf{m} &= m_0 \end{aligned} \tag{3}$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange λαμβάνουμε τις παρακάτω εξισώσεις,

$$\begin{aligned} 2\mathbf{\Sigma w} &= \lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{m}, \\ \mathbf{1}^t \mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t \mathbf{m} &= m_0 \end{aligned}$$

Αν ο πίνακας $\mathbf{\Sigma}$ είναι αντιστρέψιμος τότε λύνουμε ως προς $\mathbf{w}$ την πρώτη εξίσωση και έχουμε

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{\Sigma}^{-1}(\lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{m}) = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Οι εξισώσεις $\mathbf{1}^t \mathbf{w} = 1$ και $\mathbf{w}^t \mathbf{m} = m_0$ γράφονται και ως

$$[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t \mathbf{w} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την 4 με τον $[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t$ προκύπτει ότι

$$[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t \mathbf{w} = \frac{1}{2}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t \boldsymbol{\Sigma}^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}] \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $\mathbf{A} = [\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t \mathbf{\Sigma}^{-1} [\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]$ και εύκολα αποδεικνύουμε ότι είναι θετικά ορισμένος. Πράγματι,

$$[y_1 \quad y_2]\mathbf{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = [y_1\mathbf{m} + y_2\mathbf{1}]^t \mathbf{\Sigma}^{-1}[y_1\mathbf{m} + y_2\mathbf{1}]^t$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο λόγω του ότι ο πίνακας $\mathbf{\Sigma}^{-1}$ είναι θετικά ορισμένος.

Σημειώστε ότι ο $\mathbf{\Sigma}$ είναι αντιστρέψιμος αν $\mathbf{w}^t \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} = \sigma > 0$ διότι από το θεώρημα 785 του βιβλίου «Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομολόγους και Μηχανικούς» προκύπτει ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{\Sigma}$ είναι αυστηρά θετικές και από τις ανάλογες ιδιότητες των ιδιοτιμών προκύπτει ότι είναι αντιστρέψιμος. Επίσης, ο αντίστροφος του θα έχει ως ιδιοτιμές τις $\frac{1}{\lambda_i}$ οι οποίες θα είναι όλες θετικές και επομένως πάλι από το θεώρημα (από το αντίστροφο του τώρα) 785 προκύπτει ότι είναι και αυτός θετικά ορισμένος.

Αντικαθιστώντας τον πίνακα **A** προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2}\mathbf{A}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Αντιστρέφοντας τον **A** υπολογίζουμε το διάνυσμα **w** και έχουμε

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]\mathbf{A}^{-1}\begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την διακύμανση έχοντας το διάνυσμα $\mathbf{w}$. Έχουμε ότι

$$\sigma^2 = \mathbf{w}^t \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} = \frac{A_{11} - 2A_{12} m_0 + A_{14} m_0^2}{|A|}$$

όπου $\mathbf{A}$ ο 2×2 που ορίσαμε παραπάνω. Λύνοντας ως προς m_0 παίρνουμε δυο λύσεις.

Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης ορισμένα από τα w_i μπορεί να προκύψουν αρνητικά. Αυτό σημαίνει ότι ο επενδυτής θα δανεισθεί πλήθος μετοχών της i μετοχής, θα τις πουλήσει στην σημερινή τιμή της αγοράς αλλά θα είναι υποχρεωμένος να τις επιστρέψει στο μέλλον στον δανειστή του (short selling). Η κίνηση αυτή μπορεί να έχει απεριόριστη ζημιά στον επενδυτή, αφού η αξία της μετοχής μπορεί (θεωρητικά) να αυξηθεί απεριόριστα στο μέλλον ενώ ο επενδυτής θα είναι υποχρεωμένος να αγοράσει ακριβά τις μετοχές τις οποίες δανείστηκε και πρέπει να επιστρέψει.

Προκειμένου η πιθανή ζημιά του επενδυτή να είναι άνω φραγμένη θα πρέπει να αγοράσει και ένα συμβόλαιο αγοράς ανά μετοχή που δανείσθηκε προκειμένου να εξασφαλιστεί. Τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης έχουν κυρίως τον ρόλο της εξασφάλισης του επενδυτή. Παρόλα αυτά όμως μπορεί κάποιος να τα χρησιμοποιήσει για λόγους κερδοσκοπίας ακριβώς όπως τις μετοχές, ειδικά όταν αυτά τα συμβόλαια είναι διαπραγματεύσιμα στην χρηματιστηριακή αγορά. Για παράδειγμα μπορεί κάποιος να αγοράσει ένα συμβόλαιο αγοράς ή πώλησης με την προσδοκία ότι θα ανέβει η αξία του συμβολαίου και θα το πουλήσει ακριβότερα, πριν την λήξη του προφανώς.

Στην περίπτωση που επιπλέον απαιτήσουμε τα $w_i \geq 0$ τότε αυτό πρέπει να συμπεριληφθεί στις προϋποθέσεις 3.
Στην συνέχεια θα δώσουμε τρεις οπτικές βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου με την επιπλέον προϋπόθεση ότι $w_i \geq 0$ θεωρώντας χαρτοφυλάκια με μικρό πλήθος μετοχών έτσι ώστε οι υπολογισμοί να είναι εφικτοί.

Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου ελάχιστης διακύμανσης με τρεις μετοχές

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης το οποίο να αποτελείται από τρεις μετοχές. Η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι ως εξής

$$\begin{aligned}\sigma &= f(w_1, w_2, w_3) \\ &= w_1^2\sigma_1 + w_2^2\sigma_2 + w_3^2\sigma_3 + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23}\end{aligned}$$

όπου $\sigma_i = \sigma_{ii}$. Η μέση τιμή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι ίση με

$$m_1w_1 + m_2w_2 + m_3w_3 = m_0 \tag{6}$$

Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τίποτε όταν ισχύει $m_1 = m_2 = m_3$ οπότε θα υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $m_1 \neq m_2$.

Προφανώς θα πρέπει να ισχύει ότι

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1 \tag{7}$$

Από τις 6 και 7 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{t(m_2 - m_3) + m_0 - m_2}{m_1 - m_2} \\ w_2 &= \frac{t(m_3 - m_1) + m_1 - m_0}{m_1 - m_2} \end{aligned}$$

όπου $t = w_3$. Στην συνέχεια αντικαθιστούμε τα w_1, w_2 στην $f(w_1, w_2, w_3)$ οπότε προκύπτει συνάρτηση μιας μεταβλητής, της μεταβλητής t. Δηλαδή θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση ως προς t σε όλο το $\mathbb{R}$ αν δεν έχουμε κάποια επιπλέον απαίτηση για τα w_1, w_2, w_3.

Αν επιπλέον θέλουμε τα w_1, w_2, w_3 να είναι θετικά τότε θα πρέπει να απαιτήσουμε το t να κινείται στο κατάλληλο υποσύνολο του $[0,1]$ στο οποίο τα w_1, w_2 να είναι θετικά και άρα να ελαχιστοποίησουμε την διακύμανση ορισμένη στο διάστημα αυτό. Αν $m_1 - m_2 > 0$ τότε η απαίτηση $w_1 \geq 0$ σημαίνει ότι $t(m_2 - m_3) + m_0 - m_2 \geq 0$ και η απαίτηση $w_2 \geq 0$ σημαίνει ότι $t(m_3 - m_1) + m_1 - m_0 \geq 0$. Διαλέγουμε το διάστημα στο οποίο θα κινείται το t έτσι ώστε να είναι υποσύνολο του $[0,1]$ και ταυτόχρονα να ικανοποιούνται και οι δυο απαιτήσεις. Αν αυτό δεν γίνεται τότε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης δεν έχει λύση. Παρόμοια και στην περίπτωση που $m_1 - m_2 < 0$.

Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου μέγιστης απόδοσης με δυο μετοχές

Μια άλλη οπτική βελτιστοποίησης είναι να βρεθεί το διάνυσμα $w = (w_1, w_2)$ έτσι ώστε η διακύμανση του χαρτοφυλακίου να είναι ίση με ένα δοσμένο αριθμό σ_0 και να μεγιστοποιηθεί η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου. Δηλαδή το μαθηματικό πρόβλημα είναι ως εξής:

$$\begin{aligned} \max_{(w_1,w_2)} & (w_1 m_1 + w_2 m_2) \\ & \text{δεδομένου} \\ \sigma = \sigma_1 w_1^2 + \sigma_2 w_2^2 + 2\sigma_{12} w_1 w_2 &= \sigma_0 \\ w_1 + w_2 &= 1 \\ w_1 \geq 0, \quad w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα μπορούμε να θέσουμε $w_2 = t$ και άρα $w_1 = 1 - t$ οπότε αντικαθιστούμε στην ισότητα της διακύμανσης. Τελικά θα έχουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max_{t \in [0,1]} \left(m_1(1-t) + m_2 t \right)$$

$$\sigma_1(1-t)^2 + \sigma_2 t^2 + 2\sigma_{12}(1-t)t - \sigma_0 = 0$$

Η δεύτερη ισότητα θα έχει πιθανόν δυο λύσεις, έστω t_1, t_2. Θα διαλέξουμε εκείνη η οποία ανήκει στο διάστημα $[0, 1]$ (αν υπάρχει) και ταυτόχρονα μεγιστοποιεί την ζητούμενη ποσότητα.

Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου μέγιστης διαφοράς απόδοσης και διακύμανσης

Μια ακόμη οπτική είναι να μεγιστοποιήσουμε την διαφορά της μέσης τιμής και της διακύμανσης. Δηλαδή

$$\max_{(w_1,w_2)} \left(m_1 w_1 + m_2 w_2 - \lambda(\sigma_1 w_1^2 + \sigma_2 w_2^2 + 2\sigma_{12} w_1 w_2)\right)$$

$$\text{δεδομένου } w_1 + w_2 = 1$$

$$w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0$$

για κάποιο δοσμένο $\lambda > 0$. Για να επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό μπορούμε να θέσουμε $w_2 = t$ και άρα $w_1 = 1 - t$. Οπότε το αρχικό μας πρόβλημα ανάγεται στο

$$\max_{t\in[0,1]} (m_1(1-t) + m_2 t - \lambda(\sigma_1(1-t)^2 + \sigma_2 t^2 + 2\sigma_{12}(1-t)t))$$

Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο του οποίου έχουμε υπολογίσει την μέση τιμή και την διακύμανση της απόδοσης. Τα στοιχεία αυτά αναφέρονται σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, π.χ. ανά ημέρα, ανά μήνα κ.τ.λ.
Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι: σε μια ημέρα, ποια είναι η μέγιστη ζημιά (σε Ευρώ) με πιθανότητα a;

Αν συμβολίσουμε με V_0 την σημερινή αξία του χαρτοφυλακίου και με V_t την αυριανή τότε το παραπάνω ερώτημα μετατρέπεται σε μαθηματικό πρόβλημα ως εξής: ποιο είναι το $x > 0$ (ποσό σε Ευρώ) έτσι ώστε

$$P(V_t - V_0 \leq -x) = 1 - a$$

Χρησιμοποιώντας την απόδοση του χαρτοφυλακίου, η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = 1 - a$$

όπου $\mu_t = \frac{V_t - V_0}{V_0}$ είναι η ημερήσια απόδοση του χαρτοφυλακίου.

Γνωρίζουμε την μέση τιμή m_0 και την διακύμανση σ^2 της απόδοσης και υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή m_0 και διακύμανση σ^2. Με την υπόθεση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε το κατάλληλο $x > 0$ το οποίο συνήθως συμβολίζεται με $VaR_a(t)$ όπου t είναι η χρονική περίοδος που μας ενδιαφέρει, π.χ. ανά ημέρα.

Εφόσον η απόδοση ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή m_0 και διακύμανση σ^2 τότε

$$P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{V_0}} e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma^2}} dt \tag{8}$$

Μπορούμε να συσχετίσουμε τα παραπάνω με την συνάρτηση σφάλματος $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ μέσω της σχέσης

$$P(Y \leq x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{x - m_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

όπου η Y ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή m_0 και διακύμανση σ^2.

Θα αποδείξουμε την σχέση αυτή με τον εξής τρόπο

$$\begin{aligned}
P(Y \leq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma^2}} dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} \sigma\sqrt{2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-y^2} dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Ξαναγυρνώντας στην 8 έχουμε

$$g(x) = P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{-\frac{x}{V_0} - m_0}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή της ζημιάς δεδομένου ότι η ζημιά θα ξεπεράσει ένα δεδομένο ποσό $p < 0$. Θα ισχύει

$$\mathbb{E}(V_t - V_0 | \{V_t - V_0 < p\}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi V^2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{p} x e^{-\frac{(x - m_0 V)^2}{2V^2\sigma^2}}\, dx}{\frac{1}{\sqrt{2\pi V^2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{p} e^{-\frac{(x - m_0 V)^2}{2V^2\sigma^2}}\, dx}$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί είναι μέρος της λεγόμενης **μέτρησης κινδύνου** που αφορά ένα χαρτοφυλάκιο. Προφανώς ο τρόπος μέτρησης είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με την επιλογή του μέτρου πιθανότητας καθώς και με τις υποθέσεις που αφορούν τις κατανομές των τυχαίων μεταβλητών ως εκ τούτου είναι υποκειμενικός.

Από την άλλη πλευρά, η τεχνική κατασκευής ενός χαρτοφυλακίου το οποίο αποτελείται και από διάφορα συμβόλαια, είναι μέρος της λεγόμενης **διαχείρισης κινδύνου** που αφορά ένα χαρτοφυλάκιο. Η διαχείριση αυτή όμως έχει ένα αντικειμενικό αποτέλεσμα διότι δεν εξαρτάται από την επιλογή ενός μέτρου πιθανότητας.

Στη θεωρία που αναφέραμε προηγούμενα δεν λαμβάνουμε υπόψη ότι ο επενδυτής μπορεί να αγοράσει κάποια συμβόλαια αγοράς και πώλησης. Έτσι, το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τη πιθανότητα χρεοκοπίας και μάλιστα με βάση την πρόβλεψη που ο ίδιος έχει κάνει ή με διαφορετικά λόγια ως προς το μέτρο πιθανότητας που έχει επιλέξει.
Αυτό σημαίνει ότι για το ίδιο χαρτοφυλάκιο διαφορετικοί επενδυτές θα καταλήξουν σε διαφορετική πιθανότητα χρεοκοπίας λόγω της διαφορετικής πρόβλεψης (επιλογής μέτρου πιθανότητας) που θα κάνουν!
Με άλλα λόγια, αν κατασκευάσω ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο περιέχει n μετοχές τότε διαφορετικοί οικονομικοί αναλυτές θα μου δώσουν και διαφορετική πιθανότητα χρεοκοπίας και μάλιστα αυτές οι πιθανότητες θα κινούνται σε όλο το $(0,1)$.

Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο με την παραπάνω θεωρία. Μετά από ένα χρονικό διάστημα λαμβάνοντας υπόψη τα νέα δεδομένα το χαρτοφυλάκιο που θα κατασκευάζαμε θα είχε διαφορετική σύσταση (λίγο ή πολύ διαφορετική). Προφανώς οι μέσες τιμές των αποδόσεων καθώς και οι συνδιακυμάνσεις εξαρτώνται από τα δεδομένα τα οποία χρησιμοποιούμε επομένως σε διαφορετική χρονική στιγμή θα είναι διαφορετικά. Αν ΄δεν αλλάζουν τότε θα πρόκειται για παγκόσμιες σταθερές! Αυτό σημαίνει ότι η θεωρία του Markowitz (και όλες οι παρόμοιες) θα πρέπει να εφαρμόζονται για μικρά χρονικά διαστήματα έτσι ώστε και οι αντίστοιχες ποσότητες να μην αλλάζουν πολύ.

Αν κάποιος θέλει να επενδύσει για μικρό χρονικό ορίζοντα θα λάβει υπόψη του παρελθοντικά δεδομένα αλλά και πρόσφατα γεγονότα και πως αυτά πρόκειται να επηρεάσουν την αξία της μετοχής. Σε αυτό το σημείο η μηχανική μάθηση ίσως είναι το σημαντικότερο εργαλείο.
Αν κάποιος θέλει να επενδύσει μακροπρόθεσμα θα πρέπει να μετρήσει την ευρωστία των αντίστοιχων επιχειρήσεων, την ποιότητα του προϊόντος, τους ανταγωνιστές κ.τ.λ. Οι δείκτες αυτοί θα δώσουν μια εικόνα για το μέλλον της κάθε επιχείρησης χωρίς να σημαίνει ότι δεν θα υπάρχουν σκαμπανεβάσματα στην τιμή της μετοχής.

Τα παραπάνω σχόλια μας προτρέπουν ουσιαστικά να εφοδιάζουμε τα χαρτοφυλάκια μας με κατάλληλα συμβόλαια αγοράς και πώλησης. Αυτό θα οδηγήσει σε ένα πιο περίπλοκο μαθηματικό πρόβλημα αλλά τα αποτελέσματα θα είναι και αποδοτικότερα (από οικονομικής άποψης) αλλά και ασφαλέστερα.

Αν λοιπόν θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο να αποτελείται από n μετοχές τότε θα πρέπει να αποφασίσουμε σε ποιο σενάριο θέλουμε να είναι κερδοφόρο. Για παράδειγμα μπορεί να θέλουμε να έχουμε το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος στη περίπτωση που

$$(S_1^T, S_2^T, \cdots, S_n^T) \in G \subseteq \mathbb{R}_+^n$$

Αυτό σημαίνει ότι θα χρειαστεί να κάνουμε μια πρόβλεψη για το που θα βρεθούν οι τιμές των μετοχών κατά το χρόνο T. Στη συνέχεια μετατρέπουμε το παραπάνω πρόβλημα κατασκευής χαρτοφυλακίου σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης η λύση του οποίου θα προτείνει το κατάλληλο χαρτοφυλάκιο το οποίο θα έχει το μέγιστο κέρδος στο συγκεκριμένο σενάριο.

Σημειώστε ότι όσο μικρότερο είναι το σύνολο G τόσο μεγαλύτερο θα είναι και το κέρδος του επενδυτή στην περίπτωση που όντως πραγματοποιηθεί αυτό το σενάριο. Αν απαιτήσει κάποιος το $G = \mathbb{R}^n_+$ τότε μπορεί το προτεινόμενο χαρτοφυλάκιο να έχει κέρδος (δηλαδή να υπάρχει arbitrage) αλλά το κέρδος αυτό θα είναι πολύ μικρό και ίσως μικρότερο από τα αντίστοιχα κόστη συναλλαγής.

Μια διαφορετικού τύπου πρόβλεψη είναι μέσω της κατανομής που ακολουθεί το διάνυσμα των τυχαίων μεταβλητών $(S_1^T, S_2^T, \cdots, S_n^T)$. Με βάση την κατανομή αυτή θα κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο όπου θα μεγιστοποιείται μια ποσότητα η οποία θα περιέχει για παράδειγμα τη μέση τιμή του κέρδους, τη διακύμανση κ.τ.λ.

Έτσι ο επενδυτής μπορεί να επιλύσει το παρακάτω πρόβλημα βελτιστοποίησης.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \operatorname{Var}(\Pi(S_1^T, S_2^T, \cdots, S_d^T)) \\
\text{δεδομένου ότι} \quad & \mathbb{E}(\Pi(S_1^T, S_2^T, \cdots, S_d^T)) \geq m_0 \\
& \sum_{i=1}^{d} a_i S_i^0 + \sum \gamma_j C_j = V \\
& \Pi(x_1, \cdots, x_d) \geq -D \text{ για κάθε } (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d
\end{aligned}
\tag{9}
$$

όπου C_j είναι όλα τα διαθέσιμα συμβόλαια προαίρεσης που αφορούν τις d μετοχές. Το χαρτοφυλάκιο αυτό θα έχει, εν γένει, μικρότερη διακύμανση και μεγαλύτερη μέση τιμή από ότι αν δεν λάβουμε υπόψη τα διαθέσιμα συμβόλαια προαίρεσης και επιπλέον θα είναι βέβαιο ότι η ζημιά δεν πρόκειται να υπερβεί το ποσό D.

Η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με ένα πεπερασμένο σύνολο γραμμικών ανισοτήτων ακριβώς όπως και στην περίπτωση της μιας μετοχής. Θα πρέπει να ληφθούν υπόψη όλοι οι κόμβοι στους οποίους αλλάζει συμπεριφορά η συνάρτηση Π καθώς και οι μερικές παράγωγοι προς όλες τις κατευθύνσεις να είναι θετικές.

Αρα η μέτρηση κινδύνου μπορεί να είναι εντελώς άχρηστη, ειδικά σε μια περίπτωση όπου τα διαθέσιμα συμβόλαια είναι πολλά. Αν δεν υπάρχουν διαθέσιμα συμβόλαια προς πώληση τότε το παραπάνω πρόβλημα καταλήγει σε αυτό της θεωρίας του Markowitz.

Σε όλα τα παραπάνω θα πρέπει να λάβει κάποιος υπόψη του τα κόστη συναλλαγής, το bid - ask spread, τα μερίσματα κ.α.

Καταλήγοντας, η μεθοδολογία της θεωρίας Markowitz κατασκευάζει χαρτοφυλάκια τα οποία είναι κερδοφόρα σε πολύ συγκεκριμένα σενάρια. Θα είναι κερδοφόρο όταν η αξία της μετοχής ανέβει αν την έχει αγοράσει ή όταν κατέβει αν την έχει πουλήσει. Αλλά αν ανέβει θα ήταν πιο κερδοφόρο να είχε αγοράσει μερικά συμβόλαια αγοράς. Παρόμοια, αν υποθέτει ότι θα κατέβει θα ήταν καλύτερο να είχε αγοράσει μερικά συμβόλαια πώλησης. Ακόμη χειρότερα, όλα αυτά στηρίζονται στη μελέτη μόνο ιστορικών δεδομένων και όχι σε άλλες πληροφορίες πιο πρόσφατες.

Από την άλλη μεριά, η παραπάνω θεωρία κατασκευής χαρτοφυλακίου είναι σε θέση να κατασκευάζει κερδοφόρα χαρτοφυλάκια σε οποιαδήποτε πρόβλεψη θελήσει να ποντάρει ο επενδυτής. Αυτό συμβαίνει διότι πολύ απλά προσθέτουμε στο χαρτοφυλάκιο, εκτός από τις μετοχές, και όλα τα παράγωγα που μπορεί να αγοράσει ή να πουλήσει. Υπό αυτή την έννοια η προτεινόμενη μεθοδολογία κατασκευής χαρτοφυλακίου είναι γενίκευση αυτής του Markowitz. Ο μόνος λόγος να μην λάβει υπόψη του ο επενδυτής όλα τα χρηματοοικονομικά εργαλεία τα οποία μπορεί να χρησιμοποιήσει στο πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι να μην έχει το κατάλληλο μαθηματικό λογισμικό το οποίο θα κάνει αυτούς τους υπολογισμούς. Πράγματι αυτό συμβαίνει, διότι η βιβλιογραφία σε αυτό το σημείο είναι παρωχημένη και ως εκ τούτου το ίδιο συμβαίνει και με το ελεύθερο λογισμικό που κυκλοφορεί.

Παράδειγμα χρήσης των συμβολαίων πώλησης I

Έστω ότι θέλουμε να επενδύσουμε το ποσό των 1.000 Ευρώ στις μετοχές των Coca-Cola, Amazon, Tesla και έστω ότι με την θεωρία του Markowitz καταλήξαμε στο ότι πρέπει να επενδύσουμε 300 στην Amazon, 200 στην Coca - Cola και 500 στην Tesla. Στη συνέχεια όπως περιγράψαμε παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να χάσουμε περισσότερα από 600 Ευρώ για παράδειγμα στο τέλος μιας περιόδου.

Παράδειγμα χρήσης των συμβολαίων πώλησης II

Πριν κάνουμε αυτό τον υπολογισμό ας δούμε τι μπορούμε να κάνουμε αγοράζοντας κάποια put options. Βλέπουμε ότι

$$P^{Tesla}(75) = 0.01, P^{Amazon}(100) = 0.01, P^{Coca-Cola}(56) = 0.01$$

ενώ οι σημερινές αξίες των μετοχών είναι $S_0^{Tesla} = 318, S_0^{Amazon} = 202, S_0^{Coca-Cola} = 62$. Μπορούμε λοιπόν να αγοράσουμε από 100 put options από την κάθε εταιρεία και άρα να τοποθετήσουμε ένα Ευρώ λιγότερο στις αντίστοιχες μετοχές.

Παράδειγμα χρήσης των συμβολαίων πώλησης III

Η συνάρτηση κέρδους εδώ θα είναι η παρακάτω

$$
\begin{aligned}
&\Pi(x, y, z) \\
&= \frac{499}{318}x + \frac{199}{62}y + \frac{299}{202}z \\
&+100(75 - x)^+ + 100(56 - y)^+ + 100(100 - z)^+ - 1.000
\end{aligned}
$$

Στο χρόνο T θα αντικαταστήσουμε όπου x την τιμή της Tesla, όπου y την τιμή της Coca-Cola και όπου z την τιμή της Amazon. Υπολογίζοντας το ελάχιστο της συνάρτησης κέρδους θα βρούμε την μέγιστη πιθανή ζημιά.

Παράδειγμα χρήσης των συμβολαίων πώλησης IV

Διαπιστώνουμε ότι δεν πρόκειται να χάσουμε περισσότερα από 555 περίπου στο χειρότερο σενάριο ενώ το κέρδος μας θα είναι λίγο λιγότερο από το αν δεν είχαμε αγοράσει put options και είχαμε τοποθετήσει το ποσό αυτό σε μετοχές. Αν όμως οι τιμές των μετοχών πέσουν κοντά στο μηδέν τότε το κέρδος μας θα είναι $\Pi(0,0,0) = 100 * 75 + 100 * 56 + 100 * 100 - 1.000 = 22.100$ Ευρώ!

Παράδειγμα χρήσης των συμβολαίων πώλησης V

Παρατηρήστε όμως ότι το κέρδος στην περίπτωση που οι τιμές των μετοχών αυτών πέσουν κοντά στο μηδέν το κέρδος είναι πολύ μεγάλο. Αγοράζοντας λιγότερα συμβόλαια πώλησης θα μειωθεί το κέρδος στην περίπτωση πτώσης.
Το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε αν αγοράζαμε $\frac{500}{318}$ συμβόλαια πώλησης για την Tesla, $\frac{200}{62}$ συμβόλαια πώλησης για την Coca - Cola και $\frac{300}{202}$ συμβόλαια πώλησης για την Amazon. Συνολικά το κόστος των συμβολαίων αυτών δεν ξεπερνά τα 10 λεπτά του Ευρώ! Η διαφορά με το να αγοράσουμε περισσότερα συμβόλαια είναι ότι θα έχουμε περισσότερο κέρδος στην περίπτωση πτώσης των μετοχών.

Παράδειγμα χρήσης των συμβολαίων πώλησης VI

Τελικά για να βρεθεί η βέλτιστη κατασκευή θα πρέπει ο επενδυτής να αποφασίσει σε ποιο σενάριο θέλει να έχει κέρδος και ποια είναι η μεγαλύτερη αποδεκτή ζημιά. Όπως έχουμε δει το πρόβλημα αυτό μετατρέπεται σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού προκειμένου να βρεθεί η καταλληλότερη στρατηγική επένδυσης για να επιτευχθεί ο ζητούμενος στόχος.

Αντιστάθμιση και Αντασφάλιση

Εφοδιάζοντας το χαρτοφυλάκιο μας με κατάλληλα συμβόλαια αγοράς και πώλησης, εκτός των άλλων, μεταφέρουμε μέρος του ρίσκου σε άλλους επενδυτές.
Στα αναλογιστικά - ασφαλιστικά μαθηματικά η μεταφορά ρίσκου γίνεται μέσω της αντασφάλισης. Ακριβώς όπως στη θεωρία του Markowitz δεν έχει **πρακτικό** νόημα να υπολογίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίς πρώτα να έχουμε επιλέξει την κατάλληλη στρατηγική αντιστάθμισης με συμβόλαια αγοράς και πώλησης έτσι και στον αναλογισμό δεν έχει **πρακτικό** νόημα να υπολογίζουμε παρόμοιες πιθανό-θεωρητικές ποσότητες αν πρώτα δεν έχουμε επιλέξει την κατάλληλη στρατηγική αντασφάλισης.

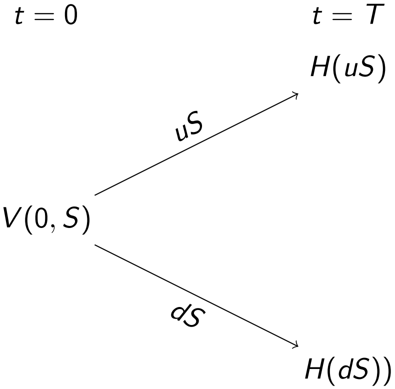
Διωνυμικό Μοντέλο ως μέθοδος αποτίμησης Ι

Σκοπός του διωνυμικού μοντέλου είναι να υπολογίσουμε μια δίκαιη τιμή πώλησης ενός συμβολαίου. Αν η σημερινή τιμή της μετοχής είναι S_0 ενώ οι πιθανές τιμές της μετοχής στο χρόνο T είναι είτε dS_0 είτε uS_0 για συγκεκριμένα d, u γνωστά στο χρόνο μηδέν τότε μπορούμε να ορίσουμε την δίκαιη τιμή πώλησης ενός συμβολαίου.

Η δίκαιη τιμή ορίζεται ως το ποσό V_0 με το οποίο μπορώ να κατασκευάσω ένα χαρτοφυλάκιο στο χρόνο μηδέν το οποίο θα περιέχει μετοχές και κατάθεση σε τράπεζα έτσι ώστε στο χρόνο T η αξία του χαρτοφυλακίου να είναι ίση με την απολαβή.

Οπότε στο χρόνο μηδέν το χαρτοφυλάκιο θα έχει τη μορφή $V_0 = aS_0 + b$ και θέλουμε τα a, b να είναι τέτοια ώστε $V(dS_0) = H(dS_0)$ και $V(uS_0) = H(uS_0)$ όπου $H(x)$ είναι η συνάρτηση απολαβής, ΄π.χ. $H(x) = (x - K)^+$ για ένα συμβόλαιο αγοράς.

Διωνυμικό Μοντέλο ως μέθοδος αποτίμησης ΙΙΙ



Διωνυμικό Μοντέλο ως μέθοδος αποτίμησης IV

Στο διωνυμικό μοντέλο υποθέτουμε ότι η μετοχή είτε θα ανέβει με ρυθμό u και πιθανότητα p είτε θα κατέβει με ρυθμό d και πιθανότητα $1-p$. Η αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή 0 είναι $V_0 = aS + b$ όπου a είναι το πλήθος των μετοχών και b το ποσό σε χωρίς ρίσκο επένδυση. Αν την χρονική στιγμή οι απολαβές πρέπει να είναι $H(dS)$ και $H(uS)$ τότε

$$a = \frac{H(uS) - H(dS)}{(u-d)S} \quad \text{και} \quad b = \frac{H(dS)u - H(uS)d}{u-d}$$

θεωρώντας για ευκολία μηδενικό επιτόκιο στη χωρίς ρίσκο επένδυση.

Διωνυμικό Μοντέλο ως μέθοδος αποτίμησης V

Μπορεί να γενικευθεί και για n περιόδους.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
t = k\delta & t = k\delta + \delta \\
 & V(t+\delta, uS) \\
V(t,S) \arrow[ur, "uS"] \arrow[dr, "dS"'] & \\
 & V(t+\delta, dS)
\end{tikzcd}
$$

Διωνυμικό Μοντέλο ως μέθοδος αποτίμησης VI

Αν οι αξίες του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή $t = k\delta + \delta$ πρέπει να ίσες με $V(t+\delta, uS)$ και $V(t+\delta, dS)$ τότε η ελάχιστη τιμή του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή $t = k\delta$ είναι ίση με $V(t, S) = e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta, uS) + (1-q)V(t+\delta, dS)\Big)$ όπου $q = \frac{e^{r\delta}-d}{u-d}$ όταν $d \leq e^{r\delta} \leq u$. Σημειώστε ότι $V(t, S) = aS + b$ όπου a είναι το πλήθος των μετοχών την χρονική στιγμή t και b το ποσό την χρονική στιγμή t σε επένδυση χωρίς ρίσκο με επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού r. Στο διωνυμικό μοντέλο υποθέτουμε ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει με πιθανότητα p και θα κατέβει με πιθανότητα $1-p$.

Ξεκινώντας αναδρομικά και προς τα πίσω μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου καθώς βέβαια και την στρατηγική επένδυσης (a, b). Η κατασκευή αυτή είναι πρακτικά εφικτή αλλά έχει ένα σημαντικό μειονέκτημα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στο διωνυμικό μοντέλο υποθέτει κάποιος ότι η επόμενη τιμή της μετοχής θα είναι είτε uS είτε dS αν σήμερα είναι ίση με S. Η πρόβλεψη αυτή όμως δεν πρόκειται ποτέ να επαληθευτεί επομένως η τελική αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου δεν θα είναι ίση με την απολαβή σχεδόν σίγουρα! Μάλιστα τα πράγματα χειροτερεύουν καθώς προσθέτουμε περισσότερες περιόδους στο διωνυμικό μοντέλο, δείτε θεώρημα 4.9 του [4]. Τα προβλήματα αυτά προέρχονται ουσιαστικά από την υπόθεση του ότι η μετοχή θα πάρει δυο τιμές στην επόμενη περίοδο.

Επομένως γεννάται το εξής ερώτημα:

Ερωτημα

Αν ανέβει η μετοχή αλλά με ρυθμό $u^* \neq u$ τι ακριβώς σημαίνει για την αξία του χαρτοφυλακίου και της απολαβής; Παρόμοια, αν κατέβει αλλά με ρυθμό $d^* \neq d$.

Στα δικαιώματα αγοράς και πώλησης μπορεί να αποδειχθεί ότι αν η μετοχή ανέβει με ρυθμό $u^* < u$ ή $d^* > d$ τότε η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι μεγαλύτερη της απολαβής, άρα ο πωλητής θα έχει κέρδος. Αν ανέβει με $u^* > u$ ή $d^* < d$ τότε θα έχει ζημιά. Δηλαδή σε αυτά τα δυο συμβόλαια το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο έχει μια σημαντική ιδιότητα την οποία ονομάζουμε ιδιότητα κέρδους. Με την ιδιότητα αυτή ο πωλητής γνωρίζει σε ποιες περιπτώσεις θα έχει κέρδος και σε ποιες ζημιά άρα θα επιλέξει κατάλληλα τα u, d για να εφαρμόσει το διωνυμικό μοντέλο.

Το διωνυμικό μοντέλο ως στρατηγική αντιστάθμισης II

Λημμα (Λήμμα 2.1 της εργασίας 4)

Ας υποθέσουμε ότι ο πωλητής έχει εφαρμόσει το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου για να αποτιμήσει ένα συμβόλαιο αγοράς ή πώλησης με τιμή εξάσκησης K. Τότε θα επιλέξει τους ρυθμούς d, u έτσι ώστε $uS_0 > K$ και $dS_0 < K$.

Για το συμβόλαιο αγοράς ο πωλητής θα προτιμήσει ένα d τέτοιο ώστε $dS_0 < K$ (και ασφαλώς $uS_0 > K$). Πράγματι, αν $dS_0 > K$ τότε είναι εύκολο να δούμε ότι $a = 1$ και $be^{rT} = -K$. Επομένως το κέρδος Π θα είναι ως εξής

$$\begin{aligned} \Pi &= aS_T + be^{rT} - (S_T - K)^+ \\ &= S_T - K - (S_T - K)^+ \end{aligned}$$

Αν $S_T > K$ τότε $\Pi = 0$ ενώ αν $S_T \leq K$ τότε $\Pi \leq 0$, δηλαδή ο πωλητής δεν πρόκειται να κερδίσει σε καμία περίπτωση.

Το διωνυμικό μοντέλο ως στρατηγική αντιστάθμισης IV

Παρόμοια, για το συμβόλαιο πώλησης θα επιλέξει το u έτσι ώστε $uS_0 > K$ (και ασφαλώς $dS_0 < K$). Πράγματι, αν $uS_0 < K$ τότε $a = -1$ και $be^{rT} = K$ επομένως το κέρδος θα είναι όπως παρακάτω

$$\begin{aligned}\Pi &= aS_T + be^{rT} - (K - S_T)^+ \\ &= K - S_T - (K - S_T)^+\end{aligned}$$

Αν $S_T < K$ τότε $\Pi = 0$ ενώ αν $S_T \geq K$ τότε $\Pi \leq 0$, δηλαδή ο πωλητής δεν πρόκειται να κερδίσει σε καμία περίπτωση.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεώρημα 2.2 της εργασίας 4)

Έστω ότι ο πωλητής έχει εφαρμόσει το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου για να αποτιμήσει ένα συμβόλαιο αγοράς ή πώλησης με τιμή εξάσκησης K και ρυθμούς d, u. Τότε θα έχει κέρδος αν $\frac{S_T}{S_0} \in (d, u)$ ενώ θα έχει ζημιά αν $\frac{S_T}{S_0} \notin (d, u)$. Το πιθανό κέρδος είναι φραγμένο από την ποσότητα $\frac{(uS_0 - K)(K - dS_0)}{(u-d)S_0}$ ενώ η πιθανή ζημιά είναι απεριόριστη.

Το διωνυμικό μοντέλο ως στρατηγική αντιστάθμισης VI

Αρχίζουμε με το συμβόλαιο αγοράς όπου $a \in (0,1)$ σε αυτή την περίπτωση. Υποθέτουμε ότι $uS_0 > K$ και $dS_0 < K$. Τότε το κέρδος θα είναι ως εξής

$$\Pi = aS_T + be^{rT} - (S_T - K)^+$$

Αν $S_T > K$ τότε έχουμε $\frac{S_T}{S_0} > d$ και

$$\begin{aligned}\Pi &= a\left(\frac{S_T}{S_0} - u\right) S_0 + auS_0 + be^{rT} - (uS_0 - K) - \left(\frac{S_T}{S_0} - u\right) S_0 \\ &= \left(\frac{S_T}{S_0} - u\right) S_0(a-1)\end{aligned}$$

επειδή $auS_0 + be^{rT} - (uS_0 - K) = 0$. Επομένως στην περίπτωση $\frac{S_T}{S_0} \in (d, u)$ ισχύει ότι $\Pi > 0$ ενώ αν $\frac{S_T}{S_0} > u$ ισχύει ότι $\Pi < 0$. Σημειώστε ότι αν $\frac{S_T}{S_0} \to \infty$ τότε $\Pi \to -\infty$.

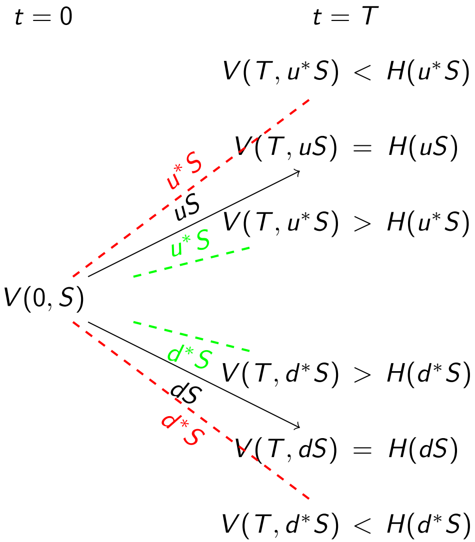
Αν $S_T < K$ τότε έχουμε $\frac{S_T}{S_0} < u$ και

$$\begin{aligned}\Pi &= a\left(\frac{S_T}{S_0} - d\right) S_0 + adS_0 + be^{rT} \\ &= a\left(\frac{S_T}{S_0} - d\right) S_0\end{aligned}$$

αφού $adS_0 + be^{rT} = 0$. Πάλι, αν $\frac{S_T}{S_0} \in (d, u)$ ισχύει ότι $\Pi > 0$ ενώ αν $\frac{S_T}{S_0} < d$ ισχύει ότι $\Pi < 0$.
Το ίδιο ισχύει και για το συμβόλαιο πώλησης αφού $a \in (-1, 0)$ σε αυτή την περίπτωση.

Αν ανέβει με ρυθμό u^* τέτοιο ώστε $u^* \in (d, u)$ ή αν κατέβει με ρυθμό $d^* \in (d, u)$ τότε η τελική αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι μεγαλύτερη από την απολαβή για ένα call ή put συμβόλαιο ενώ διαφορετικά θα είναι μικρότερη.

Το διωνυμικό μοντέλο ως στρατηγική αντιστάθμισης IX



Διαπιστώνουμε ότι το διωνυμικό μοντέλο δεν έχει νόημα να εφαρμοστεί για την αποτίμηση ενός δικαιώματος. Αυτό ισχύει κυρίως διότι η επιλογή των d, u είναι μια προσωπική υπόθεση με την οποία δεν θα συμφωνήσουν οι άλλοι επενδυτές.
Μπορεί να εφαρμοσθεί όμως ως αντισταθμιστική στρατηγική όπου ο πωλητής θα έχει κέρδος αν $S_T \in (dS_0, uS_0)$ και ζημιά διαφορετικά. Το αρνητικό όμως εδώ είναι ότι η πιθανή ζημιά είναι απεριόριστη επομένως θα προτιμήσει την κατασκευή ενός πιο περίπλοκου αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου όπως αυτά που έχουμε ήδη περιγράψει προκειμένου η πιθανή ζημιά να είναι περιορισμένη.

Στο μοντέλο των Black-Scholes οι υποθέσεις πάλι είναι εξωπραγματικές και υποκειμενικές και ακόμη χειρότερα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αντισταθμιστική στρατηγική. Διότι αφενός θα πρέπει να εφαρμοσθεί σε διακριτό χρόνο και όχι σε συνεχή όπως έχει σχεδιασθεί και αφετέρου δεν γνωρίζει κάποιος εκ των προτέρων (σε αντίθεση με το διωνυμικό μοντέλο) σε ποιες περιπτώσεις θα έχει κέρδος, αν έχει.

Είδαμε ότι το διωνυμικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως στρατηγική αντιστάθμισης. Το μειονέκτημα είναι ότι η πιθανή ζημιά είναι απεριόριστη.

Θα περιγράψουμε έναν απλό τρόπο αντιστάθμισης στον οποίο όχι μόνο η ζημιά θα είναι περιορισμένη αλλά και το κέρδος θα είναι απεριόριστο.

Έστω ότι πουλήσαμε ένα συμβόλαιο αγοράς στην τιμή $C(K)$. Τότε μπορώ να αγοράσω ένα άλλο συμβόλαιο αγοράς στη τιμή $C(K^{'}) < C(K)$ όπου $K^{'} > K$. Επομένως θα περισσέψει το ποσό $Y = C(K) - C(K^{'})$. Με το ποσό αυτό αγοράζω $\frac{Y}{S_0}$ πλήθος μετοχών.

Μια απλή στρατηγική αντιστάθμισης ενός call option II

Έτσι, η συνάρτηση κέρδους θα είναι

$$\Pi(x) = \frac{Y}{S_0}x + (x - K^{'})^{+} - (x - K)^{+}$$

Κατά τα γνωστά, στο χρόνο T που λήγουν τα συμβόλαια, θα αντικαταστήσουμε στη θέση του x την τιμή της μετοχής S_T οπότε θα υπολογίσουμε το κέρδος.

Μια απλή στρατηγική αντιστάθμισης ενός call option III

• Αν $S_T < K < K^{'}$ τότε $\Pi(S_T) = \frac{Y}{S_0} S_T > 0$, δηλαδή έχουμε κέρδος.

• Αν $K < S_T < K^{'}$ τότε $\Pi(S_T) = \frac{Y}{S_0} S_T - S_T + K = S_T(\frac{Y}{S_0} - 1) + K$. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι $\Pi(S_T) \geq K^{'}(\frac{Y}{S_0} - 1) + K$ αν $\frac{Y}{S_0} - 1 < 0$, δηλαδή η ζημιά είναι περιορισμένη.

• Αν $S_T > K^{'}$ τότε $\Pi(S_T) = \frac{Y}{S_0} S_T + K - K^{'} \geq \frac{Y}{S_0} K^{'} + K - K^{'}$ δηλαδή πάλι η ζημιά είναι περιορισμένη. Σημειώστε όμως ότι $\Pi(S_T) \to +\infty$ καθώς $S_T \to +\infty$ επομένως το κέρδος τώρα είναι απεριόριστο.

Μια απλή στρατηγική αντιστάθμισης ενός call option IV

Είδαμε λοιπόν ότι προσθέτοντας την δυνατότητα να αγοράσουμε ένα άλλο συμβόλαιο αγοράς όχι μόνο πετύχαμε να περιορίσουμε την πιθανή ζημιά αλλά επίσης πετύχαμε το κέρδος να είναι απεριόριστο. Σε αντίθεση με το διωνυμικό μοντέλο στο οποίο η ζημιά είναι απεριόριστη και το κέρδος περιορισμένο.
Με το παραπάνω παράδειγμα είναι εύκολα κατανοητό για ποιο λόγο κάποιος θέλει να δημιουργήσει (να γράψει όπως λέμε) και στη συνέχεια να πουλήσει ένα συμβόλαιο αγοράς. Με το ποσό αυτό θα κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο, πιο περίπλοκο, το οποίο θα είναι κερδοφόρο σε κάποιο σενάριο το οποίο ο ίδιος πιστεύει.
Τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας όλα τα συμβόλαια αγοράς και πώλησης και επιλύοντας ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης να υπολογίσουμε την βέλτιστη κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου.

Μια απλή στρατηγική αντιστάθμισης ενός call option V

Τι γίνεται στην περίπτωση στην οποία έχουμε πουλήσει ένα συμβόλαιο αγοράς αλλά δεν υπάρχει άλλο συμβόλαιο αγοράς για να εξασφαλιστούμε;
Σε μια τέτοια περίπτωση μπορούμε να δανειστούμε το κατάλληλο ποσό και να αγοράσουμε μια μετοχή. Έτσι, η μέγιστη πιθανή ζημιά θα είναι το ποσό που έχουμε δανεισθεί. Αν μάλιστα αγοράσουμε περισσότερες από μια μετοχές τότε και το πιθανό κέρδος μας θα είναι απεριόριστο.
Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν συμβόλαια αγοράς και επιπλέον μας είναι αδύνατο να αγοράσουμε μια μετοχή τότε θα πρέπει να εξετάσουμε την πιθανότητα να αγοράσουμε μια άλλη μετοχή που όμως έχει την ίδια συμπεριφορά. Αν ούτε αυτό γίνεται τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας προτού πουλήσουμε ένα τέτοιο συμβόλαιο αν και αυτός ο υπολογισμός δεν μας εξασφαλίζει τίποτε.

Διάστημα τιμών χωρίς Arbitrage I

Ας υποθέσουμε ότι πρόκειται να πουλήσετε ή να αγοράσετε ένα συμβόλαιο με συνάρτηση απολαβής $f(x)$. Για παράδειγμα ένα συμβόλαιο αγοράς έχει συνάρτηση απολαβής $f(x) = (x - K)^+$ ενώ ένα συμβόλαιο πώλησης έχει συνάρτηση απολαβής $f(x) = (K - x)^+$. Υπάρχουν και άλλα συμβόλαια εκτός από αυτά τα δυο και διαφέρουν κυρίως στην συνάρτηση απολαβής. Διαφέρουν βεβαίως και στο τρόπο εξάσκησης: αν επιτρέπεται να ασκήσεις το δικαίωμα μόνο στο χρόνο T (χρόνος λήξης) τότε ονομάζεται Ευρωπαϊκό δικαίωμα. Αν επιτρέπεται να ασκήσεις το δικαίωμα σε κάθε χρονική στιγμή μέχρι το χρόνο λήξης ονομάζεται Αμερικανικό δικαίωμα ενώ αν επιτρέπεται να ασκήσεις το δικαίωμα μόνο σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές τότε ονομάζεται Bermudan.

Διάστημα τιμών χωρίς Arbitrage II

Προφανώς η τιμή πώλησης ενός συμβολαίου καθορίζεται από το νόμο της προσφοράς και της ζήτησης. Παρόλα αυτά καθοριστικό ρόλο θα διαδραματίσει και η παρουσία ευκαιρίας σίγουρου κέρδους. Στο θεώρημα 7.3 του βιβλίου Mathematics for Finance θα βρείτε τα όρια στα οποία πρέπει να κινούνται οι τιμές των συμβολαίων αγοράς και πώλησης προκειμένου να μην δημιουργείται ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Αν η τιμή ενός συμβολαίου είναι έξω από αυτό το διάστημα τότε δημιουργείται ευκαιρία σίγουρου κέρδους την οποία θα εκμεταλλευτούν οι επενδυτές με συνέπεια να αλλάξουν οι αντίστοιχες τιμές και επομένως να εξαφανιστεί η ευκαιρία αυτή.

Διάστημα τιμών χωρίς Arbitrage III

Για τον υπολογισμό του διαστήματος απουσίας ευκαιρίας σίγουρου κέρδους που αναφέρεται στο θεώρημα 7.3 του αντίστοιχου βιβλίου δεν λαμβάνεται υπόψη το γεγονός ότι υπάρχουν πολλά συμβόλαια αγοράς και πώλησης. Έτσι, στην πραγματικότητα για να υπολογίσει κανείς αυτό το διάστημα θα πρέπει να λάβει υπόψη του τουλάχιστον όλα τα συμβόλαια αγοράς και πώλησης και να λύσει τα παρακάτω προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού.

Διάστημα τιμών χωρίς Arbitrage IV

$$\begin{aligned} & \min Y \\ \text{δεδομένου ότι} \quad & aS_0 + b + \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = Y \qquad (10) \\ & \Pi^{writer}(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max Y \\ \text{δεδομένου ότι} \quad & aS_0 + b + \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = -Y \qquad (11) \\ & \Pi^{buyer}(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \geq 0 \end{aligned}$$

όπου

$$\Pi^{writer}(x) = ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (x - K_i)^+ + \delta_i (K_i - x)^+ - f(x)$$

$$\Pi^{buyer}(x) = ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i (x - K_i)^+ + \delta_i (K_i - x)^+ + f(x)$$

Διάστημα τιμών χωρίς Arbitrage VI

Λύνοντας το πρώτο από αυτά θα υπολογίσει κανείς το μικρότερο ποσό που χρειάζεται ο πωλητής ενός συμβολαίου για να δημιουργήσει χαρτοφυλάκιο με μηδενική πιθανή ζημιά σε όλα τα σενάρια. Παρόμοια λύνοντας το δεύτερο πρόβλημα θα βρεθεί το μεγαλύτερο ποσό που μπορεί με αυτό να αγοράσει ο αγοραστής το συμβόλαιο αλλά κατασκευάζοντας όμως χαρτοφυλάκιο με μηδενική επίσης ζημιά.

Έστω ότι η λύση του πρώτου προβλήματος είναι η Y^{writer} ενώ του δεύτερου είναι η Y^{buyer}. Τότε το διάστημα των τιμών χωρίς arbitrage είναι το (Y^{buyer}, Y^{writer}) αρκεί βέβαια $Y^{buyer} < Y^{writer}$. Επομένως, αργά ή γρήγορα η αξία του συμβολαίου θα βρεθεί μέσα στο παραπάνω διάστημα. Αν σκέφτεστε λοιπόν να πουλήσετε ή να αγοράσετε ένα συμβόλαιο τότε μια λογική τιμή θα βρίσκεται σε αυτό το διάστημα και άρα ο υπολογισμός του μας δίνει μια τάξη μεγέθους της αξίας αυτού του συμβολαίου.

Διάστημα τιμών χωρίς Arbitrage VII

Έστω ότι $Y^{buyer} < Y^{writer}$. Αν το συμβόλαιο πουληθεί σε μια τιμή $Y^* \in (Y^{buyer}, Y^{writer})$ τότε ο πωλητής δανειζόμενος το ποσό $Y^{writer} - Y^*$ μπορεί αν θέλει να κατασκευάσει το χαρτοφυλάκιο που αντιστοιχεί στο ποσό Y^{writer} και επομένως η μέγιστη πιθανή ζημιά θα είναι το ποσό που δανείσθηκε. Παρομοίως και ο αγοραστής. Σημειώστε ότι τα χαρτοφυλάκια αυτά είναι πραγματοποιήσιμα στην πράξη.

Οποιαδήποτε τιμή πώλησης εκτός του διαστήματος αυτού δημιουργεί ευκαιρία σίγουρου κέρδους είτε για τον πωλητή είτε για τον αγοραστή επομένως **δεν είναι δίκαιη** για το μέρος που δεν μπορεί να εκμεταλλευτεί την ευκαιρία σίγουρου κέρδους.

Γενικά, η βιβλιογραφία για το πρόβλημα υπολογισμού μιας και μοναδικής τιμής πώλησης ενός συμβολαίου είναι μεγάλη αλλά και αμφισβητούμενη.
Υπάρχουν δυο βασικοί λόγοι για αυτό. Ο πρώτος λόγος είναι ότι οι αντίστοιχες εργασίες κάνουν μια υπόθεση για την μελλοντική συμπεριφορά της μετοχής η οποία βέβαια δεν είναι κοινά αποδεκτή, δηλαδή ο πωλητής και ο αγοραστής δεν θα κάνουν την ίδια υπόθεση. Ο δεύτερος λόγος είναι ότι τα αντίστοιχα αντισταθμιστικά χαρτοφυλάκια που προτείνουν δεν είναι πραγματοποιήσιμα στην πράξη επομένως ο επενδυτής θα στραφεί σε άλλες θεωρίες οι οποίες του προτείνουν πραγματοποιήσιμα χαρτοφυλάκια.

Παρόλα αυτά έχει ενδιαφέρον από μαθηματικής άποψης να μελετήσει κάποιος τις δυο βασικές θεωρίες αποτίμησης (Black Scholes and binomial).

Διάστημα τιμών χωρίς Arbitrage X

Μελετώντας κάποιος αυτές τις θεωρίες θα καταλήξει σε κάποια συμπεράσματα. Αν θέλουμε να αποτιμήσουμε ένα συμβόλαιο με τμηματικά γραμμική συνάρτηση απολαβής $f(x)$ η οποία δεν αναφέρεται ούτε σε συμβόλαιο αγοράς ούτε σε πώλησης θα διαπιστώσουμε ότι πρέπει να επιλεγούν οι παράμετροι με έναν τεχνητό και όχι φυσιολογικό τρόπο έτσι ώστε η τιμή να βρεθεί στο διάστημα των arbitrage free τιμών. Δηλαδή θα πρέπει πρώτα να υπολογίσει κάποιος το διάστημα των arbitrage free τιμών και στη συνέχεια να υπολογίσει το σύνολο των παραμέτρων που δίνουν τιμές μέσα σε αυτό το διάστημα. Επομένως δεν θα καταλήξει σε μια και μοναδική τιμή αλλά σε σύνολο τιμών το οποίο θα είναι ακριβώς το παραπάνω διάστημα.

Ακόμη και τότε όμως το προτεινόμενο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο δεν είναι πρακτικά εφαρμόσιμο και ως εκ τούτου ο επενδυτής θα επιλέξει άλλες τεχνικές αντιστάθμισης, όπως αυτές που έχουμε αναφέρει.
Εν τέλει, η εφαρμογή των δυο αυτών θεωριών αλλά και των επεκτάσεων τους θα παραμείνει μόνο στη θεωρία, όσον αφορά τουλάχιστον τους επενδυτές.

Στην περίπτωση της αποτίμησης ενός συμβολαίου Αμερικανικού τύπου, τόσο ο αγοραστής όσο και ο πωλητής μπορούν να εφοδιάσουν με Αμερικανικού τύπου συμβόλαια τα αντισταθμιστικά τους χαρτοφυλάκια. Σε αυτή την περίπτωση όμως θα πρέπει να λάβουν υπόψη τους το γεγονός ότι οι ίδιοι μπορούν να εξασκήσουν το δικαίωμα ανά πάσα στιγμή σε όσα συμβόλαια έχουν αγοράσει αλλά δεν μπορούν να εξαναγκάσουν τους αγοραστές των συμβολαίων στους οποίους έχουν πουλήσει να κάνουν το ίδιο στην ίδια χρονική στιγμή. Έτσι λοιπόν τα αντισταθμιστικά χαρτοφυλάκια θα πρέπει αφενός να περιέχουν συμβόλαια Αμερικανικού τύπου αλλά μόνο ως αγοραστές έτσι ώστε να είναι σε θέση να εξασκούν το δικαίωμα τους όποτε θέλουν οι ίδιοι.

Εξωχρηματιστηριακή Αγορά (Over the Counter (OTC)) I

Εκτός από την αγορά του χρηματιστηρίου υπάρχει και η εξωχρηματιστηριακή αγορά στην οποία μπορεί κάποιος να αγοράσει πιο περίπλοκα συμβόλαια από ότι τα γνωστά συμβόλαια αγοράς και πώλησης.
Για παράδειγμα ένας επενδυτής μπορεί να μην είναι σίγουρος αν θέλει ένα συμβόλαιο αγοράς ή ένα πώλησης οπότε μπορεί να αγοράσει ένα συμβόλαιο με απολαβή

$$f(x) = \max\{(x - K_1)^+, (K_2 - x)^+\}$$

δηλαδή θα λάβει το μεγαλύτερο από τα δυο ποσά. Η αξία ενός τέτοιου συμβολαίου θα διαμορφωθεί σύμφωνα με τον νόμο της προσφοράς και της ζήτησης.

Σε ότι έχουμε δει μέχρι τώρα η απολαβή εξαρτάται από την τελική τιμή της μετοχής. Υπάρχουν άλλου είδους συμβόλαια των οποίων η απολαβή εξαρτάται από όλες της τιμές της μετοχής (ή μερικές) κατά τη διάρκεια του $[0, T]$. Για παράδειγμα η συνάρτηση απολαβής μπορεί να έχει τη μορφή

$$f(S_{t_1}, \cdots, S_{t_n}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} S_{t_i}}{n} - K \right)^{+}$$

όπου $t_i \in [0, T]$. Αυτού του τύπου τα συμβόλαια ονομάζονται path dependent.

Εξωχρηματιστηριακή Αγορά (Over the Counter (OTC)) III

Τα συμβόλαια των οποίων η απολαβή εξαρτάται από δυο ή περισσότερες μετοχές ονομάζονται multi-asset options. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ένα συμβόλαιο του οποίου η συνάρτηση απολαβής είναι η επόμενη

$$f(x, y) = \max\{x, y, K\}$$

όπου τη θέση του x θα πάρει η τιμή της μετοχής S_1 στο χρόνο T ενώ τη θέση του y θα πάρει η τιμή της μετοχής S_2 στο χρόνο T. Στην εξωχρηματιστηριακή αγορά μπορεί να βρει κανείς σχεδόν ότι συμβόλαιο θέλει.

Αν κάποιος θέλει να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο να αποτελείται από d το πλήθος μετοχές θα πρέπει να περιέχει όλα τα συμβόλαια αγοράς και πώλησης καθώς και όλα δυνατά multi asset συμβόλαια που αφορούν τις d αυτές μετοχές. Με τον τρόπο αυτό, το πρόβλημα βελτιστοποίησης θα δώσει ένα καλύτερο αποτέλεσμα από ότι αν συμπεριλάβει μόνο τις μετοχές ή μόνο τα συμβόλαια αγοράς και πώλησης. Το μαθηματικό όμως πρόβλημα θα γίνεται ολοένα και πιο περίπλοκο!

Έστω ότι κάποιος θέλει να πουλήσει/αγοράσει ένα multi asset συμβόλαιο. Ποια είναι μια λογική τιμή πώλησης/αγοράς; Προκειμένου να υπολογίσει κάποιος την τάξη μεγέθους της αξίας ενός τέτοιου συμβολαίου αρκεί να υπολογίσει το διάστημα των τιμών που δεν δημιουργούν ευκαιρία σίγουρου κέρδους λύνοντας δυο προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού.

Έχει αποδειχθεί (δείτε εδάφιο 5.2 της εργασίας [3]) ότι δεν υπάρχει μια και μοναδική τιμή πώλησης η οποία να είναι δίκαιη ή κάτι τέτοιο. Η τιμή θα διαμορφωθεί τελικά σύμφωνα με το νόμο της προσφοράς και της ζήτησης.
Για παράδειγμα, ένας ορισμός δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου είναι το ποσό Y με το οποίο τόσο ο αγοραστής όσο και ο πωλητής μπορούν να κατασκευάσουν χαρτοφυλάκιο με την ίδια μέγιστη πιθανή ζημιά. Υπάρχουν και άλλοι παρόμοιοι ορισμοί οι οποίοι οδηγούν σε διαφορετικές τιμές. Αυτό σημαίνει ότι ο αγοραστής θα διαπραγματευθεί έχοντας στο μυαλό του τον ορισμό εκείνο ο οποίος οδηγεί στη χαμηλότερη τιμή ενώ ο πωλητής θα διαπραγματευθεί έχοντας στο μυαλό τον ορισμό που οδηγεί στην υψηλότερη τιμή!

Θα καταγράψουμε τώρα τα βασικά σημεία αυτών που έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα και που καλό είναι να γνωρίζει ο φοιτητής μετά από αυτό το μάθημα.

• Πρώτα από όλα αναφερθήκαμε στις μετοχές και στα συμβόλαια προαίρεσης οι τιμές των οποίων διαμορφώνονται σύμφωνα με την προσφορά και τη ζήτηση αλλά και την παρουσία ευκαιρίας σίγουρου κέρδους. Τα δυο πιο γνωστά συμβόλαια προαίρεσης είναι τα συμβόλαια αγοράς και πώλησης.

• Είδαμε ότι τα συμβόλαια αγοράς και πώλησης έχουν κάποιες ιδιότητες. Για παράδειγμα τα συμβόλαια αγοράς πολλαπλασιάζουν το κέρδος όταν η τιμή της μετοχής ανέβει ενώ τα συμβόλαια πώλησης εξασφαλίζουν τον επενδυτή όταν η τιμή της μετοχής πέσει.

- Αν θέλουμε να επενδύσουμε ένα ποσό σε μια μετοχή με χρονικό ορίζοντα T θα πρέπει πρώτα να κάνουμε μια πρόβλεψη για το που θα βρεθεί η τιμή της σε εκείνη τη χρονική στιγμή. Στη συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη όλα τα συμβόλαια που αφορούν τη μετοχή αυτή, κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο με αποδεκτή ζημιά μέχρι D το οποίο να είναι κερδοφόρο κατά το δυνατόν περισσότερο στο σενάριο που προβλέπει ο επενδυτής. Για να κατασκευαστεί ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο θα πρέπει να σχηματιστεί και να λυθεί ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, δείτε το πρόβλημα 1.

Ανασκόπηση ΙΙΙ

- Αναφερθήκαμε στην ευκαιρία σίγουρου κέρδους (arbitrage). Η παρουσία ευκαιρίας σίγουρου κέρδους ενεργοποιεί τους arbitrageurs οι οποίοι θα εκμεταλλευτούν την ευκαιρία αυτή (λύνοντας το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού 2) με αποτέλεσμα οι τιμές να αναδιαμορφωθούν με τέτοιο τρόπο ώστε η ευκαιρία να εξαλειφθεί.
Αναφερθήκαμε επίσης στη λεγόμενη αναλογία αγοράς - πώλησης (put - call parity) όπου αποδείξαμε ότι αν δεν ισχύει τότε στην αγορά υπάρχει ευκαιρία σίγουρου κέρδους.

Ανασκόπηση IV

- Αν θέλουμε να επενδύσουμε ένα ποσό με χρονικό ορίζοντα T σε n το πλήθος μετοχές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία του Markowitz. Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να χάσουμε περισσότερα από D Ευρώ στη χρονική αυτή περίοδο. Να σημειώσουμε βέβαια σε αυτό το σημείο ότι για να είμαστε **σίγουροι** ότι δεν πρόκειται να χάσουμε περισσότερα από D Ευρώ αρκεί να ξοδέψουμε ένα πολύ μικρό ποσοστό του αρχικού ποσού αγοράζοντας κατάλληλα συμβόλαια πώλησης!

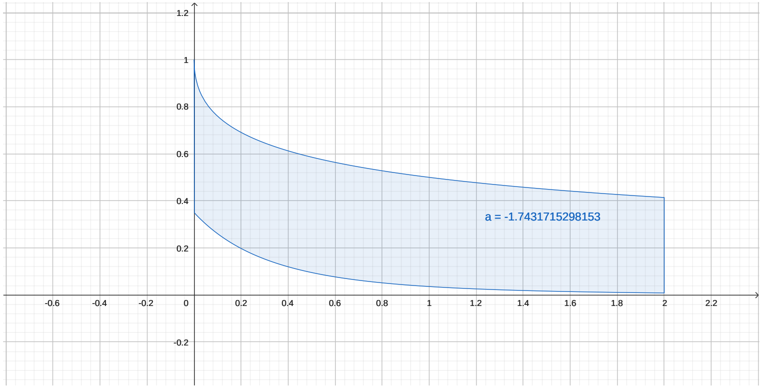
Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τα συμβόλαια προαίρεσης μπορούν να κατασκευαστούν περίπλοκα χαρτοφυλάκια τα οποία θα περιέχουν τις n μετοχές καθώς και τα αντίστοιχα συμβόλαια προαίρεσης επιλύοντας ένα γενικότερο πρόβλημα βελτιστοποίησης από αυτό του 1 αλλά παρόμοιο.

Ανασκόπηση VI

Ο επενδυτής θα πρέπει να κάνει μια πρόβλεψη για το που θα βρεθούν οι τιμές των n μετοχών και στη συνέχεια λύνοντας ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο να περιέχει μετοχές, τραπεζικό λογαριασμό καθώς και όλα τα συμβόλαια προαίρεσης για αυτές τις μετοχές συμπεριλαμβανομένου και των multi - asset συμβολαίων.
Η πρόβλεψη θα είναι της μορφής $(S_1^T, \cdots, S_n^T) \in G \subseteq \mathbb{R}_+$. Εδώ το G δεν είναι κατά ανάγκη ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο λαμβάνοντας έτσι υπόψη τις συσχετίσεις μεταξύ των μετοχών και προσπαθώντας να είναι όσο μικρότερο γίνεται για να έχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος.

Για παράδειγμα ο επενδυτής μπορεί να θέλει να επενδύσει σε δυο μετοχές για τις οποίες πιστεύει ότι η άνοδος της αξίας της μιας επιφέρει την κάθοδο της αξίας της άλλης. Με αυτή την πρόβλεψη μπορεί να επενδύσει κατασκευάζοντας ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο να είναι κερδοφόρο σε ένα τέτοιο σενάριο και επομένως το σύνολο G δεν θα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο αλλά ένα χωρίο σαν το επόμενο.

Ανασκόπηση VIII



• Αναφερθήκαμε στο πρόβλημα της αποτίμησης ενός συμβολαίου προαίρεσης. Είδαμε το διωνυμικό μοντέλο ως μέθοδο αποτίμησης και διαπιστώσαμε ότι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αυτό το σκοπό. Διαπιστώσαμε όμως ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μέθοδος αντιστάθμισης αλλά στη συνέχεια καταγράψαμε αποδοτικότερους τρόπους αντιστάθμισης οι οποίοι οδηγούν σε χαρτοφυλάκια με περιορισμένη ζημιά και απεριόριστο κέρδος! Καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι μια λογική τιμή πώλησης/αγοράς ενός συγκεκριμένου συμβολαίου θα βρίσκεται στο διάστημα τιμών που δεν περιέχουν ευκαιρίες σίγουρου κέρδους. Για να υπολογίσουμε το διάστημα αυτό θα πρέπει να επιλύσουμε δυο προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού, δείτε 10 και 11.
Η τιμή πώλησης θα διαμορφωθεί σύμφωνα με την προσφορά και τη ζήτηση.

Ανασκόπηση X

Στη βιβλιογραφία εμφανίζεται συχνά ο όρος «δίκαιη τιμή πώλησης ενός συμβολαίου». Έχει αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει ένας και μοναδικός ορισμός (δείτε εδάφιο 5.2 της εργασίας [3]) δίκαιης τιμής πώλησης συνεπώς ο αγοραστής θα επιλέξει να διαπραγματευθεί έχοντας στο μυαλό του έναν ορισμό ο οποίος οδηγεί σε μια μικρή τιμή πώλησης ενώ ο πωλητής το αντίθετο!

Βιβλιογραφία

Στην πρώτη εργασία θα βρείτε τη θεωρία του Markowitz ενώ στη δεύτερη θα βρείτε το διωνυμικό μοντέλο. Στις εργασίες [3], [4] και [5] θα βρείτε την οπτική των παραπάνω σημειώσεων.

1. H. Markowitz, *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 1952.
2. C. Cox - A. Ross - M. Rubinstein, *Option pricing: A simplified approach*, Journal of Financial Economics, 1979.
3. N. Halidias, *A novel portfolio optimization method and its application to the hedging problem*, Monte Carlo Methods and Applications, 2024.
4. N. Halidias, *Option pricing: Examples and open problems*, Monte Carlo Methods and Applications, 2024.
5. N. Halidias, *Modern Portfolio Theory*, ResearchGate, October 2024 DOI: 10.13140/RG.2.2.14960.06406/1