ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ -- ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

# Εφαρμογές της γεωμετρίας των συναρτήσεων κέρδους

Επένδυση, αντιστάθμιση με πρόβλεψη και διάστημα τιμών χωρίς αρμπιτράζ

Καθηγητής Νικόλαος Χαλιδιάς • Πανεπιστήμιο Αιγαίου

**Κεντρική ιδέα.** Αφού κατανοήσουμε τη γεωμετρία μιας συνάρτησης κέρδους, μπορούμε να διατυπώσουμε προβλήματα στατικής επιλογής χαρτοφυλακίου με σαφή οικονομικό στόχο. Θα μελετήσουμε τρεις εφαρμογές: (i) την επένδυση διαθέσιμου ποσού με εγγυημένο κέρδος σε ένα επιλεγμένο σενάριο και ελεγχόμενη ζημία, (ii) την απόφαση αγοράς ή πώλησης ενός νέου συμβολαίου υπό πρόβλεψη, και (iii) τον υπολογισμό των άνω και κάτω ορίων του διαστήματος τιμών χωρίς αρμπιτράζ (AFI). **Δεν χρησιμοποιούμε bid--ask spread**: κάθε διαπραγματεύσιμος τίτλος έχει μία δεδομένη τιμή.

Το κεφάλαιο αξιοποιεί τα αποτελέσματα που έχουν ήδη αποδειχθεί στο κεφάλαιο *Γεωμετρία των συναρτήσεων κέρδους*. Για τον λόγο αυτό **δεν επαναλαμβάνονται** οι αποδείξεις της συνέχειας και τμηματικής γραμμικότητας, του κριτηρίου της τελικής κλίσης, του κριτηρίου μέγιστης ζημίας ή του ελέγχου του κέρδους σε ένα διάστημα. Εδώ επικεντρωνόμαστε στη μετάβαση από ένα οικονομικό ερώτημα σε ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, και στην ερμηνεία της βέλτιστης λύσης.

## 1 Κοινό μαθηματικό πλαίσιο

### 1.1 Αγορά, συμβολισμοί και παραδοχές

Θεωρούμε μία μετοχή με σημερινή τιμή $S_0 > 0$ και χρονικό ορίζοντα $T > 0$. Η άγνωστη τελική τιμή της μετοχής είναι

$$x = S_T \in [0, \infty).$$

Σήμερα διαπραγματεύονται ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς με strikes $K_1, \dots, K_n$ και τιμές $C_1, \dots, C_n$, καθώς και ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης με strikes $L_1, \dots, L_m$ και τιμές $P_1, \dots, P_m$. Όλα έχουν κοινή λήξη $T$ και κάθε μονάδα δικαιώματος αφορά μία μετοχή.

**Βασικές απλοποιήσεις:** οι αγορές και οι πωλήσεις πραγματοποιούνται στην ίδια τιμή ανά τίτλο, δεν υπάρχουν προμήθειες, και το επιτόκιο τίθεται ίσο με μηδέν, $r = 0$. Επομένως, ένα ευρώ σε μετρητά σήμερα έχει αξία ενός ευρώ στη λήξη. Η θεωρία δεν προϋποθέτει κατανομή πιθανότητας, μεταβλητότητα ή υπόδειγμα για την εξέλιξη της μετοχής.

Ο επενδυτής επιλέγει:

$$z = (b, \Delta, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m),$$

όπου $b$ είναι τα μετρητά, $\Delta$ οι μονάδες της μετοχής, $\alpha_i$ οι θέσεις στα calls και $\beta_j$ οι θέσεις στα puts. Θετικός συντελεστής σημαίνει αγορά και αρνητικός πώληση. Η *σημερινή καθαρή αξία* του χαρτοφυλακίου είναι

$$c(z) = b + \Delta S_0 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j P_j. \tag{1}$$

Η *τελική απολαβή* του είναι

$$H_z(x) = b + \Delta x + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(x - K_i\right)^+ + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left(L_j - x\right)^+ . \tag{2}$$

Η διαφορά μεταξύ απολαβής και αρχικού ποσού που επενδύθηκε είναι το *καθαρό κέρδος* με την παραδοχή $r = 0$. Ο τρόπος με τον οποίο εισάγεται η αρχική αξία θα διευκρινιστεί χωριστά στις τρεις εφαρμογές.

**Χρηματική θέση και δανεισμός.** Στην πρώτη εφαρμογή θα απαιτούμε συνήθως $b \geq 0$, ώστε ο επενδυτής να μην δανείζεται μετρητά. Στις εφαρμογές τιμολόγησης θα επιτρέπουμε καταρχήν $b \in \mathbb{R}$, διότι το τυπικό, χωρίς τριβές πρόβλημα αντιστάθμισης περιλαμβάνει και δανεισμό. Εάν ένας πραγματικός επενδυτής δεν μπορεί να δανειστεί ή να πραγματοποιήσει ανοικτές πωλήσεις, ο αντίστοιχος περιορισμός πρέπει να προστεθεί ρητά: δεν είναι συμπέρασμα της γεωμετρίας.

### 1.2 Δύο απλές αλλά ουσιαστικές παρατηρήσεις

Πρώτον, $c(z)$ μπορεί να είναι θετικό, μηδενικό ή αρνητικό. Ένα αρνητικό κόστος σημαίνει αρχική καθαρή εισροή, συνήθως επειδή έχουν πουληθεί κάποιοι τίτλοι. Δεύτερον, για δεδομένη τιμή $x$, τόσο το $c(z)$ όσο και το $H_z(x)$ είναι **γραμμικές συναρτήσεις των μεταβλητών του χαρτοφυλακίου**. Αυτό θα επιτρέψει τη χρήση γραμμικού προγραμματισμού.

## 2 Από τη γεωμετρία σε πεπερασμένους περιορισμούς

Η κύρια τεχνική δυσκολία φαίνεται όταν ζητούμε, για παράδειγμα,

$$\Pi(x) \geq -D \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Αυτή είναι μια άπειρη οικογένεια ανισοτήτων. Τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου επιτρέπουν να την αντικαταστήσουμε με πεπερασμένο πλήθος ελέγχων.

Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ **συνεχής και τμηματικά γραμμική** με πεπερασμένους κλάδους. Το $f$ θα παριστάνει τη μελλοντική απολαβή ενός νέου συμβολαίου όταν το χρειαζόμαστε. Οι κόμβοι του $f$ συμβολίζονται με $\tau_1, \dots, \tau_\ell$. Συγκεντρώνουμε όλα τα σημεία αλλαγής κλίσης:

$$E = \{0, K_1, \dots, K_n, L_1, \dots, L_m, \tau_1, \dots, \tau_\ell\}, \tag{3}$$

αφαιρώντας τις επαναλήψεις. Στην πρώτη εφαρμογή δεν υπάρχει νέο $f$, οπότε παραλείπονται τα $\tau_k$.

### 2.1 Καθολικός έλεγχος ζημίας

Για μια συνάρτηση της μορφής

$$F(x) = H_z(x) + \sigma f(x) - q, \qquad \sigma \in \{-1, 0, 1\}, \tag{4}$$

έστω $m_f$ η κλίση του τελευταίου κλάδου του $f$. Τότε η κλίση του τελευταίου κλάδου της $F$ είναι

$$m_\infty(F) = \Delta + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sigma m_f. \tag{5}$$

Σύμφωνα με το **Θεώρημα 3.6** των σημειώσεων, η απαίτηση $F(x) \geq q_0$ για κάθε $x \geq 0$ είναι ισοδύναμη με

$$\boxed{F(e) \geq q_0 \quad (e \in E), \qquad m_\infty(F) \geq 0.} \tag{6}$$

Δεν χρειάζεται να ελέγξουμε άπειρες τιμές της μετοχής, ούτε να υπολογίσουμε το ελάχιστο με διαφορικό λογισμό.

### 2.2 Έλεγχος κέρδους στο ευνοϊκό σύνολο

Θεωρούμε ότι η πρόβλεψη περιγράφεται από ένα μη κενό, κλειστό και φραγμένο σύνολο της μορφής

$$A = [a_1, b_1] \cup \cdots \cup [a_s, b_s] \subseteq [0, \infty). \tag{7}$$

Το $A$ μπορεί να είναι ένα μόνο διάστημα ή πεπερασμένη ένωση διαστημάτων. Ορίζουμε

$$E_A = (E \cap A) \cup \{a_1, b_1, \dots, a_s, b_s\}.$$

Από το **Πόρισμα 3.9** των σημειώσεων, η απαίτηση $F(x) \geq \gamma$ για κάθε $x \in A$ ισοδυναμεί με

$$\boxed{F(e) \geq \gamma \qquad \text{για όλα τα } e \in E_A.} \tag{8}$$

Αν το $A$ περιλαμβάνει ημιευθεία $[a, \infty)$, εκτός από τους πεπερασμένους ελέγχους προστίθεται και $m_\infty(F) \geq 0$. Για αυστηρό κέρδος $F(x) > 0$ θα είναι πρακτικότερο να απαιτήσουμε $F(x) \geq \gamma_0$ με συγκεκριμένο $\gamma_0 > 0$.

> **Γιατί προσθέτουμε και τους κόμβους του νέου συμβολαίου;** Εάν ένα νέο option έχει strike $105$, ενώ στην αγορά διαπραγματεύονται μόνο calls με strikes $100$ και $110$, οι συναρτήσεις $H_z - f$ και $H_z + f$ αλλάζουν κλίση και στο $105$. Το σημείο αυτό πρέπει επομένως να περιλαμβάνεται στους ελέγχους, μολονότι το νέο option δεν ανήκει στο χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης.

## 3 Εφαρμογή 1: επένδυση δεδομένου κεφαλαίου $Y$

### 3.1 Το οικονομικό ερώτημα

Ένας επενδυτής διαθέτει σήμερα ποσό $Y > 0$, το οποίο θέλει να επενδύσει μέχρι τον χρόνο $T$. Πιστεύει ότι $S_T \in A$, αλλά αναγνωρίζει ότι η πρόβλεψή του μπορεί να μην επαληθευτεί. Επιλέγει επομένως το μέγιστο ποσό ζημίας που είναι διατεθειμένος να δεχθεί, $D \geq 0$.

Η απόφασή του δεν είναι απλώς «ποιο call να αγοράσω;». Είναι: *ποιος συνδυασμός μετρητών, μετοχής, calls και puts προσφέρει το μεγαλύτερο εγγυημένο κέρδος στο $A$, χωρίς η συνολική ζημία να μπορεί να υπερβεί το $D$;*

Ορίζουμε την καθαρή συνάρτηση κέρδους

$$\Pi_Y(x) = H_z(x) - Y. \tag{9}$$

Η αφαίρεση του $Y$ είναι απαραίτητη: η τελική απολαβή δεν πρέπει να συγχέεται με το κέρδος. Το αρχικό ισοζύγιο είναι

$$c(z) = Y. \tag{10}$$

Θέλουμε να βρούμε το *μεγαλύτερο* $\gamma$ για το οποίο

$$\Pi_Y(x) \geq \gamma \text{ όταν } x \in A, \qquad \Pi_Y(x) \geq -D \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

Η δεύτερη απαίτηση ισχύει **και μέσα στο** $A$· είναι ένας καθολικός περιορισμός ασφάλειας.

## 3.2 Το πρόβλημα βελτιστοποίησης

Αν δεν επιτρέπεται δανεισμός μετρητών, επιβάλλουμε $b \geq 0$. Για να εκφράσουμε τη διαθεσιμότητα τίτλων ή ένα μέγιστο επιτρεπτό μέγεθος θέσης, μπορούμε επιπλέον να εισαγάγουμε ένα σύνολο $\mathcal{Q}$ γραμμικών περιορισμών στις ποσότητες $(\Delta, \alpha, \beta)$. Παίρνουμε:

$$\begin{array}{rlll} \text{μεγιστοποίηση} & \gamma & & \\ \text{υπό τους περιορισμούς} & c(z) = Y, \qquad b \geq 0, & & \\ & \Pi_Y(x) \geq \gamma & \text{για κάθε } x \in A, & \\ & \Pi_Y(x) \geq -D & \text{για κάθε } x \geq 0, & \\ & (\Delta, \alpha, \beta) \in \mathcal{Q}. & & \end{array} \tag{11}$$

Η επιλογή $\gamma \geq 0$ εκφράζει την επιθυμία να μη χαθεί κεφάλαιο στο ευνοϊκό σενάριο. Αν το βέλτιστο $\gamma^*$ είναι θετικό, η ζητούμενη κερδοφόρα επένδυση έχει βρεθεί. Αν $\gamma^* = 0$, δεν υπάρχει, με τα δεδομένα και τους περιορισμούς που επιλέχθηκαν, χαρτοφυλάκιο με *εγγυημένο θετικό* κέρδος στο $A$.

## 3.3 Μετάβαση σε γραμμικό πρόγραμμα

Επειδή η $\Pi_Y$ έχει μόνο τους κόμβους των διαπραγματεύσιμων options, ορίζουμε $E_0 = \{0, K_i, L_j\}$ και προσθέτουμε τα άκρα του $A$. Από τις σχέσεις (6)--(8), το πρόβλημα (11) γίνεται ακριβώς

$$\begin{array}{rlll} \max & \gamma & & \\ \text{υπό} & c(z) = Y, \quad b \geq 0, & & \\ & H_z(e) - Y \geq \gamma & (e \in E_A), & \\ & H_z(e) - Y \geq -D & (e \in E_0), & \\ & \Delta + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq 0, & & \\ & (\Delta, \alpha, \beta) \in \mathcal{Q}, \quad \gamma \geq 0. & & \end{array} \tag{12}$$

Όλες οι σχέσεις είναι γραμμικές ως προς τις άγνωστες ποσότητες και το $\gamma$. Συνεπώς το πρόβλημα είναι γραμμικού προγραμματισμού. Αν απαιτήσουμε ακέραιο αριθμό συμβολαίων, γίνεται μεικτό ακέραιο γραμμικό πρόγραμμα.

**Μια χρήσιμη αλγεβρική απλοποίηση.** Αν θέσουμε

$$G_q(x) = \Delta x + \sum_i \alpha_i \left(x - K_i\right)^+ + \sum_j \beta_j \left(L_j - x\right)^+, \qquad c_q = \Delta S_0 + \sum_i \alpha_i C_i + \sum_j \beta_j P_j,$$

τότε από $b + c_q = Y$ προκύπτει

$$\Pi_Y(x) = G_q(x) - c_q, \qquad b = Y - c_q \geq 0. \tag{13}$$

**Άρα το $Y$ δεν εμφανίζεται απευθείας στον τύπο του καθαρού κέρδους**: καθορίζει ποιες θέσεις μπορούν να χρηματοδοτηθούν χωρίς δανεισμό μέσω της ανισότητας $c_q \leq Y$. Αν επιτρέπαμε απεριόριστο δανεισμό και δεν υπήρχαν άλλοι περιορισμοί θέσεων, το $Y$ θα έπαυε να αποτελεί ουσιαστικό περιορισμό του προβλήματος. Γι' αυτό πρέπει να δηλώνεται με ακρίβεια τι σημαίνει «διαθέτω κεφάλαιο $Y$».

## 3.4 Αριθμητικό παράδειγμα: spread με ελεγχόμενη ζημία

Έστω ότι η αγορά διαθέτει δύο calls με κοινή λήξη:

$$K_1 = 100,\ C_1 = 6, \qquad K_2 = 110,\ C_2 = 2.$$

Ο επενδυτής διαθέτει $Y = 60$ ευρώ, προβλέπει $A = [110, 120]$ και δεν επιθυμεί ζημία πάνω από $D = 40$ ευρώ. Για το παράδειγμα *περιορίζουμε το διαθέσιμο σύνολο στρατηγικών* σε $n \geq 0$ μονάδες του bull call spread: αγορά $n$ calls με $K = 100$ και ταυτόχρονη πώληση $n$ calls με $K = 110$, μαζί με μη αρνητικά μετρητά $b$. Αυτός ο περιορισμός ισχύει μόνο για το παράδειγμα, όχι για το γενικό πρόγραμμα (12).

Το αρχικό καθαρό κόστος μιας μονάδας spread είναι $6 - 2 = 4$, ενώ η τελική απολαβή της είναι

$$g(x) = (x - 100)^+ - (x - 110)^+ = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 100, \\ x - 100, & 100 \leq x \leq 110, \\ 10, & x \geq 110. \end{cases}$$

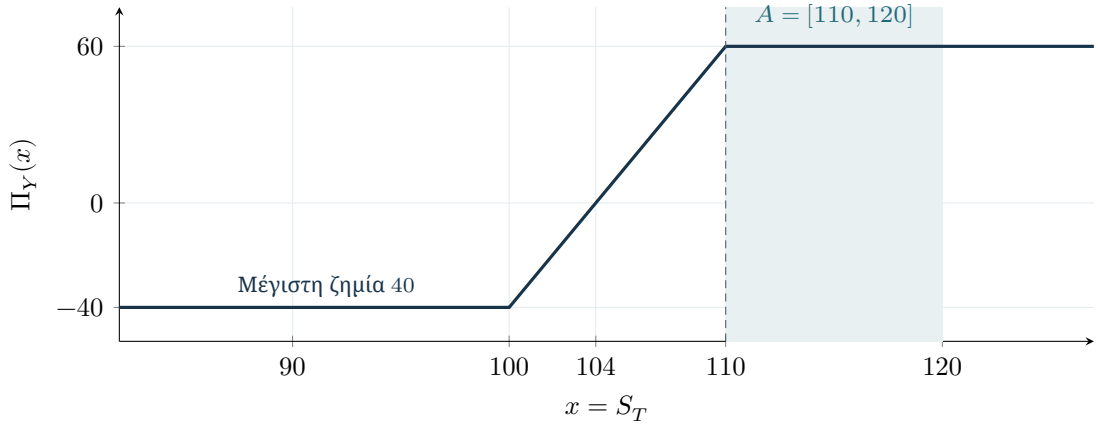
Το ισοζύγιο $b + 4n = 60$ δίνει $b = 60 - 4n \geq 0$, δηλαδή $n \leq 15$. Η συνάρτηση κέρδους είναι

$$\Pi_Y(x) = b + ng(x) - 60 = n\,[g(x) - 4].$$

Η μέγιστη δυνατή ζημία είναι $4n$, άρα $4n \leq 40$, δηλαδή $n \leq 10$. Στο ευνοϊκό σύνολο $A$ ισχύει $g(x) = 10$, οπότε $\Pi_Y(x) = 6n$. Συνεπώς το πρόβλημα έχει γίνει

$$\max 6n \qquad \text{υπό } 0 \leq n \leq 15, \quad n \leq 10.$$

Βέλτιστο είναι $n^* = 10$. Ο επενδυτής **αγοράζει 10 calls με strike 100, πωλεί 10 calls με strike 110 και διατηρεί 20 ευρώ σε μετρητά**. Η εγγυημένη απόδοση στο $A$ είναι $\gamma^* = 60$ ευρώ και η μέγιστη δυνατή ζημία είναι $40$ ευρώ.




*Σχήμα.* Το κέρδος είναι εγγυημένα $60$ ευρώ στο επιλεγμένο σενάριο, ενώ σε οποιαδήποτε τελική τιμή η ζημία δεν υπερβαίνει τα $40$ ευρώ. Το γράφημα αποτυπώνει τόσο την απόφαση επένδυσης όσο και το όριο ασφάλειας.

# 4 Εφαρμογή 2: νέο συμβόλαιο και πρόβλεψη

## 4.1 Ποιο ερώτημα θέλει να απαντήσει ο επενδυτής;

Υποθέτουμε ότι πρόκειται να δημιουργηθεί ή να διαπραγματευτεί ένα νέο ευρωπαϊκό συμβόλαιο, το οποίο στη λήξη καταβάλλει $f(x)$, όπου $f$ είναι συνεχής και τμηματικά γραμμική με πεπερασμένους κλάδους. Το νέο συμβόλαιο *δεν είναι ήδη διαθέσιμο* ως μέσο στο χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης: η αντιστάθμιση κατασκευάζεται από τη μετοχή, τα ήδη διαπραγματεύσιμα calls και puts και μετρητά.

Ο πωλητής και ο αγοραστής ενδέχεται να έχουν διαφορετικές προβλέψεις. Για τον πωλητή χρησιμοποιούμε $A_{\mathrm{S}}$, στόχο κέρδους $\gamma_{\mathrm{S}} > 0$ και όριο ζημίας $D_{\mathrm{S}} \geq 0$. Αντίστοιχα, ο αγοραστής επιλέγει $A_{\mathrm{B}}$, $\gamma_{\mathrm{B}} > 0$ και $D_{\mathrm{B}} \geq 0$.

**Η ουσία της απόφασης.** «Γιατί θέλω να πουλήσω ή να αγοράσω αυτό το συμβόλαιο, σε ποια τιμή θα είμαι ικανοποιημένος και τι ακριβώς θα κάνω με τα χρήματα και τους υπόλοιπους τίτλους;» Η μέθοδος δίνει *λειτουργική απάντηση* μόλις ο επενδυτής καθορίσει $A, \gamma, D$: υπολογίζει το αποδεκτό όριο τιμής **μαζί με** ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο. Δεν ισχυριζόμαστε ότι είναι η μοναδική δυνατή μέθοδος ή ότι προσδιορίζει μια μοναδική αγοραία τιμή.

## 4.2 Ο πωλητής του συμβολαίου

Αν ο πωλητής εισπράξει σήμερα τίμημα $Y$, επιλέγει το χαρτοφυλάκιο $z$ με κόστος ακριβώς $Y$ (το μη δαπανηθέν ποσό μπορεί να παραμείνει στη χρηματική θέση $b$). Στη λήξη πρέπει να καταβάλει στον αγοραστή το $f(x)$. Επομένως

$$\Pi_{\mathrm{S}}(x) = H_z(x) - f(x), \qquad c(z) = Y. \tag{14}$$

Ο πωλητής επιθυμεί να κερδίσει τουλάχιστον $\gamma_{\mathrm{S}}$ όταν $x \in A_{\mathrm{S}}$ και να μη χάσει πάνω από $D_{\mathrm{S}}$ ακόμη και αν η πρόβλεψη αποτύχει. Αναζητεί το **μικρότερο** αρχικό τίμημα που επιτρέπει αυτή την κατασκευή:

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\mathrm{S}}^{*} = \min_{Y,z} \quad & Y \\ \text{υπό} \quad & c(z) = Y, \\ & H_z(x) - f(x) \geq \gamma_{\mathrm{S}} \qquad (x \in A_{\mathrm{S}}), \\ & H_z(x) - f(x) \geq -D_{\mathrm{S}} \quad (x \geq 0). \end{aligned}} \tag{15}$$

Μπορούν να προστεθούν περιορισμοί στις ποσότητες των διαθέσιμων τίτλων. Εφόσον υπάρχουν βέλτιστες λύσεις, το $Y_{\mathrm{S}}^{*}$ είναι *προσωπικό κατώτατο αποδεκτό τίμημα* για τον συγκεκριμένο στόχο. Αν το νέο option πωληθεί σε $p > Y_{\mathrm{S}}^{*}$, ο πωλητής μπορεί να χρησιμοποιήσει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο κόστους $Y_{\mathrm{S}}^{*}$ και να καταθέσει τη διαφορά $p - Y_{\mathrm{S}}^{*}$. Έτσι το κέρδος αυξάνεται κατά την ίδια διαφορά σε κάθε ενδεχόμενο.

## 4.3 Ο αγοραστής του συμβολαίου

Ο αγοραστής πληρώνει το $Y$ και αποκτά το δικαίωμα να εισπράξει $f(x)$ στη λήξη. Για να εξεταστεί το συνολικό αποτέλεσμα σε βάση μηδενικού αρχικού καθαρού κόστους, ο αγοραστής επιλέγει συμπληρωματικό χαρτοφυλάκιο $z$ με $c(z) = -Y$: αυτό σημαίνει ότι η συμπληρωματική θέση δημιουργεί καθαρή χρηματοδότηση ίση με $Y$. Η τελική συνάρτηση κέρδους είναι

$$\Pi_{\mathrm{B}}(x) = H_z(x) + f(x), \qquad c(z) = -Y. \tag{16}$$

Εδώ αναζητούμε το **μεγαλύτερο** τίμημα που είναι συμβατό με τους στόχους του αγοραστή:

$$\boxed{\begin{aligned} Y_{\mathrm{B}}^{*} = \max_{Y,z} \quad & Y \\ \text{υπό} \quad & c(z) = -Y, \\ & H_z(x) + f(x) \geq \gamma_{\mathrm{B}} \qquad (x \in A_{\mathrm{B}}), \\ & H_z(x) + f(x) \geq -D_{\mathrm{B}} \quad (x \geq 0). \end{aligned}} \tag{17}$$

Εάν η πραγματική τιμή αγοράς είναι $p < Y_{\mathrm{B}}^{*}$, ο αγοραστής μπορεί να διατηρήσει το ίδιο συμπληρωματικό χαρτοφυλάκιο, κρατώντας επιπλέον το ποσό $Y_{\mathrm{B}}^{*} - p$. Αυτό αυξάνει το τελικό καθαρό κέρδος σε κάθε κατάσταση.

**Προσοχή στη χρηματοδότηση:** στη μορφή (17) επιτρέπονται αρνητικές χρηματικές θέσεις και ανοικτές πωλήσεις. Αν ο αγοραστής χρηματοδοτεί την αγορά από *ίδια* διαθέσιμα και δεν έχει πρόσβαση σε δανεισμό, πρέπει να προστεθεί χωριστός αρχικός περιορισμός κεφαλαίου. Αυτό αλλάζει το προσωπικό όριο αποδοχής· δεν αλλάζει τα γεωμετρικά κριτήρια.

## 4.4 Ακριβής μετατροπή των δύο προβλημάτων σε LP

Έστω $E$ το σύνολο (3), που περιέχει **και τους κόμβους του** $f$. Για τον πωλητή ελέγχουμε τις τιμές $\Pi_{\text{S}}(e)$ στα $E$ και $E_{A_{\text{S}}}$, καθώς και την τελική κλίση

$$\Delta + \sum_i \alpha_i - m_f \geq 0.$$

Έτσι το (15) ισοδυναμεί με

$$\boxed{\begin{array}{lll} \min & Y & \\ \text{υπό} & c(z) = Y, & \\ & H_z(e) - f(e) \geq \gamma_{\text{S}} & (e \in E_{A_{\text{S}}}), \\ & H_z(e) - f(e) \geq -D_{\text{S}} & (e \in E), \\ & \Delta + \sum_i \alpha_i - m_f \geq 0. & \end{array}} \tag{18}$$

Ανάλογα, για τον αγοραστή παίρνουμε

$$\boxed{\begin{array}{lll} \max & Y & \\ \text{υπό} & c(z) = -Y, & \\ & H_z(e) + f(e) \geq \gamma_{\text{B}} & (e \in E_{A_{\text{B}}}), \\ & H_z(e) + f(e) \geq -D_{\text{B}} & (e \in E), \\ & \Delta + \sum_i \alpha_i + m_f \geq 0. & \end{array}} \tag{19}$$

Εφόσον τα $f(e)$, $C_i$, $P_j$, $S_0$, $\gamma$ και $D$ είναι δεδομένοι αριθμοί, πρόκειται για πεπερασμένα γραμμικά προγράμματα. Οι μεταβλητές είναι οι ποσότητες του χαρτοφυλακίου, η χρηματική θέση και το τίμημα $Y$. Δεν υπάρχει ανάγκη να γνωρίζουμε πιθανότητες για το $S_T$.

## 4.5 Αναλυτικό παράδειγμα με διαφορετικές προβλέψεις

Θεωρούμε σημερινή τιμή μετοχής $S_0 = 100$ και δύο διαθέσιμα calls:

$$C(100) = 6, \qquad C(110) = 2.$$

Το **νέο** option έχει απολαβή $f(x) = (x - 105)^+$. Το strike $105$ δεν υπάρχει ανάμεσα στα διαθέσιμα μέσα αντιστάθμισης. Για συντομία γράφουμε

$$H(x) = b + \Delta x + u\,(x - 100)^+ + v\,(x - 110)^+, \qquad c(H) = b + 100\Delta + 6u + 2v.$$

Οι κόμβοι καθολικού ελέγχου είναι $\{0, 100, 105, 110\}$, ενώ η τελική κλίση του νέου option είναι $m_f = 1$.

Ο πωλητής έχει πρόβλεψη $A_{\text{S}} = [90, 100]$, επιθυμητό κέρδος $\gamma_{\text{S}} = 2$ και αποδεκτή μέγιστη ζημία $D_{\text{S}} = 4$. Ο αγοραστής προβλέπει $A_{\text{B}} = [110, 120]$ και επιλέγει $\gamma_{\text{B}} = 2,\ D_{\text{B}} = 4$. Τα δύο γραμμικά προγράμματα δίνουν τα παρακάτω αποτελέσματα (επιτρέπονται πραγματικές, όχι κατ' ανάγκη ακέραιες, θέσεις και ελεύθερη χρηματική θέση).

| | $b$ | $\Delta$ | $u$ (call 100) | $v$ (call 110) | Τίμημα $Y^*$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Πωλητής | $-4$ | $\frac{1}{15}$ | $-\frac{7}{30}$ | $\frac{7}{6}$ | $\frac{18}{5} = 3{,}6$ |
| Αγοραστής | $-4$ | $0$ | $\frac{1}{10}$ | $-\frac{11}{10}$ | $\frac{28}{5} = 5{,}6$ |

Για τον πωλητή το χαρτοφυλάκιο έχει κόστος $3{,}6$, ίσο με το τίμημα που εισπράττει. Για τον αγοραστή το συμπληρωματικό χαρτοφυλάκιο έχει κόστος $-5{,}6$, άρα, μαζί με την αγορά του νέου option προς $5{,}6$, το αρχικό καθαρό κόστος είναι μηδέν.

Η άμεση αξιολόγηση στα σημεία που επιβάλλει η γεωμετρία δίνει:

| $x$ | $0$ | $90$ | $100$ | $105$ | $110$ | $120$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Pi_{\mathrm{S}}(x)$ | $-4$ | $2$ | $\frac{8}{3}$ | $\frac{11}{6}$ | $-4$ | $-4$ |
| $\Pi_{\mathrm{B}}(x)$ | $-4$ | $-4$ | $-4$ | $-\frac{7}{2}$ | $2$ | $2$ |

Η τελική κλίση είναι μηδέν και στα δύο παραδείγματα. Επομένως, ο πωλητής εξασφαλίζει κέρδος τουλάχιστον $2$ ευρώ στο $[90, 100]$, ο αγοραστής κέρδος τουλάχιστον $2$ ευρώ στο $[110, 120]$, και κανένας δεν έχει ζημία μεγαλύτερη από $4$ ευρώ. Τα αποτελέσματα είναι **βέλτιστα** για τις δηλωμένες παραδοχές και το συγκεκριμένο σύνολο διαθέσιμων τίτλων.

*Έλεγχος της βέλτιστης τιμής χωρίς επανάληψη γεωμετρικής απόδειξης.* Για κάθε $H$ της παραπάνω μορφής ισχύει η απλή λογιστική ταυτότητα

$$c(H) = \frac{3}{5}H(90) + \frac{2}{5}H(110) + 2m_\infty(H).$$

Στον πωλητή, οι απαιτήσεις $\Pi_{\mathrm{S}}(90) \geq 2$, $\Pi_{\mathrm{S}}(110) \geq -4$, $m_\infty(\Pi_{\mathrm{S}}) \geq 0$ και $f(90) = 0, f(110) = 5, m_f = 1$ δίνουν $c(H) \geq 3{,}6$, το οποίο επιτυγχάνεται από την πρώτη γραμμή του πίνακα. Για τον αγοραστή ισχύει επίσης η ταυτότητα

$$c(H) = \frac{3}{50}H(0) + \frac{27}{50}H(100) + \frac{2}{5}H(110) + 2m_\infty(H).$$

Οι απαιτήσεις $\Pi_{\mathrm{B}}(0), \Pi_{\mathrm{B}}(100) \geq -4$, $\Pi_{\mathrm{B}}(110) \geq 2$ και $m_\infty(\Pi_{\mathrm{B}}) \geq 0$ δίνουν $c(H) \geq -5{,}6$, οπότε $-c(H) \leq 5{,}6$. Οι δύο ταυτότητες πιστοποιούν την αριθμητική βελτιστότητα χωρίς να επαναλαμβάνουν τα θεωρήματα του προηγούμενου κεφαλαίου.

Τα προσωπικά αυτά όρια $3{,}6$ και $5{,}6$ **δεν είναι τα όρια του AFI**. Θα δούμε παρακάτω ότι για το ίδιο νέο call το AFI έχει διαφορετικά όρια. Η διάκριση είναι ουσιώδης: η πρόβλεψη και η αποδεκτή ζημία επιτρέπουν μια συναλλαγή να ικανοποιεί τις προσωπικές προδιαγραφές χωρίς αυτό να τη μετατρέπει αυτόματα σε τιμή χωρίς αρμπιτράζ.

# 5 Εφαρμογή 3: άνω και κάτω όριο του AFI

## 5.1 Αποτίμηση χωρίς πρόβλεψη

Στην προηγούμενη εφαρμογή κάθε πλευρά επέλεγε ένα ευνοϊκό σύνολο $A$, ένα επίπεδο κέρδους και μια αποδεκτή ζημία. Τώρα θέτουμε μια διαφορετική ερώτηση: **ποιοι περιορισμοί στην τιμή ενός νέου συμβολαίου προκύπτουν μόνο από τη δυνατότητα κατασκευής χαρτοφυλακίων που δεν χάνουν ποτέ;**

Δεν επιλέγουμε πλέον κανένα σενάριο. Δεν χρησιμοποιούμε πιθανότητες, κατανομές ή προβλέψεις. Απαιτούμε μη αρνητικό αποτέλεσμα *για κάθε* $x \geq 0$. Οι επενδυτές μπορούν, στο ιδεατό χωρίς τριβές υπόδειγμα, να κρατούν θετικές ή αρνητικές στατικές θέσεις και να καταθέτουν ή να δανείζονται μετρητά. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι υπάρχουσες τιμές των διαθέσιμων τίτλων δεν επιτρέπουν ήδη στατικό αρμπιτράζ.

## 5.2 Άνω όριο: ελάχιστο κόστος υπεραντιστάθμισης

Ο πωλητής του νέου συμβολαίου αναζητεί χαρτοφυλάκιο που καλύπτει **ολόκληρη** την υποχρέωση $f(x)$, ανεξάρτητα από την τελική τιμή:

$$H_z(x) \geq f(x) \qquad \forall x \geq 0.$$

Από όλα τα χαρτοφυλάκια με αυτή την ιδιότητα επιλέγει το φθηνότερο:

$$\boxed{Y^{\text{up}} = \inf_z \{c(z) : H_z(x) \geq f(x)\ \forall x \geq 0\}.} \tag{20}$$

Εφόσον η βέλτιστη τιμή επιτυγχάνεται, η λύση καθορίζει *και το ποσό και τη στρατηγική*: ο πωλητής αγοράζει/πωλεί τους τίτλους που υποδεικνύουν οι συντελεστές του $z^*$. Αν πωλήσει το νέο option σε τίμημα $p > Y^{\text{up}}$, μπορεί να κατασκευάσει την υπεραντιστάθμιση με κόστος $Y^{\text{up}}$, να καταθέσει το υπόλοιπο $p - Y^{\text{up}} > 0$, και έτσι να εξασφαλίσει θετικό κέρδος σε κάθε κατάσταση.

## 5.3 Κάτω όριο: μέγιστη αξία υποαντιστάθμισης

Αντίστοιχα, ο αγοραστής αναζητεί χαρτοφυλάκιο που σε κάθε κατάσταση έχει απολαβή *όχι μεγαλύτερη* από το νέο συμβόλαιο:

$$H_z(x) \leq f(x) \qquad \forall x \geq 0.$$

Η μέγιστη σημερινή αξία ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου είναι

$$\boxed{Y^{\text{low}} = \sup_z \{c(z) : H_z(x) \leq f(x)\ \forall x \geq 0\}.} \tag{21}$$

Αν το νέο option διατίθεται σε τιμή $p < Y^{\text{low}}$, ο επενδυτής μπορεί να το αγοράσει, να πουλήσει (ανοικτά) το χαρτοφυλάκιο υποαντιστάθμισης, να εισπράξει αρχικά τη θετική διαφορά $Y^{\text{low}} - p$ και να έχει μη αρνητικό τελικό υπόλοιπο, αφού $f(x) - H_z(x) \geq 0$ σε κάθε κατάσταση.

Η σχέση (21) είναι ισοδύναμη με το πρόβλημα του αγοραστή $\max Y$ υπό $c(z) = -Y$ και $H_z(x) + f(x) \geq 0$: αρκεί να αλλάξουμε πρόσημο σε όλες τις θέσεις του συμπληρωματικού χαρτοφυλακίου.

## 5.4 Γραμμικά προγράμματα για τα δύο όρια

Η γεωμετρία δίνει αμέσως ακριβή και πεπερασμένη μορφή. Για το *άνω* όριο εφαρμόζουμε το καθολικό κριτήριο στη $H_z - f$:

$$\boxed{\begin{aligned} Y^{\text{up}} = \min_z \quad & c(z) \\ \text{υπό} \quad & H_z(e) \geq f(e) \qquad (e \in E), \\ & \Delta + \sum_i \alpha_i - m_f \geq 0. \end{aligned}} \tag{22}$$

Για το *κάτω* όριο εφαρμόζουμε το ίδιο κριτήριο στη $f - H_z$:

$$\boxed{\begin{aligned} Y^{\text{low}} = \max_z \quad & c(z) \\ \text{υπό} \quad & H_z(e) \leq f(e) \qquad (e \in E), \\ & \Delta + \sum_i \alpha_i - m_f \leq 0. \end{aligned}} \tag{23}$$

Οι συνθήκες τελικής κλίσης έχουν **αντίθετη φορά** στο άνω και στο κάτω πρόγραμμα. Αν παραλειφθούν, μια υποψήφια αντιστάθμιση μπορεί να λειτουργεί σε όλα τα πεπερασμένα strikes και παρ' όλα αυτά να αποτυγχάνει για πολύ μεγάλες τιμές $x$.

Υπό συνεπή αρχική αγορά ισχύει $Y^{\text{low}} \le Y^{\text{up}}$. Οι τιμές $p < Y^{\text{low}}$ και $p > Y^{\text{up}}$ επιτρέπουν την κατασκευή που περιγράφηκε παραπάνω. Οι τιμές στο εσωτερικό $(Y^{\text{low}}, Y^{\text{up}})$ δεν δημιουργούν τέτοιο στατικό αρμπιτράζ στο μοντέλο. **Τα ίδια τα άκρα χρειάζονται χωριστό έλεγχο**: μπορεί να επιτρέπουν αρμπιτράζ με μη αρνητικό κέρδος σε όλες τις καταστάσεις και θετικό σε ορισμένες. Αν $Y^{\text{low}} = Y^{\text{up}}$, ενδέχεται να έχουμε ακριβή αναπαραγωγή και μία μοναδική τιμή.

## 5.5 Αριθμητικό παράδειγμα: ακριβής προσδιορισμός του AFI

Επανερχόμαστε στην αγορά

$$S_0 = 100, \qquad C(100) = 6, \qquad C(110) = 2,$$

και στο νέο call $f(x) = (x-105)^+$. Γράφουμε $H(x) = b + \Delta x + u\,(x-100)^+ + v\,(x-110)^+$.

**Υπεραντιστάθμιση.** Το χαρτοφυλάκιο

$$H^+(x) = \tfrac{1}{2}\,(x-100)^+ + \tfrac{1}{2}\,(x-110)^+$$

έχει κόστος $\frac{1}{2}\cdot 6 + \frac{1}{2}\cdot 2 = 4$ και ικανοποιεί $H^+(x) \ge (x-105)^+$ για κάθε $x \ge 0$. Συνεπώς $Y^{\text{up}} \le 4$.

**Υποαντιστάθμιση.** Το χαρτοφυλάκιο

$$H^-(x) = (x-110)^+$$

έχει κόστος $2$ και ικανοποιεί $H^-(x) \le (x-105)^+$ για κάθε $x \ge 0$. Συνεπώς $Y^{\text{low}} \ge 2$.

Για να πιστοποιήσουμε ότι αυτά είναι *ακριβώς* τα βέλτιστα όρια, όχι απλώς δύο πρόχειρα φράγματα, χρησιμοποιούμε δύο λογιστικές ταυτότητες που ισχύουν για κάθε διαθέσιμο $H$:

$$c(H) = \tfrac{3}{50}H(0) + \tfrac{27}{50}H(100) + \tfrac{2}{5}H(110) + 2m_\infty(H), \tag{24}$$

$$c(H) = \tfrac{3}{50}H(0) + \tfrac{7}{50}H(100) + \tfrac{4}{5}H(105) + 2m_\infty(H). \tag{25}$$

Εάν $H \ge f$, από την πρώτη ταυτότητα, τις τιμές $f(0) = f(100) = 0$, $f(110) = 5$ και τη συνθήκη $m_\infty(H) \ge 1$, έχουμε $c(H) \ge 4$. Αν $H \le f$, από τη δεύτερη ταυτότητα, $f(0) = f(100) = f(105) = 0$ και $m_\infty(H) \le 1$, έχουμε $c(H) \le 2$. Άρα τα δύο κατασκευασμένα χαρτοφυλάκια είναι βέλτιστα και

$$\boxed{\quad Y^{\text{low}} = 2, \qquad Y^{\text{up}} = 4. \quad} \tag{26}$$

Στη συγκεκριμένη αγορά, $p = 2$ και $p = 4$ επιτρέπουν επίσης στατικό αρμπιτράζ με μη αρνητικό κέρδος παντού και θετικό για ορισμένες τιμές της μετοχής: στο $2$, αγοράζουμε το νέο call και πουλάμε το call με $K = 110$· στο $4$, πουλάμε το νέο call και αγοράζουμε το $H^+$. Επομένως το *αυστηρό* διάστημα τιμών χωρίς τέτοιο pointwise αρμπιτράζ είναι

$$\boxed{\text{AFI} = (2, 4).}$$

## 5.6 Γιατί είναι χρήσιμος ο υπολογισμός του AFI; Η τιμή και η κατασκευή του χαρτοφυλακίου

Ο υπολογισμός των άκρων του AFI έχει σημασία **όχι μόνο ως πρόβλημα αποτίμησης αλλά και ως πρόβλημα λήψης συγκεκριμένων επενδυτικών αποφάσεων**. Το αποτέλεσμα των δύο γραμμικών προγραμμάτων δεν πρέπει να είναι μόνο δύο αριθμοί. Πρέπει

να περιλαμβάνει και τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια που προκύπτουν από τις αντίστοιχες μεταβλητές απόφασης: ποια μετοχή και ποια calls ή puts αγοράζουμε ή πουλάμε και σε ποιες ποσότητες.

Για να περιγράψουμε τις χρήσεις, υποθέτουμε ότι τα άκρα επιτυγχάνονται από χαρτοφυλάκια $H^+$ και $H^-$, αντίστοιχα. Επομένως,

$$\boxed{c(H^-) = Y^{\text{low}}, \quad c(H^+) = Y^{\text{up}}, \qquad H^-(x) \le f(x) \le H^+(x) \quad \forall x \ge 0.} \tag{27}$$

Οι ανισότητες αφορούν όλες τις δυνατές τελικές τιμές και *δεν* στηρίζονται σε πρόβλεψη. Αν το βέλτιστο δεν επιτυγχάνεται, οι αντίστοιχες συναλλαγές γίνονται με κατάλληλα σχεδόν βέλτιστα χαρτοφυλάκια, οπότε τα ποσά προσαρμόζονται αναλόγως.

### 1. Μια ανεξάρτητη από πρόβλεψη τάξη μεγέθους της αξίας

Το διάστημα ανάμεσα στα $Y^{\text{low}}$ και $Y^{\text{up}}$ παρέχει μια **τάξη μεγέθους** για την τιμή του νέου συμβολαίου, με σημείο αναφοράς τις ήδη διαπραγματεύσιμες τιμές και τα διαθέσιμα μέσα αντιστάθμισης. Δεν είναι πρόβλεψη της τιμής που θα συμφωνήσουν τελικά οι συναλλασσόμενοι ούτε υποδεικνύει αναγκαστικά μία μοναδική «δίκαιη» τιμή. Είναι, όμως, ουσιαστική πληροφορία κατά τη διαπραγμάτευση, επειδή προσδιορίζει ποιες τιμές παραβιάζουν τις σχέσεις αντιστάθμισης που συνεπάγεται η δεδομένη αγορά.

### 2. Συναλλαγή μέσα στα όρια: χρηματοδότηση της ασφαλούς αντιστάθμισης από άλλο χαρτοφυλάκιο

**Πωλητής.** Έστω ότι μπορεί να πουλήσει το νέο συμβόλαιο σε τιμή $p < Y^{\text{up}}$. Το ποσό που εισπράττει δεν αρκεί για να αγοράσει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο υπεραντιστάθμισης. Το απαιτούμενο επιπλέον κεφάλαιο είναι

$$F_{\text{S}} = Y^{\text{up}} - p > 0.$$

Ο πωλητής *μπορεί να επιλέξει* να καλύψει αυτό το ποσό μέσω εξωτερικής χρηματοδότησης. Μια δυνατότητα είναι να δημιουργήσει **δεύτερο χαρτοφυλάκιο**, ακόμη και πάνω σε άλλη μετοχή, για την οποία διαθέτει μια προγνωστική διαδικασία που θεωρεί αξιόπιστη. Για παράδειγμα, μπορεί να πραγματοποιήσει συναλλαγές με αρνητικό αρχικό καθαρό κόστος, δηλαδή με αρχική χρηματική εισροή $F_{\text{S}}$. Η ύπαρξη τέτοιας εκτελέσιμης κατασκευής δεν είναι αυτόματη: εξαρτάται από τα διαθέσιμα συμβόλαια και τους περιορισμούς χρηματοδότησης.

Αν το χρηματοδοτικό χαρτοφυλάκιο έχει αρχικό κόστος $c(Q) = -F_{\text{S}}$ και τελική απολαβή $Q_T(y)$, όπου $y$ είναι η τελική τιμή της δεύτερης μετοχής, η συνολική αρχική καθαρή δαπάνη είναι

$$\underbrace{Y^{\text{up}}}_{\text{αντιστάθμιση}} \quad \underbrace{-p}_{\text{πώληση νέου συμβολαίου}} \quad \underbrace{-F_{\text{S}}}_{\text{δεύτερο χαρτοφυλάκιο}} = 0.$$

Κατά τη λήξη το συνολικό αποτέλεσμα είναι

$$\Pi_{\text{S}}^{\text{total}}(x,y) = \underbrace{(H^+(x) - f(x))}_{\ge 0 \text{ για κάθε } x} + Q_T(y). \tag{28}$$

**Το πρώτο σκέλος καλύπτει πλήρως την υποχρέωση του νέου συμβολαίου.** Αυτό επιτυγχάνεται χωρίς καμία πρόβλεψη για την πρώτη μετοχή. Όμως το δεύτερο σκέλος

ενδέχεται να δημιουργεί υποχρεώσεις στο μέλλον. Συνεπώς, η μη αρνητικότητα του $H^+ - f$ **δεν συνεπάγεται** μηδενική ζημία του συνολικού συνδυασμού. Αν για παράδειγμα το επιπλέον ποσό $F_{\mathrm{S}}$ προέλθει από άτοκο δάνειο, η αντίστοιχη τελική υποχρέωση είναι $F_{\mathrm{S}}$ και το συνολικό αποτέλεσμα γίνεται $H^+(x) - f(x) - F_{\mathrm{S}}$, που μπορεί να είναι αρνητικό. Μια καλή πρόβλεψη για τη δεύτερη μετοχή μπορεί να δικαιολογεί την ανάληψη του κινδύνου της χρηματοδότησης, αλλά δεν μετατρέπει το ενδεχόμενο κέρδος σε βέβαιο κέρδος.

Για παράδειγμα, αν $Q_T(y) \geq \gamma_Q$ για $y \in B$, τότε $\Pi_{\mathrm{S}}^{\mathrm{total}}(x, y) \geq \gamma_Q$ για κάθε $x \geq 0$ και $y \in B$. Αν επιπλέον $Q_T(y) \geq -D_Q$ για όλα τα $y \geq 0$, η συνολική ζημία δεν υπερβαίνει το $D_Q$. Αυτές είναι νέες, *πρόσθετες* προδιαγραφές για το χρηματοδοτικό χαρτοφυλάκιο· δεν προκύπτουν αυτομάτως από το AFI.

Εδώ βρίσκεται και η πρακτική αξία του υπολογισμού της **ίδιας της βέλτιστης στρατηγικής**: *δεν αρκεί να ξέρει ο πωλητής το άνω άκρο*. Πρέπει να ξέρει ακριβώς ποιες θέσεις σχηματίζουν το $H^+$, πόσο κοστίζουν και επομένως πόσα επιπλέον χρήματα απαιτούνται στη συγκεκριμένη τιμή πώλησης.

**Αγοραστής.** Η αντίστοιχη βάση είναι το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο υποαντιστάθμισης $H^-$. Αν ο αγοραστής πληρώνει $p > Y^{\mathrm{low}}$, η αγορά του νέου συμβολαίου σε συνδυασμό με την πώληση του $H^-$ αφήνει χρηματοδοτικό κενό

$$F_{\mathrm{B}} = p - Y^{\mathrm{low}} > 0.$$

Μπορεί και αυτός να αναζητήσει εξωτερική χρηματοδότηση μέσω δεύτερου χαρτοφυλακίου $Q$ με $c(Q) = -F_{\mathrm{B}}$. Τότε η αρχική καθαρή δαπάνη είναι $p - Y^{\mathrm{low}} - F_{\mathrm{B}} = 0$, ενώ η τελική απολαβή είναι

$$\Pi_{\mathrm{B}}^{\mathrm{total}}(x, y) = \underbrace{(f(x) - H^-(x))}_{\geq 0 \text{ για κάθε } x} + Q_T(y). \tag{29}$$

Και εδώ το αντισταθμισμένο σκέλος του νέου συμβολαίου δεν δημιουργεί αρνητική τελική απολαβή, αλλά **ο συνολικός κίνδυνος εξαρτάται από το δεύτερο χαρτοφυλάκιο**. Η επιλογή του χρηματοδοτικού σκέλους μπορεί να βασίζεται σε μια χωριστή πρόβλεψη και σε ρητό όριο ζημίας.

## 3. Συναλλαγή έξω από τα όρια: κατασκευή εγγυημένου κέρδους

Η χρησιμότητα των βέλτιστων χαρτοφυλακίων είναι ακόμη πιο άμεση όταν η τιμή του νέου συμβολαίου βρίσκεται εκτός των ορίων.

**Αν ο πωλητής εισπράξει** $p > Y^{\mathrm{up}}$, αγοράζει το $H^+$ με κόστος $Y^{\mathrm{up}}$, πωλεί το νέο συμβόλαιο και καταθέτει τη θετική διαφορά $p - Y^{\mathrm{up}}$. Με μηδενικό επιτόκιο το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\Pi_{\mathrm{S}}(x) = H^+(x) - f(x) + (p - Y^{\mathrm{up}}) \geq p - Y^{\mathrm{up}} > 0 \qquad \forall x \geq 0. \tag{30}$$

**Αν ο αγοραστής αποκτήσει το συμβόλαιο σε** $p < Y^{\mathrm{low}}$, αγοράζει το νέο συμβόλαιο, πουλά το $H^-$ και καταθέτει τη διαφορά $Y^{\mathrm{low}} - p$. Τότε

$$\Pi_{\mathrm{B}}(x) = f(x) - H^-(x) + (Y^{\mathrm{low}} - p) \geq Y^{\mathrm{low}} - p > 0 \qquad \forall x \geq 0. \tag{31}$$

Πρόκειται για **εγγυημένο κέρδος** στο ιδεατό μοντέλο του κεφαλαίου, όχι για κέρδος που προϋποθέτει επιτυχία κάποιας πρόβλεψης. Η εφαρμογή του απαιτεί να μπορούν πράγματι να εκτελεστούν οι θέσεις που προσδιορίζουν τα $H^+$ και $H^-$. Γι' αυτό η γνώση μόνο των δύο αριθμητικών άκρων, χωρίς τις αντίστοιχες ποσότητες αγοράς και πώλησης, δεν παρέχει ολοκληρωμένη επενδυτική στρατηγική.

### Εφαρμογή στο προηγούμενο αριθμητικό παράδειγμα

Για το νέο call με strike $105$ βρήκαμε $Y^{\text{low}} = 2$ και $Y^{\text{up}} = 4$, μαζί με

$$H^+(x) = \tfrac{1}{2}\,(x-100)^+ + \tfrac{1}{2}\,(x-110)^+, \qquad H^-(x) = (x-110)^+.$$

Αν ο πωλητής λάβει $p = 3$, χρειάζεται επιπλέον $F_S = 1$ για να αποκτήσει το $H^+$. Αν το ποσό αυτό εξασφαλιστεί με δεύτερο χαρτοφυλάκιο $Q$, το τελικό συνολικό αποτέλεσμα είναι $H^+(x) - f(x) + Q_T(y)$, που *δεν είναι απαραίτητα μη αρνητικό*. Αν, αντίθετα, πουλήσει σε $p = 5$, η ίδια αντιστάθμιση του εξασφαλίζει κέρδος τουλάχιστον $1$ για κάθε $x \geq 0$, χωρίς δεύτερο χαρτοφυλάκιο.

Αν ο αγοραστής πληρώσει $p = 3$, μπορεί να πουλήσει το $H^-$, εισπράττοντας $2$, και να καλύψει το επιπλέον $1$ με άλλο χαρτοφυλάκιο. Εάν αντίθετα αγοράσει το νέο call προς $p = 1$, η αγορά του νέου συμβολαίου μαζί με την πώληση του $H^-$ εξασφαλίζει κέρδος τουλάχιστον $1$ σε κάθε τελική τιμή.

**Συμπέρασμα.** Το AFI είναι ταυτόχρονα *ένδειξη τάξης μεγέθους της αξίας* και *εργαλείο κατασκευής συναλλαγών*. Μέσα στα όρια, επιτρέπει τον σχεδιασμό αντιστάθμισης με πιθανή ανάγκη εξωτερικής χρηματοδότησης, της οποίας ο κίνδυνος πρέπει να εξετάζεται χωριστά. Έξω από τα όρια, υπό τις υποθέσεις του υποδείγματος, προσφέρει συγκεκριμένα χαρτοφυλάκια εγγυημένου κέρδους για τον πωλητή ή τον αγοραστή, αντίστοιχα.

## 5.7 Συνδυασμός με τα προσωπικά όρια της δεύτερης εφαρμογής

Για την ίδια αγορά, η δεύτερη εφαρμογή έδωσε ελάχιστο αποδεκτό τίμημα πωλητή $3{,}6$ και μέγιστο αποδεκτό τίμημα αγοραστή $5{,}6$, επειδή οι δύο επενδυτές αποδέχονται ζημία έως $4$ ευρώ και στοχεύουν σε κέρδος μόνο στα αντίστοιχα σύνολα πρόβλεψης. Όμως το AFI είναι $(2, 4)$.

**Η διάκριση έχει πρακτική σημασία.** Οι προσωπικοί υπολογισμοί δηλώνουν σε ποια τιμή η *συγκεκριμένη* στατική στρατηγική πληροί τις προδιαγραφές του επενδυτή. Δεν συνεπάγονται ότι κάθε τέτοια τιμή είναι απαλλαγμένη από αρμπιτράζ. Στην ιδεατή αγορά του παραδείγματος, μια τιμή κοινά αποδεκτή *και* χωρίς pointwise αρμπιτράζ μπορεί να επιλεγεί στο

$$[3{,}6,\, 5{,}6] \cap (2, 4) = [3{,}6,\, 4).$$

Για παράδειγμα, στην τιμή $p = 3{,}8$ ο πωλητής μπορεί να χρησιμοποιήσει το αρχικό του χαρτοφυλάκιο και να διατηρήσει επιπλέον $0{,}2$ ευρώ. Ο αγοραστής μπορεί να χρησιμοποιήσει το δικό του συμπληρωματικό χαρτοφυλάκιο και να διατηρήσει επιπλέον $1{,}8$ ευρώ. Έτσι και οι δύο πετυχαίνουν τους προσωπικούς περιορισμούς τους, ενώ η τιμή βρίσκεται μέσα στο AFI.

Αν ο αγοραστής ήταν διατεθειμένος να πληρώσει πάνω από το $Y^{\text{up}}$, θα έπρεπε επίσης να εξετάσει αν τον συμφέρει περισσότερο να αγοράσει απευθείας το φθηνότερο χαρτοφυλάκιο υπεραντιστάθμισης αντί για το νέο συμβόλαιο. Η ανάλυση με πρόβλεψη εξηγεί τις προτιμήσεις του, αλλά δεν αναιρεί τις σχέσεις κυριαρχίας μεταξύ διαθέσιμων τίτλων.

# 6 Ενιαία μαθηματική εικόνα

Οι τρεις εφαρμογές στηρίζονται στην ίδια απλή αρχή: **επιλέγουμε μια συνάρτηση κέρδους, θέτουμε επιθυμητά κάτω φράγματα σε κατάλληλα σύνολα τελικών τιμών και χρησιμοποιούμε τη γεωμετρία για να αντικαταστήσουμε τις άπειρες απαιτήσεις με πεπερασμένες ανισότητες.**

| Εφαρμογή | Ποσότητα που βελτιστοποιούμε | Τι εγγυάται η λύση |
|---|---|---|
| Επένδυση δεδομένου $Y$ | $\max \gamma$ με $c(z) = Y$ | Κέρδος τουλάχιστον $\gamma$ στο $A$, ζημία το πολύ $D$ παντού. |
| Πωλητής / αγοραστής με πρόβλεψη | $\min Y_{\mathrm{S}}$ / $\max Y_{\mathrm{B}}$ | Αποδεκτό τίμημα και συγκεκριμένη αντιστάθμιση με στόχο κέρδους στο $A$ και όριο ζημίας. |
| Άνω / κάτω όριο AFI | $\min c(z)$ με $H_z \geq f$ / $\max c(z)$ με $H_z \leq f$ | Φράγματα τιμής που προκύπτουν χωρίς πρόβλεψη και με μη αρνητικό αποτέλεσμα σε κάθε κατάσταση. |

Σε κάθε πρόβλημα η λύση δεν είναι μόνο η βέλτιστη αριθμητική τιμή. Περιλαμβάνει τις ποσότητες $b, \Delta, \alpha_i, \beta_j$: δηλαδή μια **εκτελέσιμη περιγραφή συναλλαγών**, υπό τις ρητές παραδοχές για διαιρετότητα, δυνατότητα πώλησης, δανεισμό και χρηματοδότηση. Η μαθηματική εξασφάλιση αφορά το κέρδος κατά τη λήξη, όχι την ενδιάμεση πορεία ή τις υποχρεώσεις περιθωρίου ασφαλείας.

Η βασική μέθοδος είναι ντετερμινιστική. Το $A$ επιλέγεται από τον επενδυτή και **δεν εισάγει από μόνο του πιθανότητα**. Το AFI, αντιθέτως, δεν προϋποθέτει ούτε επιλογή $A$. Στην πραγματική αγορά μπορούν να προστεθούν διαφορές bid--ask, όρια ρευστότητας, ακέραιες ποσότητες, απαιτήσεις περιθωρίου ή περιορισμοί δανεισμού, αλλά αυτοί είναι *πρόσθετοι* περιορισμοί πάνω στον ίδιο γεωμετρικό πυρήνα.

## 7 Προτεινόμενες ασκήσεις

**Άσκηση 1 -- Κεφάλαιο και εγγυημένο κέρδος.** Έστω $S_0 = 100$, $C(100) = 7$, $C(115) = 2$, $Y = 90$, $D = 45$, και πρόβλεψη $A = [115, 130]$. Επιτρέπονται $n \geq 0$ μονάδες του spread $(x - 100)^+ - (x - 115)^+$ και μετρητά $b \geq 0$. Να διατυπώσετε το πρόβλημα μεγιστοποίησης του ελάχιστου κέρδους στο $A$, να βρείτε τη βέλτιστη ποσότητα $n$ και να σχεδιάσετε τη συνάρτηση κέρδους.

**Άσκηση 2 -- Πωλητής νέου δικαιώματος.**

Διαπραγματεύονται calls με strikes $90, 100, 110$ και αντίστοιχες τιμές $14, 7, 3$. Θεωρούμε $S_0 = 100$. Ένα νέο δικαίωμα έχει απολαβή $f(x) = (x - 105)^+$. Ο πωλητής προβλέπει $A = [90, 100]$, επιθυμεί κέρδος τουλάχιστον $2$ και αποδέχεται ζημία το πολύ $5$. Να γράψετε *όλες* τις γραμμικές ανισότητες του προβλήματος ελαχιστοποίησης του απαιτούμενου τιμήματος.

**Άσκηση 3 -- Αγοραστής νέου δικαιώματος.** Με τα δεδομένα της Άσκησης 2, ο αγοραστής προβλέπει $A = [110, 125]$, απαιτεί κέρδος τουλάχιστον $3$ και δέχεται ζημία έως $5$. Να διατυπώσετε το πρόβλημα μεγιστοποίησης του τιμήματος και να εξηγήσετε τη σημασία του περιορισμού $c(z) = -Y$.

**Άσκηση 4 -- Διάστημα χωρίς αρμπιτράζ.** Για το ίδιο νέο συμβόλαιο $f(x) = (x - 105)^+$ να γράψετε τα δύο πεπερασμένα γραμμικά προγράμματα που υπολογίζουν το άνω και το κάτω όριο του AFI. Να επισημάνετε σε ποια σημεία πρέπει να ελεγχθούν οι ανισότητες και γιατί χρειάζεται συνθήκη στην κλίση του τελευταίου κλάδου.

Σημείωση: Τα γεωμετρικά θεωρήματα που χρησιμοποιούνται εδώ έχουν ήδη αποδειχθεί στο κεφάλαιο «Γεωμετρία των συναρτήσεων κέρδους» των σημειώσεων. Το παρόν κεφάλαιο δίνει τη μαθηματική μοντελοποίηση και εφαρμογή τους και όχι δεύτερες αποδείξεις των ίδιων αποτελεσμάτων.