

Χρηματοοικονομική Μηχανική με Python

Financial Engineering with Python

Καθηγητής Νικόλαος Χαλιδιάς

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών-Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Ελλάδα

Περιεχόμενα

Πρόλογος	5
1 Βασικοί ορισμοί	7
1.1 Μετοχές	7
1.2 Δικαιώματα προαίρεσης	9
1.3 Διαμόρφωση των τιμών των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης	10
1.3.1 Δυνατές τιμές ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης χωρίς μερίσματα	11
1.3.2 Ισοτιμία δικαιωμάτων πώλησης--αγοράς	13
1.3.3 Διάστημα τιμών χωρίς αρμπιτράζ	15
1.4 Εξωχρηματιστηριακή αγορά (OTC)	17
1.5 Προθεσμιακά συμβόλαια και συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης	18
1.6 Θέση αγοράς	19
1.7 Θέση πώλησης	20
1.7.1 Βασικές στρατηγικές δικαιωμάτων	21
1.8 Ασκήσεις	22
2 Χαρτοφυλάκια	26
2.1 Συνάρτηση κέρδους ή συνάρτηση απολαβής	26
2.2 Ασκήσεις	30
3 Προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού	34
3.1 Γραμμικός προγραμματισμός: βασική θεωρία	35
3.2 Ασκήσεις εφαρμογής	42
3.3 Ασκήσεις	43
4 Βέλτιστα Χαρτοφυλάκια	46
4.1 Ασκήσεις	54
5 Αρμπιτράζ	58
5.1 Ισοτιμία δικαιώματος αγοράς--πώλησης και αρμπιτράζ	59
5.2 Ασκήσεις	60
6 Θεωρία Επιλογής Markowitz και Αξία σε Κίνδυνο	63
6.1 Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων	63
6.2 Το πρόβλημα	63
6.3 Θεωρητική λύση του προβλήματος Markowitz	64
6.4 Τρία προβλήματα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου	65
6.4.1 Χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης	65
6.4.2 Χαρτοφυλάκια μέγιστης απόδοσης για δεδομένο κίνδυνο	66

6.4.3	Μεγιστοποίηση απόδοσης με ποινή διακύμανσης	66
6.5	Αξία σε Κίνδυνο	66
6.6	Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων (CAPM)	67
6.6.1	Εκτίμηση των α και β	68
6.6.2	Το CAPM ως εργαλείο πρόβλεψης	68
6.7	Χρήση του CAPM για χαρτοφυλάκιο τριών μετοχών	68
6.8	Ασκήσεις	69
7	Γενίκευση της Θεωρίας Markowitz	72
7.1	Διαχωρισμός πρόβλεψης και κατασκευής χαρτοφυλακίου	75
7.2	Νέος τύπος πολυμετοχικών δικαιωμάτων: δικαιώματα συσχέτισης	75
7.3	Ασκήσεις	77
8	Δυναμικές Συναλλαγές	80
8.1	Ασκήσεις	82
9	Τιμολόγηση Δικαιωμάτων	85
9.1	Διωνυμικό Υπόδειγμα	85
9.1.1	Ασκήσεις	89
9.2	Υπόδειγμα Black--Scholes	92
9.2.1	Μετασχηματισμός της εξίσωσης Black--Scholes στην εξίσωση θερμότητας	93
9.2.2	Αξία ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς	93
9.2.3	Ιστορική και τεκμαρτή μεταβλητότητα	94
9.3	Μεταβλητότητα στο $[0, T]$, περιορισμοί αντιστάθμισης και τιμολόγηση χωρίς μοντέλο	94
9.3.1	Το χαμόγελο μεταβλητότητας	95
9.3.2	Ασκήσεις	96
10	Διαστήματα τιμών και αντιστάθμιση δικαιωμάτων	98
10.1	Διάστημα τιμών χωρίς αρμπιτράζ	98
10.2	Δίκαιες τιμές δικαιωμάτων ανεξάρτητες από μοντέλο	100
10.3	Αντιστάθμιση ενός δικαιώματος	103
10.4	Ασκήσεις για τα διαστήματα τιμών και την αντιστάθμιση	105
11	Δικαιώματα εξαρτώμενα από τη διαδρομή	108
11.1	Τιμολόγηση και δυναμική αντιστάθμιση	108
11.2	Ασκήσεις	109
12	Αριθμητική προσέγγιση στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων	112
12.1	Ισχυρή τάξη ένα του ημιδιακριτού σχήματος	112
12.1.1	Μοντέλο και αριθμητικό σχήμα	112
12.1.2	Κύριο αποτέλεσμα	112
12.1.3	Προπαρασκευαστικές εκτιμήσεις	113
12.1.4	Βήμα 1: ανάπτυγμα Itô--Taylor της ακριβούς λύσης	113
12.1.5	Βήμα 2: το ημιδιακριτό σχήμα ως Milstein με υπόλοιπο	114
12.1.6	Βήμα 3: αναδρομή του σφάλματος	114
12.1.7	Ολοκλήρωση της απόδειξης	115
12.2	Καλή τοποθέτηση και ακριβής λύση της SDE	115
12.2.1	Ύπαρξη και μοναδικότητα καθολικής ισχυρής λύσης	115

12.2.2 Ακριβής λύση σε κλειστή μορφή	116
--	-----

Πρόλογος

Ο τίτλος *Χρηματοοικονομική Μηχανική με Python* επιλέχθηκε σκόπιμα, ώστε να αποδώσει τον κεντρικό στόχο του βιβλίου: την παρουσίαση τεχνικών της χρηματοοικονομικής μαθηματικής οι οποίες είναι όχι μόνο θεωρητικά αυστηρές, αλλά και άμεσα εφαρμόσιμες στην πράξη.

Στη συνέχεια συνοψίζονται τα βασικά συμπεράσματα του βιβλίου.

- Διαχωρίζοντας την προγνωστική μοντελοποίηση από την κατασκευή χαρτοφυλακίου, μπορούμε να σχεδιάζουμε χαρτοφυλάκια που επιτυγχάνουν την επιθυμητή απολαβή σε συγκεκριμένα σενάρια της αγοράς. Αυτό πραγματοποιείται με στρατηγικό συνδυασμό ήδη διαπραγματεύσιμων δικαιωμάτων αγοράς (call options) και δικαιωμάτων πώλησης (put options), προσφέροντας μια φυσική επέκταση του πλαισίου μέσης τιμής--διακύμανσης του Markowitz.

Ο διαχωρισμός του σταδίου πρόβλεψης επιτρέπει την ανάπτυξη προηγμένων τεχνικών πρόγνωσης, πέρα από την απλή χρήση μέσων τιμών και διακυμάνσεων. Είναι σαφές ότι η μελλοντική συμπεριφορά των τιμών εξαρτάται από παλαιότερα, πρόσφατα και επερχόμενα γεγονότα και όχι μόνο από ιστορικά αριθμητικά δεδομένα. Στόχος μας είναι, επομένως, να χρησιμοποιούμε μια δεδομένη πρόβλεψη ως βάση για την κατασκευή του βέλτιστου χαρτοφυλακίου που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο σενάριο.

- Στο πλαίσιο της τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης εισάγουμε μια έννοια δίκαιης αξίας ανεξάρτητη από μοντέλο, η οποία δεν βασίζεται σε παράμετρο μεταβλητότητας, και αποδεικνύουμε ότι αποτελεί τη μοναδική δίκαιη τιμή που παραμένει χωρίς αρμπιτράζ ως προς τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης που είναι ήδη εισηγμένα στην αγορά. Για να μπορέσουν τα δύο μέρη να συμφωνήσουν, μια αποτελεσματική μέθοδος προσδιορισμού δίκαιης τιμής πρέπει να είναι ανεξάρτητη από μοντέλο. Αντίθετα, η τιμή Black--Scholes:

- εξαρτάται από μια υποθετική μεταβλητότητα και, επομένως, είναι **μη μοναδική**,
- επειδή δεν ενσωματώνει τις επικρατούσες τιμές των δικαιωμάτων, δεν είναι κατ' ανάγκη **χωρίς αρμπιτράζ** ως προς αυτές,
- δεν είναι **δίκαιη**, διότι κανείς δεν μπορεί να κατασκευάσει το προτεινόμενο αναπαραγωγικό χαρτοφυλάκιο.

- Τέλος, εξετάζουμε δικαιώματα που εξαρτώνται από τη διαδρομή της τιμής και παρουσιάζουμε μια μέθοδο τιμολόγησης και αντιστάθμισης κινδύνου, βασισμένη σε συστηματική στρατηγική «πώλησε ψηλά, αγόρασε χαμηλά».

Το βιβλίο αντιστοιχεί σε δύο εξαμηνιαία μαθήματα. Στο πρώτο εξάμηνο μπορούν να διδαχθούν τα Κεφάλαια 1--7, καθώς και οι Ενότητες 9.3 και 9.4. Το υπόλοιπο υλικό

μπορεί να διδαχθεί στο δεύτερο εξάμηνο, αφού αφιερωθεί επαρκής χρόνος στη Θεωρία Πιθανοτήτων και στη Στοχαστική Ανάλυση.

Κώδικες Python σχετικοί με το περιεχόμενο των σημειώσεων είναι διαθέσιμοι στη διεύθυνση

<https://github.com/nikoshalidias/Financial-Engineering>

Στα συμπιεσμένα αρχεία περιλαμβάνονται επίσης δύο αρχεία PDF με μαθήματα Python και LaTeX, τα οποία έχουν προετοιμαστεί εξ ολοκλήρου με τη βοήθεια Τεχνητής Νοημοσύνης. Το σύστημα στοιχειοθεσίας LaTeX φαίνεται ιδιαίτερα χρήσιμο για την επικοινωνία με συστήματα Τεχνητής Νοημοσύνης όταν αντιμετωπίζουμε σύνθετα μαθηματικά προβλήματα.

Νικόλαος Χαλιδιάς
Εργαστήριο Αναλογιστικών--Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Κεφάλαιο 1

Βασικοί ορισμοί

*Οι τιμές των μετοχών και των συμβολαίων που συνδέονται με αυτές καθορίζονται από την προσφορά και τη ζήτηση. Εξίσου κρίσιμη, όμως, είναι η έννοια του **αρμπιτράζ (arbitrage)**, δηλαδή η δυνατότητα πραγματοποίησης κέρδους χωρίς κίνδυνο.*

1.1 Μετοχές

Ορισμός 1.1. Μετοχή είναι η κυριότητα μίας μονάδας του μετοχικού κεφαλαίου μιας εταιρείας.

Η τιμή μιας μετοχής διαμορφώνεται μέσω της καθημερινής διαπραγμάτευσης. Οι μέτοχοι που επιθυμούν να πουλήσουν καταχωρίζουν την αντίστοιχη εντολή στο χρηματιστήριο, ενδεχομένως δηλώνοντας την ελάχιστη αποδεκτή τιμή πώλησης, και οι ενδιαφερόμενοι αγοραστές υποβάλλουν εντολές αγοράς. Όταν η ζήτηση για αγορά μετοχών υπερβαίνει το πλήθος των μετοχών που προσφέρονται προς πώληση, η τιμή συνήθως αυξάνεται· στην αντίθετη περίπτωση μειώνεται. Η τιμή της τελευταίας συναλλαγής μιας ημέρας θεωρείται συνήθως η τιμή κλεισίματος της μετοχής για τη συγκεκριμένη ημέρα. Είναι προφανές ότι κανείς δεν μπορεί να προβλέψει με βεβαιότητα την τιμή της μετοχής την επόμενη ημέρα. Μπορεί, βέβαια, να εκτιμήσει ότι ίσως υπάρξει αυξημένο αγοραστικό ενδιαφέρον, για παράδειγμα επειδή η εταιρεία πρόκειται να επεκτείνει τις δραστηριότητές της. Ακόμη και τότε, όμως, κανείς δεν μπορεί να προβλέψει ακριβώς πόσο θα αυξηθεί η τιμή, εφόσον πράγματι αυξηθεί.

Ορισμός 1.2 (Ειδικοί διαπραγματευτές). Ειδικός διαπραγματευτής ή πάροχος ρευστότητας (market maker or liquidity provider) είναι μια εταιρεία ή ένα φυσικό πρόσωπο που ανακοινώνει ταυτόχρονα τιμή αγοράς και τιμή πώλησης για ένα διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο το οποίο διατηρεί στο χαρτοφυλάκιό του, επιδιώκοντας να κερδίσει από τη διαφορά των δύο τιμών. Η διαφορά αυτή ονομάζεται άνοιγμα τιμών αγοράς--πώλησης (bid--ask spread).

Ορισμός 1.3 (Άνοιγμα τιμών αγοράς--πώλησης). Το άνοιγμα τιμών αγοράς--πώλησης (bid--ask spread, επίσης bid--offer spread) είναι η διαφορά μεταξύ της τιμής που προσφέρεται για άμεση πώληση (ask) και της τιμής που προσφέρεται για άμεση αγορά (bid). Οι τιμές μπορεί να ανακοινώνονται από έναν ειδικό διαπραγματευτή ή να προκύπτουν από το βιβλίο εντολών. Η έννοια εφαρμόζεται σε μετοχές, συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, δικαιώματα προαίρεσης και ζεύγη νομισμάτων. Το μέγεθος του ανοίγματος αποτελεί ένδειξη τόσο της ρευστότητας της αγοράς όσο και του κόστους συναλλαγής. Αν το άνοιγμα είναι μηδενικό, το περιουσιακό στοιχείο θεωρείται, ως προς αυτή την πηγή κόστους, χωρίς τριβές.

Δυναμική του ανοίγματος τιμών αγοράς--πώλησης Το άνοιγμα τιμών αγοράς--πώλησης μιας μετοχής δεν είναι σταθερό. Μεταβάλλεται σημαντικά με τον χρόνο, ανάλογα με τις συνθήκες της αγοράς και τη συναλλακτική δραστηριότητα. Οι βασικοί παράγοντες που εξηγούν αυτές τις μεταβολές είναι οι ακόλουθοι:

- **Ρευστότητα:** Οι μετοχές υψηλής ρευστότητας, όπως οι μετοχές εταιρειών μεγάλης κεφαλαιοποίησης με υψηλό ημερήσιο όγκο συναλλαγών, έχουν συνήθως πολύ μικρό άνοιγμα, συχνά λίγων μόνο λεπτών του νομίσματος. Αντίθετα, οι μη ρευστές μετοχές εμφανίζουν συχνά μεγαλύτερο άνοιγμα, επειδή υπάρχουν λιγότερες διαθέσιμες εντολές αγοράς και πώλησης.
- **Ώρα της ημέρας:** Το άνοιγμα είναι συνήθως μεγαλύτερο κατά την έναρξη και τη λήξη της συνεδρίασης, όταν το βιβλίο εντολών είναι αραιότερο και η αβεβαιότητα υψηλότερη. Στο μέσο της συνεδρίασης, καθώς βελτιώνεται η ρευστότητα, το άνοιγμα συνήθως περιορίζεται.
- **Αβεβαιότητα:** Όταν αυξάνεται η μεταβλητότητα, για παράδειγμα κατά την ανακοίνωση αποτελεσμάτων ή ύστερα από απρόβλεπτες ειδήσεις, οι ειδικοί διαπραγματευτές διευρύνουν το άνοιγμα, ώστε να προστατευθούν από τη δυσμενή επιλογή και τον αυξημένο κίνδυνο.
- **Συνθήκες αγοράς:** Σε περιόδους έντασης ή κρίσης, όπως κατά τη διάρκεια χρηματοοικονομικών καταρρεύσεων ή αιφνιδίων μακροοικονομικών διαταραχών, τα ανοίγματα τείνουν να διευρύνονται ακόμη και για πολύ ρευστές μετοχές. Αντίθετα, σε ήρεμες και σταθερές αγορές παραμένουν μικρά.

Συνεπώς, το άνοιγμα τιμών αγοράς--πώλησης είναι ένα δυναμικό μέτρο που αντανακλά τόσο τη ρευστότητα όσο και την αντίληψη κινδύνου στην αγορά σε κάθε χρονική στιγμή. Αποτελεί, επομένως, σημαντική συνιστώσα του κόστους για τους διαπραγματευτές και τους επενδυτές, ιδίως όταν συναλλάσσονται λιγότερο ρευστούς τίτλους ή όταν επικρατεί αυξημένη αβεβαιότητα.

Παράδειγμα βιβλίου εντολών και ρευστότητας Θεωρούμε το ακόλουθο απλοποιημένο βιβλίο εντολών:

Ask (εντολές πώλησης)		Bid (εντολές αγοράς)	
\$101.00	× 200	\$99.00	× 150
\$100.50	× 300	\$98.50	× 250
\$100.20	× 100	\$98.00	× 300

Έστω ότι ένας επενδυτής θέλει να αγοράσει 500 μετοχές στην τρέχουσα τιμή της αγοράς.

- Οι πρώτες 100 μετοχές αγοράζονται στην τιμή \$100.20.
- Οι επόμενες 300 μετοχές αγοράζονται στην τιμή \$100.50.
- Απομένουν 100 μετοχές, οι οποίες αγοράζονται στην τιμή \$101.00.

Παρότι η καλύτερη τιμή πώλησης είναι \$100.20, ο επενδυτής δεν μπορεί να αγοράσει και τις 500 μετοχές σε αυτή την τιμή, επειδή διατίθενται μόνο 100 μετοχές. Η μέση τιμή αγοράς θα είναι υψηλότερη, γεγονός που αντανακλά την περιορισμένη ρευστότητα της αγοράς.

Το παράδειγμα εξηγεί γιατί η ρευστότητα είναι κρίσιμη: καθορίζει όχι μόνο αν μια συναλλαγή μπορεί να εκτελεστεί άμεσα, αλλά και την επίδραση μιας μεγάλης εντολής στην τελική τιμή συναλλαγής.

Εργαστήριο 1.4 (Λήψη ιστορικών τιμών). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε στο Colab το αρχείο Python `DownloadPastData.ipynb`, με το οποίο είναι δυνατή η λήψη ιστορικών αριθμητικών δεδομένων από το Yahoo Finance για οποιαδήποτε μετοχή και για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα επιλέξετε. Αν δεν γνωρίζετε πώς να χρησιμοποιήσετε τον κώδικα, μπορείτε να τον μεταφορτώσετε σε ένα σύστημα Τεχνητής Νοημοσύνης και να ζητήσετε επεξηγήσεις. Ζητήστε, επίσης, να σας εξηγήσει τι είναι η απόδοση μιας μετοχής και πώς υπολογίζονται η μέση τιμή και η διακύμανσή της από τα ιστορικά δεδομένα που κατεβάσατε.

Εκτός από τις μετοχές υπάρχουν, βέβαια, και άλλα χρηματοοικονομικά προϊόντα. Θα μελετήσουμε τα λεγόμενα παράγωγα, και ειδικότερα τα δικαιώματα προαίρεσης που έχουν ως υποκείμενο τίτλο μια μετοχή.

1.2 Δικαιώματα προαίρεσης

Τα δικαιώματα προαίρεσης έχουν μακρά ιστορία. Ήδη από τον 6ο αιώνα π.Χ., ο Αριστοτέλης περιγράφει τον Θαλή τον Μιλήσιο να χρησιμοποιεί μια μορφή «δικαιωμάτων» πάνω σε ελαιοτριβεία, ώστε να εξασφαλίσει τη μελλοντική χρήση τους. Τον 17ο αιώνα, κατά την περίοδο της τουλιπομανίας, διαπραγματεύονταν στη Δημοκρατία των Κάτω Χωρών δικαιώματα πάνω σε μετοχές, τα οποία κατέγραψε ο Joseph de la Vega στο έργο του *Confusion of Confusions* το 1688. Κατά τον 18ο και τον 19ο αιώνα αναπτύχθηκαν στο Λονδίνο και στο Άμστερνταμ, κυρίως στην εξωχρηματιστηριακή αγορά, ενώ στις Ηνωμένες Πολιτείες του 19ου αιώνα διαπραγματεύονταν από μεσίτες εκτός των επίσημων χρηματιστηριακών αιθουσών.

Σημαντικό επιστημονικό ορόσημο αποτέλεσε το 1900 η διδακτορική διατριβή του Louis Bachelier, *Théorie de la spéculation*, στην οποία εισήχθη ένα στοχαστικό μοντέλο τιμών, βασισμένο στην αριθμητική κίνηση Brown, καθώς και ένας πρώιμος τύπος αποτίμησης δικαιωμάτων. Η καθοριστική μεταβολή στην πράξη ήρθε το 1973 με την ίδρυση του Chicago Board Options Exchange, τη δημιουργία του Options Clearing Corporation και τη δημοσίευση του μοντέλου Black--Scholes--Merton, εξελίξεις που επέτρεψαν την τυποποίηση και τη μαζική τιμολόγηση. Ακολούθησαν δικαιώματα πάνω σε δείκτες, όπως ο S&P 100 το 1983, δικαιώματα πάνω σε νομίσματα και επιτόκια, δικαιώματα VIX το 2006, η εξάπλωση των ηλεκτρονικών συναλλαγών και, από τη δεκαετία του 2010, εβδομαδιαία και μικρού μεγέθους συμβόλαια, μαζί με έντονη αύξηση της συμμετοχής ιδιωτών επενδυτών. Έτσι, τα δικαιώματα προαίρεσης εδραιώθηκαν ως βασικά εργαλεία αντιστάθμισης κινδύνου, τιμολόγησης και κερδοσκοπίας.

Ορισμός 1.5. Ένα δικαίωμα αγοράς (call option) ή ένα δικαίωμα πώλησης (put option) είναι συμβόλαιο που παρέχει στον κάτοχό του το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει ή να πουλήσει συγκεκριμένη ποσότητα ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου σε προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης, κατά ή πριν από μια προκαθορισμένη ημερομηνία, ανάλογα με τον τύπο του δικαιώματος.

Ας περιγράψουμε αναλυτικότερα τα δύο είδη δικαιωμάτων. Θεωρούμε μια μετοχή με σημερινή τιμή S_0 , μια ποσότητα K που ονομάζεται τιμή εξάσκησης και μια μελλοντική χρονική στιγμή T , την ημερομηνία λήξης, για παράδειγμα μετά από τρεις μήνες. Οι απολαβές των δύο δικαιωμάτων είναι

$$\begin{aligned}(S_T - K)^+ &= \max(S_T - K, 0) \quad \text{δικαίωμα αγοράς,} \\ (K - S_T)^+ &= \max(K - S_T, 0) \quad \text{δικαίωμα πώλησης.}\end{aligned}$$

Παρατήρηση 1.6 (Πώς προκύπτουν οι απολαβές). Στην πράξη, ο πωλητής ενός δικαιώματος αγοράς υποχρεούται, όταν $S_T > K$, να παραδώσει στον αγοραστή μία μετοχή στην τιμή K . Ο αγοραστής καταβάλλει K , παραλαμβάνει τη μετοχή και μπορεί να την πουλήσει αμέσως στην αγορά στην τιμή S_T , αποκομίζοντας τη διαφορά $(S_T - K)^+$. Από την πλευρά του, ο πωλητής πρέπει να παραδώσει τη μετοχή στην τιμή K και, αν δεν την κατέχει, να την αγοράσει στην τιμή S_T , υφιστάμενος την αντίστοιχη ζημία.

Στην περίπτωση δικαιώματος πώλησης, όταν $S_T < K$, ο πωλητής του δικαιώματος υποχρεούται να αγοράσει μία μετοχή από τον αγοραστή στην τιμή K . Ο αγοραστής μπορεί να προμηθευτεί τη μετοχή στην αγορά στην τιμή S_T και να την παραδώσει στον πωλητή του δικαιώματος έναντι K , κερδίζοντας $(K - S_T)^+$. Συνεπώς, ο πωλητής έχει την υποχρέωση, ενώ ο αγοραστής έχει την επιλογή αν θα εξασκήσει το δικαίωμα.

Για παράδειγμα, αν αγοράσουμε ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης $K = 220$ καταβάλλοντας τίμημα $Y = 30$, τότε το κέρδος του κατόχου κατά τη λήξη T είναι

$$(S_T - K)^+ - Y = (S_T - 220)^+ - 30.$$

Η τιμή S_T είναι άγνωστη και μπορεί να είναι οποιοσδήποτε μη αρνητικός αριθμός. Επομένως, η συνάρτηση κέρδους είναι

$$\Pi(x) = (x - 220)^+ - 30.$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα με κατάλληλο λογισμικό. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση λαμβάνει και αρνητικές τιμές, γεγονός που σημαίνει ότι υπάρχει ενδεχόμενο ζημίας.

Ο αγοραστής ενός δικαιώματος μπορεί να το διακρατήσει μέχρι τη λήξη του ή να το πουλήσει νωρίτερα. Η τιμή πώλησης πριν από τη λήξη καθορίζεται από την προσφορά και τη ζήτηση. Συνεπώς, μπορεί να προκύψει κέρδος και από την πρόωρη πώληση του δικαιώματος, εφόσον η τιμή πώλησης υπερβαίνει το τίμημα που είχε καταβληθεί.

1.3 Διαμόρφωση των τιμών των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης

Οι τιμές των μετοχών και των αντίστοιχων συμβολαίων διαμορφώνονται μέσω της προσφοράς και της ζήτησης. Παράλληλα, ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο διαδραματίζει η έννοια του **αρμπιτράζ**, δηλαδή η δυνατότητα επίτευξης κέρδους χωρίς κίνδυνο. Η έννοια

αυτή συμβάλλει ουσιαστικά στη διαμόρφωση των τιμών: όταν εμφανίζεται στην αγορά μια ευκαιρία κέρδους χωρίς κίνδυνο, οι επενδυτές σπεύδουν να την εκμεταλλευθούν, με αποτέλεσμα οι τιμές να μεταβάλλονται μέχρι η ευκαιρία να εξαφανιστεί. Για να αξιοποιηθεί μια τέτοια δυνατότητα, πρέπει να αγοράσουμε κάτι φθηνά και να πουλήσουμε κάτι ακριβά.

Συμβολισμοί και υποθέσεις

Θέτουμε:

- S : σημερινή τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου,
- K : τιμή εξάσκησης,
- r : επιτόκιο χωρίς κίνδυνο με συνεχή ανατοκισμό,
- T : χρόνος μέχρι τη λήξη,
- C : τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς,
- P : τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης.

Υποθέτουμε ότι το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο δεν καταβάλλει μερίσματα και ότι δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών. Οι ανισότητες που ακολουθούν προκύπτουν από την απουσία αρμπιτράζ.

1.3.1 Δυνατές τιμές ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης χωρίς μερίσματα

Δικαίωμα αγοράς: κάτω φράγμα

$$C \geq \max(0, S - Ke^{-rT}).$$

Επιχείρημα αρμπιτράζ: Αν $C < S - Ke^{-rT}$, κατασκευάζουμε το ακόλουθο χαρτοφυλάκιο: αγοράζουμε ένα δικαίωμα αγοράς, με κόστος C , και πουλάμε ανοικτά μία μονάδα του υποκείμενου τίτλου. Τότε $S - C > Ke^{-rT}$ και μπορούμε να επενδύσουμε το ποσό $S - C$ στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r .

Κατά τη λήξη:

- Αν $S_T > K$, εξασκούμε το δικαίωμα, καταβάλλουμε K και παραλαμβάνουμε τη μετοχή, με την οποία κλείνουμε την ανοικτή θέση. Η αξία του χαρτοφυλακίου είναι $(S - C)e^{rT} - K > 0$.
- Αν $S_T \leq K$, το δικαίωμα λήγει χωρίς αξία. Αγοράζουμε τη μετοχή στην τιμή S_T για να κλείσουμε την ανοικτή θέση. Η αξία του χαρτοφυλακίου είναι $(S - C)e^{rT} - S_T \geq (S - C)e^{rT} - K > 0$.

Άρα, σε κάθε ενδεχόμενο η τελική αξία είναι τουλάχιστον $(S - C)e^{rT} - K > 0$, οπότε προκύπτει ευκαιρία αρμπιτράζ. Επιπλέον, προφανώς $C \geq 0$. Συνεπώς, $C \geq \max(0, S - Ke^{-rT})$.

Δικαίωμα αγοράς: άνω φράγμα

$$C \leq S.$$

Ένα δικαίωμα αγοράς δεν μπορεί να αξίζει περισσότερο από την άμεση κατοχή του υποκείμενου τίτλου. Αν $C > S$, πουλάμε ένα δικαίωμα αγοράς και αγοράζουμε μία μονάδα του υποκείμενου τίτλου. Το θετικό ποσό $C - S$ επενδύεται στον τραπεζικό λογαριασμό. Κατά τον χρόνο T :

- Αν $S_T > K$, ο αγοραστής εξασκεί το δικαίωμα. Παραδίδουμε τη μετοχή, λαμβάνουμε K και η τελική αξία είναι

$$K + (C - S)e^{rT} > 0.$$

- Αν $S_T \leq K$, το δικαίωμα δεν εξασκείται. Διατηρούμε ή πωλούμε τη μετοχή και η αξία του χαρτοφυλακίου είναι $S_T + (C - S)e^{rT} > 0$.

Άρα, η υπόθεση $C > S$ οδηγεί σε αρμπιτράζ.

Δικαίωμα πώλησης: κάτω φράγμα

$$P \geq \max(0, Ke^{-rT} - S).$$

Επιχείρημα αρμπιτράζ μέσω προστατευτικού δικαιώματος πώλησης: Αν $P + S < Ke^{-rT}$, αγοράζουμε ένα δικαίωμα πώλησης και μία μετοχή, δανειζόμενοι το ποσό $P + S$ με επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r .

Κατά τη λήξη:

- Αν $S_T > K$, το δικαίωμα λήγει χωρίς αξία και πωλούμε τη μετοχή στην τιμή S_T . Η τελική αξία είναι

$$S_T - (P + S)e^{rT} > K - (P + S)e^{rT} > 0.$$

- Αν $S_T \leq K$, εξασκούμε το δικαίωμα πώλησης και πωλούμε τη μετοχή στην τιμή K . Η τελική αξία είναι

$$K - (P + S)e^{rT} > 0.$$

Επομένως προκύπτει ευκαιρία αρμπιτράζ. Επειδή $P \geq 0$, παίρνουμε $P \geq \max(0, Ke^{-rT} - S)$.

Δικαίωμα πώλησης: άνω φράγμα

$$P \leq Ke^{-rT}.$$

Η απολαβή του δικαιώματος πώλησης κατά τη λήξη δεν μπορεί να υπερβεί το K . Επομένως, η σημερινή τιμή του δεν μπορεί να υπερβαίνει την προεξοφλημένη μέγιστη απολαβή. Αν $P > Ke^{-rT}$, πουλάμε ένα δικαίωμα πώλησης και επενδύουμε το ποσό P στον τραπεζικό λογαριασμό. Κατά τον χρόνο T :

- Αν $S_T > K$, το δικαίωμα δεν εξασκείται και το χαρτοφυλάκιο έχει αξία $Pe^{rT} > 0$.

- Αν $S_T \leq K$, καταβάλλουμε $K - S_T$ στον αγοραστή του δικαιώματος. Η αξία του χαρτοφυλακίου είναι

$$-(K - S_T) + Pe^{rT} = S_T - K + Pe^{rT} > 0,$$

επειδή $P > Ke^{-rT}$.

1.3.2 Ισοτιμία δικαιωμάτων πώλησης--αγοράς

$$C - P = S - Ke^{-rT}.$$

- Έστω ότι $C - S - P > -Ke^{-rT}$. Πουλάμε ένα δικαίωμα αγοράς και αγοράζουμε μία μετοχή και ένα δικαίωμα πώλησης. Το καθαρό ποσό $C - S - P$ επενδύεται ή δανείζεται στον λογαριασμό χωρίς κίνδυνο. Κατά τον χρόνο T :

- Αν $S_T > K$, καταβάλλουμε την υποχρέωση του δικαιώματος αγοράς παραδίδοντας τη μετοχή και λαμβάνοντας K . Η τελική αξία είναι

$$K + (C - S - P)e^{rT} > 0.$$

- Αν $S_T \leq K$, εξασκούμε το δικαίωμα πώλησης, πωλούμε τη μετοχή στην τιμή K και πάλι λαμβάνουμε $K + (C - S - P)e^{rT} > 0$.

Σε κάθε περίπτωση προκύπτει αρμπιτράζ.

- Αν $P + S - C > Ke^{-rT}$, πουλάμε ένα δικαίωμα πώλησης και μία μετοχή, αγοράζουμε ένα δικαίωμα αγοράς και επενδύουμε το ποσό $P + S - C$. Κατά τον χρόνο T :

- Αν $S_T > K$, εξασκούμε το δικαίωμα αγοράς, αγοράζουμε τη μετοχή στην τιμή K και κλείνουμε την ανοικτή θέση. Η τελική αξία είναι

$$-K + (P + S - C)e^{rT} > 0.$$

- Αν $S_T \leq K$, το δικαίωμα πώλησης εξασκείται εις βάρος μας. Καταβάλλουμε K για τη μετοχή που παραλαμβάνουμε και τη χρησιμοποιούμε για να κλείσουμε την ανοικτή θέση. Η τελική αξία είναι πάλι

$$-K + (P + S - C)e^{rT} > 0.$$

Άρα και αυτή η ανισότητα οδηγεί σε αρμπιτράζ.

Αν χρησιμοποιούμε το ίδιο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r τόσο για επένδυση όσο και για δανεισμό, μπορούμε να το θεωρούμε ως το επιτόκιο του τραπεζικού λογαριασμού στον οποίο καταθέτουμε ή από τον οποίο δανειζόμαστε.

Μονοτονία ως προς την τιμή εξάσκησης μέσω απουσίας αρμπιτράζ Έστω $K_1 < K_2$.
Με επιχείρημα απουσίας αρμπιτράζ αποδεικνύουμε ότι

$$C(K_1) > C(K_2) \quad \text{και} \quad P(K_1) < P(K_2),$$

όπου $C(K)$ και $P(K)$ είναι οι τιμές στον χρόνο 0 ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης, αντίστοιχα, με τιμή εξάσκησης K και κοινή λήξη T .

Απόδειξη για τα δικαιώματα αγοράς:

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $C(K_1) \leq C(K_2)$. Κατά τον χρόνο 0 κατασκευάζουμε το χαρτοφυλάκιο:

1. αγοράζουμε ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης K_1 ,
2. πουλάμε ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης K_2 .

Το αρχικό κόστος είναι $C(K_1) - C(K_2) \leq 0$.

Κατά τη λήξη T , η απολαβή είναι

$$(S_T - K_1)^+ - (S_T - K_2)^+ = \begin{cases} 0, & S_T \leq K_1, \\ S_T - K_1, & K_1 < S_T \leq K_2, \\ K_2 - K_1, & S_T > K_2. \end{cases}$$

Η απολαβή είναι πάντοτε μη αρνητική και είναι αυστηρά θετική όταν $S_T > K_1$. Επομένως, το χαρτοφυλάκιο έχει μη θετικό αρχικό κόστος και μη αρνητική τελική απολαβή, η οποία είναι θετική με θετική πιθανότητα. Αυτό αποτελεί ευκαιρία αρμπιτράζ και αντιφάσκει με την υπόθεση απουσίας αρμπιτράζ. Άρα

$$C(K_1) > C(K_2).$$

Απόδειξη για τα δικαιώματα πώλησης:

Υποθέτουμε, προς άτοπο, ότι $P(K_1) \geq P(K_2)$. Κατασκευάζουμε το χαρτοφυλάκιο:

1. πουλάμε ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης K_1 ,
2. αγοράζουμε ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης K_2 .

Η αρχική χρηματορροή είναι $P(K_1) - P(K_2) \geq 0$.

Κατά τη λήξη, η απολαβή είναι

$$(K_2 - S_T)^+ - (K_1 - S_T)^+ = \begin{cases} K_2 - K_1, & S_T \leq K_1, \\ K_2 - S_T, & K_1 < S_T \leq K_2, \\ 0, & S_T > K_2. \end{cases}$$

Η απολαβή είναι πάντοτε μη αρνητική και αυστηρά θετική όταν $S_T < K_2$. Λαμβάνουμε, λοιπόν, μη αρνητικό ποσό σήμερα και έχουμε μη αρνητική μελλοντική απολαβή, η οποία είναι θετική με θετική πιθανότητα. Αυτό αποτελεί αρμπιτράζ. Συνεπώς,

$$P(K_1) < P(K_2).$$

Άρα, οι τιμές των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς είναι φθίνουσες, ενώ οι τιμές των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων πώλησης είναι αύξουσες ως προς την τιμή εξάσκησης, όπως απαιτεί η απουσία αρμπιτράζ.

Σύνοψη

Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς: $\max(0, S - Ke^{-rT}) \leq C \leq S,$

Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης: $\max(0, Ke^{-rT} - S) \leq P \leq Ke^{-rT},$

Ισοτιμία πώλησης--αγοράς: $C - P = S - Ke^{-rT},$

Μονοτονία: $C(K_1) > C(K_2), \quad P(K_1) < P(K_2), \quad K_1 < K_2.$

Αν παραβιαζόταν κάποια από αυτές τις σχέσεις, θα μπορούσε να κατασκευαστεί ευκαιρία αρμπιτράζ με κατάλληλο συνδυασμό αγοράς και πώλησης του υποκείμενου τίτλου και των δικαιωμάτων, καθώς και επένδυσης ή δανεισμού στο επιτόκιο χωρίς κίνδυνο.

1.3.3 Διάστημα τιμών χωρίς αρμπιτράζ

Σημασία των φραγμάτων. Στην πράξη, τα φράγματα υποδεικνύουν το διάστημα μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται μια ορθολογική τιμή. Σε μια αγορά που περιλαμβάνει μόνο έναν τραπεζικό λογαριασμό χωρίς κίνδυνο και το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο, η τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K και λήξη T πρέπει να βρίσκεται μεταξύ των φραγμάτων που υπολογίστηκαν προηγουμένως. Υπό την απουσία αρμπιτράζ και με ορθολογική συμπεριφορά, η προσφορά και η ζήτηση οδηγούν την τιμή μέσα σε αυτό το διάστημα. Κάθε τιμή έξω από αυτό θα επέτρεπε αρμπιτράζ. Στην αγορά που αποτελείται από μία μετοχή και έναν τραπεζικό λογαριασμό, το διάστημα αυτό συμπίπτει ακριβώς με το σύνολο των τιμών χωρίς αρμπιτράζ για το δικαίωμα.

Γιατί το διάστημα μικραίνει όταν διαπραγματεύονται περισσότερα δικαιώματα. Αν η αγορά περιλαμβάνει επίσης δικαιώματα σε γειτονικές τιμές εξάσκησης $K_1 < K_2 < \dots < K_n$, και ενδεχομένως τα αντίστοιχα δικαιώματα πώλησης, τότε πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα περιορισμοί απουσίας αρμπιτράζ μεταξύ διαφορετικών τιμών εξάσκησης, όπως η μονοτονία, η κυρτότητα ως προς K και η ισοτιμία δικαιωμάτων πώλησης--αγοράς. Οι πρόσθετοι περιορισμοί συρρικνώνουν το εφικτό σύνολο τιμών για το $C(K)$ και, επομένως, στενεύουν το διάστημα χωρίς αρμπιτράζ γύρω από τη ζητούμενη τιμή εξάσκησης.

Υπολογισμός του διαστήματος. Για κάθε δικαίωμα που είναι γραμμένο πάνω στην ίδια μετοχή, το σύνολο των αποδεκτών τιμών του είναι ένα διάστημα χωρίς αρμπιτράζ, το οποίο υπολογίζεται χρησιμοποιώντας όλες τις διαθέσιμες τιμές δικαιωμάτων πάνω στην ίδια μετοχή. Ο προσδιορισμός του διαστήματος ανάγεται στην επίλυση δύο προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού· βλ. Ενότητα 10.1.

Αποτίμηση συνεπής με την αγορά Κάθε μέθοδος τιμολόγησης παραγώγων που αποσκοπεί στην παραγωγή τιμών χωρίς αρμπιτράζ πρέπει, κατ' ελάχιστον, να ενσωματώνει τις παρατηρούμενες τιμές των διαθέσιμων δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης με το ίδιο υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο και την ίδια λήξη. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται ότι η προτεινόμενη τιμή ενός νέου συμβολαίου βρίσκεται μέσα στο διάστημα χωρίς αρμπιτράζ που συνεπάγονται τα ήδη διαπραγματεύσιμα δικαιώματα. Διαφορετικά, η μέθοδος ενδέχεται να παράγει ασυνεπείς τιμές που επιτρέπουν αρμπιτράζ.

Οι αρχικές προσφορές για ένα παράγωγο μπορεί να βρίσκονται έξω από το διάστημα χωρίς αρμπιτράζ. Οι επενδυτές που αναζητούν αρμπιτράζ διορθώνουν τέτοιες λανθασμένες

αποτιμήσεις κατασκευάζοντας χαρτοφυλάκια που εξασφαλίζουν κέρδος χωρίς κίνδυνο. Αργά ή γρήγορα, οι τιμές συνήθως μετακινούνται μέσα στο επιτρεπτό διάστημα. Σκοπός της αποτίμησης ενός παραγώγου δεν είναι να προβλέψει τη μελλοντική αγοραία αξία του συμβολαίου. Μια τέτοια πρόβλεψη θα απαιτούσε πρόσθετες θεωρήσεις, όπως συμπεριφορική χρηματοοικονομική και άλλες επιδράσεις της αγοράς. Ο στόχος είναι να υπολογιστεί μια δίκαιη τιμή χωρίς αρμπιτράζ και, εξίσου σημαντικό, να δοθούν στους επενδυτές εφαρμόσιμες μέθοδοι αντιστάθμισης κινδύνου, δηλαδή τρόποι περιορισμού του κινδύνου με αγορές και πωλήσεις του συμβολαίου και άλλων διαπραγματεύσιμων τίτλων. Επομένως, όταν σχεδιάζουμε μια μαθηματικά θεμελιωμένη μέθοδο αποτίμησης, με στόχο τον υπολογισμό μιας δίκαιης τιμής χωρίς αρμπιτράζ, δεν πρέπει να την εξαναγκάζουμε να συμπίπτει με τις τιμές που θα παρατηρηθούν αργότερα στην αγορά. Οι επενδυτές ούτε γνωρίζουν ούτε σκέφτονται σύμφωνα με τη δική μας μέθοδο ή το δικό μας μοντέλο. Το πρόβλημα τιμολόγησης δικαιωμάτων θα μελετηθεί στο Κεφάλαιο 9.

Παρατήρηση 1.7 (Κερδοσκοπία με δικαιώματα). Σε πολλές περιπτώσεις, οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης είναι πολύ μικρότερες από την τιμή του ίδιου του υποκείμενου τίτλου. Επομένως, αν ένας επενδυτής προβλέπει σημαντική αύξηση της τιμής μιας μετοχής, μπορεί να είναι περισσότερο επικερδές να αγοράσει πολλά δικαιώματα αγοράς αντί για τις ίδιες τις μετοχές.

Παράδειγμα 1.8 (Μακροχρόνια επένδυση με προστασία μέσω δικαιωμάτων πώλησης). Ένας επενδυτής επιθυμεί να διατηρήσει μακροχρόνια θέση σε μια μετοχή. Σήμερα:

- αγοράζει 100 μετοχές προς 6 ευρώ ανά μετοχή, με συνολικό κόστος 600 ευρώ,
- αγοράζει 100 ευρωπαϊκά δικαιώματα πώλησης με τιμή εξάσκησης $K = 2$ και λήξη σε δύο έτη, καταβάλλοντας ασφάλιστρο 1 ευρώ ανά δικαίωμα, δηλαδή συνολικό κόστος 100 ευρώ.

Έστω ότι στη λήξη $T = 2$ η τιμή της μετοχής είναι $S_T = 0.5$ ευρώ.

Το δικαίωμα πώλησης επιτρέπει στον επενδυτή να πουλήσει κάθε μετοχή στην τιμή των 2 ευρώ. Επομένως:

- εξασκεί τα δικαιώματα και πωλεί τις 100 μετοχές προς 2 ευρώ, λαμβάνοντας 200 ευρώ,
- αγοράζει εκ νέου 100 μετοχές στην τρέχουσα αγοραία τιμή των 0.5 ευρώ, καταβάλλοντας 50 ευρώ.

Μετά τις συναλλαγές, ο επενδυτής διαθέτει:

- 50 ευρώ σε μετρητά, αφού από τα 200 αφαιρεθούν τα 50 της επαναγοράς και τα 100 του ασφαλίστρου,
- 100 μετοχές,
- την αρχική μακροχρόνια θέση του, έχοντας περιορίσει τη ζημία από την πτώση της τιμής.

Κατασκευάστε παρόμοια παραδείγματα με πραγματικά δεδομένα αγοράς από το Yahoo Finance.

Παρατήρηση 1.9 (Ποιοι μπορούν να πωλούν δικαιώματα). Θεωρητικά, οποιοσδήποτε μπορεί να γίνει πωλητής ή εκδότης ενός δικαιώματος, δηλαδή το μέρος που παρέχει στον κάτοχο το δικαίωμα αγοράς ή πώλησης του υποκείμενου τίτλου σε συγκεκριμένη τιμή εξάσκησης. Στην πράξη, όμως, η πώληση δικαιωμάτων υπόκειται σε αυστηρούς κανονιστικούς και χρηματοοικονομικούς περιορισμούς.

Για να πωλεί δικαιώματα σε οργανωμένες αγορές, ο επενδυτής πρέπει να διαθέτει εγκεκριμένο λογαριασμό περιθωρίου ασφαλείας και να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του χρηματιστή, επειδή αναλαμβάνει κίνδυνο που μπορεί να είναι απεριόριστος. Πρέπει επίσης να διατηρεί επαρκές κεφάλαιο ως περιθώριο για την κάλυψη ενδεχόμενων ζημιών, ιδίως σε ακάλυπτες θέσεις. Για τον λόγο αυτό, οι περισσότεροι πωλητές δικαιωμάτων είναι θεσμικοί επενδυτές ή επαγγελματίες ειδικοί διαπραγματευτές με προηγμένα συστήματα τιμολόγησης και διαχείρισης κινδύνου.

Συνεπώς, παρότι θεωρητικά η πώληση ενός δικαιώματος είναι ανοικτή σε όλους, στην πράξη περιορίζεται σε οικονομικά κατάλληλους και εξουσιοδοτημένους συμμετέχοντες.

Εργαστήριο 1.10 (Λήψη τιμών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης από το Yahoo Finance). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον κώδικα Python `Download-Call-Put.ipynb` για να κατεβάσετε τις τιμές των δικαιωμάτων που αντιστοιχούν σε οποιαδήποτε μετοχή και σε οποιαδήποτε διαθέσιμη ημερομηνία λήξης. Ένα σύστημα Τεχνητής Νοημοσύνης μπορεί να σας βοηθήσει βήμα προς βήμα στη χρήση του.

1.4 Εξωχρηματιστηριακή αγορά (OTC)

Υπάρχουν και άλλα συμβόλαια, τα οποία διαφέρουν κυρίως ως προς τη συνάρτηση απολαβής. Διαφέρει επίσης ο τρόπος εξάσκησης. Αν ένα δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί μόνο κατά τη λήξη T , ονομάζεται ευρωπαϊκού τύπου. Αν μπορεί να εξασκηθεί οποτεδήποτε μέχρι τη λήξη, ονομάζεται αμερικανικού τύπου. Αν μπορεί να εξασκηθεί μόνο σε συγκεκριμένες προκαθορισμένες χρονικές στιγμές, ονομάζεται τύπου Bermudan.

Εκτός από τις οργανωμένες χρηματιστηριακές αγορές λειτουργεί και η εξωχρηματιστηριακή αγορά (over-the-counter market, OTC), στην οποία μπορούν να συναφθούν πιο σύνθετα δικαιώματα από τα τυποποιημένα δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Για παράδειγμα, ένας επενδυτής μπορεί να μην είναι βέβαιος αν θέλει έκθεση σε άνοδο ή σε πτώση και να αγοράσει ένα δικαίωμα με απολαβή

$$f(x) = \max\{(x - K_1)^+, (K_2 - x)^+\},$$

δηλαδή να λάβει το μεγαλύτερο από τα δύο ποσά. Η τιμή αυτού του δικαιώματος διαμορφώνεται από την προσφορά και τη ζήτηση, ενώ η έννοια του αρμπιτράζ εξακολουθεί να παίζει καθοριστικό ρόλο.

Μέχρι τώρα οι απολαβές εξαρτώνται μόνο από την τελική τιμή της μετοχής. Υπάρχουν, όμως, δικαιώματα των οποίων η απολαβή εξαρτάται από όλες ή από ορισμένες τιμές της μετοχής στο διάστημα $[0, T]$. Για παράδειγμα, η συνάρτηση απολαβής μπορεί να είναι

$$f(S_{t_1}, \dots, S_{t_n}) = \left(\frac{\sum_{i=1}^n S_{t_i}}{n} - K \right)^+.$$

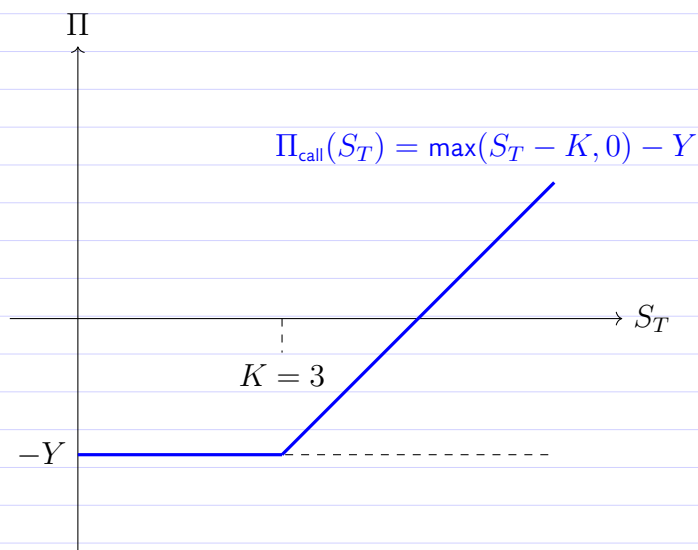
όπου $t_i \in [0, T]$. Τα δικαιώματα αυτού του τύπου ονομάζονται εξαρτώμενα από τη διαδρομή (path-dependent options).

Συμβόλαια των οποίων η απολαβή εξαρτάται από δύο ή περισσότερες μετοχές ονομάζονται δικαιώματα πολλαπλών υποκείμενων τίτλων (multi-asset options). Ένα παράδειγμα

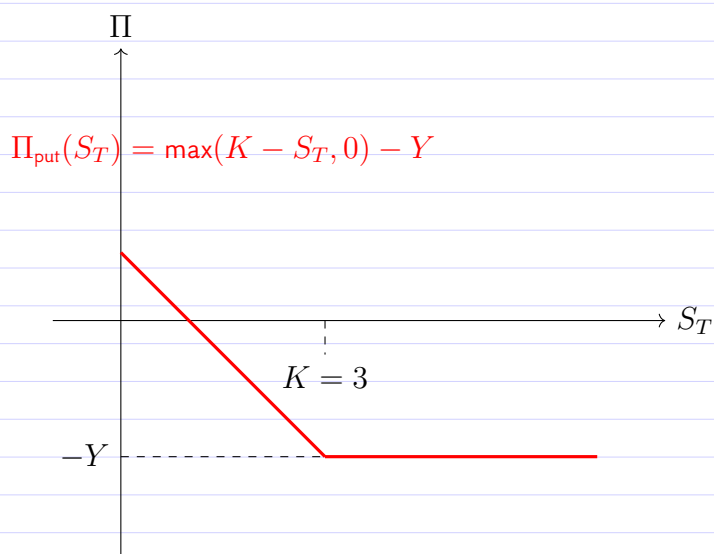
είναι το δικαίωμα με συνάρτηση απολαβής

$$f(x, y) = \max\{x, y, K\},$$

όπου x είναι η τιμή της μετοχής S_1 κατά τον χρόνο T και y η τιμή της μετοχής S_2 κατά τον ίδιο χρόνο.



Σχήμα 1.1: Κέρδος από δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης $K = 3$ και τίμημα $Y = 2$.



Σχήμα 1.2: Κέρδος από δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης $K = 3$ και τίμημα $Y = 2$.

1.5 Προθεσμιακά συμβόλαια και συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης

Ορισμός 1.11 (Προθεσμιακό συμβόλαιο). Προθεσμιακό συμβόλαιο (forward contract) είναι μια μη τυποποιημένη συμφωνία μεταξύ δύο μερών, σύμφωνα με την οποία ο αγοραστής συμφωνεί να αγοράσει και ο πωλητής να πωλήσει ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο

σε προκαθορισμένη τιμή K κατά μια μελλοντική χρονική στιγμή T . Η καθαρή απολαβή κατά τον χρόνο T για τη θέση αγοράς είναι

$$P_{\text{forward}} = S_T - K,$$

όπου S_T είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου κατά τον χρόνο T .

Ορισμός 1.12 (Συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης). Συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης (futures contract) είναι μια τυποποιημένη συμφωνία που διαπραγματεύεται σε οργανωμένη αγορά και υποχρεώνει τα δύο μέρη να αγοράσουν ή να πωλήσουν το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε μελλοντική ημερομηνία. Σε αντίθεση με το προθεσμιακό συμβόλαιο, το συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης υπόκειται σε καθημερινή αποτίμηση στην αγορά (marking to market): τα κέρδη και οι ζημιές υπολογίζονται και διακανονίζονται καθημερινά μέσω λογαριασμών περιθωρίου ασφαλείας. Αυτό επηρεάζει τη χρηματοδότηση και μπορεί να δημιουργεί αποκλίσεις όταν τα επιτόκια είναι στοχαστικά ή συσχετίζονται με την τιμή του υποκείμενου τίτλου.

Παρατήρηση 1.13 (Βασικές διαφορές). Οι κυριότερες διαφορές μεταξύ των δύο συμβολαίων είναι:

- τα προθεσμιακά συμβόλαια δεν είναι τυποποιημένα και περιλαμβάνουν πιστωτικό κίνδυνο αντισυμβαλλομένου, ενώ τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι τυποποιημένα και εκκαθαρίζονται κεντρικά,
- τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης διακανονίζονται καθημερινά και απαιτούν περιθώριο ασφαλείας, με αποτέλεσμα η έκθεση να αναπροσαρμόζεται δυναμικά,
- οι τιμές των δύο τύπων συμβολαίων μπορεί να διαφέρουν όταν παράμετροι χρηματοδότησης, όπως τα επιτόκια, συσχετίζονται με τον υποκείμενο τίτλο.

Και τα δύο είδη συμβολαίων χρησιμοποιούνται για αντιστάθμιση κινδύνου και για κερδοσκοπία.

1.6 Θέση αγοράς

Θέση αγοράς (long position) σημαίνει ότι ο επενδυτής έχει έκθεση που ωφελείται από την άνοδο της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Παραδείγματα:

- **Μετοχή:** Ο επενδυτής που αγοράζει μια μετοχή έχει θέση αγοράς σε αυτή. Αν S_0 είναι η τιμή αγοράς και S_T η τιμή κατά τον χρόνο T , τότε το κέρδος είναι

$$\Pi_{\text{long stock}} = S_T - S_0.$$

- **Προθεσμιακό συμβόλαιο ή συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης:** Η θέση αγοράς αντιστοιχεί σε συμφωνία αγοράς του υποκείμενου τίτλου κατά τον χρόνο T στην προκαθορισμένη τιμή K . Η απολαβή είναι

$$\Pi_{\text{long forward}} = S_T - K.$$

- **Δικαίωμα αγοράς:** Η αγορά του δικαιώματος παρέχει στον κάτοχο το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει τον υποκείμενο τίτλο στην τιμή εξάσκησης K . Η απολαβή είναι

$$\Pi_{\text{long call}} = \max(S_T - K, 0).$$

Η θέση αγοράς έχει *θετική* έκθεση στην άνοδο και *αρνητική* έκθεση στην πτώση της τιμής του υποκείμενου τίτλου.

1.7 Θέση πώλησης

Θέση πώλησης (short position) σημαίνει ότι ο επενδυτής ωφελείται από την πτώση της τιμής. Παραδείγματα:

- **Μετοχή:** Ένας επενδυτής με ανοικτή θέση πώλησης σε μια μετοχή έχει κέρδος

$$\Pi_{\text{short stock}} = S_0 - S_T,$$

και επομένως κερδίζει όταν $S_T < S_0$.

- **Προθεσμιακό συμβόλαιο ή συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης:** Η θέση πώλησης συνεπάγεται υποχρέωση πώλησης του υποκείμενου τίτλου κατά τον χρόνο T στην τιμή K . Η απολαβή είναι

$$\Pi_{\text{short forward}} = K - S_T.$$

- **Δικαίωμα πώλησης:** Ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης έχει το δικαίωμα να πωλήσει στην τιμή K . Συνεπώς, η απολαβή του πωλητή του δικαιώματος είναι

$$\Pi_{\text{short put}} = -\max(K - S_T, 0).$$

Η θέση πώλησης έχει *θετική* έκθεση στην πτώση και *αρνητική* έκθεση στην άνοδο της τιμής του υποκείμενου τίτλου.

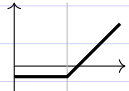
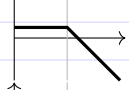
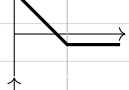
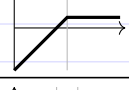
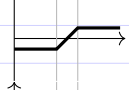
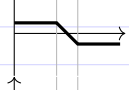
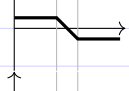
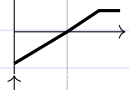
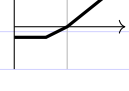
Οι όροι θέση αγοράς και θέση πώλησης χρησιμοποιούνται ευρέως στη χρηματιστηριακή ορολογία. Από μαθηματική άποψη, το ουσιαστικό αντικείμενο είναι η αντίστοιχη συνάρτηση απολαβής ή κέρδους.

Σύγκριση θέσης αγοράς και θέσης πώλησης

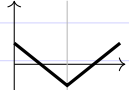
Μέσο	Θέση	Απολαβή στον T	Έκθεση
Μετοχή	Αγορά	$S_T - S_0$	Ωφελείται από άνοδο
Μετοχή	Πώληση	$S_0 - S_T$	Ωφελείται από πτώση
Forward/Futures	Αγορά	$S_T - K$	Ωφελείται από άνοδο
Forward/Futures	Πώληση	$K - S_T$	Ωφελείται από πτώση
Δικαίωμα αγοράς	Αγορά	$\max(S_T - K, 0)$	Μη γραμμική έκθεση σε άνοδο
Δικαίωμα αγοράς	Πώληση	$-\max(S_T - K, 0)$	Εκτεθειμένη σε άνοδο
Δικαίωμα πώλησης	Αγορά	$\max(K - S_T, 0)$	Ωφελείται από πτώση
Δικαίωμα πώλησης	Πώληση	$-\max(K - S_T, 0)$	Εκτεθειμένη σε πτώση

1.7.1 Βασικές στρατηγικές δικαιωμάτων

Πίνακας 1: Μονομερείς θέσεις, κάθετα ανοίγματα και συνδυασμοί με μετοχές

Στρατηγική	Προσδοκία	Δομή	Συνάρτηση κέρδους
Long Call	Άνοδος	Αγορά $\text{Call}(K)$, χρέωση	
Short Call	Πτώση	Πώληση $\text{Call}(K)$, πίστωση	
Long Put	Πτώση	Αγορά $\text{Put}(K)$, χρέωση	
Short Put	Άνοδος	Πώληση $\text{Put}(K)$, πίστωση	
Bull Call Spread	Άνοδος	$+\text{Call}(K_1), -\text{Call}(K_2), K_1 < K_2$	
Bear Put Spread	Πτώση	$+\text{Put}(K_1), -\text{Put}(K_2), K_1 > K_2$	
Bull Put Spread	Άνοδος	$-\text{Put}(K_1), +\text{Put}(K_2), K_1 > K_2$	
Bear Call Spread	Πτώση	$-\text{Call}(K_1), +\text{Call}(K_2), K_1 < K_2$	
Covered Call	Ήπια άνοδος	Μετοχή S_0 και $-\text{Call}(K)$	
Protective Put	Άνοδος με κάτω φράγμα	Μετοχή S_0 και $+\text{Put}(K)$	

Πίνακας 2: Ουδέτερες στρατηγικές και στρατηγικές μεταβλητότητας

Στρατηγική	Άποψη για μεταβλητότητα	Δομή	Συνάρτηση κέρδους
Long Straddle	Υψηλή	$+Call(K)$ και $+Put(K)$, χρέωση	
Short Straddle	Χαμηλή	$-Call(K)$ και $-Put(K)$, πίστωση	
Long Strangle	Υψηλή	$+Put(K_p)$, $+Call(K_c)$, $K_p < K_c$	
Short Strangle	Χαμηλή	$-Put(K_p)$, $-Call(K_c)$, $K_p < K_c$	
Iron Condor (short)	Χαμηλή	$-Put(K_2)$, $+Put(K_1)$, $-Call(K_3)$, $+Call(K_4)$	
Iron Butterfly (short)	Χαμηλή	$-Call(K)$, $-Put(K)$, $+Call(K_1)$, $+Put(K_2)$, $K_1 < K < K_2$	

1.8 Ασκήσεις

Σωστό ή Λάθος

1. **Πρόταση:** Ένα δικαίωμα αγοράς παρέχει στον κάτοχό του το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να πωλήσει μια μετοχή σε καθορισμένη τιμή εξάσκησης.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

2. **Πρόταση:** Η θέση αγοράς σε προθεσμιακό συμβόλαιο κερδίζει όταν αυξάνεται η τιμή του υποκείμενου τίτλου.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

3. **Πρόταση:** Η απολαβή ενός δικαιώματος πώλησης είναι μηδενική όταν η τιμή της μετοχής υπερβαίνει την τιμή εξάσκησης.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

4. **Πρόταση:** Τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης δεν είναι τυποποιημένα και δεν υπόκεινται σε καθημερινό διακανονισμό.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

5. **Πρόταση:** Η ανοικτή θέση πώλησης σε μια μετοχή κερδίζει όταν μειώνεται η τιμή της μετοχής.

Σωστό / Λάθος: _____ Αιτιολόγηση: _____

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η απολαβή ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K και τελική τιμή μετοχής S_T είναι:

- (A) $\max(S_T - K, 0)$
- (B) $\max(K - S_T, 0)$
- (C) $S_T - K$
- (D) $K - S_T$

Απάντηση: _____

2. Ποιο από τα ακόλουθα δεν αποτελεί χαρακτηριστικό των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης;

- (A) Καθημερινός διακανονισμός
- (B) Κεντρική εκκαθάριση
- (C) Μη τυποποιημένα συμβόλαια
- (D) Υποχρέωση εκτέλεσης

Απάντηση: _____

3. Η θέση πώλησης σε προθεσμιακό συμβόλαιο έχει απολαβή:

- (A) $S_T - K$
- (B) $K - S_T$
- (C) $\max(S_T - K, 0)$
- (D) $\max(K - S_T, 0)$

Απάντηση: _____

4. Ποιο από τα ακόλουθα είναι παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν;

- (A) Μετοχή
- (B) Δικαίωμα προαίρεσης
- (C) Χρυσός
- (D) Τραπεζική κατάθεση

Απάντηση: _____

5. Αν ένας επενδυτής αγοράσει δικαίωμα πώλησης, συνήθως αναμένει:

- (A) άνοδο της τιμής της μετοχής,
- (B) πτώση της τιμής της μετοχής,
- (C) σταθερή τιμή της μετοχής,
- (D) εξασφάλιση σταθερής απόδοσης.

Απάντηση: _____

Αντιστοίχιση

Αντιστοιχίστε κάθε περιγραφή με τη σωστή επιλογή.

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------|
| 1. Δικαίωμα αγοράς μιας μετοχής | A. Δικαίωμα πώλησης |
| 2. Υποχρέωση πώλησης μιας μετοχής | B. Δικαίωμα αγοράς |
| 3. Υποχρέωση αγοράς μιας μετοχής | Γ. Θέση πώλησης σε forward |
| 4. Δικαίωμα πώλησης μιας μετοχής | Δ. Θέση αγοράς σε forward |

Απαντήσεις: 1. _____ 2. _____ 3. _____ 4. _____

Συμπλήρωση κενών

1. Ένα _____ είναι συμβόλαιο που παρέχει στον κάτοχό του το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει ή να πωλήσει ένα περιουσιακό στοιχείο σε προκαθορισμένη τιμή.
2. Η θέση _____ σε μια μετοχή κερδίζει όταν μειώνεται η τιμή της.
3. Τα συμβόλαια _____ είναι τυποποιημένα και περιλαμβάνουν καθημερινό διακανονισμό.
4. Η απολαβή ενός δικαιώματος πώλησης είναι _____ όταν η τιμή της μετοχής υπερβαίνει την τιμή εξάσκησης.
5. Η προκαθορισμένη τιμή ενός δικαιώματος ονομάζεται _____.

Θεωρητικές και υπολογιστικές ασκήσεις

1. **Υπολογισμός απολαβής:** Ένας επενδυτής αγοράζει δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης $K = 100$. Αν στη λήξη η τιμή της μετοχής είναι $S_T = 120$, υπολογίστε την απολαβή.
2. **Κέρδος από ανοικτή θέση πώλησης:** Ένας επενδυτής πωλεί ανοικτά μια μετοχή στην τιμή $S_0 = 50$ και την αγοράζει αργότερα στην τιμή $S_T = 40$. Υπολογίστε το κέρδος.
3. **Προθεσμιακό συμβόλαιο:** Ένας επενδυτής συνάπτει προθεσμιακό συμβόλαιο αγοράς μιας μετοχής στην τιμή $K = 80$. Αν στη λήξη $S_T = 90$, υπολογίστε την απολαβή της θέσης αγοράς.
4. **Απολαβή δικαιώματος πώλησης:** Ένας επενδυτής αγοράζει δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης $K = 60$. Αν στη λήξη $S_T = 55$, υπολογίστε την απολαβή.
5. **Αντιστάθμιση με συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης:** Ένας επενδυτής θέλει να προστατευθεί από πτώση της τιμής των μετοχών του. Προτείνετε στρατηγική αντιστάθμισης με συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης.

Ασκήσεις με Python

1. **Γράφημα απολαβής:** Χρησιμοποιήστε Python για να κατασκευάσετε το γράφημα της απολαβής δικαιώματος αγοράς με $K = 100$, για $S_T \in [80, 120]$.
2. **Απολαβή προθεσμιακού συμβολαίου:** Υπολογίστε και σχεδιάστε με Python την απολαβή θέσης αγοράς σε προθεσμιακό συμβόλαιο με $K = 50$, για $S_T \in [40, 60]$.

3. **Αντιστάθμιση με δικαίωμα πώλησης:** Προσομοιώστε με Python μια στρατηγική που χρησιμοποιεί δικαίωμα πώλησης για να προστατεύσει την αξία μιας μετοχής.

Κεφάλαιο 2

Χαρτοφυλάκια

Τα δικαιώματα αγοράς πολλαπλασιάζουν το κέρδος όταν η τιμή της μετοχής αυξάνεται αρκετά πάνω από την τιμή εξάσκησης, ενώ τα δικαιώματα πώλησης λειτουργούν ως ασφάλιση, καταβάλλοντας απολαβή όταν η τιμή υποχωρεί κάτω από αυτή.

2.1 Συνάρτηση κέρδους ή συνάρτηση απολαβής

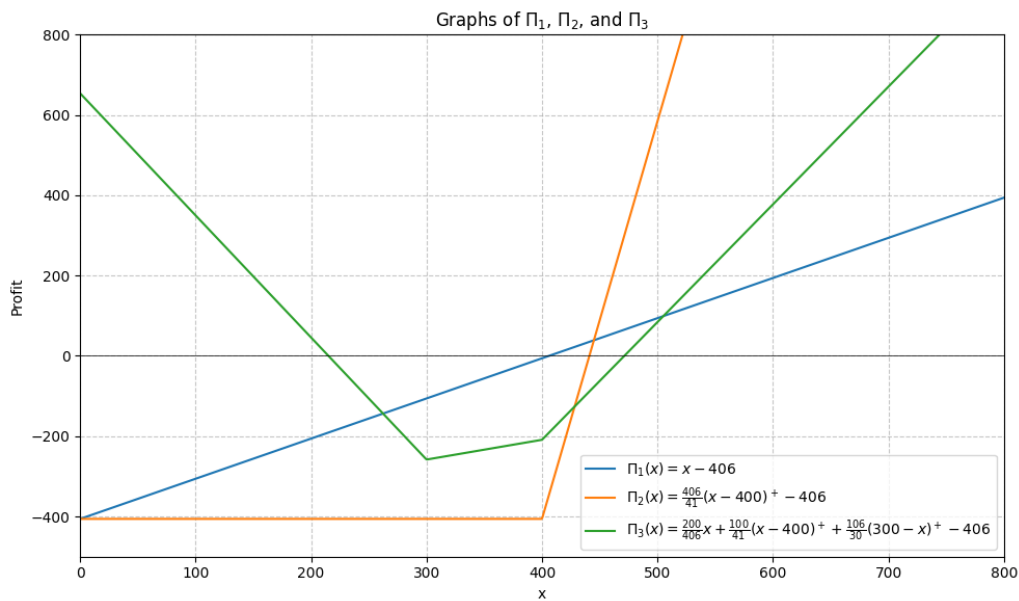
Τα χαρτοφυλάκια που περιλαμβάνουν μετοχές και δικαιώματα αγοράς ή πώλησης παρουσιάζουν ιδιαίτερο μαθηματικό ενδιαφέρον. Αρχικά θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά χαρτοφυλακίων που περιέχουν μία μετοχή και τα αντίστοιχα δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Αργότερα θα γενικεύσουμε τα συμπεράσματά μας σε χαρτοφυλάκια με d μετοχές και τα αντίστοιχα συμβόλαια.

Παράδειγμα 2.1. Έστω ότι η σημερινή τιμή μιας μετοχής είναι 406 ευρώ και ότι στην αγορά διαπραγματεύονται ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης $K = 400$ και τιμή $C(400) = 41$ ευρώ, καθώς και ένα δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης 300 και τιμή $P(300) = 30$ ευρώ. Θεωρούμε τις ακόλουθες τρεις στρατηγικές:

1. αγορά μίας μετοχής στην τιμή 406,
2. αγορά $\frac{406}{41}$ δικαιωμάτων αγοράς,
3. αγορά $\frac{200}{406}$ μετοχών, $\frac{100}{41}$ δικαιωμάτων αγοράς και $\frac{106}{30}$ δικαιωμάτων πώλησης.

Οι συναρτήσεις κέρδους κατά τον χρόνο T , δηλαδή κατά τη λήξη των δικαιωμάτων, είναι

- $\Pi_1(x) = x - 406$,
- $\Pi_2(x) = \frac{406}{41}(x - 400)^+ - 406$,
- $\Pi_3(x) = \frac{200}{406}x + \frac{100}{41}(x - 400)^+ + \frac{106}{30}(300 - x)^+ - 406$.



Σχήμα 2.1: Γραφικές παραστάσεις των $\Pi_1(x)$, $\Pi_2(x)$ και $\Pi_3(x)$.

Παρατηρούμε εύκολα ότι, αν η τιμή της μετοχής κατά τον χρόνο T υπερβεί περίπου τα 445 ευρώ, η δεύτερη στρατηγική αποφέρει μεγαλύτερο κέρδος, ενώ διαφορετικά η πρώτη είναι περισσότερο επικερδής. Το πλεονέκτημα της τρίτης στρατηγικής είναι ότι η μέγιστη δυνατή ζημία της είναι αυστηρά μικρότερη από το συνολικό κεφάλαιο που επενδύθηκε. Πώς πρέπει, λοιπόν, να επιλέξει ο επενδυτής μεταξύ αυτών των στρατηγικών; Η διαδικασία αρχίζει με τη διαμόρφωση μιας πρόβλεψης για τη μελλοντική συμπεριφορά της τιμής. Μόλις διατυπωθεί ένα σενάριο, σύμφωνα με το οποίο η τιμή αναμένεται να αυξηθεί, να μειωθεί ή να παραμείνει σχετικά σταθερή, ο επενδυτής μπορεί να επιλέξει τη στρατηγική που είναι περισσότερο συμβατή με αυτό.

Πώς, όμως, σχηματίζεται η πρόβλεψη; Μια συνηθισμένη προσέγγιση είναι η στατιστική ανάλυση ιστορικών τιμών, με σκοπό την εξαγωγή ενδείξεων για πιθανές μελλοντικές τάσεις. Δεν πρέπει, ωστόσο, να εμπιστευόμαστε άκριτα τα δεδομένα του παρελθόντος. Η ιστορία παρέχει χρήσιμες ενδείξεις, αλλά δεν εγγυάται τις μελλοντικές εξελίξεις, επειδή οι αγορές επηρεάζονται από απρόβλεπτα γεγονότα, μεταβολές του επενδυτικού κλίματος και δομικές αλλαγές. Η ανάλυση δεδομένων είναι απαραίτητη, αλλά πρέπει να συμπληρώνεται από κρίση, επίγνωση των περιορισμών των μοντέλων και μελέτη εναλλακτικών σεναρίων. Μπορούμε, βέβαια, να συνδυάσουμε τις παραπάνω στρατηγικές και να δημιουργήσουμε άπειρο πλήθος χαρτοφυλακίων. Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα διαθέσιμα δικαιώματα αγοράς και πώλησης, ο επενδυτής μπορεί να αποφασίσει με ακρίβεια πώς θα κατανείμει το κεφάλαιό του. Για τον σκοπό αυτό πρέπει να μελετήσει μαθηματικά τις συναρτήσεις κέρδους και τη συμπεριφορά τους.

Συνήθως μπορούμε να αγοράσουμε ή να πωλήσουμε μόνο ακέραιο αριθμό συμβολαίων. Αρχικά αγνοούμε αυτόν τον περιορισμό, ώστε να εξαγάγουμε καθαρά συμπεράσματα για την επίδραση των συμβολαίων στη μορφή του χαρτοφυλακίου.

Γνωστά παραδείγματα στα οποία η στατιστική ανάλυση παρελθοντικών δεδομένων οδήγησε σε λανθασμένες αποφάσεις

Ακολουθούν ορισμένα από τα περισσότερα γνωστά και επικίνδυνα παραδείγματα.

1. Η χρηματοοικονομική κρίση του 2008

Πρόκειται για χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτυχίας μοντέλων που βασίστηκαν σε περιορισμένες στατιστικές υποθέσεις.

Υπόθεση: Τράπεζες και αναλυτές χρησιμοποίησαν μοντέλα που υπέθεταν ότι οι τιμές των κατοικιών θα παρέμεναν σταθερές ή θα αυξάνονταν ομαλά. Τα μοντέλα βαθμονομήθηκαν σε ιστορικά δεδομένα μιας περιόδου υψηλής ζήτησης και χαμηλών επιτοκίων.

Λανθασμένη απόφαση: Επειδή τα δεδομένα δεν αντιπροσώπευαν όλες τις πιθανές καταστάσεις της αγοράς, τα μοντέλα υποεκτίμησαν τον κίνδυνο. Χορηγήθηκαν στεγαστικά δάνεια υψηλού κινδύνου σε δανειολήπτες χαμηλής πιστοληπτικής ικανότητας και τα δάνεια μετατράπηκαν σε σύνθετα προϊόντα, όπως MBS και CDO. Τα μοντέλα υποεκτίμησαν την πιθανότητα ταυτόχρονης αθέτησης μεγάλου ποσοστού των δανείων.

Αποτέλεσμα: Όταν οι τιμές των κατοικιών μειώθηκαν, λόγω αύξησης επιτοκίων και προηγούμενης υπερτίμησης, οι αθετήσεις πολλαπλασιάστηκαν. Προϊόντα που θεωρούνταν ασφαλή κατέρρευσαν, προκαλώντας τραπεζική κρίση, βαθιά ύφεση και τεράστια απώλεια πλούτου και κεφαλαίου.

2. Η χρηματιστηριακή κατάρρευση του 1929

Αποτελεί παλαιότερο, αλλά εξαιρετικά σημαντικό, παράδειγμα υπερεκτίμησης της δυνατότητας πρόβλεψης από ιστορικές τάσεις.

Υπόθεση: Επενδυτές και επιχειρήσεις χρησιμοποίησαν ιστορικά δεδομένα για να προβλέψουν την πορεία της αγοράς. Οι τιμές των μετοχών αυξάνονταν επί σειρά ετών κατά την περίοδο των Roaring Twenties.

Λανθασμένη απόφαση: Η ανάλυση του παρελθόντος δημιούργησε την πεποίθηση ότι η ανοδική τάση θα συνεχιζόταν. Πολλοί επενδυτές αγόρασαν μετοχές χωρίς να εξετάσουν επαρκώς τον κίνδυνο υπερτίμησης.

Αποτέλεσμα: Η αγορά κατέρρευσε απότομα το 1929, με κορύφωση τη λεγόμενη Μαύρη Τρίτη, και ακολούθησε η μακρά και βαθιά Μεγάλη Ύφεση.

3. Αποτυχίες προβλέψεων για τον κορωνοϊό SARS-CoV-2

Πρόκειται για νεότερο παράδειγμα που αναδεικνύει την ανάγκη προσαρμογής των μοντέλων σε νέα δεδομένα.

Υπόθεση: Αρχικές προβλέψεις για την επιδημία στηρίχθηκαν σε ιστορικά δεδομένα από παρόμοιες επιδημίες, όπως οι SARS και MERS.

Λανθασμένη απόφαση: Ορισμένες αναλύσεις υπέθεσαν ότι η επιδημία θα ήταν περισσότερο περιορισμένη και υποεκτίμησαν τη μεταδοτικότητα και τον βασικό αριθμό αναπαραγωγής του νέου ιού.

Αποτέλεσμα: Η νόσος εξαπλώθηκε παγκοσμίως με μεγάλη ταχύτητα και σοβαρότητα, προκαλώντας απώλειες ανθρώπινων ζωών, οικονομική κρίση και κοινωνικές διαταραχές.

Κύρια σφάλματα που οδηγούν σε λανθασμένες αποφάσεις

Από τα παραδείγματα προκύπτουν τα ακόλουθα βασικά σφάλματα:

- **Μη ρεαλιστικές υποθέσεις:** Υποθέτουμε ότι το μέλλον θα είναι ίδιο με το παρελθόν, για παράδειγμα ότι η ζήτηση θα παραμείνει σταθερή ή ότι τα επιτόκια δεν θα μεταβληθούν. Αυτό είναι ιδιαίτερα επικίνδυνο όταν συμβαίνουν θεμελιώδεις αλλαγές, όπως η εμφάνιση ενός νέου ιού ή μιας νέας τεχνολογίας.
- **Αγνόηση νέας πληροφορίας:** Η στατιστική ανάλυση παλαιότερων δεδομένων μπορεί να είναι ισχυρή, αλλά δεν μπορεί να ενσωματώσει αυτόματα έναν εντελώς νέο παράγοντα.
- **Υπερβολική εξάρτηση από μία πηγή δεδομένων:** Αν η ανάλυση βασίζεται μόνο σε δεδομένα μιας περιόδου υψηλής ανάπτυξης, η πρόβλεψη είναι εξαιρετικά ευάλωτη σε αντιστροφή της τάσης.

Υποθετικό παράδειγμα: τα παρελθοντικά δεδομένα δείχνουν πτώση, αλλά τα γεγονότα οδηγούν σε άνοδο

Παρελθοντικά δεδομένα που υποδεικνύουν πτώση

Η αγορά βρίσκεται σε ύφεση: οι τιμές των κατοικιών μειώνονται, οι επενδύσεις περιορίζονται και επιχειρήσεις αναγκάζονται να κλείσουν. Οι δείκτες οικονομικής δραστηριότητας, όπως ο ρυθμός ανάπτυξης και η ανεργία, είναι δυσμενείς. Οι επενδυτές είναι αποθαρρυνμένοι και αποφεύγουν νέες επενδύσεις, διαμορφώνοντας ένα περιβάλλον που φαίνεται να προοιωνίζεται περαιτέρω πτώση.

Γεγονότα που οδηγούν σε άνοδο

Η κυβέρνηση εισάγει ισχυρό πρόγραμμα οικονομικής στήριξης, όπως χαμηλότερα επιτόκια και δημόσιες επενδύσεις. Η ζήτηση για ακίνητα αρχίζει να αυξάνεται και οι τιμές ανακάμπτουν. Οι επενδυτές επιστρέφουν στην αγορά, η οικονομική ανάπτυξη επιταχύνεται και οι επιχειρήσεις αυξάνουν εκ νέου την παραγωγή και τις πωλήσεις.

Εργαστήριο 2.2 (Σχεδιασμός της συνάρτησης κέρδους ενός χαρτοφυλακίου). Με τον κώδικα `Profit-Function.ipynb` μπορείτε να πειραματιστείτε κατασκευάζοντας χαρτοφυλάκια με μία μετοχή και πέντε δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Δίνετε την τιμή της μετοχής, τις τιμές των συμβολαίων με τιμές εξάσκησης $K_1, \dots, K_5$ και το πλήθος κάθε τίτλου που θα αγοράσετε ή θα πωλήσετε. Στη συνέχεια σχεδιάζετε τη συνάρτηση κέρδους, η οποία δίνει το κέρδος ή τη ζημία για κάθε δυνατή τελική τιμή της μετοχής. Μεταβάλλοντας τις παραμέτρους διαπιστώνετε ότι μπορούν να κατασκευαστούν χαρτοφυλάκια που είναι ευνοϊκά σε διαφορετικά σενάρια.

Παρατήρηση 2.3 (Ιδιότητες των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης). Ύστερα από παρόμοια πειράματα με πραγματικά δεδομένα, οδηγούμαστε στο ακόλουθο συμπέρασμα. Τα δικαιώματα αγοράς μπορούν να πολλαπλασιάσουν το κέρδος όταν η τιμή της μετοχής γίνει αρκετά μεγάλη, αλλά αν η τιμή παραμείνει κάτω από την τιμή εξάσκησης, το τίμημα που καταβλήθηκε χάνεται. Αντίστοιχα, τα δικαιώματα πώλησης λειτουργούν ως μέσο αντιστάθμισης: αν η τιμή της μετοχής πέσει κάτω από την τιμή εξάσκησης, λαμβάνουμε την αντίστοιχη απολαβή.

Παρατήρηση 2.4 (Επιλογή σεναρίου). Έστω ότι αποφασίσατε να επενδύσετε ποσό V σε τίτλους μιας εταιρείας. Μπορείτε να το διαθέσετε εξ ολοκλήρου σε μετοχές, αλλά μπορείτε επίσης να ακολουθήσετε άπειρο πλήθος διαφορετικών στρατηγικών. Κάθε στρατηγική είναι πλεονεκτική σε διαφορετικό σενάριο. Για να επιλέξετε εκείνη που σας ταιριάζει, πρέπει ουσιαστικά να αποφασίσετε σε ποιο σενάριο επιθυμείτε να τοποθετήσετε το κεφάλαιό σας.

Ερώτηση 2.5. Αν πειραματιστείτε αρκετά, θα προκύψουν τα ακόλουθα ερωτήματα:

- Ποιο χαρτοφυλάκιο πρέπει τελικά να κατασκευάσω; Σε ποιο σενάριο θέλω να έχω κέρδος; Η απάντηση δεν μπορεί να δοθεί με μαθηματική ακρίβεια μόνο μέσω υπολογισμών, επειδή αφορά πρόβλεψη. Ένας έμπειρος επενδυτής διαμορφώνει προβλέψεις αξιολογώντας παράγοντες και γεγονότα που ενδέχεται να επηρεάσουν την τιμή. Δεν θα μελετήσουμε τεχνικές πρόβλεψης, αλλά το πρόβλημα της κατασκευής χαρτοφυλακίου όταν έχει ήδη δοθεί μια πρόβλεψη.
- Πόσες μετοχές ή πόσα συμβόλαια μπορώ να αγοράσω ή να πωλήσω ταυτόχρονα σε μια δεδομένη τιμή; Ακόμη και αν διαθέτετε απεριόριστο κεφάλαιο, δεν μπορείτε να αγοράσετε οποιοδήποτε πλήθος μετοχών στην ίδια τιμή, επειδή μπορεί να μην υπάρχουν αρκετοί πωλητές. Κάποιοι ενδέχεται να προσφέρουν N_1 μετοχές στην τιμή Y_1 , άλλοι N_2 μετοχές στην τιμή Y_2 κ.ο.κ. Θα αγοράσετε τις πρώτες N_1 στην τιμή Y_1 , τις επόμενες στην τιμή Y_2 κ.λπ. Πρέπει, επομένως, να γνωρίζετε εκ των προτέρων πόσους τίτλους μπορείτε να διαπραγματευθείτε σε μια συγκεκριμένη τιμή. Το χαρακτηριστικό αυτό συνδέεται με τη ρευστότητα. Δεν θα αναλύσουμε εδώ λεπτομερώς αυτό το πρόβλημα. Πλήρη δεδομένα βιβλίου εντολών, όπως το βάθος αγοράς και τα διαθέσιμα μεγέθη στις τιμές bid και ask, παρέχονται συνήθως μόνο από επαγγελματικές πλατφόρμες ή συνδρομητικούς παρόχους. Οι δωρεάν υπηρεσίες δίνουν κατά κανόνα μόνο τις καλύτερες τρέχουσες τιμές, ενώ η πρόσβαση σε δεδομένα βάθους Level II απαιτεί συνδρομή.

2.2 Ασκήσεις

Σωστό ή Λάθος

1. **Πρόταση:** Ένα χαρτοφυλάκιο που περιλαμβάνει μόνο μετοχές είναι πάντοτε λιγότερο κερδοφόρο από ένα χαρτοφυλάκιο με μετοχές και δικαιώματα.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

2. **Πρόταση:** Η συνάρτηση κέρδους χαρτοφυλακίου που περιλαμβάνει μόνο δικαιώματα αγοράς είναι πάντοτε μη αρνητική.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

3. **Πρόταση:** Τα δικαιώματα πώλησης μπορούν να χρησιμοποιηθούν για προστασία από πτώση της τιμής μιας μετοχής.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

4. **Πρόταση:** Η συνάρτηση κέρδους χαρτοφυλακίου με μετοχές και δικαιώματα αγοράς είναι γραμμική.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

5. **Πρόταση:** Ένα χαρτοφυλάκιο με μόνο δικαιώματα πώλησης είναι πάντοτε κερδοφόρο όταν η τιμή της μετοχής πέσει κάτω από την τιμή εξάσκησης.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ποια συνάρτηση κέρδους αντιστοιχεί σε χαρτοφυλάκιο με μία μετοχή και ένα δικαίωμα αγοράς;

(A) $\Pi(x) = x - S_0 + \max(x - K, 0) - C$

(B) $\Pi(x) = x - S_0 - C$

(C) $\Pi(x) = \max(x - K, 0) - C$

(D) $\Pi(x) = x - S_0 + C$

Απάντηση: _____

2. Ποια στρατηγική είναι περισσότερο κατάλληλη για επενδυτή που προβλέπει πολύ μεγάλη αύξηση της τιμής μιας μετοχής;

(A) Αγορά μετοχών

(B) Αγορά δικαιωμάτων αγοράς

(C) Αγορά δικαιωμάτων πώλησης

(D) Ανοικτή πώληση μετοχών

Απάντηση: _____

3. Ποιο από τα ακόλουθα είναι πιθανό πλεονέκτημα των δικαιωμάτων σε σύγκριση με τις μετοχές;

(A) Πάντοτε υψηλότερη ρευστότητα

(B) Πάντοτε υψηλότερος κίνδυνος

(C) Μεγαλύτερη δυνατότητα ενίσχυσης του κέρδους

(D) Μικρότερο αρχικό κόστος σε πολλές περιπτώσεις

Απάντηση: _____

4. Ποια είναι η συνάρτηση κέρδους χαρτοφυλακίου που περιέχει μόνο ένα δικαίωμα πώλησης;

(A) $\Pi(x) = \max(K - x, 0) - P$

(B) $\Pi(x) = x - K$

(C) $\Pi(x) = \max(x - K, 0)$

(D) $\Pi(x) = K - x$

Απάντηση: _____

5. Ποια στρατηγική προσφέρει άμεση προστασία από πτώση της τιμής μιας μετοχής που ήδη κατέχουμε;

- (A) Αγορά περισσότερων μετοχών
- (B) Αγορά δικαιωμάτων αγοράς
- (C) Αγορά δικαιωμάτων πώλησης
- (D) Καμία συναλλαγή

Απάντηση: _____

Αντιστοίχιση

- | | |
|--|----------------------------|
| 1. Στρατηγική που ενισχύει το κέρδος όταν η τιμή αυξάνεται | A. Δικαίωμα πώλησης |
| 2. Στρατηγική προστασίας από πτώση της τιμής | B. Δικαίωμα αγοράς |
| 3. Στρατηγική με γραμμική απολαβή αγοράς | Γ. Θέση αγοράς σε forward |
| 4. Γραμμική στρατηγική που ωφελείται από πτώση | Δ. Θέση πώλησης σε forward |

Απαντήσεις: 1. _____ 2. _____ 3. _____ 4. _____

Συμπλήρωση κενών

1. Ένα _____ είναι παράγωγο που παρέχει στον κάτοχό του το δικαίωμα αγοράς μιας μετοχής σε προκαθορισμένη τιμή.
2. Η συνάρτηση κέρδους χαρτοφυλακίου με μία μόνο μετοχή είναι _____.
3. Η _____ ενός δικαιώματος αγοράς είναι μηδενική όταν η τιμή της μετοχής βρίσκεται κάτω από την τιμή εξάσκησης.
4. Η προκαθορισμένη τιμή ενός δικαιώματος ονομάζεται _____.
5. Χαρτοφυλάκιο με μετοχές και δικαιώματα πώλησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για _____.

Θεωρητικές και υπολογιστικές ασκήσεις

1. **Υπολογισμός κέρδους:** Ένας επενδυτής αγοράζει μία μετοχή στην τιμή $S_0 = 400$ και ένα δικαίωμα αγοράς με $K = 400$ και κόστος $C = 40$. Αν στη λήξη $S_T = 450$, υπολογίστε το συνολικό κέρδος του χαρτοφυλακίου.
2. **Συνάρτηση κέρδους:** Γράψτε τη συνάρτηση κέρδους χαρτοφυλακίου που περιέχει δύο μετοχές, τρία δικαιώματα αγοράς με $K = 400$ και ένα δικαίωμα πώλησης με $K = 380$. Δηλώστε επίσης τις σημερινές τιμές που απαιτούνται για τον πλήρη υπολογισμό του κέρδους.
3. **Επιλογή στρατηγικής:** Ένας επενδυτής προβλέπει ότι η τιμή μιας μετοχής θα πέσει κάτω από $K = 380$. Προτείνετε στρατηγική που μπορεί να επωφεληθεί από αυτή την κίνηση και περιγράψτε τον κίνδυνό της.

4. **Προσομοίωση συνάρτησης κέρδους:** Με Python σχεδιάστε τη συνάρτηση κέρδους χαρτοφυλακίου που περιλαμβάνει μία μετοχή, δύο δικαιώματα αγοράς με $K = 400$ και ένα δικαίωμα πώλησης με $K = 380$.
5. **Χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης:** Ένας επενδυτής κατέχει 100 μετοχές με σημερινή τιμή $S_0 = 400$. Προτείνετε στρατηγική με δικαιώματα πώλησης που περιορίζει την πτώση της αξίας του χαρτοφυλακίου.

Κεφάλαιο 3

Πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού

ΣΤΑ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ, Η ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΔΕΝ
ΕΙΝΑΙ ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΗ* ΑΠΟΤΕΛΕΙ ΤΗΝ ΟΥΣΙΑ.

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε έναν τύπο προβλήματος βελτιστοποίησης που ονομάζεται πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού (Linear Programming, LP).

Αναζητούμε x_1, x_2, x_3 ώστε να μεγιστοποιείται η ποσότητα

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

υπό τους περιορισμούς

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5,$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11,$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Το πρόβλημα γράφεται συνήθως στη μορφή

$$\begin{array}{ll} \max & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{υπό τους περιορισμούς} & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5, \\ & 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11, \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array}$$

Ορίζουμε τον πίνακα A και τα διανύσματα x, b, c . Ο πίνακας A σχηματίζεται από τους συντελεστές των μεταβλητών στους περιορισμούς:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Η διανυσματική ανισότητα $Ax \leq b$ κωδικοποιεί τους τρεις περιορισμούς, ενώ προσθέτουμε τον περιορισμό μη αρνητικότητας $x \geq 0$. Επομένως, το αρχικό πρόβλημα γράφεται

$$\max c^T x \quad \text{υπό τους περιορισμούς} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0.$$

Ένα τέτοιο πρόβλημα μπορεί να έχει μοναδική λύση, άπειρες βέλτιστες λύσεις ή να μην έχει καθόλου εφικτή λύση. Με την κατάλληλη μέθοδο βρίσκουμε ότι στο συγκεκριμένο παράδειγμα το μέγιστο επιτυγχάνεται για $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ και είναι ίσο με 13.

3.1 Γραμμικός προγραμματισμός: βασική θεωρία

Ορισμός 3.1 (Πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού). Ένα πεπερασμένης διάστασης πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού είναι πρόβλημα βελτιστοποίησης της μορφής

$$\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\},$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ και $c \in \mathbb{R}^n$. Παραλλαγές περιλαμβάνουν προβλήματα ελαχιστοποίησης, ισότητες ή περιορισμούς τύπου $\geq$, καθώς και μεταβλητές χωρίς περιορισμό προσήμου. Όλες αυτές οι μορφές μπορούν να μετατραπούν η μία στην άλλη με απλούς μετασχηματισμούς.

Ορισμός 3.2 (Εφικτότητα και βελτιστότητα). Το εφικτό σύνολο είναι

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

Ένα σημείο $x^* \in P$ είναι βέλτιστο αν $c^T x^* \geq c^T x$ για κάθε $x \in P$. Το πρόβλημα είναι ανέφικτο αν $P = \emptyset$ και μη φραγμένο αν για κάθε M υπάρχει $x \in P$ τέτοιο ώστε $c^T x \geq M$.

Κανονικές μορφές και μεταβλητές χαλάρωσης

Μια συνηθισμένη κανονική μορφή για πρόβλημα μεγιστοποίησης είναι

$$\max c^T x \quad \text{υπό τους περιορισμούς} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0.$$

Ένας περιορισμός $a_i^T x \leq b_i$ μετατρέπεται σε ισότητα με την προσθήκη μεταβλητής χαλάρωσης $s_i \geq 0$: $a_i^T x + s_i = b_i$. Ένας περιορισμός τύπου $\geq$ μπορεί να πολλαπλασιαστεί με -1 . Μια ελεύθερη μεταβλητή $u \in \mathbb{R}$ γράφεται ως $u = u^+ - u^-$, όπου $u^+, u^- \geq 0$.

Γεωμετρία και βασικές εφικτές λύσεις

Το εφικτό σύνολο P είναι κυρτό πολύεδρο. Μια βασική εφικτή λύση (basic feasible solution, BFS) είναι εφικτό σημείο που προκύπτει όταν ενεργοποιηθούν, δηλαδή γίνουν ισότητες, n γραμμικά ανεξάρτητοι περιορισμοί.

Θεώρημα 3.3 (Βελτιστότητα σε ακραίο σημείο). Αν ένα πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή έχει βέλτιστη λύση και το εφικτό σύνολο είναι μη κενό και φραγμένο, τότε υπάρχει βέλτιστη βασική εφικτή λύση. Ισοδύναμα, υπάρχει βέλτιστη κορυφή του πολυέδρου P .

Δυϊκότητα

Για το πρωτεύον πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max c^T x \quad \text{υπό τους περιορισμούς} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad (\text{P})$$

το δυϊκό πρόβλημα είναι

$$\min b^T y \quad \text{υπό τους περιορισμούς} \quad A^T y \geq c, \quad y \geq 0. \quad (\text{D})$$

Κανόνες προσήμων και μορφής. Για ένα πρωτεύον πρόβλημα μεγιστοποίησης:

Τύπος γραμμής i στο πρωτεύον	$\Rightarrow$	Πρόσημο της δυϊκής μεταβλητής y_i
$\leq$		$y_i \geq 0$
$=$		y_i ελεύθερη
$\geq$		$y_i \leq 0$
Πρόσημο της x_j	$\Rightarrow$	Δυϊκός περιορισμός j
$x_j \geq 0$		$(A^T y)_j \geq c_j$
x_j ελεύθερη		$(A^T y)_j = c_j$
$x_j \leq 0$		$(A^T y)_j \leq c_j$

Θεώρημα 3.4 (Ασθενής δυϊκότητα). Αν x είναι εφικτή λύση του (P) και y εφικτή λύση του (D), τότε

$$c^T x \leq b^T y.$$

Απόδειξη. Από $A^T y \geq c$ και $x \geq 0$ παίρνουμε $c^T x \leq y^T A x$. Επίσης, από $A x \leq b$ και $y \geq 0$ προκύπτει $y^T A x \leq y^T b$. Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες λαμβάνουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 3.5 (Ισχυρή δυϊκότητα). Αν ένα από τα προβλήματα (P) και (D) έχει βέλτιστη λύση και το άλλο είναι εφικτό, τότε και τα δύο έχουν βέλτιστες λύσεις και οι βέλτιστες τιμές τους συμπίπτουν: $\max(P) = \min(D)$.

Πόρισμα 3.6 (Συμπληρωματική χαλαρότητα). Έστω ότι x^* και y^* είναι εφικτές λύσεις των (P) και (D). Είναι και οι δύο βέλτιστες αν και μόνο αν

$$y_i^* (b_i - (A x^*)_i) = 0 \quad \forall i, \quad x_j^* ((A^T y^*)_j - c_j) = 0 \quad \forall j.$$

Ισοδύναμα, αν $r = c - A^T y^*$ είναι το διάνυσμα μειωμένων κοστών, τότε $r \leq 0$ και $x_j^* > 0 \Rightarrow r_j = 0$.

Συνθήκες βελτιστότητας KKT για γραμμικά προβλήματα

Στον γραμμικό προγραμματισμό, οι συνθήκες Karush--Kuhn--Tucker ανάγονται στην πρωτεύουσα εφικτότητα $A x \leq b$, $x \geq 0$, στη δυϊκή εφικτότητα $A^T y \geq c$, $y \geq 0$ και στη συμπληρωματική χαλαρότητα του Πορίσματος 3.6. Οι συνθήκες αυτές είναι αναγκαίες και ικανές.

Λήμμα του Farkas

Ακριβώς ένα από τα ακόλουθα δύο συστήματα έχει λύση:

$$(i) \quad A x = b, \quad x \geq 0, \quad \text{ή} \quad (ii) \quad A^T y \geq 0, \quad b^T y < 0.$$

Πρόκειται για θεμελιώδες θεώρημα εναλλακτικής, πάνω στο οποίο βασίζονται τα πιστοποιητικά μη εφικτότητας και η θεωρία δυϊκότητας.

Μειωμένα κόστη και ανάλυση ευαισθησίας

Για μια βέλτιστη δυϊκή λύση y^* , το μειωμένο κόστος της μεταβλητής x_j είναι

$$r_j = c_j - (A^T y^*)_j \leq 0.$$

Αν $r_j < 0$, η αύξηση της x_j από το μηδέν θα μείωνε την αντικειμενική συνάρτηση σε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης, οπότε $x_j^* = 0$. Αν $x_j^* > 0$, τότε $r_j = 0$. Οι συνιστώσες y_i^* ονομάζονται σκιώδεις τιμές: για μικρές μεταβολές Δb , η βέλτιστη τιμή μεταβάλλεται προσεγγιστικά κατά $(y^*)^T \Delta b$.

Σύντομες αλγοριθμικές παρατηρήσεις

Η μέθοδος simplex κινείται μεταξύ κορυφών, δηλαδή βασικών εφικτών λύσεων, του πολυέδρου P , βελτιώνοντας την αντικειμενική συνάρτηση μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο βελτιστότητας. Η εκφυλισμένη μορφή μπορεί να προκαλέσει κύκλους, αλλά κανόνες αποφυγής κύκλων, όπως ο κανόνας του Bland, εξασφαλίζουν τερματισμό. Οι μέθοδοι εσωτερικού σημείου ακολουθούν μια κεντρική διαδρομή στο εσωτερικό του P και έχουν πολυωνυμική πολυπλοκότητα. Και οι δύο προσεγγίσεις επιστρέφουν πρωτεύουσες και δυϊκές λύσεις, καθώς και πιστοποιητικά βελτιστότητας ή μη εφικτότητας.

Διαδικασία της μεθόδου simplex

Η **μέθοδος simplex** είναι αλγόριθμος επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού σε κανονική μορφή. Κινείται κατά μήκος των ακμών του εφικτού πολυέδρου, αναζητώντας μια βέλτιστη κορυφή. Η βασική διαδικασία είναι:

Βήμα 1. Μετατροπή σε κανονική μορφή. Μετατρέπουμε όλους τους περιορισμούς σε ισότητες. Προσθέτουμε μεταβλητές χαλάρωσης στους περιορισμούς $\leq$, αφαιρούμε μεταβλητές πλεονάσματος από τους περιορισμούς $\geq$ και εξασφαλίζουμε ότι όλες οι μεταβλητές είναι μη αρνητικές.

Βήμα 2. Κατασκευή αρχικού πίνακα simplex. Γράφουμε την αντικειμενική συνάρτηση ως $z - c_1x_1 - \dots - c_nx_n = 0$, εισάγουμε τις μεταβλητές χαλάρωσης ή πλεονάσματος και κατασκευάζουμε τον πίνακα με μία στήλη για κάθε μεταβλητή και μία στήλη δεξιού μέλους.

Βήμα 3. Έλεγχος βελτιστότητας. Αν όλοι οι συντελεστές της γραμμής z , εκτός από το δεξί μέλος, είναι μη αρνητικοί, η τρέχουσα λύση είναι βέλτιστη. Διαφορετικά συνεχίζουμε.

Βήμα 4. Επιλογή εισερχόμενης μεταβλητής. Επιλέγουμε τη μεταβλητή με τον περισσότερο αρνητικό συντελεστή στη γραμμή z .

Βήμα 5. Επιλογή εξερχόμενης μεταβλητής. Εφαρμόζουμε το κριτήριο ελάχιστου λόγου

$$\frac{\text{δεξί μέλος}}{\text{θετικό στοιχείο της εισερχόμενης στήλης}}.$$

Η γραμμή με τον μικρότερο μη αρνητικό λόγο προσδιορίζει την εξερχόμενη μεταβλητή.

Βήμα 6. Οδήγηση. Με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών κάνουμε το στοιχείο οδήγησης ίσο με 1 και μηδενίζουμε τα υπόλοιπα στοιχεία της ίδιας στήλης.

Βήμα 7. Επανάληψη. Επιστρέφουμε στο Βήμα 3 μέχρι να μην υπάρχουν αρνητικοί συντελεστές στη γραμμή z .

Μέθοδος simplex: συνοπτική επανάληψη

Για λόγους αναφοράς, η ίδια διαδικασία συνοψίζεται ως εξής:

Βήμα 1. Μετατρέπουμε το πρόβλημα σε κανονική μορφή, προσθέτοντας μεταβλητές χαλάρωσης ή πλεονάσματος και επιβάλλοντας μη αρνητικότητα.

Βήμα 2. Κατασκευάζουμε τον αρχικό πίνακα simplex, με γραμμές τους περιορισμούς και τελευταία γραμμή την εξίσωση της αντικειμενικής συνάρτησης.

Βήμα 3. Ελέγχουμε αν όλοι οι συντελεστές της γραμμής z είναι μη αρνητικοί.

Βήμα 4. Αν όχι, επιλέγουμε την εισερχόμενη μεταβλητή από τον περισσότερο αρνητικό συντελεστή.

Βήμα 5. Εφαρμόζουμε το κριτήριο ελάχιστου λόγου για να επιλέξουμε την εξερχόμενη μεταβλητή.

Βήμα 6. Εκτελούμε την πράξη οδήγησης.

Βήμα 7. Επαναλαμβάνουμε μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο βελτιστότητας.

Παράδειγμα 1: μεγιστοποίηση με δύο μεταβλητές

Μεγιστοποιήστε

$$z = 3x_1 + 5x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 4, \\2x_2 &\leq 12, \\3x_1 + 2x_2 &\leq 18, \\x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

Βήμα 1: Προσθήκη των μεταβλητών χαλάρωσης s_1, s_2, s_3 .

$$\begin{aligned}x_1 + s_1 &= 4, \\2x_2 + s_2 &= 12, \\3x_1 + 2x_2 + s_3 &= 18, \\z - 3x_1 - 5x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Αρχικός πίνακας:

Βασική	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Δ.Μ.
s_1	1	0	1	0	0	4
s_2	0	2	0	1	0	12
s_3	3	2	0	0	1	18
z	-3	-5	0	0	0	0

Επανάληψη 1: Η εισερχόμενη μεταβλητή είναι η x_2 , επειδή έχει συντελεστή -5 . Οι αποδεκτοί λόγοι είναι $12/2 = 6$ και $18/2 = 9$, άρα εξέρχεται η s_2 . Οδηγούμε στο στοιχείο $a_{22} = 2$.

Μετά την οδήγηση:

Βασική	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Δ.Μ.
s_1	1	0	1	0	0	4
x_2	0	1	0	0.5	0	6
s_3	3	0	0	-1	1	6
z	-3	0	0	2.5	0	30

Επανάληψη 2: Εισέρχεται η x_1 . Οι λόγοι είναι $4/1 = 4$ και $6/3 = 2$, άρα εξέρχεται η s_3 . Οδηγούμε στο $a_{31} = 3$.
Μετά την οδήγηση:

Βασική	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Δ.Μ.
s_1	0	0	1	0.5	$-1/3$	2
x_2	0	1	0	0.5	0	6
x_1	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2
z	0	0	0	2	1	36

Όλοι οι συντελεστές στη γραμμή z είναι μη αρνητικοί. Η βέλτιστη λύση είναι

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 6, \quad z = 36.$$

Παράδειγμα 2: μεγιστοποίηση με περιορισμό ισότητας

Μεγιστοποιήστε

$$z = 4x_1 + 3x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 6, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8, \\ x_1 + 2x_2 &\leq 10, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Βήμα 1: Κανονική μορφή. Προσθέτουμε μεταβλητές χαλάρωσης s_1, s_2 στις ανισότητες. Για τον περιορισμό ισότητας εισάγουμε τεχνητή μεταβλητή a_1 :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + a_1 &= 6, \\ 2x_1 + x_2 + s_1 &= 8, \\ x_1 + 2x_2 + s_2 &= 10, \\ z - 4x_1 - 3x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Με τη μέθοδο του μεγάλου M , η αντικειμενική εξίσωση γίνεται

$$z - 4x_1 - 3x_2 + Ma_1 = 0.$$

Αρχικός πίνακας:

Βασική	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	Δ.Μ.
a_1	1	1	0	0	1	6
s_1	2	1	1	0	0	8
s_2	1	2	0	1	0	10
z	-4	-3	0	0	$-M$	0

Απαλείφοντας τον όρο M από τη γραμμή z , παίρνουμε

$$z + (M - 4)x_1 + (M - 3)x_2 = 6M.$$

Επειδή $M > 4$, οι δύο συντελεστές είναι θετικοί, αλλά η τεχνητή μεταβλητή πρέπει να απομακρυνθεί από τη βάση. Αυτό μπορεί να γίνει με τη μέθοδο δύο φάσεων. Στο

συγκεκριμένο απλό παράδειγμα μπορούμε να λύσουμε απευθείας, θέτοντας από την ισότητα $x_2 = 6 - x_1$. Τότε

$$\begin{aligned} 2x_1 + (6 - x_1) &\leq 8 & \implies x_1 &\leq 2, \\ x_1 + 2(6 - x_1) &\leq 10 & \implies x_1 &\geq 2. \end{aligned}$$

Άρα $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ και

$$z = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 20.$$

Παράδειγμα 3: πρόβλημα ελαχιστοποίησης μέσω του δυϊκού

Ελαχιστοποιήστε

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 4, \\ 2x_1 + x_2 &\geq 6, \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Μετατροπή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης μέσω δυϊκότητας. Έστω w_1, w_2 οι δυϊκές μεταβλητές. Το δυϊκό πρόβλημα είναι

$$\max z = 4w_1 + 6w_2$$

υπό τους περιορισμούς

$$\begin{aligned} w_1 + 2w_2 &\leq 2, \\ w_1 + w_2 &\leq 3, \\ w_1, w_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Προσθέτουμε μεταβλητές χαλάρωσης s_1, s_2 :

$$\begin{aligned} w_1 + 2w_2 + s_1 &= 2, \\ w_1 + w_2 + s_2 &= 3, \\ z - 4w_1 - 6w_2 &= 0. \end{aligned}$$

Αρχικός πίνακας:

Βασική	w_1	w_2	s_1	s_2	Δ.Μ.
s_1	1	2	1	0	2
s_2	1	1	0	1	3
z	-4	-6	0	0	0

Επανάληψη 1: Εισέρχεται η w_2 . Οι λόγοι είναι $2/2 = 1$ και $3/1 = 3$, άρα εξέρχεται η s_1 . Οδηγούμε στο $a_{12} = 2$ και παίρνουμε

Βασική	w_1	w_2	s_1	s_2	Δ.Μ.
w_2	0.5	1	0.5	0	1
s_2	0.5	0	-0.5	1	2
z	-1	0	3	0	6

Επανάληψη 2: Εισέρχεται η w_1 . Οι λόγοι είναι $1/0.5 = 2$ και $2/0.5 = 4$, άρα εξέρχεται η w_2 . Οδηγούμε στο $a_{11} = 0.5$:

Βασική	w_1	w_2	s_1	s_2	Δ.Μ.
w_1	1	0	1	-2	2
w_2	0	1	-1	2	0
z	0	0	4	2	8

Η βέλτιστη τιμή του δυϊκού είναι $z = 8$. Από την ισχυρή δυϊκότητα, η βέλτιστη τιμή του αρχικού προβλήματος ελαχιστοποίησης είναι επίσης 8.

Εργαστήριο 3.7 (Επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το αρχείο Python **Linear-programming-problems.ipynb** για να λύσετε το πρόβλημα

$$\max 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \quad \text{υπό τους περιορισμούς} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0.$$

Παρατήρηση 3.8. Η συνάρτηση **linprog** της βιβλιοθήκης SciPy λύνει προβλήματα ελαχιστοποίησης της μορφής

$$\min_{x \geq 0} f(x) \quad \text{υπό τον περιορισμό} \quad A_{\text{ub}} x \leq b_{\text{ub}}.$$

Για να λύσουμε

$$\max c^T x \quad \text{υπό τους περιορισμούς} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0,$$

χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\max c^T x = -\min(-c)^T x$ και δίνουμε στη **linprog** το διάνυσμα $-c$ ως συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης:

$$\text{linprog}(-c, A_{\text{ub}} = A, b_{\text{ub}} = b, \text{bounds} = (0, \infty)).$$

Η λύση x^* που επιστρέφεται είναι βέλτιστη για το αρχικό πρόβλημα και η τιμή $c^T x^*$ είναι το αντίθετο της τιμής που επιστρέφει η διαδικασία ελαχιστοποίησης.

Για το δυϊκό πρόβλημα

$$\min b^T y \quad \text{υπό τους περιορισμούς} \quad A^T y \geq c, \quad y \geq 0,$$

μετατρέπουμε την ανισότητα στη μορφή που απαιτεί η συνάρτηση:

$$A^T y \geq c \iff -A^T y \leq -c.$$

Άρα θέτουμε $A_{\text{ub}} = -A^T$ και $b_{\text{ub}} = -c$.

```
1 import numpy as np
2 from scipy.optimize import linprog
3
4
5 def solve_lp(c, A, b):
6     """Solve max c^T x subject to A x <= b and x >= 0."""
7     c = np.asarray(c, dtype=float)
8     A = np.asarray(A, dtype=float)
9     b = np.asarray(b, dtype=float)
```

```

11 result = linprog(
12     -c,
13     A_ub=A,
14     b_ub=b,
15     bounds=[(0, None)] * len(c),
16     method="highs",
17 )
18 if not result.success:
19     raise RuntimeError("LP solver failed: " + result.message)
20
21 x = result.x
22 value = float(c @ x)
23 return x, value
24
25
26 x, value = solve_lp(
27     [5, 4, 3],
28     [[2, 3, 1], [4, 1, 2], [3, 4, 2]],
29     [5, 11, 8],
30 )
31 print("x =", x)
32 print("maximum =", value)

```

Listing 3.1: Απλός κώδικας Python

3.2 Ασκήσεις εφαρμογής

1. Για το αρχικό παράδειγμα:

- γράψτε ρητά τον πίνακα A και τα διανύσματα b, c για το πρόβλημα

$$\max 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

με τους περιορισμούς

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 11, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 8, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

- υλοποιήστε τη λύση με τη διαδικασία Python και επαληθεύστε ότι $x = (2, 0, 1)$ δίνει μέγιστη τιμή 13.
2. Αντικαταστήστε την αντικειμενική συνάρτηση με $\max(7x_1 + 2x_2 + 5x_3)$, κρατώντας τους ίδιους περιορισμούς. Κατασκευάστε τα A, b, c και βρείτε τη βέλτιστη λύση.
3. Προσθέστε στο αρχικό πρόβλημα τον περιορισμό $x_1 + x_2 \leq 3$.
- Ενημερώστε τον πίνακα A και το διάνυσμα b .
 - Λύστε το νέο πρόβλημα και συγκρίνετε τη λύση με την προηγούμενη.

- Τι συμβαίνει αν αφαιρέσετε τον περιορισμό $x_3 \geq 0$; Παραμένει το πρόβλημα εφικτό και φραγμένο;
- Τι πρέπει να αλλάξει αν απαιτούνται ακέραιες λύσεις;

4. Κατασκευάστε το δυϊκό του αρχικού προβλήματος

$$\max c^T x \quad \text{υπό τους περιορισμούς} \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0.$$

Γράψτε το αντίστοιχο πρόβλημα $\min b^T y$ με $A^T y \geq c, y \geq 0$, και λύστε το με Python.

5. **Ανάλυση ευαισθησίας:**

- Μεταβάλετε ελαφρά το c , για παράδειγμα από $[5, 4, 3]$ σε $[5.1, 4, 3]$ ή $[5, 3.9, 3]$, και εξετάστε πώς μεταβάλλεται η λύση.
- Μεταβάλετε το δεξί μέλος από $b = (5, 11, 8)$ σε $b = (5, 11, 9)$ και συζητήστε την επίδραση στη βέλτιστη τιμή και στους ενεργούς περιορισμούς.

3.3 Ασκήσεις

Σωστό ή Λάθος

1. Κάθε γραμμικό πρόγραμμα με μη κενό και φραγμένο εφικτό σύνολο λαμβάνει τη βέλτιστη τιμή του.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

2. Αν το πρωτεύον πρόβλημα στη μορφή μεγιστοποίησης $Ax \leq b, x \geq 0$ είναι μη φραγμένο, τότε το δυϊκό είναι ανέφικτο.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

3. Αν ένα γραμμικό πρόγραμμα έχει δύο διαφορετικά βέλτιστα εφικτά σημεία, τότε κάθε κυρτός συνδυασμός τους είναι επίσης βέλτιστος.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

4. Η προσθήκη πλεονάζοντος περιορισμού, ο οποίος συνεπάγεται από τους υπόλοιπους, μπορεί να αλλάξει τη βέλτιστη τιμή.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

5. Στη μέθοδο simplex είναι αδύνατη η επανεμφάνιση της ίδιας βάσης.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Το δυϊκό του $\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ είναι:

(A) $\min\{b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0\}$

- (B) $\min\{c^T y : Ay \geq b, y \geq 0\}$
 (C) $\max\{b^T y : A^T y \leq c, y \geq 0\}$
 (D) $\min\{b^T y : Ay \leq c, y \geq 0\}$

Απάντηση: _____

2. Ποια είναι σωστή μορφή της συμπληρωματικής χαλαρότητας;

- (A) $x_j((A^T y)_j - c_j) = 0$ για κάθε j
 (B) $y_i(b_i - (Ax)_i) = 0$ για κάθε i
 (C) Και οι δύο προηγούμενες
 (D) Καμία από τις προηγούμενες

Απάντηση: _____

3. Για

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = (5, 11, 8)^T,$$

ποιο σημείο είναι εφικτό;

- (A) $(2, 0, 1)$
 (B) $(1, 2, 2)$
 (C) $(3, 0, 0)$
 (D) $(0, 3, 2)$

Απάντηση: _____

4. Σε πρόβλημα μεγιστοποίησης, αν τα μειωμένα κόστη ορίζονται ως $r = c - A^T y$, μια μη βασική μεταβλητή είναι υποψήφια να εισέλθει στη βάση όταν:

- (A) $r_j < 0$
 (B) $r_j = 0$
 (C) $r_j > 0$
 (D) δεν υπάρχει κανένας περιορισμός στο r_j

Απάντηση: _____

5. Αν το πρωτεύον είναι εφικτό και το δυϊκό ανέφικτο, τότε:

- (A) το πρωτεύον έχει πολλές βέλτιστες λύσεις,
 (B) το πρωτεύον είναι ανέφικτο,
 (C) το πρωτεύον είναι μη φραγμένο,
 (D) δεν μπορεί να εξαχθεί συμπεράσμα.

Απάντηση: _____

Αντιστοίχιση

- | | |
|---|------------------------|
| 1. Μεταβλητή που μετατρέπει περιορισμό $\leq$ σε ισότητα | A. Σκιώδης τιμή |
| 2. Βέλτιστος δυϊκός πολλαπλασιαστής με οριακή ερμηνεία | B. Μεταβλητή χαλάρωσης |
| 3. Λύση κορυφής από ενεργοποίηση περιορισμών | Γ. Βασική εφικτή λύση |
| 4. Φαινόμενο που μπορεί να προκαλέσει στασιμότητα στο simplex | Δ. Εκφυλισμός |

Απαντήσεις: 1. _____ 2. _____ 3. _____ 4. _____

Συμπλήρωση κενών

1. Το εφικτό σύνολο $P = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$ είναι κυρτό _____.
2. Στο δυϊκό της κανονικής μορφής μεγιστοποίησης ισχύει $A^T y \geq$ _____.
3. Στη βέλτιστη λύση, τα μειωμένα κόστη ικανοποιούν $r = c - A^T y^* \leq 0$.
4. Η συμπληρωματική χαλαρότητα δίνει $y_i^*(b_i - (Ax^*)_i) = 0$ για κάθε i .
5. Για μικρή μεταβολή Δb , η μεταβολή της βέλτιστης τιμής είναι προσεγγιστικά $(y^*)^T \Delta b$.

Θεωρητικές και υπολογιστικές ασκήσεις

1. Λύστε το αρχικό πρόβλημα του κεφαλαίου. Δώστε ένα βέλτιστο x^* , τη βέλτιστη τιμή και τους ενεργούς περιορισμούς.
2. Κατασκευάστε το δυϊκό. Βρείτε εφικτό y με την ίδια τιμή αντικειμενικής συνάρτησης και επαληθεύστε ρητά την ισχυρή δυϊκότητα και τη συμπληρωματική χαλαρότητα.
3. Για το πρόβλημα

$$\max 3x_1 + 2x_2 \quad \text{υπό τους περιορισμούς} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases}$$

σχεδιάστε το εφικτό σύνολο, καταγράψτε όλες τις κορυφές και υπολογίστε την αντικειμενική συνάρτηση σε καθεμία.

4. Για το αρχικό πρόβλημα θέστε $b(\varepsilon) = (5 + \varepsilon, 11, 8)^T$. Με χρήση της βέλτιστης δυϊκής λύσης προβλέψτε την πρώτη τάξης μεταβολή της βέλτιστης τιμής. Στη συνέχεια λύστε το πρόβλημα για $\varepsilon = \pm 0.5$ και συγκρίνετε.
5. Υλοποιήστε με `scipy.optimize.linprog` συνάρτηση που λύνει $\max c^T x$ υπό τους περιορισμούς $Ax \leq b, x \geq 0$, μέσω ελαχιστοποίησης του $-c^T x$. Εφαρμόστε την στο αρχικό πρόβλημα και στο πρόβλημα δύο μεταβλητών της Άσκησης 3. Εκτυπώστε το x^* , τη βέλτιστη τιμή και τους ενεργούς περιορισμούς.

Κεφάλαιο 4

Βέλτιστα Χαρτοφυλάκια

Δεν θα ασχοληθούμε με τεχνικές πρόβλεψης, αλλά με το πρόβλημα κατασκευής ενός χαρτοφυλακίου όταν έχει δοθεί μια πρόβλεψη.

Έστω $S_0 = 238$, $C(230) = 65$ και $P(200) = 30$, όπου S_0 είναι η τρέχουσα τιμή της μετοχής, $C(230)$ είναι η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης 230 και $P(200)$ είναι η τιμή ενός δικαιώματος πώλησης με τιμή εξάσκησης 200.

Υποθέστε ότι θέλουμε να επενδύσουμε 1,000 ευρώ στα παραπάνω χρηματοοικονομικά προϊόντα. Για παράδειγμα, μπορούμε να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκιο με συνάρτηση κέρδους

$$\Pi(x) = \frac{200}{238}x + \frac{300}{65}(x - 230)^+ + \frac{500}{30}(200 - x)^+ - 1000.$$

Αν σχεδιάσουμε τη συνάρτηση κέρδους, παρατηρούμε ότι η μέγιστη δυνατή ζημία σε όλα τα σενάρια, δηλαδή για κάθε $x \geq 0$, είναι περίπου 832 ευρώ.

Ερώτηση 4.1. Υπάρχει διαφορετική κατανομή των 1,000 ευρώ για την οποία η μέγιστη δυνατή ζημία είναι μικρότερη; Αν ναι, ποια κατανομή οδηγεί στο χαρτοφυλάκιο με τη μικρότερη δυνατή μέγιστη ζημία;

Το ερώτημα αυτό μετατρέπεται σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Αρχικά παρατηρούμε το εξής. Αν μια γραμμική συνάρτηση f πρέπει να ικανοποιεί $f(x) \geq -D$ για κάθε $x \geq 0$, αρκεί και είναι αναγκαίο να ισχύουν $f(0) \geq -D$ και $f'(0+) \geq 0$. Το συμπέρασμα γενικεύεται σε κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις με πεπερασμένο πλήθος τμημάτων.

Η παραπάνω συνάρτηση Π είναι κατά τμήματα γραμμική. Επομένως,

$$\left(\Pi(x) \geq -D \text{ για κάθε } x \geq 0 \right) \iff \begin{cases} \Pi(0) \geq -D, \\ \Pi(200) \geq -D, \\ \Pi(230) \geq -D, \\ \Pi'(230+) \geq 0, \end{cases}$$

όπου

$$\Pi(x) = ax + b(x - 230)^+ + c(200 - x)^+ - 1000.$$

Ισοδύναμα,

$$\left(\Pi(x) \geq -D \text{ για κάθε } x \geq 0 \right) \iff \begin{cases} 200c - 1000 \geq -D, \\ 200a - 1000 \geq -D, \\ 230a - 1000 \geq -D, \\ a + b \geq 0. \end{cases}$$

Άρα, τα χαρτοφυλάκια με παραμέτρους a, b, c που ικανοποιούν τις παραπάνω ανισότητες και τον περιορισμό προϋπολογισμού $238a + 65b + 30c = 1000$ έχουν μέγιστη δυνατή ζημία το πολύ D .

Ερώτηση 4.2. Ποια είναι η μικρότερη τιμή του D για την οποία υπάρχει χαρτοφυλάκιο με μέγιστη δυνατή ζημία ίση με D ;

Αρκεί να λύσουμε το πρόβλημα

$$\begin{array}{ll} \min & D \\ \text{υπό τους περιορισμούς} & 200c - 1000 + D \geq 0, \\ & 200a - 1000 + D \geq 0, \\ & 230a - 1000 + D \geq 0, \\ & a + b \geq 0, \\ & 238a + 65b + 30c = 1000. \end{array}$$

Θέτοντας $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ και $x_4 = D$, παίρνουμε

$$\begin{array}{ll} \max & -x_4 \\ \text{υπό τους περιορισμούς} & 200x_3 - 1000 + x_4 \geq 0, \\ & 200x_1 - 1000 + x_4 \geq 0, \\ & 230x_1 - 1000 + x_4 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 \geq 0, \\ & 238x_1 + 65x_2 + 30x_3 = 1000. \end{array}$$

Η λύση είναι προσεγγιστικά $a = 4.9, b = -4.9, c = 5$ και η μέγιστη δυνατή ζημία είναι περίπου 20 ευρώ. Αρνητικός συντελεστής αντιστοιχεί σε θέση πώλησης. Αν επιβάλλουμε όλες οι θέσεις να είναι αγοράς, δηλαδή μη αρνητικές, προκύπτει περίπου $a = 3.5, b = 0, c = 5$, με μέγιστη δυνατή ζημία περίπου 286 ευρώ.

Η προηγούμενη κατασκευή ελαχιστοποιεί τη χειρότερη δυνατή ζημία. Ο επενδυτής, όμως, μπορεί να πιστεύει ότι η τιμή της μετοχής θα αυξηθεί. Ένας τρόπος να κατασκευαστεί ένα αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο επιδίωξης κέρδους είναι να απαιτήσουμε η κλίση του τελευταίου γραμμικού τμήματος να είναι αρκετά μεγάλη, δηλαδή $x_1 + x_2 \geq M$ για κάποιο $M > 0$. Όσο μεγαλύτερο είναι το M , τόσο μεγαλύτερο είναι το κέρδος σε περίπτωση ανόδου, αλλά τόσο μεγαλύτερη γίνεται συνήθως και η μέγιστη δυνατή ζημία. Ο επενδυτής πρέπει επομένως να επιλέξει την κατάλληλη ισορροπία.

Για παράδειγμα, για $M = 6.5$ προκύπτουν $a = 2.84, b = 3.65, c = 2$, ενώ η μέγιστη δυνατή ζημία αυξάνεται στα 432 ευρώ.

Μια άλλη κατασκευή βασίζεται στην πρόβλεψη για την τιμή της μετοχής στον χρόνο T . Έστω, για παράδειγμα, ότι ο επενδυτής προβλέπει $S_T \in (220, 250)$. Τότε επιθυμεί

$\Pi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (220, 250)$. Μπορούμε να λύσουμε το γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{array}{ll} \max & x_4 + x_5 + x_6 \\ \text{υπό τους περιορισμούς} & 200x_3 - 500 \geq 0, \\ & 200x_1 - 500 \geq 0, \\ & 220x_1 - 1000 - x_4 \geq 0, \\ & 230x_1 - 1000 - x_5 \geq 0, \\ & 250x_1 + 20x_2 - 1000 - x_6 \geq 0, \\ & x_1 + x_2 \geq 0, \\ & 238x_1 + 65x_2 + 30x_3 = 1000. \end{array}$$

Η λύση δίνει χαρτοφυλάκιο με ζημία το πολύ 500 ευρώ και, ταυτόχρονα, με όσο το δυνατόν μεγαλύτερο κέρδος όταν η τιμή ανήκει στο προβλεπόμενο διάστημα. Πράγματι, απαιτούμε $\Pi(220) \geq D_1$, $\Pi(230) \geq D_2$ και $\Pi(250) \geq D_3$, μεγιστοποιώντας τα D_1, D_2, D_3 .

Για να εξασφαλίσουμε ότι η ζημία δεν ξεπερνά τα 500 ευρώ, απαιτούμε $\Pi(x) \geq -500$ για κάθε $x \geq 0$. Λόγω της κατά τμήματα γραμμικής μορφής, αρκούν οι συνθήκες $\Pi(0) \geq -500$, $\Pi(200) \geq -500$ και $\Pi'(230+) \geq 0$.

Γενικότερα, θα χρησιμοποιήσουμε τις ισοδυναμίες

$$\left(\Pi(x) \geq -D \text{ για κάθε } x \geq 0 \right) \iff \begin{cases} \Pi(0) \geq -D, \\ \Pi(K_1) \geq -D, \\ \vdots \\ \Pi(K_n) \geq -D, \\ \Pi'(K_n+) \geq 0, \end{cases}$$

και

$$\left(\Pi(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in (a, b) \right) \iff \begin{cases} \Pi(K_i) \geq D_i \text{ για κάθε } K_i \in (a, b), \\ \Pi(a) \geq D_a, \\ \Pi(b) \geq D_b \text{ αν } b < +\infty, \\ \Pi'(K_n+) \geq M \text{ αν } b = +\infty, \\ D_i, D_a, D_b, M \geq 0. \end{cases}$$

Θα αποδείξουμε αυστηρά τα αντίστοιχα αποτελέσματα τόσο για μία όσο και για d υποκείμενες μετοχές.

Θεώρημα 4.3 (Στατική υπεραντιστάθμιση σε πεπερασμένο πλέγμα: μία μετοχή). Έστω τιμές εξάσκησης $\{K_1, \dots, K_m\}$ για δικαιώματα αγοράς και $\{K'_1, \dots, K'_m\}$ για δικαιώματα πώλησης πάνω στην ίδια μετοχή. Θεωρούμε στατικό χαρτοφυλάκιο, σε προεξοφλημένες μονάδες, με συνάρτηση κέρδους

$$\Pi(x) = b + \phi(x) - V, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

όπου

$$\phi(x) = ax + \sum_{j=1}^m c_j (x - K_j)^+ + \sum_{k=1}^{\tilde{m}} d_k (K'_k - x)^+.$$

Οι συντελεστές b, a, c_j, d_k είναι πραγματικοί, με θετικό πρόσημο για θέση αγοράς και αρνητικό για θέση πώλησης. Έστω V το προεξοφλημένο αρχικό κόστος, $D \in \mathbb{R}$ και

$$S := \{0\} \cup \{K_1, \dots, K_m, K'_1, \dots, K'_m\}.$$

Τότε είναι ισοδύναμα:

(i) $\Pi(x) \geq D$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Ισχύει το πεπερασμένο σύστημα γραμμικών ανισοτήτων

$$a + \sum_{j=1}^m c_j \geq 0, \quad (4.1)$$

$$(b - V) + \phi(s) \geq D \quad \text{για κάθε } s \in S. \quad (4.2)$$

Απόδειξη. Γράφουμε $\Pi(x) = (b - V) + \phi(x)$. Τότε

$$\inf_{x \geq 0} \Pi(x) = (b - V) + \inf_{x \geq 0} \phi(x). \quad (4.3)$$

Βήμα 1: κλίση της ουράς και κάτω φραγμένοτητα. Η ϕ είναι κατά τμήματα αφινική στο $[0, \infty)$, με κόμβους τα σημεία του S , και η δεξιά κλίση της για $x \rightarrow \infty$ είναι $a + \sum_j c_j$. Αν αυτή είναι αρνητική, τότε $\phi(x) \rightarrow -\infty$ και δεν μπορεί να υπάρχει ομοιόμορφο κάτω φράγμα. Άρα η (4.1) είναι αναγκαία. Υπό αυτή τη συνθήκη, η ϕ είναι κάτω φραγμένη.

Βήμα 2: το ελάχιστο λαμβάνεται σε κόμβο ή στο 0. Μεταξύ δύο διαδοχικών σημείων του S , η ϕ είναι αφινική και το ελάχιστό της σε κάθε κλειστό διάστημα λαμβάνεται σε άκρο. Επομένως,

$$\inf_{x \geq 0} \phi(x) = \min_{s \in S} \phi(s). \quad (4.4)$$

Βήμα 3: ισοδυναμία. Από τις (4.3) και (4.4),

$$\inf_{x \geq 0} \Pi(x) = \min_{s \in S} [(b - V) + \phi(s)].$$

Άρα $\Pi(x) \geq D$ για κάθε $x \geq 0$ αν και μόνο αν ισχύουν οι ανισότητες (4.2) σε όλους τους κόμβους, μαζί με τη συνθήκη ουράς (4.1), η οποία αποκλείει την απόκλιση προς $-\infty$. $\square$

Θεώρημα 4.4 (Πιστοποίηση σε πεπερασμένο σύνολο σημείων ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}_+$).
Θεωρούμε το ίδιο στατικό χαρτοφυλάκιο

$$\Pi(x) = b - V + \phi(x), \quad \phi(x) = ax + \sum_{j=1}^m c_j (x - K_j)^+ + \sum_{k=1}^{\tilde{m}} d_k (K'_k - x)^+.$$

Έστω $G \subseteq \mathbb{R}_+$ πεπερασμένη ένωση διαστημάτων ή και μονοσημειακών συνόλων. Ορίζουμε

$$S = \{0\} \cup \{K_1, \dots, K_m, K'_1, \dots, K'_{\tilde{m}}\}, \quad E_G = (S \cap \overline{G}) \cup \partial G.$$

Τότε είναι ισοδύναμα:

(i) $\Pi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in G$.

(ii) Ισχύουν οι πεπερασμένες γραμμικές συνθήκες

$$a + \sum_{j=1}^m c_j \geq 0 \quad \text{μόνο όταν το } G \text{ είναι άνω μη φραγμένο,} \quad (4.5)$$

$$(b - V) + \phi(s) \geq 0 \quad \text{για κάθε } s \in E_G. \quad (4.6)$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να θέσουμε μη αρνητικά περιθώρια D_i στα πεπερασμένα σημεία $x_i \in E_G$ και να απαιτήσουμε $(b - V) + \phi(x_i) \geq D_i$. Επιτρέπεται ιδίως $D_i = 0$.

Απόδειξη. Η ϕ είναι κατά τμήματα αφινική με κόμβους στο S .

Βήμα 1: συμπεριφορά στην ουρά. Αν το G είναι άνω μη φραγμένο και $a + \sum_j c_j < 0$, τότε $\phi(x) \rightarrow -\infty$ κατά μήκος του G . Άρα η (4.5) είναι αναγκαία. Όταν ισχύει, ή όταν το G είναι φραγμένο, η ϕ είναι κάτω φραγμένη στο G .

Βήμα 2: θέσεις του ελαχίστου. Σε κάθε συνεκτική συνιστώσα του G που βρίσκεται μέσα σε ένα γραμμικό τμήμα, η συνεχής αφινική συνάρτηση $(b - V) + \phi$ λαμβάνει το ελάχιστό της σε ένα άκρο. Το άκρο μπορεί να ανήκει μόνο στην κλειστή θήκη όταν το διάστημα είναι ημιανοικτό. Συνεπώς, το κατώτατο όριο στο G ελέγχεται στα σημεία του $E_G = (S \cap \bar{G}) \cup \partial G$.

Βήμα 3: ισοδυναμία. Με την κατάλληλη συνθήκη ουράς,

$$\inf_{x \in G} \Pi(x) = \min_{s \in E_G} [(b - V) + \phi(s)].$$

Επομένως, η μη αρνητικότητα της Π στο G ισοδυναμεί με τις (4.5)–(4.6). Επειδή το E_G είναι πεπερασμένο, η διατύπωση με τα περιθώρια $D_i \geq 0$ είναι ισοδύναμη. $\square$

Παρατήρηση 4.5. Αν το G είναι φραγμένο, η συνθήκη (4.5) δεν χρειάζεται. Αν $G = [\alpha, \infty)$, τότε $E_G = (S \cap [\alpha, \infty)) \cup \{\alpha\}$ και αρκεί να ελέγξουμε τη μία συνθήκη ουράς και τις τιμές στα σημεία του E_G .

Θεώρημα 4.6 (Στατική υπεραντιστάθμιση σε πεπερασμένο πλέγμα: d μετοχές). Για κάθε μετοχή $i = 1, \dots, d$ θεωρούμε πεπερασμένα σύνολα τιμών εξάσκησης $\{K_{i,1}, \dots, K_{i,m_i}\}$ για δικαιώματα αγοράς και $\{K'_{i,1}, \dots, K'_{i,\tilde{m}_i}\}$ για δικαιώματα πώλησης. Έστω

$$\Pi(x) = b - V + \sum_{i=1}^d \phi_i(x_i), \quad x \in \mathbb{R}_+^d,$$

όπου

$$\phi_i(u) = a_i u + \sum_{j=1}^{m_i} c_{i,j} (u - K_{i,j})^+ + \sum_{k=1}^{\tilde{m}_i} d_{i,k} (K'_{i,k} - u)^+.$$

Για κάθε i θέτουμε

$$S_i = \{0\} \cup \{K_{i,1}, \dots, K_{i,m_i}, K'_{i,1}, \dots, K'_{i,\tilde{m}_i}\}.$$

Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\Pi(x) \geq D$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+^d$.

(ii) Ισχύει το πεπερασμένο σύστημα

$$a_i + \sum_{j=1}^{m_i} c_{i,j} \geq 0, \quad i = 1, \dots, d, \quad (4.7)$$

$$(b - V) + \sum_{i=1}^d \phi_i(s_i) \geq D, \quad (s_1, \dots, s_d) \in S_1 \times \dots \times S_d. \quad (4.8)$$

Απόδειξη. Λόγω της διαχωρίσιμης μορφής,

$$\inf_{x \in \mathbb{R}_+^d} \Pi(x) = (b - V) + \sum_{i=1}^d \inf_{u \geq 0} \phi_i(u). \quad (4.9)$$

Η κλίση της ϕ_i στην ουρά είναι $a_i + \sum_j c_{i,j}$. Αν είναι αρνητική για κάποιο i , τότε η ϕ_i τείνει στο $-\infty$ και δεν υπάρχει καθολικό κάτω φράγμα. Υπό τις (4.7), κάθε ϕ_i είναι κάτω φραγμένη και, επειδή είναι κατά τμήματα αφινική,

$$\inf_{u \geq 0} \phi_i(u) = \min_{s_i \in S_i} \phi_i(s_i), \quad i = 1, \dots, d. \quad (4.10)$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις,

$$\inf_{x \in \mathbb{R}_+^d} \Pi(x) = \min_{(s_1, \dots, s_d) \in S_1 \times \dots \times S_d} \left[(b - V) + \sum_{i=1}^d \phi_i(s_i) \right].$$

Έτσι προκύπτει ακριβώς η ισοδυναμία των (i) και (ii). $\square$

Θεώρημα 4.7 (Πιστοποίηση σε πεπερασμένο σύνολο σημείων ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}_+^d$).
Θεωρούμε τη συνάρτηση κέρδους του προηγούμενου θεωρήματος και έστω

$$G = \bigcup_{\ell=1}^L \prod_{i=1}^d I_{i,\ell},$$

όπου κάθε $I_{i,\ell}$ είναι διάστημα $[\alpha, \beta]$, ημιευθεία $[\alpha, \infty)$ ή μονοσημειακό σύνολο $\{\alpha\}$. Για κάθε i , έστω B_i το σύνολο όλων των πεπερασμένων άκρων που εμφανίζονται στα $I_{i,\ell}$ και

$$E_i = (S_i \cap \overline{\pi_i(G)}) \cup B_i, \quad E = E_1 \times \dots \times E_d,$$

όπου $\pi_i(G)$ είναι η προβολή του G στον i -οστό άξονα. Επίσης, θέτουμε

$$I_\infty = \{i : \sup \pi_i(G) = +\infty\}.$$

Τότε είναι ισοδύναμα:

(i) $\Pi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in G$.

(ii) Ισχύουν

$$a_i + \sum_{j=1}^{m_i} c_{i,j} \geq 0, \quad i \in I_\infty, \quad (4.11)$$

$$(b - V) + \sum_{i=1}^d \phi_i(s_i) \geq 0, \quad s \in E \cap \overline{G}. \quad (4.12)$$

Ισοδύναμα, στα πεπερασμένα σημεία $x^{(1)}, \dots, x^{(N)} \in E \cap \overline{G}$ μπορούν να επιβληθούν περιθώρια $D_\ell \geq 0$ με $\Pi(x^{(\ell)}) \geq D_\ell$.

Απόδειξη. Κάθε ϕ_i είναι κατά τμήματα αφινική με κόμβους στο S_i . Για $i \in I_\infty$, αρνητική κλίση ουράς θα επέτρεπε να στείλουμε $x_i \rightarrow \infty$, κρατώντας τις άλλες συντεταγμένες σταθερές, και να πάρουμε $\Pi(x) \rightarrow -\infty$. Άρα οι (4.11) είναι αναγκαίες και εξασφαλίζουν κάτω φραγμένότητα.

Διατάσσουμε τα σημεία κάθε E_i και χωρίζουμε τον αντίστοιχο άξονα σε διαστήματα. Στα ορθογώνια κελιά του παραγόμενου πλέγματος, η Π είναι αφινική. Η τομή του πλέγματος με την πεπερασμένη ένωση ορθογωνίων G είναι πεπερασμένη ένωση κυρτών πολυτόπων.

Το ελάχιστο μιας αφινικής συνάρτησης σε κάθε τέτοιο πολύτοπο λαμβάνεται σε κορυφή, και κάθε κορυφή ανήκει στο $E \cap \bar{G}$. Επομένως,

$$\inf_{x \in G} \Pi(x) = \min_{s \in E \cap \bar{G}} \left[(b - V) + \sum_{i=1}^d \phi_i(s_i) \right],$$

υπό τις συνθήκες ουράς. Η ζητούμενη ισοδυναμία ακολουθεί άμεσα. $\square$

Παρατήρηση 4.8. Αν το G είναι φραγμένο, τότε $I_\infty = \emptyset$ και δεν χρειάζεται συνθήκη ουράς. Για $G = \prod_{i=1}^d [\alpha_i, \infty)$ έχουμε $E_i = (S_i \cap [\alpha_i, \infty)) \cup \{\alpha_i\}$.

Πρόβλημα 4.9 (Κατασκευή βέλτιστου χαρτοφυλακίου). Ένας επενδυτής θέλει να επενδύσει ποσό Y σε μία μετοχή και στα αντίστοιχα δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Προβλέπει ότι η τιμή της μετοχής στον χρόνο T θα ανήκει στο (c, v) . Για δεδομένη αποδεκτή ζημία D , αναζητούμε τους συντελεστές $a, b, \gamma_i, \delta_i, D_c, D_v, D_i, M$ που λύνουν

$$\begin{aligned} \max \quad & w_c D_c + w_1 D_1 + \cdots + w_l D_l + w_v D_v + w_M M \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \quad & \Pi(x) \geq -D && \text{για κάθε } x \geq 0, \\ & \Pi(x) \geq 0 && \text{για κάθε } x \in (c, v), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^n (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) &= Y, \\ \sum_i (|\gamma_i| + |\delta_i|) &\leq N, \\ \gamma_i, \delta_i &\in [-N_i, N_i]. \end{aligned}$$

Τα βάρη w_c, w_v, w_i, w_M επιλέγονται από τον επενδυτή. Οι άπειρες ανισότητες που προκύπτουν από το καθολικό κάτω φράγμα μετατρέπονται, με τα προηγούμενα θεωρήματα, σε πεπερασμένο σύστημα. Οι περιορισμοί στον αριθμό συμβολαίων πρέπει να αντανakλούν τη ρευστότητα κάθε δικαιώματος.

Θεώρημα 4.10 (Μικρή αποδεκτή ζημία--μικρότερο δυνητικό κέρδος). Έστω $Z(D)$ η βέλτιστη τιμή του Προβλήματος 4.13, όταν επιβάλλονται $\Pi(x) \geq -D$ για κάθε $x \geq 0$ και $\Pi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (c, v)$. Τότε η Z είναι μη φθίνουσα: αν $0 \leq D_1 \leq D_2$, τότε $Z(D_1) \leq Z(D_2)$.

Απόδειξη. Το εφικτό σύνολο για D_1 περιέχεται στο εφικτό σύνολο για D_2 , επειδή η συνθήκη $\Pi \geq -D_1$ είναι αυστηρότερη από τη $\Pi \geq -D_2$. Κάθε βέλτιστη λύση για D_1 είναι λοιπόν εφικτή και για D_2 . Εφόσον μεγιστοποιούμε την ίδια αντικειμενική συνάρτηση, $Z(D_2) \geq Z(D_1)$. $\square$

Το αποτέλεσμα έχει άμεση χρηματοοικονομική ερμηνεία: μεγαλύτερη ανοχή στη χειρότερη δυνατή ζημία διευρύνει το εφικτό σύνολο και μπορεί να επιτρέψει μεγαλύτερο δυνητικό κέρδος.

Θεώρημα 4.11 (Μικρότερο σύνολο πρόβλεψης--μεγαλύτερη δυνατότητα κέρδους). Έστω $Z(A)$ η βέλτιστη τιμή του Προβλήματος 4.13 όταν επιβάλλεται $\Pi(x) \geq 0$ για κάθε $x \in A \subseteq \mathbb{R}_+$. Αν $A_1 \subseteq A_2$, τότε $Z(A_1) \geq Z(A_2)$.

Απόδειξη. Αν $\mathcal{F}(A)$ είναι το αντίστοιχο εφικτό σύνολο, τότε $A_1 \subseteq A_2$ συνεπάγεται $\mathcal{F}(A_2) \subseteq \mathcal{F}(A_1)$. Η μεγιστοποίηση πάνω στο μικρότερο εφικτό σύνολο δεν μπορεί να δώσει μεγαλύτερη τιμή:

$$Z(A_2) = \max_{z \in \mathcal{F}(A_2)} \text{obj}(z) \leq \max_{z \in \mathcal{F}(A_1)} \text{obj}(z) = Z(A_1).$$

□

Παρατήρηση 4.12. Αν το $Z(A)$ όριζε ελάχιστο κόστος υπεραντιστάθμισης του πωλητή, η ανισότητα θα αντιστρεφόταν: $Z(A_1) \leq Z(A_2)$ όταν $A_1 \subseteq A_2$.

Εργαστήριο 4.13 (Επίλυση του Προβλήματος 4.13 με Python). Το σημειωματάριο PCUP.ipynb υπολογίζει βέλτιστο χαρτοφυλάκιο για δεδομένη πρόβλεψη, χρησιμοποιώντας πραγματικά δεδομένα αγοράς και το άνοιγμα τιμών αγοράς--πώλησης (bid--ask spread). Μελετήστε τον κώδικα και τροποποιήστε τα δεδομένα, τα βάρη και τους περιορισμούς ρευστότητας.

Παράδειγμα 4.14 (Στρατηγική πεταλούδας). Έστω $S_0 = 248$ και διαθέσιμα δικαιώματα αγοράς με $C(150) = 110$, $C(200) = 63.4$ και $C(300) = 12.7$. Μια στρατηγική πεταλούδας αγοράζει ένα δικαίωμα με $K = 150$, αγοράζει ένα με $K = 300$ και πωλεί δύο με $K = 200$. Η αρχική κατασκευή αποδίδει 4.1 ευρώ, ενώ η μέγιστη δυνατή ζημία είναι 45.9 ευρώ.

Το ίδιο χαρτοφυλάκιο ανακτάται λύνοντας

$$\begin{aligned} \max \quad & D \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \quad & \Pi(x) \geq -45.9 && \text{για κάθε } x \geq 0, \\ & \Pi(x) \geq D && \text{για κάθε } x \in (150, 200), \\ & 110a + 63.4b + 12.7c = -4.1, \\ & D \geq 0, \quad a, b, c \in [-2, 2], \end{aligned}$$

όπου

$$\Pi(x) = a(x - 150)^+ + b(x - 200)^+ + c(x - 300)^+ + 4.1.$$

Αν επιτρέπεται και θέση στη μετοχή, λύνουμε

$$\begin{aligned} \max \quad & D \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \quad & \Pi(x) \geq -45.9 && \text{για κάθε } x \geq 0, \\ & \Pi(x) \geq D && \text{για κάθε } x \in (150, 200), \\ & 248a + 110b + 63.4c + 12.7d = -4.1, \\ & D \geq 0, \quad a, b, c, d \in [-2, 2], \end{aligned}$$

με

$$\Pi(x) = ax + b(x - 150)^+ + c(x - 200)^+ + d(x - 300)^+ + 4.1.$$

Στις πραγματικές συναλλαγές ο αριθμός συμβολαίων είναι συνήθως ακέραιος. Τότε απαιτείται μεικτός ακέραιος γραμμικός προγραμματισμός.

Η μεθοδολογία εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}_+$ και όχι μόνο σε ένα διάστημα. Όσο μικρότερο και πιο ακριβές είναι το σύνολο πρόβλεψης, τόσο μεγαλύτερο μπορεί να είναι το κέρδος όταν η πρόβλεψη επαληθευθεί. Οι γνωστές στρατηγικές ανοδικού και καθοδικού περιθωρίου (bull spread, bear spread), πεταλούδας και διπλής θέσης (straddle) μπορούν να προκύψουν ως ειδικές περιπτώσεις.

Παρατήρηση 4.15 (Επιτόκιο κατάθεσης $\neq$ επιτόκιο δανεισμού). Όταν σε ένα απλοποιημένο πρόβλημα εμφανίζεται το ίδιο r ως επιτόκιο δανεισμού και ως επιτόκιο χωρίς κίνδυνο, μπορούμε να το ερμηνεύσουμε ως το επιτόκιο του προσωπικού τραπεζικού λογαριασμού: η κατάθεση αποδίδει r , ενώ η ανάληψη και μεταγενέστερη αναπλήρωσή της ισοδυναμεί με δανεισμό με το ίδιο επιτόκιο. Στην πράξη, τα δύο επιτόκια συνήθως διαφέρουν.

Παρατήρηση 4.16 (Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά). Οι τεχνικές πρόβλεψης είναι σημαντικές, αλλά εδώ θεωρούνται δεδομένες. Στόχος είναι, για μια συγκεκριμένη πρόβλεψη, να κατασκευαστεί όσο γίνεται πιο κερδοφόρο χαρτοφυλάκιο στο καλό σενάριο, ενώ η ζημία στο δυσμενές σενάριο δεν υπερβαίνει ένα καθορισμένο όριο. Η πρόβλεψη μπορεί να βασίζεται σε πιθανότητες, στατιστική, συμπεριφορική χρηματοοικονομική, στοχαστική ανάλυση, στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις ή μηχανική μάθηση.

Χαρτοφυλάκια τύπου Markowitz. Η βελτιστοποίηση επιτρέπει και άλλες επιλογές. Έστω ότι απαιτούμε μέγιστη δυνατή ζημία το πολύ 500 ευρώ. Από τα πολλά εφικτά χαρτοφυλάκια μπορούμε να επιλέξουμε εκείνο με τη μικρότερη διακύμανση ή με κάποιο συγγενές κριτήριο. Για τον σκοπό αυτό χρειάζεται ένα πιθανοτικό μοντέλο για το S_T , δηλαδή διαφορετικού τύπου πρόβλεψη από εκείνη του διαστήματος. Ένα ενδεικτικό πρόβλημα είναι

$$\begin{aligned} \min \quad & w_1 \text{Var}(\Pi(S_T)) - w_2 \mathbb{E}(\Pi(S_T) \mid S_T \in G) \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \quad & 200c - 1000 + 500 \geq 0, \\ & 200a - 1000 + 500 \geq 0, \\ & 230a - 1000 + 500 \geq 0, \\ & a + b \geq 0, \\ & 238a + 65b + 30c = 1000, \end{aligned}$$

όπου $G \subseteq \mathbb{R}_+$ είναι το προβλεπόμενο σύνολο και w_1, w_2 βάρη που επιλέγει ο επενδυτής. Η μέγιστη ζημία παραμένει το πολύ 500 ευρώ σε κάθε σενάριο. Η κατασκευή γενικεύει την κλασική προσέγγιση Markowitz, επειδή αξιοποιεί και διαθέσιμα δικαιώματα πώλησης.

4.1 Ασκήσεις

Σωστό ή Λάθος

1. Για τον έλεγχο της μέγιστης δυνατής ζημίας μιας κατά τμήματα γραμμικής συνάρτησης κέρδους αρκεί να ελέγξουμε τις τιμές στους κόμβους και τη δεξιά κλίση μετά την τελευταία τιμή εξάσκησης. **Σ/Λ:** _____
2. Ο περιορισμός $a + b \geq M$ αυξάνει την κλίση του τελευταίου τμήματος και κάνει το χαρτοφυλάκιο περισσότερο ανοδικό. **Σ/Λ:** _____
3. Μια στρατηγική πεταλούδας μπορεί να προκύψει ως λύση γραμμικού προγράμματος με περιορισμούς κέρδους σε ένα διάστημα και περιορισμό μέγιστης ζημίας. **Σ/Λ:** _____
4. Μια θέση πώλησης στη μετοχή αποφέρει κέρδος όταν η τιμή της μετοχής αυξάνεται. **Σ/Λ:** _____

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Για $\Pi(x) = ax + b(x - K_1)^+ + c(K_2 - x)^+ - Y$, η συνθήκη μέγιστης δυνατής ζημίας D ισοδυναμεί με:

- (A) $\Pi(K_1) \geq -D, \Pi(K_2) \geq -D, a + b \geq 0$.
- (B) $\Pi(0) \geq -D, \Pi(K_1) \geq -D, \Pi(K_2) \geq -D, a + b \geq 0$.
- (C) $\Pi(0) \leq D, \Pi(K_1) \leq D, \Pi(K_2) \leq D$.
- (D) $\Pi(x) \geq D$ για κάθε $x \in (K_1, K_2)$.

Απάντηση: _____

2. Ένα γραμμικό πρόγραμμα είναι μη φραγμένο όταν:

- (A) δεν υπάρχει εφικτή λύση,
- (B) η αντικειμενική συνάρτηση μπορεί να αυξάνεται απεριόριστα μέσω εφικτών μεταβολών,
- (C) η ζημία είναι πάντοτε μηδενική,
- (D) το χαρτοφυλάκιο είναι μοναδικό.

Απάντηση: _____

3. Ποια περιγραφή αντιστοιχεί στη στρατηγική πεταλούδας;

- (A) Αγορά δύο δικαιωμάτων στη μεσαία τιμή εξάσκησης και πώληση ενός σε κάθε άκρο.
- (B) Πώληση ενός στο χαμηλό K , αγορά δύο στο μεσαίο και πώληση ενός στο υψηλό.
- (C) Αγορά ενός στο χαμηλό και ενός στο υψηλό K , και πώληση δύο στο μεσαίο.
- (D) Αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και πώληση ενός δικαιώματος πώλησης με το ίδιο K .

Απάντηση: _____

4. Ποιος περιορισμός προσθέτει ανοδική κλίση στην απολαβή;

- (A) $\Pi(K_i) \geq D_i$ μέσα στο διάστημα πρόβλεψης.
- (B) $a + b \geq M$, με $M > 0$.
- (C) $\Pi(0) \geq -D$.
- (D) $c \geq 0$, όπου c πολλαπλασιάζει το $(K - x)^+$.

Απάντηση: _____

5. Στο γενικό πρόβλημα πρόβλεψης στο (c, v) , τα D_c, D_v, D_i παριστάνουν:

- (A) τιμές εξάσκησης,
- (B) ποσά επένδυσης στη μετοχή,
- (C) ελάχιστα αποδεκτά κέρδη στα εσωτερικά σημεία και στα άκρα του διαστήματος πρόβλεψης,
- (D) κλίσεις μετά την τελευταία τιμή εξάσκησης.

Απάντηση: _____

Αντιστοίχιση

1. Αγορά ενός δικαιώματος στο χαμηλό K , πώληση δύο στο μεσαίο και αγορά ενός στο υψηλό A. Πεταλούδα
2. Μη αρνητική απολαβή σε διάστημα πρόβλεψης B. Χαρτοφυλάκιο με περιορισμό πρόβλεψης
3. Το μικρότερο D με $\Pi(x) \geq -D$ για κάθε $x \geq 0$ Γ. Ελάχιστη χειρότερη ζημία
4. Απεριόριστο κέρδος από μη περιορισμένες θέσεις Δ. Μη φραγμένο αρμπιτράζ

Συμπλήρωση κενών

1. Σε κατά τμήματα γραμμική απολαβή ελέγχουμε τις τιμές στους _____ και την κλίση μετά το τελευταίο σημείο.
2. Ο περιορισμός $a + b \geq M$ εισάγει μια _____ προς την άνοδο της υποκείμενης τιμής.
3. Γραμμικό πρόγραμμα χωρίς άνω φράγμα της αντικειμενικής συνάρτησης λέγεται _____.
4. Στη στρατηγική πεταλούδας πωλούμε δύο δικαιώματα στη _____ τιμή εξάσκησης.
5. Η προστασία θέσης σε μετοχή με δικαιώματα πώλησης ονομάζεται αντιστάθμιση με _____.

Θεωρητικές και υπολογιστικές ασκήσεις

1. Για $S_0 = 238$, $C(230) = 65$, $P(200) = 30$, $Y = 1000$ και $a = 4.9$, $b = -4.9$, $c = 5$, υπολογίστε $\Pi(0)$, $\Pi(200)$ και $\Pi(230)$ και επαληθεύστε ότι η μέγιστη ζημία είναι περίπου 20 ευρώ.
2. Επιβάλετε επιπλέον $a + b \geq 6.5$. Λύστε αριθμητικά το πρόβλημα και υπολογίστε τη νέα μέγιστη ζημία.
3. Διατυπώστε γραμμικό πρόγραμμα που παράγει στρατηγική πεταλούδας με τιμές εξάσκησης 150, 200, 300, μέγιστη ζημία 45.9 και θετική απολαβή στο (150, 200).
4. Ένας επενδυτής προβλέπει $S_T \in (220, 250)$, απαιτεί $\Pi(x) \geq 0$ στο διάστημα και μέγιστη ζημία το πολύ 500. Διατυπώστε πλήρως το γραμμικό πρόγραμμα με μεταβλητές D_1, D_2, D_3 .

Ασκήσεις με Python

1. Σχεδιάστε τη $\Pi(x) = ax + b(x - 230)^+ + c(200 - x)^+ - 1000$ για $(a, b, c) = (4.9, -4.9, 5)$ και $(2.84, 3.65, 2)$. Συγκρίνετε γραφικά τις μέγιστες ζημίες.
2. Υλοποιήστε με `scipy.optimize.linprog` το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του D και επιστρέψτε τα βέλτιστα a, b, c, D .

3. Μεταβάλλετε το M στον περιορισμό $a+b \geq M$. Για κάθε M , υπολογίστε το ελάχιστο D και το αναμενόμενο κέρδος σε ένα διάστημα πρόβλεψης και σχεδιάστε τη σχέση κέρδους--κινδύνου.

Κεφάλαιο 5

Αρμπιτράζ

*Υπάρχει πράγματι αρμπιτράζ;
Βεβαίως---γι' αυτό υπάρχουν οι
arbitrageurs!*

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε λεπτομερέστερα την έννοια της ευκαιρίας κέρδους χωρίς κίνδυνο.

Ορισμός 5.1 (Αρμπιτράζ). Σε μια αγορά που περιλαμβάνει μετοχή και τα αντίστοιχα δικαιώματα αγοράς και πώλησης, λέμε ότι υπάρχει *αρμπιτράζ* (arbitrage) αν μπορεί να κατασκευαστεί χαρτοφυλάκιο ορίζοντα T με συνάρτηση καθαρού κέρδους

$$\Pi(x) = ax + be^{rT} + \sum_i [\gamma_i(x - K_i)^+ + \delta_i(K_i - x)^+] - Y$$

τέτοια ώστε

$$\Pi(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \geq 0, \quad \Pi(x) > 0 \quad \text{για κάποιο } x \geq 0.$$

Το Y είναι το αρχικό κόστος κατασκευής. Μπορεί να είναι αρνητικό όταν επιτρέπονται θέσεις πώλησης.

Πρόβλημα 5.2 (Ανίχνευση ευκαιρίας κέρδους χωρίς κίνδυνο). Να βρεθούν $a, b, \gamma_i, \delta_i, D$ που λύνουν

$$\begin{aligned} \min \quad & D \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \quad & aS_0 + b + \sum_{i=1}^n (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = Y, \quad (5.1) \\ & \Pi(x) \geq -D \quad \text{για κάθε } x \geq 0, \\ & \gamma_i, \delta_i \in [-N, N]. \end{aligned}$$

Οι $C(K_i)$ και $P(K_i)$ είναι οι τρέχουσες τιμές των δικαιωμάτων. Αν η βέλτιστη τιμή ικανοποιεί $D < 0$, τότε $\Pi(x) \geq -D > 0$ σε κάθε σενάριο και έχει εντοπιστεί αρμπιτράζ.

Θεώρημα 5.3 (Περισσότερα δικαιώματα--καλύτερα χαρτοφυλάκια). Στο Πρόβλημα 5.1, έστω I το σύνολο των διαθέσιμων δικαιωμάτων και $D^*(I)$ η βέλτιστη χειρότερη ζημία. Αν $I_1 \subseteq I_2$, τότε

$$D^*(I_2) \leq D^*(I_1).$$

Άρα η βέλτιστη χειρότερη ζημία είναι μη αύξουσα ως προς το σύνολο των διαθέσιμων δικαιωμάτων.

Απόδειξη. Κάθε λύση που είναι εφικτή με τα δικαιώματα του I_1 παραμένει εφικτή για το I_2 , αν θέσουμε ίσες με μηδέν τις θέσεις στα νέα δικαιώματα. Επομένως, $\mathcal{F}(I_1) \subseteq \mathcal{F}(I_2)$. Εφόσον ελαχιστοποιούμε το D ,

$$D^*(I_2) = \min_{z \in \mathcal{F}(I_2)} D(z) \leq \min_{z \in \mathcal{F}(I_1)} D(z) = D^*(I_1).$$

□

Εργαστήριο 5.4 (Ανίχνευση αρμπιτράζ με Python). Το σημειωματάριο `FindingArbitrage.ipynb` λύνει το Πρόβλημα 5.1 με πραγματικά δεδομένα και διαφορετικές τιμές αγοράς και πώλησης, δηλαδή με bid-ask spread.

5.1 Ισοτιμία δικαιώματος αγοράς--πώλησης και αρμπιτράζ

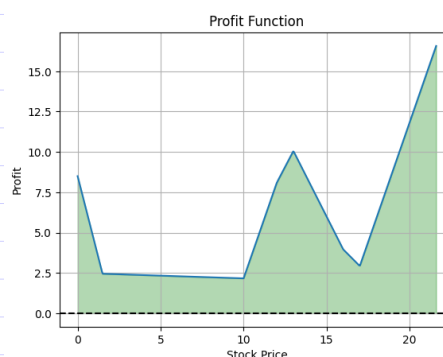
Έστω μετοχή με τιμή S_0 , δικαίωμα αγοράς με τιμή $C(K)$, δικαίωμα πώλησης με τιμή $P(K)$ και τραπεζικός λογαριασμός με επιτόκιο r . Τα δύο δικαιώματα έχουν την ίδια υποκείμενη μετοχή, την ίδια τιμή εξάσκησης και την ίδια ημερομηνία λήξης. Αν δεν ισχύει η ισοτιμία

$$C(K) + Ke^{-rT} = S_0 + P(K),$$

τότε, στο ιδεατό μοντέλο χωρίς κόστη συναλλαγών, υπάρχει αρμπιτράζ.

Παρατήρηση 5.5 (Ισοτιμία και γραμμικός προγραμματισμός). Το Πρόβλημα 5.1 γενικεύει τον κλασικό έλεγχο της ισοτιμίας δικαιώματος αγοράς--πώλησης. Αντί να χρησιμοποιεί μόνο ένα ζεύγος δικαιωμάτων, αναζητεί το χαρτοφυλάκιο με τη μεγαλύτερη εγγυημένη ευκαιρία κέρδους αξιοποιώντας όλα τα διαθέσιμα συμβόλαια.

Στην πράξη, η επανειλημμένη εκμετάλλευση μιας τέτοιας ευκαιρίας μεταβάλλει τις τιμές και τείνει να την εξαφανίσει. Επιπλέον, πρέπει να ληφθούν υπόψη τα κόστη συναλλαγών, το άνοιγμα τιμών αγοράς--πώλησης, τα μερίσματα, οι περιορισμοί ρευστότητας και η επίδραση των εντολών στις τιμές.



Σχήμα 5.1: Συνάρτηση κέρδους χαρτοφυλακίου που εκμεταλλεύεται ευκαιρία κέρδους χωρίς κίνδυνο.

5.2 Ασκήσεις

Σωστό ή Λάθος

1. Παραβίαση της ισοτιμίας δικαιώματος αγοράς--πώλησης συνεπάγεται αρμπιτράζ στο ιδεατό μοντέλο. **Σ/Λ:** _____
2. Αν το πρόβλημα μεγιστοποίησης του εγγυημένου κέρδους είναι μη φραγμένο, τότε δεν υπάρχει αρμπιτράζ. **Σ/Λ:** _____
3. Οι περιορισμοί $\gamma_i, \delta_i \in [-N, N]$ μπορούν να καταστήσουν φραγμένο το γραμμικό πρόγραμμα, χωρίς να αποκλείουν κατ' ανάγκην ένα εγγυημένο θετικό κέρδος. **Σ/Λ:** _____
4. Για την κατασκευή χαρτοφυλακίου αρμπιτράζ πρέπει να γνωρίζουμε την πραγματική μελλοντική τιμή S_T . **Σ/Λ:** _____

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Αν $C(K) + Ke^{-rT} > S_0 + P(K)$, ποια κατασκευή εκμεταλλεύεται την υπερτίμηση της αριστερής πλευράς;
(A) Αγορά δικαιώματος αγοράς, πώληση δικαιώματος πώλησης και δανεισμός Ke^{-rT} .
(B) Αγορά μετοχής και δικαιώματος πώλησης, πώληση δικαιώματος αγοράς και χρηματοδότηση της διαφοράς μέσω του λογαριασμού.
(C) Ταυτόχρονη πώληση δικαιώματος αγοράς και πώλησης.
(D) Αγορά δικαιώματος αγοράς και πώληση της μετοχής.

Απάντηση: _____

2. Αν $C(K) + Ke^{-rT} < S_0 + P(K)$, η κατάλληλη στρατηγική είναι η αντίστροφη της προηγούμενης, δηλαδή αγορά της φθηνότερης συνθετικής πλευράς και πώληση της ακριβότερης. Ποια επιλογή το περιγράφει καλύτερα;
(A) Αγορά δικαιώματος αγοράς, πώληση δικαιώματος πώλησης και πώληση της μετοχής, με κατάλληλη θέση στον τραπεζικό λογαριασμό.
(B) Αγορά δικαιώματος πώλησης, πώληση δικαιώματος αγοράς και πώληση της μετοχής.
(C) Αγορά δικαιώματος πώλησης και μετοχής, πώληση δικαιώματος αγοράς.
(D) Πώληση δικαιώματος αγοράς και αγορά δικαιώματος πώλησης.

Απάντηση: _____

3. Το πρόβλημα αρμπιτράζ είναι μη φραγμένο όταν:
(A) δεν υπάρχει εφικτή λύση,
(B) το κέρδος μπορεί να αυξηθεί απεριόριστα με εφικτές θέσεις,
(C) η ζημία είναι πάντοτε μηδενική,
(D) οι τιμές των δικαιωμάτων είναι μη ρεαλιστικές.

Απάντηση: _____

4. Οι περιορισμοί $\gamma_i, \delta_i \in [-N, N]$ παριστάνουν:

- (A) το μέγιστο ποσό δανεισμού,
- (B) όρια έκθεσης, δηλαδή πόσα συμβόλαια κάθε τύπου μπορούν να αγοραστούν ή να πωληθούν,
- (C) την τιμή εξάσκησης,
- (D) το επιτόκιο.

Απάντηση: _____

5. Ποιος παράγοντας περιορίζει στην πράξη μια επαναλαμβανόμενη ευκαιρία αρμπιτράζ;

- (A) Η αύξηση του αριθμού των τιμών εξάσκησης.
- (B) Μόνο τα όρια θέσεων.
- (C) Η προσαρμογή των τιμών, η επίδραση των συναλλαγών και τα κόστη, όπως το bid--ask spread.
- (D) Η παράλειψη της ισοτιμίας.

Απάντηση: _____

Αντιστοίχιση όρων

- | | |
|--|---------------------|
| 1. Ταυτόχρονη κατασκευή θέσεων που δίνει κέρδος χωρίς κίνδυνο | A. Arbitrage |
| 2. Δικαίωμα αγοράς του υποκείμενου σε προκαθορισμένη τιμή | B. Call option |
| 3. Δικαίωμα πώλησης του υποκείμενου σε προκαθορισμένη τιμή | Γ. Put option |
| 4. Σχέση $C(K) + Ke^{-rT} = S_0 + P(K)$ | Δ. Put--call parity |
| 5. Διαφορά χαμηλότερης ζητούμενης και υψηλότερης προσφερόμενης τιμής | E. Bid--ask spread |
| 6. Περιοδική πληρωμή εταιρείας προς τους μετόχους | ΣΤ. Dividend |

Αντιστοίχιση συμβόλων

- | | |
|--|---------------|
| 1. Μονάδες της υποκείμενης μετοχής | A. a |
| 2. Μονάδες ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου | B. b |
| 3. Θέση σε δικαιώματα αγοράς $C(K_i)$ | Γ. γ_i |
| 4. Θέση σε δικαιώματα πώλησης $P(K_i)$ | Δ. δ_i |
| 5. Χειρότερη δυνατή ζημία | E. D |

Συμπλήρωση κενών

1. Η ευκαιρία κέρδους χωρίς κίνδυνο λέγεται _____.
2. Η σχέση $C(K) + Ke^{-rT} = S_0 + P(K)$ λέγεται _____.
3. Αν η μία πλευρά της ισοτιμίας είναι ακριβότερη, αγοράζουμε την _____ πλευρά και πωλούμε την _____.
4. Οι περιορισμοί $\gamma_i, \delta_i \in [-N, N]$ θέτουν _____ στις θέσεις κάθε δικαιώματος.

5. Τα κόστη συναλλαγών μειώνουν το _____ μιας θεωρητικής ευκαιρίας αρμπιτράζ.

Θεωρητικές και υπολογιστικές ασκήσεις

1. Για $S_0 = 100$, $C(50) = 55$, $P(50) = 2$, $r = 0.05$, $T = 1$, ελέγξτε την ισοτιμία, κατασκευάστε τη στρατηγική αρμπιτράζ και υπολογίστε το κέρδος χωρίς κίνδυνο.
2. Διατυπώστε το γραμμικό πρόγραμμα ελαχιστοποίησης του D με $\gamma_i, \delta_i \in [-N, N]$ και $Y = 100$. Εξηγήστε τη σημασία κάθε όρου.
3. Συγκρίνετε θεωρητικά το πρόβλημα με και χωρίς τους περιορισμούς $\gamma_i, \delta_i \in [-1, 1]$. Τι συνεπάγεται αυτό για τη φραγμότητα και το ενδεχόμενο απεριόριστου κέρδους;
4. Απλοποιήστε την ισοτιμία όταν $r = 0$ και εξηγήστε την αντίστοιχη αντιστάθμιση.
5. Περιγράψτε πώς εισάγονται στο Πρόβλημα (5.1) οι τιμές bid και ask, τα κόστη συναλλαγών και τα μερίσματα.
6. Δείξτε ότι η τελική απολαβή της στρατηγικής που προκύπτει από παραβίαση της ισοτιμίας είναι μη αρνητική σε κάθε σενάριο και θετική σε τουλάχιστον ένα.

Ασκήσεις με Python

1. Γράψτε πρόγραμμα που δέχεται $S_0, C(K), P(K), r, T$, ελέγχει την ισοτιμία και, όταν παραβιάζεται, προτείνει την κατάλληλη στρατηγική και υπολογίζει το άμεσο κέρδος.
2. Υλοποιήστε με `scipy.optimize.linprog` το Πρόβλημα (5.1) για δύο τιμές εξάσκησης και όρια $[-N, N]$. Εμφανίστε τη βέλτιστη κατανομή και το D .
3. Προσθέστε απλό κόστος συναλλαγών $c(|\gamma_i| + |\delta_i|)$, με κατάλληλη γραμμικοποίηση των απόλυτων τιμών, και συγκρίνετε το τελικό D .

Κεφάλαιο 6

Θεωρία Επιλογής Markowitz και Αξία σε Κίνδυνο

*Η διαφοροποίηση είναι το μόνο
δωρεάν γεύμα στη
χρηματοοικονομική.*

--- Harry Markowitz

6.1 Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Για την ανάπτυξη της θεωρίας χρειαζόμαστε ορισμένα βασικά εργαλεία των πιθανοτήτων. Η συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών X, Y ορίζεται από

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Ισχύουν οι ιδιότητες

- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$,
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$,
- $\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z)$,
- $\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$,
- $\text{Cov}(aX, bY) = ab \text{Cov}(X, Y)$,
- $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j)$.

6.2 Το πρόβλημα

Έστω ότι ποσό V επενδύεται σε n εταιρείες. Αν αγοράζονται k_i μετοχές της εταιρείας i , με αρχική τιμή S_i^0 , ορίζουμε το βάρος

$$w_i = \frac{k_i S_i^0}{\sum_{j=1}^n k_j S_j^0}, \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1.$$

Το ποσό $w_i V$ επενδύεται στη μετοχή i . Στόχος είναι η επιλογή των βαρών ώστε να επιτυγχάνεται μεγάλη αναμενόμενη απόδοση με όσο γίνεται μικρότερο κίνδυνο. Η απόδοση της μετοχής i στο $[0, T]$ είναι η τυχαία μεταβλητή μ_i που ικανοποιεί

$$\frac{S_i^T}{S_i^0} = 1 + \mu_i.$$

Θεωρούμε ότι από ιστορικά δεδομένα έχουν εκτιμηθεί $m_i = \mathbb{E}(\mu_i)$, οι διακυμάνσεις $\sigma_{ii} = \text{Var}(\mu_i)$ και οι συνδιακυμάνσεις $\sigma_{ij} = \text{Cov}(\mu_i, \mu_j)$, και υποθέτουμε ότι οι εκτιμήσεις είναι αντιπροσωπευτικές για τον μελλοντικό ορίζοντα $[0, T]$.

Η συνολική απόδοση μ του χαρτοφυλακίου είναι

$$\frac{V^T}{V} = 1 + \mu, \quad \mu = \frac{\sum_i k_i (S_i^T - S_i^0)}{V} = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i.$$

Άρα

$$m = \mathbb{E}(\mu) = \sum_{i=1}^n w_i m_i, \quad \sigma_p^2 = \text{Var}(\mu) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}.$$

Με

$$\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T, \quad \mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)^T, \quad \Sigma = [\sigma_{ij}], \quad \mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T,$$

γράφουμε

$$\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{w}^T \mathbf{m} = m, \quad \sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}.$$

Ο πίνακας συνδιακύμανσης είναι πάντοτε θετικά ημιορισμένος. Για μοναδική κλειστή λύση θα υποθέτουμε συνήθως ότι είναι θετικά ορισμένος, άρα αντιστρέψιμος.

Πρόβλημα 6.1 (Κατασκευή χαρτοφυλακίου Markowitz). Για απαιτούμενη μέση απόδοση m_0 , να βρεθεί το διάνυσμα βαρών που λύνει

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$$

υπό τους περιορισμούς

$$\mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{w}^T \mathbf{m} = m_0. \quad (6.1)$$

Αν δεν επιτρέπονται θέσεις πώλησης, προστίθενται οι συνθήκες $w_i \geq 0$.

6.3 Θεωρητική λύση του προβλήματος Markowitz

Με πολλαπλασιαστές Lagrange προκύπτει

$$2\Sigma \mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{m}, \quad \mathbf{1}^T \mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{m}^T \mathbf{w} = m_0.$$

Αν ο Σ είναι αντιστρέψιμος,

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \Sigma^{-1} [\mathbf{m} \ \mathbf{1}] \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Θέτουμε

$$B = [\mathbf{m} \ \mathbf{1}], \quad A = B^T \Sigma^{-1} B.$$

Οι περιορισμοί γράφονται

$$B^T \mathbf{w} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Επομένως,

$$\frac{1}{2} A \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Αν τα διανύσματα $\mathbf{m}$ και $\mathbf{1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε ο A είναι θετικά ορισμένος, διότι για κάθε $y \neq 0$,

$$y^T A y = (By)^T \Sigma^{-1} (By) > 0.$$

Άρα

$$\boxed{\mathbf{w} = \Sigma^{-1} B A^{-1} \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}.} \quad (6.3)$$

Γράφοντας

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad |A| = A_{11}A_{22} - A_{12}^2,$$

η ελάχιστη διακύμανση ως συνάρτηση του m_0 είναι

$$\sigma_p^2(m_0) = \frac{A_{22}m_0^2 - 2A_{12}m_0 + A_{11}}{|A|}.$$

Η σχέση αυτή περιγράφει την αποτελεσματική μεθόριο στο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης-τυπικής απόκλισης.

Χωρίς τους περιορισμούς $w_i \geq 0$, ορισμένα βάρη μπορεί να είναι αρνητικά. Τότε ο επενδυτής δανείζεται μετοχές, τις πωλεί σήμερα και οφείλει να τις επαναγοράσει στο μέλλον. Η θέση πώλησης μπορεί θεωρητικά να έχει απεριόριστη ζημία, επειδή η μελλοντική τιμή της μετοχής δεν έχει πεπερασμένο άνω φράγμα. Η αγορά κατάλληλου δικαιώματος αγοράς μπορεί να περιορίσει αυτή τη ζημία. Τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης χρησιμοποιούνται κυρίως για αντιστάθμιση, αλλά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για κερδοσκοπία.

6.4 Τρία προβλήματα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου

Στις επόμενες παραλλαγές υποθέτουμε επιπλέον $w_i \geq 0$.

6.4.1 Χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης

Για τρεις μετοχές,

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 = f(w_1, w_2, w_3) = & w_1^2 \sigma_{11} + w_2^2 \sigma_{22} + w_3^2 \sigma_{33} \\ & + 2w_1 w_2 \sigma_{12} + 2w_1 w_3 \sigma_{13} + 2w_2 w_3 \sigma_{23}, \end{aligned}$$

με

$$m_1 w_1 + m_2 w_2 + m_3 w_3 = m_0 \quad (6.4)$$

και

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1. \quad (6.5)$$

Αν $m_1 \neq m_2$ και θέσουμε $t = w_3$, τότε

$$w_1 = \frac{t(m_2 - m_3) + m_0 - m_2}{m_1 - m_2}, \quad w_2 = \frac{t(m_3 - m_1) + m_1 - m_0}{m_1 - m_2}.$$

Με αντικατάσταση, η f γίνεται συνάρτηση μίας μεταβλητής. Χωρίς περιορισμούς προ-
σήμευ ελαχιστοποιείται στο $\mathbb{R}$. Αν $w_i \geq 0$, το t περιορίζεται στο υποσύνολο του $[0, 1]$
στο οποίο και οι παραπάνω εκφράσεις είναι μη αρνητικές. Αν το σύνολο είναι κενό, το
πρόβλημα δεν είναι εφικτό για το συγκεκριμένο m_0 .

6.4.2 Χαρτοφυλάκια μέγιστης απόδοσης για δεδομένο κίνδυνο

Για δύο μετοχές και δοσμένη διακύμανση σ_0^2 , λύνουμε

$$\begin{aligned} \max_{w_1, w_2} \quad & m_1 w_1 + m_2 w_2 \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \quad & \sigma_{11} w_1^2 + \sigma_{22} w_2^2 + 2\sigma_{12} w_1 w_2 = \sigma_0^2, \\ & w_1 + w_2 = 1, \quad w_1, w_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Θέτουμε $w_2 = t$, $w_1 = 1 - t$. Η εξίσωση της διακύμανσης είναι δευτεροβάθμια ως προς t .
Από τις πραγματικές ρίζες που ανήκουν στο $[0, 1]$, επιλέγουμε εκείνη που μεγιστοποιεί
 $m_1(1 - t) + m_2 t$.

6.4.3 Μεγιστοποίηση απόδοσης με ποινή διακύμανσης

Μια άλλη επιλογή είναι

$$\max_{w_1, w_2} [m_1 w_1 + m_2 w_2 - \lambda (\sigma_{11} w_1^2 + \sigma_{22} w_2^2 + 2\sigma_{12} w_1 w_2)]$$

υπό $w_1 + w_2 = 1$, $w_1, w_2 \geq 0$, όπου $\lambda > 0$ εκφράζει την αποστροφή προς τον κίνδυνο.
Με $w_2 = t$, το πρόβλημα γίνεται μονοδιάστατη μεγιστοποίηση στο $[0, 1]$.

6.5 Αξία σε Κίνδυνο

Έστω χαρτοφυλάκιο σημερινής αξίας V_0 και αξίας V_t μετά από χρονικό ορίζοντα t . Η
Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk, VaR) σε επίπεδο εμπιστοσύνης a είναι το ποσό $x > 0$ που
ικανοποιεί

$$\mathbb{P}(V_t - V_0 \leq -x) = 1 - a.$$

Αν $R_t = (V_t - V_0)/V_0$ είναι η απόδοση, τότε

$$\mathbb{P}\left(R_t \leq -\frac{x}{V_0}\right) = 1 - a.$$

Υποθέτουμε ότι $R_t \sim N(m_0, \sigma^2)$. Τότε

$$\mathbb{P}\left(R_t \leq -\frac{x}{V_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{-x/V_0} e^{-(u-m_0)^2/(2\sigma^2)} du. \quad (6.6)$$

Για $Y \sim N(m_0, \sigma^2)$,

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{y - m_0}{\sqrt{2}\sigma}\right), \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du.$$

Η σχέση αποδεικνύεται με την αλλαγή μεταβλητής $u = (t - m_0)/(\sqrt{2}\sigma)$. Συνεπώς,

$$\mathbb{P}\left(R_t \leq -\frac{x}{V_0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{-x/V_0 - m_0}{\sqrt{2}\sigma}\right).$$

Ισοδύναμα, αν z_a είναι το a -ποσοστημόριο της τυπικής κανονικής κατανομής,

$$\text{VaR}_a = V_0(z_a\sigma - m_0)$$

όταν το δεξί μέλος είναι θετικό.

Η αναμενόμενη ζημία υπό την προϋπόθεση ότι ξεπερνά ένα αρνητικό όριο $p < 0$ γράφεται

$$\mathbb{E}(V_t - V_0 \mid V_t - V_0 < p) = \frac{\int_{-\infty}^p x e^{-(x-m_0V_0)^2/(2V_0^2\sigma^2)} dx}{\int_{-\infty}^p e^{-(x-m_0V_0)^2/(2V_0^2\sigma^2)} dx}.$$

Αυτό είναι συγγενές με την υπό συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο (Conditional VaR, CVaR) ή αναμενόμενη έλλειψη (expected shortfall).

Οι υπολογισμοί VaR αποτελούν *μέτρηση κινδύνου*. Εξαρτώνται από την επιλεγμένη κατανομή, την πιθανότητα και τις παραμέτρους, άρα έχουν μοντελοεξαρτώμενο χαρακτήρα. Αντίθετα, η κατασκευή χαρτοφυλακίου με δικαιώματα ώστε να επιβάλλεται καθολικό όριο ζημίας αποτελεί *διαχείριση κινδύνου* και μπορεί να γίνει χωρίς επιλογή πιθανοτικού μέτρου.

6.6 Το Υπόδειγμα Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων (CAPM)

Το *Υπόδειγμα Αποτίμησης Κεφαλαιακών Στοιχείων* (Capital Asset Pricing Model, CAPM) συνδέει την αναμενόμενη απόδοση ενός τίτλου με τον συστηματικό του κίνδυνο. Υπό τις κλασικές υποθέσεις ορθολογικών επενδυτών, αποτελεσματικών αγορών και διαφοροποιημένων χαρτοφυλακίων,

$$\mathbb{E}(R_i) = R_f + \beta_i(\mathbb{E}(R_m) - R_f),$$

όπου R_f είναι η απόδοση χωρίς κίνδυνο, R_m η απόδοση του χαρτοφυλακίου αγοράς και β_i η ευαισθησία της μετοχής στις κινήσεις της αγοράς.

Πίνακας 6.1: Ερμηνεία του συντελεστή β στο CAPM

Τιμή	Ερμηνεία	Πρακτική σημασία
$\beta \approx 1$	Κίνηση παρόμοια με την αγορά	Συνήθης συστηματικός κίνδυνος
$\beta > 1$	Μεγαλύτερη ευαισθησία από την αγορά	Υψηλότερος κίνδυνος και ενδεχομένως υψηλότερη απαιτούμενη απόδοση
$0 < \beta < 1$	Μικρότερη ευαισθησία	Χαμηλότερος συστηματικός κίνδυνος
$\beta < 0$	Τάση αντίθετης κίνησης	Δυνατότητα αντιστάθμισης κινδύνου αγοράς

Το CAPM αποζημιώνει μόνο τον συστηματικό κίνδυνο, δηλαδή το μέρος του κινδύνου που δεν εξαλείφεται με διαφοροποίηση. Αποτελεί σημείο αναφοράς για την αξιολόγηση τίτλων, την εκτίμηση του κόστους ιδίων κεφαλαίων και τη σύγκριση πραγματικών με απαιτούμενες αποδόσεις.

6.6.1 Εκτίμηση των α και β

Σε εμπειρικές εφαρμογές εκτιμούμε

$$R_i - R_f = \alpha_i + \beta_i(R_m - R_f) + \varepsilon_i$$

με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Θεωρητικά,

$$\beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_m)}{\text{Var}(R_m)}, \quad \alpha_i = \overline{R_i} - R_f - \beta_i(\overline{R_m} - R_f).$$

Το β_i είναι η κλίση της γραμμής παλινδρόμησης, ενώ το α_i είναι η απόδοση που δεν εξηγείται από την αγορά. Θετικό α δηλώνει υπεραπόδοση σε σχέση με το CAPM και αρνητικό α υστέρηση, χωρίς αυτό να συνεπάγεται ότι η απόκλιση θα συνεχιστεί στο μέλλον.

6.6.2 Το CAPM ως εργαλείο πρόβλεψης

Το CAPM είναι μόνο μερικώς «προβλεπτικό». Δεν προβλέπει την πραγματική μελλοντική τιμή ή απόδοση μιας μετοχής. Υπολογίζει την απόδοση ισορροπίας που θα ήταν εύλογη για δεδομένο συστηματικό κίνδυνο, εφόσον ισχύουν οι υποθέσεις του. Για παράδειγμα, αν $R_f = 2\%$, $\mathbb{E}(R_m) = 8\%$ και $\beta = 1.5$, τότε η απαιτούμενη απόδοση είναι 11%.

Το μοντέλο δεν ενσωματώνει ειδήσεις εταιρειών, καινοτομίες, μακροοικονομικές κρίσεις ή απρόβλεπτες αλλαγές πολιτικής. Στην πράξη χρησιμοποιείται κυρίως για:

- εκτίμηση κόστους ιδίων κεφαλαίων,
- αξιολόγηση της απόδοσης σε σχέση με τον κίνδυνο,
- κατασκευή και σύγκριση χαρτοφυλακίων,
- σύγκριση πραγματικής και απαιτούμενης απόδοσης.

Απόκλιση μιας πρόβλεψης αναλυτών από την απόδοση CAPM μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένδειξη αισιοδοξίας ή απαισιοδοξίας, όχι ως βεβαιότητα υποτίμησης ή υπερτίμησης.

Τι κάνει το CAPM	Τι δεν κάνει
Εκτιμά απαιτούμενη απόδοση για δεδομένο κίνδυνο	Δεν προβλέπει μελλοντικές τιμές
Συγκρίνει τίτλους ως προς κίνδυνο--απόδοση	Δεν ενσωματώνει όλες τις ειδήσεις και τα σοκ
Χρησιμοποιείται στο κόστος ιδίων κεφαλαίων	Δεν αποτελεί μηχανική μηχανή πρόβλεψης

6.7 Χρήση του CAPM για χαρτοφυλάκιο τριών μετοχών

Για κάθε μετοχή,

$$\mathbb{E}(R_i) = R_f + \beta_i(\mathbb{E}(R_m) - R_f).$$

Αν w_1, w_2, w_3 είναι τα βάρη, τότε

$$\mathbb{E}(R_p) = \sum_{i=1}^3 w_i \mathbb{E}(R_i), \quad \beta_p = \sum_{i=1}^3 w_i \beta_i.$$

Με την επιλογή των βαρών, ο επενδυτής μπορεί να σχηματίσει συντηρητικό χαρτοφυλάκιο με μικρό β_p ή επιθετικό με μεγάλο β_p . Η σύγκριση της πραγματοποιηθείσας απόδοσης με την απόδοση CAPM βοηθά στην αξιολόγηση της ιστορικής επίδοσης, αλλά δεν αποτελεί από μόνη της ασφαλή διάγνωση μελλοντικής υποτίμησης ή υπερτίμησης.

Συνολικά, το CAPM είναι υπόδειγμα αναμενόμενων αποδόσεων ισορροπίας και όχι ακριβούς πρόβλεψης. Παρέχει θεωρητική σύνδεση κινδύνου και απαιτούμενης απόδοσης.

Εργαστήριο 6.2 (Κατασκευή χαρτοφυλακίου Markowitz με Python). Με τον κώδικα `Markowitz2` μπορούν να εκτελεστούν οι παραπάνω υπολογισμοί για επιλεγμένες μετοχές και πραγματικά ιστορικά δεδομένα.

6.8 Ασκήσεις

Σωστό ή Λάθος

1. Η αποτελεσματική μεθόριος αποτελείται από χαρτοφυλάκια που, για δεδομένη διακύμανση, μεγιστοποιούν την αναμενόμενη απόδοση. **Σ/Λ:** _____
2. Αν όλα τα εκτός διαγωνίου στοιχεία του πίνακα συνδιακύμανσης είναι μηδενικά, οι αποδόσεις είναι ασυσχέτιστες. **Σ/Λ:** _____
3. Με τους περιορισμούς $w_i \geq 0$, το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης μπορεί να περιλαμβάνει θέση πώλησης. **Σ/Λ:** _____
4. Η VaR υπό κανονικότητα χρησιμοποιεί ποσοστημόριο της τυπικής κανονικής κατανομής. **Σ/Λ:** _____
5. Η μέθοδος πολλαπλασιαστών Lagrange εγγυάται πάντοτε θετικά βάρη. **Σ/Λ:** _____

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Χωρίς περιορισμό απαιτούμενης απόδοσης, το χαρτοφυλάκιο καθολικής ελάχιστης διακύμανσης είναι ανάλογο του:

- (A) $\Sigma^{-1}\mathbf{1}$, κανονικοποιημένου ώστε $\mathbf{1}^T\mathbf{w} = 1$,
- (B) $\Sigma^{-1}\mathbf{m}$,
- (C) διανύσματος ίσων βαρών,
- (D) διαφορετικού διανύσματος για κάθε m_0 .

Απάντηση: _____

2. Η σχέση $\sigma_p^2 = \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$ περιγράφει:

- (A) την αναμενόμενη απόδοση,
- (B) τη διακύμανση της απόδοσης,
- (C) την πιθανότητα υπέρβασης ενός ορίου ζημίας,
- (D) τον δείκτη Sharpe.

Απάντηση: _____

3. Για επίπεδο εμπιστοσύνης a , η κανονική VaR είναι:

- (A) $V_0(m_0 + z_{1-a}\sigma)$,
- (B) $V_0(-m_0 + z_a\sigma)$,
- (C) $V_0(-m_0 + z_{1-a}\sigma)$,
- (D) $V_0(m_0 - z_a\sigma)$.

Απάντηση: _____

4. Ο πίνακας Σ είναι:

- (A) πίνακας τιμών εξάσκησης,
- (B) πίνακας συνδιακύμανσης αποδόσεων,
- (C) πίνακας μόνο των διακυμάνσεων,
- (D) πίνακας βαρών.

Απάντηση: _____

5. Ποια παράμετρος εκφράζει το επίπεδο εμπιστοσύνης στη VaR;

- (A) m_0 ,
- (B) σ ,
- (C) a ,
- (D) V_0 .

Απάντηση: _____

Αντιστοίχιση

- | | |
|--|--|
| 1. Διάνυσμα που ελαχιστοποιεί $\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$ με $\sum w_i = 1$ | A. Καθολικό χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης |
| 2. Γραφική παράσταση βέλτιστων ζευγών απόδοσης--κινδύνου | B. Αποτελεσματική μεθόριος |
| 3. Δανεισμός μετοχών, πώλησή τους σήμερα και επαναγορά στο μέλλον | Γ. Θέση πώλησης |
| 4. Μέγιστη ζημία με πιθανότητα υπέρβασης $1 - a$ | Δ. VaR |

Συμπλήρωση κενών

- 1. Το διάνυσμα βαρών συμβολίζεται με _____.
- 2. Η αναμενόμενη απόδοση είναι _____.
- 3. Ο πίνακας συνδιακύμανσης συμβολίζεται με _____.
- 4. Το επίπεδο a συνδέεται με το ποσοστημόριο _____.
- 5. Η κανονικότητα επιτρέπει χρήση της erf για τον υπολογισμό της _____.

Θεωρητικές και υπολογιστικές ασκήσεις

1. Αποδείξτε βήμα προς βήμα ότι οι εξισώσεις Lagrange οδηγούν στην (6.3).
2. Αποδείξτε τον τύπο

$$\sigma_p^2(m_0) = \frac{A_{22}m_0^2 - 2A_{12}m_0 + A_{11}}{|A|}.$$

3. Για $n = 3$, γράψτε τη διακύμανση ως συνάρτηση των βαρών και ελαχιστοποιήστε την χωρίς τους περιορισμούς $w_i \geq 0$.
4. Για $V_0 = 1000$, $m_0 = 0.001$, $\sigma = 0.02$, $a = 0.99$, υπολογίστε τη μονοήμερη $\text{VaR}_{0.99}$.
5. Περιγράψτε πώς μπορούν να προστεθούν κόστη συναλλαγών στο πρόβλημα βελτιστοποίησης.

Ασκήσεις με Python

1. Με `numpy` και `scipy.optimize`, υπολογίστε την αποτελεσματική μεθόριο για δεδομένα $\mathbf{m}$, Σ και $m_0 \in [m_{\min}, m_{\max}]$.
2. Υλοποιήστε την ελαχιστοποίηση $\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w}$ υπό $\sum w_i = 1$, $w_i \geq 0$ με `scipy.optimize.minimize` (Το `linprog` δεν είναι κατάλληλο επειδή η αντικειμενική συνάρτηση είναι τετραγωνική.)
3. Γράψτε συνάρτηση που δέχεται V_0, m_0, σ, a και επιστρέφει τη VaR_a χρησιμοποιώντας `scipy.stats.norm.ppf`.

Κεφάλαιο 7

Γενίκευση της Θεωρίας Markowitz

Το σενάριο της θεωρίας Markowitz προκύπτει από στατιστική μελέτη παλαιότερων αριθμητικών δεδομένων, χωρίς αναγκαστικά να λαμβάνει υπόψη πρόσφατα γεγονότα. Τα δεδομένα μπορεί να υποδεικνύουν πτωτική τάση, ενώ ο επενδυτής, αξιοποιώντας νέα πληροφορία, να προβλέπει το αντίθετο.

Στην κλασική θεωρία Markowitz δεν αξιοποιείται η δυνατότητα αγοράς ή πώλησης δικαιωμάτων. Έτσι ο κίνδυνος περιγράφεται κυρίως με πιθανότητες, διακυμάνσεις και κατανομές που προκύπτουν από την πρόβλεψη. Για το ίδιο χαρτοφυλάκιο, διαφορετικοί αναλυτές μπορούν να καταλήξουν σε πολύ διαφορετικές πιθανότητες μεγάλης ζημίας, επειδή χρησιμοποιούν διαφορετικά δεδομένα, χρονικά παράθυρα και μοντέλα.

Αυτό αποτελεί ισχυρό κίνητρο να εξοπλίζουμε τα χαρτοφυλάκια με κατάλληλα δικαιώματα αγοράς και πώλησης, όταν αυτά είναι διαθέσιμα. Το μαθηματικό πρόβλημα γίνεται πιο σύνθετο, αλλά η συνάρτηση κέρδους μπορεί να προσαρμοστεί ακριβέστερα στις επιθυμίες του επενδυτή και η χειρότερη δυνατή ζημία να ελεγχθεί άμεσα.

Για χαρτοφυλάκιο n μετοχών, μία πρόβλεψη μπορεί να έχει τη μορφή

$$(S_1^T, S_2^T, \dots, S_n^T) \in G \subseteq \mathbb{R}_+^n.$$

Η κατασκευή του χαρτοφυλακίου μετατρέπεται τότε σε πρόβλημα βελτιστοποίησης: επιδιώκουμε μέγιστο κέρδος στο προβλεπόμενο σύνολο G , διατηρώντας προκαθορισμένο όριο ζημίας έξω από αυτό.

Εργαστήριο 7.1 (Υπολογισμός κατάλληλης περιοχής G). Με ιστορικά δεδομένα και κατάλληλη στατιστική ανάλυση μπορούμε να εκτιμήσουμε περιοχή G με επιθυμητή πιθανότητα κάλυψης. Το σημειωματάριο **Two-Assets-ComputingG.ipynb** υλοποιεί μια τέτοια διαδικασία για δύο μετοχές. Η στατιστική περιοχή, όμως, πρέπει να αξιολογείται μαζί με πρόσφατα γεγονότα και οικονομική πληροφορία· διαφορετικά μπορεί να υστερεί σημαντικά έναντι μιας ενημερωμένης πρόβλεψης.

Πρόβλημα 7.2. Έστω ότι ο επενδυτής προβλέπει $(S_1^T, S_2^T) \in G \subseteq \mathbb{R}_+^2$. Θέλουμε χαρτοφυλάκιο κερδοφόρο στο G , του οποίου η μέγιστη δυνατή ζημία δεν υπερβαίνει το D .

Ένα ενδεικτικό γραμμικό πρόγραμμα είναι

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i,j} w_{ij} D_{ij} \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \quad & \Pi(x, y) \geq -D \quad \text{για κάθε } x, y \geq 0, \\ & \Pi(U_i, V_j) \geq D_{ij} \geq 0, \\ & ax + by + ce^{rT} + \sum_k \gamma_k P_k = Y, \end{aligned} \quad (7.1)$$

όπου P_k είναι οι αγοραίες τιμές των διαθέσιμων συμβολαίων. Οι καθολικές ανισότητες αντικαθίστανται, σύμφωνα με τα προηγούμενα θεωρήματα, από ελέγχους σε πεπερασμένο πλέγμα κόμβων.

Εργαστήριο 7.3 (Επίλυση του Προβλήματος 7.1). Το `MultiAsset4.ipynb` λύνει το πρόβλημα για δύο μετοχές. Το `Markowitz-Portfolio-Profit-Function-2Assets.ipynb` σχεδιάζει τη συνάρτηση κέρδους. Η γραφική παράσταση αποκαλύπτει το σύνολο σεναρίων στα οποία το χαρτοφυλάκιο είναι κερδοφόρο και δείχνει ότι περισσότερα διαθέσιμα συμβόλαια προσφέρουν περισσότερες παραμέτρους για την προσαρμογή της επιφάνειας κέρδους.

Όσο μικρότερο είναι το G , τόσο μεγαλύτερο μπορεί να γίνει το κέρδος όταν η πρόβλεψη επαληθευθεί, επειδή το χαρτοφυλάκιο συγκεντρώνει την απόδοσή του σε στενότερο σύνολο σεναρίων. Αν $G = \mathbb{R}_+^n$, το ζητούμενο μετατρέπεται σε καθολικά μη αρνητική απολαβή, δηλαδή σε αναζήτηση αρμπιτράζ. Το θεωρητικό κέρδος μπορεί όμως να είναι μικρότερο από τα κόστη συναλλαγών.

Μια δεύτερη μορφή πρόβλεψης είναι η επιλογή κοινής κατανομής του διανύσματος $(S_1^T, \dots, S_d^T)$. Τότε μπορούμε να λύσουμε

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Var}(\Pi(S_1^T, \dots, S_d^T)) \\ \text{υπό τους περιορισμούς} \quad & \mathbb{E}[\Pi(S_1^T, \dots, S_d^T)] \geq m_0, \\ & \sum_{i=1}^d a_i S_i^0 + \sum_j \gamma_j C_j = V, \\ & \Pi(x_1, \dots, x_d) \geq -D \quad \text{για κάθε } (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_+^d. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Τα C_j περιλαμβάνουν όλα τα διαθέσιμα δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Το χαρτοφυλάκιο μπορεί να έχει μικρότερη διακύμανση ή μεγαλύτερη μέση απόδοση από εκείνο που χρησιμοποιεί μόνο μετοχές, ενώ η ζημία δεν υπερβαίνει ποτέ το D .

Η τελευταία καθολική ανισότητα ισοδυναμεί με πεπερασμένο σύστημα γραμμικών ανισοτήτων στους κόμβους όπου αλλάζει η αφινική μορφή της Π , μαζί με τις κατάλληλες συνθήκες κλίσης στις μη φραγμένες διευθύνσεις. Όταν η χειρότερη ζημία έχει ήδη περιοριστεί σε μικρό ποσό, η VaR μπορεί να έχει μικρότερη πρακτική σημασία. Αν δεν υπάρχουν παράγωγα, το (7.2) ανάγεται σε παραλλαγή του κλασικού προβλήματος Markowitz.

Παρατήρηση 7.4 (Όταν τα παλαιότερα δεδομένα δείχνουν πτώση). Η λύση ενός πιθανοτικού προβλήματος βελτιστοποίησης είναι συνήθως κερδοφόρα σε ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}_+^n$ και ζημιογόνα στο συμπλήρωμά του. Αυτό ισοδυναμεί με έμμεση πρόβλεψη ότι οι τιμές θα ανήκουν στο A . Τα ιστορικά δεδομένα μπορεί να δείχνουν πτώση, χωρίς αυτό να συνεπάγεται ότι η ίδια τάση θα συνεχιστεί. Νέα γεγονότα μπορούν να δικαιολογήσουν αντίθετη πρόβλεψη και διαφορετική κατασκευή χαρτοφυλακίου.

Σε όλες τις κατασκευές πρέπει να ενσωματώνονται κόστη συναλλαγών, τιμές bid και ask, μερίσματα, όρια θέσεων και περιορισμοί ρευστότητας.

Παρατήρηση 7.5 (Πέρα από το κλασικό πλαίσιο Markowitz). Η κλασική μεθοδολογία περιορίζεται σε χαρτοφυλάκια μετοχών και σε πρόβλεψη βασισμένη κυρίως σε ιστορικές μέσες τιμές και συνδιακυμάνσεις. Αν αναμένεται άνοδος, η αγορά κατάλληλων δικαιωμάτων αγοράς μπορεί να ενισχύσει το κέρδος. Αν αναμένεται πτώση, τα δικαιώματα πώλησης μπορούν να περιορίσουν τη ζημία.

Η παρούσα προσέγγιση επιτρέπει οποιοδήποτε σενάριο πρόβλεψης και χρησιμοποιεί όλα τα διαθέσιμα παράγωγα. Με αυτή την έννοια, γενικεύει το Markowitz. Η πρακτική δυσκολία δεν είναι εννοιολογική αλλά υπολογιστική: απαιτούνται κατάλληλοι βελτιστοποιητές και αξιόπιστα δεδομένα αγοράς.

Παρατήρηση 7.6 (Εξασφαλίστε επαρκή προστασία). Η πιθανότητα μεγάλης ζημίας ενός χαρτοφυλακίου Markowitz εξαρτάται από την επιλεγμένη κατανομή και από παραμέτρους που εκτιμώνται σε ένα ιστορικό διάστημα $[T_1, T_2]$. Άλλο χρονικό παράθυρο δίνει διαφορετικές εκτιμήσεις. Επειδή επενδύεται πραγματικό κεφάλαιο, είναι συχνά προτιμότερο να εξεταστεί πρώτα άμεση προστασία μέσω δικαιωμάτων πώλησης και, αν επιδιώκεται ανοδικό κέρδος, μέσω δικαιωμάτων αγοράς. Το βασικό πρόβλημα είναι πόσα συμβόλαια κάθε τύπου πρέπει να χρησιμοποιηθούν.

Παράδειγμα 7.7. Έστω επένδυση 1,000 ευρώ σε Tesla και Apple. Ένα χαρτοφυλάκιο Markowitz μπορεί, για παράδειγμα, να κατανέμει 700 στην Tesla και 300 στην Apple. Αντί να υπολογίσουμε μόνο την πιθανότητα ζημίας άνω των 600, εξετάζουμε πρώτα αγορά δικαιωμάτων. Έστω

$$P^{\text{Tesla}}(135) = 4, \quad P^{\text{Apple}}(120) = 1.25, \quad C^{\text{Tesla}}(300) = 34.3, \quad C^{\text{Apple}}(240) = 3,$$

με $S_0^{\text{Tesla}} = 269$ και $S_0^{\text{Apple}} = 198$. Επενδύουμε 600 σε μετοχές Tesla, 200 σε Apple και το υπόλοιπο σε δικαιώματα. Μια ενδεικτική συνάρτηση κέρδους είναι

$$\begin{aligned} \Pi(x, y) = & \frac{600}{269}x + \frac{200}{198}y + \frac{60}{4}(135 - x)^+ + \frac{60}{1.25}(120 - y)^+ \\ & + \frac{40}{34.3}(x - 300)^+ + \frac{40}{3}(y - 240)^+ - 1000. \end{aligned}$$

Στη λήξη, x και y είναι οι τιμές Tesla και Apple. Η ελαχιστοποίηση της Π δίνει τη χειρότερη δυνατή ζημία. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα αυτή δεν υπερβαίνει περίπου τα 578 ευρώ, ενώ για $x, y \leq 400$ το μέγιστο κέρδος είναι περίπου 2,686. Τα δικαιώματα αγοράς ενισχύουν το ανοδικό κέρδος και τα δικαιώματα πώλησης περιορίζουν την καθοδική ζημία. Ο επενδυτής πρέπει πρώτα να καθορίσει αποδεκτή ζημία και επιθυμητό σενάριο κέρδους και έπειτα να βελτιστοποιήσει την κατανομή.

Συμπέρασμα 7.8. Για να προσδιορίσει κατάλληλο χαρτοφυλάκιο, ο επενδυτής πρέπει να καθορίσει τόσο ένα σενάριο για τις μελλοντικές τιμές όσο και τη μέγιστη ζημία που είναι διατεθειμένος να δεχθεί.

Παρατήρηση 7.9 (Χρηματοοικονομικά και Αναλογιστικά Μαθηματικά). Η ενσωμάτωση δικαιωμάτων μεταφέρει μέρος του κινδύνου σε άλλους συμμετέχοντες. Στην αναλογιστική επιστήμη αντίστοιχος μηχανισμός είναι η αντασφάλιση. Όπως είναι ελλιπές να υπολογίζεται πιθανότητα καταστροφής ενός επενδυτικού χαρτοφυλακίου πριν επιλεγεί στρατηγική αντιστάθμισης, έτσι και στην ασφάλιση πρέπει πρώτα να καθοριστεί η κατάλληλη αντασφαλιστική στρατηγική.

Παρατήρηση 7.10 (Τα συμπεράσματα Markowitz μεταβάλλονται με τον χρόνο). Με την προσθήκη νέων δεδομένων, οι εκτιμημένες μέσες αποδόσεις και συνδιακυμάνσεις αλλάζουν, άρα αλλάζει και το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Η μεθοδολογία πρέπει επομένως να επανεκτιμάται σε χρονικούς ορίζοντες στους οποίους οι σχετικές ποσότητες μπορούν εύλογα να θεωρηθούν σχετικά σταθερές.

Παρατήρηση 7.11 (Αποτελεσματικότερες τεχνικές πρόβλεψης). Για βραχυχρόνιες επενδύσεις πρέπει να εξετάζονται τόσο τα δεδομένα όσο και πρόσφατα γεγονότα και η αναμενόμενη επίδρασή τους. Η μηχανική μάθηση μπορεί να βοηθήσει στην οργάνωση αυτής της πληροφορίας. Για μακροχρόνιες επενδύσεις είναι σημαντικά η ανθεκτικότητα της εταιρείας, η ποιότητα προϊόντων, ο ανταγωνισμός και άλλοι θεμελιώδεις δείκτες. Η υπερανάλυση παρελθοντικών αριθμών χωρίς οικονομική ερμηνεία δεν εγγυάται ουσιαστική πρόσθετη πληροφορία.

Ερώτηση 7.12. Ποια άλλα προβλήματα βελτιστοποίησης μπορούν να διατυπωθούν για n μετοχές και τα διαθέσιμα δικαιώματα αγοράς και πώλησης; Πώς μεταβάλλεται η λύση όταν αλλάζουν το σενάριο πρόβλεψης, το όριο ζημίας, η ρευστότητα ή τα κόστη συναλλαγών;

Παρατήρηση 7.13 (Δύο τύποι προβλέψεων). Για χαρτοφυλάκιο πολλών μετοχών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε:

- **Πρόβλεψη μέσω κατανομής:** εκτίμηση της κοινής κατανομής των τιμών και βελτιστοποίηση μέσης τιμής, διακύμανσης ή άλλων χαρακτηριστικών της συνάρτησης κέρδους.
- **Πρόβλεψη μέσω συνόλου:** εκτίμηση ενός $G \subseteq \mathbb{R}^d$ στο οποίο αναμένεται να βρεθούν οι τιμές και βελτιστοποίηση του κέρδους στο G .

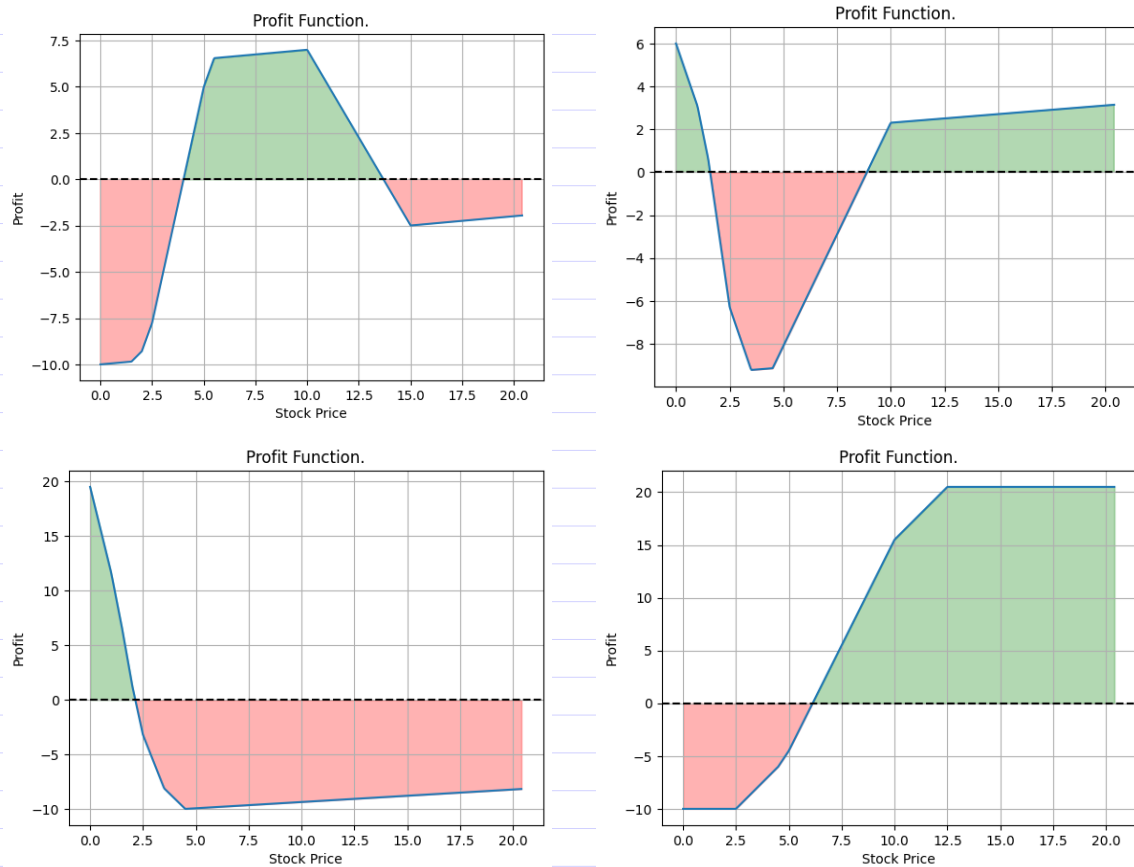
Η προσθήκη δικαιωμάτων αυξάνει τις δυνατότητες διαφοροποίησης και άμεσου ελέγχου της ζημίας. Αν το καθολικό όριο D δεν είναι αρκετά μικρό, μπορεί επιπλέον να υπολογιστεί η πιθανότητα υπέρβασης ενός ενδιαμέσου ορίου ζημίας.

7.1 Διαχωρισμός πρόβλεψης και κατασκευής χαρτοφυλακίου

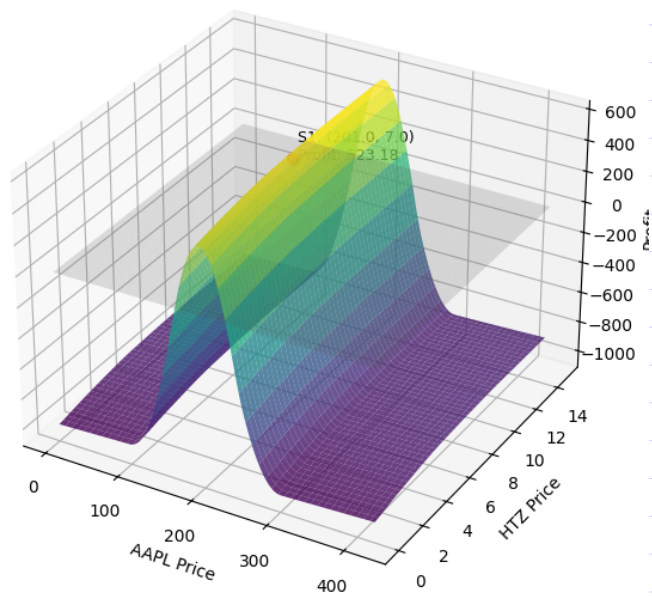
Η πρόβλεψη και η κατασκευή είναι δύο διαφορετικά προβλήματα. Η πρόβλεψη ανήκει στη στατιστική, στη μηχανική μάθηση ή σε άλλες τεχνικές μοντελοποίησης. Η κατασκευή μετατρέπει την πρόβλεψη σε εφαρμόσιμες θέσεις υπό σαφείς περιορισμούς κινδύνου και αποτελεί πρόβλημα χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Ο διαχωρισμός επιτρέπει να βελτιώνεται κάθε μέρος ανεξάρτητα.

7.2 Νέος τύπος πολυμετοχικών δικαιωμάτων: δικαιώματα συσχέτισης

Έστω δύο μετοχές S_1, S_2 με τιμές εξάσκησης $K_1 < \dots < K_n$ και $L_1 < \dots < L_m$. Τα απλά δικαιώματα πάνω σε κάθε μετοχή παράγουν διαχωρίσιμες συναρτήσεις των S_1^T και S_2^T . Για ακριβέστερη τοπική διαμόρφωση της επιφάνειας κέρδους μπορούν να εξεταστούν



Profit Function for AAPL & HTZ



Σχήμα 7.1: Ενδεικτικές συναρτήσεις κέρδους. Με κατάλληλη πρόβλεψη και διαθέσιμα συμβόλαιο μπορούν να κατασκευαστούν χαρτοφυλάκια κερδοφόρα σε διαφορετικά επιλεγμένα σενάρια.

συμβόλαια με απολαβές

$$P_{CC}(K_i, L_j) = \min\{(S_1^T - K_i)^+, (S_2^T - L_j)^+\},$$

$$P_{CP}(K_i, L_j) = \min\{(S_1^T - K_i)^+, (L_j - S_2^T)^+\},$$

$$P_{PC}(K_i, L_j) = \min\{(K_i - S_1^T)^+, (S_2^T - L_j)^+\},$$

$$P_{PP}(K_i, L_j) = \min\{(K_i - S_1^T)^+, (L_j - S_2^T)^+\}.$$

Τα ονομάζουμε εδώ *δικαιώματα συσχέτισης*. Αν ο επενδυτής στοχεύει στο γεγονός $(S_1^T, S_2^T) \in G$, τα απλά δικαιώματα μπορεί να παράγουν θετικό κέρδος και έξω από το G , διαχέοντας την επιθυμητή απόδοση. Τα παραπάνω συμβόλαια επιτρέπουν μεγαλύτερη συγκέντρωση της απολαβής σε κοινές κινήσεις των δύο μετοχών.

Αρμπιτράζ και τιμολόγηση

Η τιμή του $P_{CC}(K_i, L_j)$ δεν μπορεί, για παράδειγμα, να υπερβαίνει την τιμή κανενός από τα δύο αντίστοιχα δικαιώματα αγοράς, επειδή η απολαβή του είναι σημειακά μικρότερη. Ακριβέστερα όρια προκύπτουν από το διάστημα τιμών χωρίς αρμπιτράζ της Ενότητας 10.1, λαμβάνοντας υπόψη όλες τις διαθέσιμες αγοραίες τιμές. Μοντέλο που αγνοεί αυτές τις τιμές μπορεί να προτείνει τιμή ασύμβατη με την αγορά και να δημιουργήσει στατικό αρμπιτράζ. Η ίδια αρχή ισχύει γενικότερα για πολυμετοχικά παράγωγα.

Κίνητρο έκδοσης

Ένας πωλητής του P_{CC} μπορεί να θεωρεί εξαιρετικά απίθανη την ταυτόχρονη μεγάλη άνοδο και των δύο μετοχών. Αντίθετα, ένας αγοραστής που αναμένει ισχυρή θετική συνάρτηση εξάρτησης μπορεί να αγοράσει P_{CC} ή P_{PP} για κατάλληλες τιμές εξάσκησης. Οι ιδέες γενικεύονται σε d μετοχές και συνδέονται με συμβόλαια και ανταλλαγές που βασίζονται στη συσχέτιση.

7.3 Ασκήσεις

Σωστό ή Λάθος

1. Η προσθήκη δικαιωμάτων μειώνει πάντοτε τη διακύμανση κάθε βέλτιστου χαρτοφυλακίου. **Σ/Λ:** _____
2. Η επιλογή του G δεν επηρεάζει το μέγιστο δυνατό κέρδος. **Σ/Λ:** _____
3. Για $G = \mathbb{R}_+^n$ μπορεί να προκύψει θεωρητικό αρμπιτράζ, το οποίο ίσως εξαφανίζεται μετά τα κόστη συναλλαγών. **Σ/Λ:** _____
4. Η ύπαρξη παραγώγων καθιστά τη VaR μαθηματικά άκυρη. **Σ/Λ:** _____
5. Στο (7.2), ο περιορισμός μέσης τιμής εξασφαλίζει αναμενόμενο κέρδος τουλάχιστον m_0 . **Σ/Λ:** _____

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ποιος παράγοντας καθορίζει κυρίως την καταλληλότητα του χαρτοφυλακίου όταν η κατασκευή βασίζεται σε σενάριο;

- (A) Μόνο η μέση απόδοση.
- (B) Μόνο η διακύμανση.
- (C) Η ακρίβεια και η οικονομική σημασία της πρόβλεψης.
- (D) Μόνο ο αριθμός παραγώγων.

Απάντηση: _____

2. Ο ρόλος του G είναι να:

- (A) ορίζει το σύνολο τιμών όπου επιδιώκεται κέρδος,
- (B) ορίζει από μόνο του τη μέγιστη ζημία,
- (C) ταυτίζεται πάντοτε με μια κατανομή,
- (D) ορίζει μόνο τις τιμές εξάσκησης.

Απάντηση: _____

3. Η προσθήκη δικαιωμάτων μπορεί να:

- (A) αυξήσει αναγκαστικά και κέρδος και κίνδυνο,
- (B) περιορίσει καθοδική ζημία και να διατηρήσει ή να ενισχύσει ανοδική απόδοση,
- (C) εξαλείψει την ανάγκη πρόβλεψης,
- (D) μετατρέψει πάντοτε το πρόβλημα σε απλούστερο.

Απάντηση: _____

4. Η συνθήκη $\Pi(U_i, V_j) \geq D_{ij}$ σημαίνει:

- (A) ελάχιστο κέρδος σε συγκεκριμένους κόμβους του σεναρίου,
- (B) μέγιστη ζημία σε όλα τα σενάρια,
- (C) αναγκαία συνθήκη αρμπιτράζ,
- (D) ποινή κόστους συναλλαγών.

Απάντηση: _____

5. Ποιο δεν αποτελεί εγγυημένο όφελος της χρήσης δικαιωμάτων;

- (A) Αντιστάθμιση καθοδικού κινδύνου.
- (B) Δυνατότητα ενίσχυσης ανοδικού κέρδους.
- (C) Εγγύηση θετικής απόδοσης σε κάθε αγορά.
- (D) Πλουσιότερη διαμόρφωση της συνάρτησης κέρδους.

Απάντηση: _____

Αντιστοίχιση

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1. Περιοχή G | A. Σύνολο προβλεπόμενων τιμών |
| 2. Διακύμανση χαρτοφυλακίου | B. Πιθανοτικό μέτρο κινδύνου |
| 3. Δικαιώματα αγοράς και πώλησης | Γ. Εργαλεία αντιστάθμισης και διαμόρφωσης απόδοσης |
| 4. Αρμπιτράζ | Δ. Κέρδος χωρίς κίνδυνο |

Συμπλήρωση κενών

1. Το D στο (7.1) είναι η _____.
2. Η περιοχή G μπορεί να εκτιμηθεί από _____ και στατιστική ανάλυση.
3. Η προσθήκη παραγώγων εισάγει περισσότερες _____ στο πρόβλημα.
4. Η ελαχιστοποίηση διακύμανσης εξισορροπεί _____ και αναμενόμενη απόδοση.
5. Η $\Pi(x_1, \dots, x_d)$ είναι η _____ του χαρτοφυλακίου.

Θεωρητικές και υπολογιστικές ασκήσεις

1. Εξηγήστε μαθηματικά γιατί η σμίκρυνση του G διευρύνει το εφικτό σύνολο και μπορεί να αυξήσει το βέλτιστο κέρδος.
2. Παραγάγετε έκφραση για τη διακύμανση όταν η συνάρτηση κέρδους περιλαμβάνει δικαιώματα και συγκρίνετε με το κλασικό Markowitz.
3. Προσθέστε στο (7.2) όρια στον αριθμό συμβολαίων και περιορισμούς bid-ask.
4. Προσομοιώστε τιμές με γεωμετρική κίνηση Brown και λύστε το (7.1) για διαφορετικές περιοχές G .
5. Ενσωματώστε αναλογικό κόστος συναλλαγών c και μελετήστε την επίδρασή του.

Ασκήσεις με Python

1. Χρησιμοποιήστε το `Two-Assets-ComputingG.ipynb` για να εκτιμήσετε περιοχή G από ιστορικά δεδομένα δύο μετοχών.
2. Λύστε το (7.1) με το `MultiAsset4.ipynb` και αναλύστε την επιφάνεια κέρδους.
3. Γράψτε προσομοίωση Monte Carlo που συγκρίνει χαρτοφυλάκια για διαφορετικές επιλογές του G .

Κεφάλαιο 8

Δυναμικές Συναλλαγές

Οι δυναμικές συναλλαγές είναι εγγενώς επικίνδυνες, επειδή το μελλοντικό άνοιγμα τιμών αγοράς--πώλησης είναι άγνωστο. Ακόμη και ακριβές μοντέλο τιμών δεν εξαλείφει την αβεβαιότητα των μελλοντικών εξόδων συναλλαγών.

Περιγράφουμε στρατηγικές που βασίζονται στην αρχή «πούλησε ψηλά, αγόρασε χαμηλά» και, για αρνητικές θέσεις, «δανείσου ψηλά, επέστρεψε χαμηλά». Έστω ότι ο επενδυτής διαθέτει ποσό Y , αγοράζει αρχικά a μετοχές και χρησιμοποιεί ποσό b από τον τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο r .

Το χαρτοφυλάκιο αναπροσαρμόζεται στους χρόνους $0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Με S_0 την αρχική τιμή και a_k τον αριθμό μετοχών μετά την αναπροσαρμογή στον χρόνο t_k , θέτουμε $a_0 = a$. Για $a > 0$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

$$a_k = a_{k-1} - a_{k-1} \delta \left(\frac{S_{t_k}}{S_0} \right) + (a - a_{k-1}) \mathbb{I}_{\{S_0 > S_{t_k}\}}, \quad (8.1)$$

ενώ για $a < 0$,

$$a_k = a_{k-1} - a_{k-1} \delta \left(\frac{S_0}{S_{t_k}} \right) + (a - a_{k-1}) \mathbb{I}_{\{S_{t_k} > S_0\}}. \quad (8.2)$$

Μια δυνατή συνάρτηση απόφασης είναι

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{z_1(x-1)^{z_2}}{z_1(x-1)^{z_2} + z_3}, & x > 1, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases} \quad z_1, z_2, z_3 > 0.$$

Υπάρχουν άπειρες επιλογές. Για παράδειγμα,

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x > M, \\ p(x), & 1 < x < M, \\ 0, & x \leq 1, \end{cases}$$

όπου το πολυώνυμο p ικανοποιεί $p(1) = 0$ και $p(M) = 1$.

Ερώτηση 8.1. Υπάρχει μία καθολικά βέλτιστη δ ή η βέλτιστη επιλογή εξαρτάται από τη δυναμική της τιμής, τα κόστη, τον χρονικό ορίζοντα και το κριτήριο κινδύνου;

Για να ληφθούν υπόψη τα κόστη συναλλαγών, εισάγουμε κατώφλι $\varepsilon > 0$, π.χ.

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{z_1(x - (1 + \varepsilon))^{z_2}}{z_1(x - (1 + \varepsilon))^{z_2} + z_3}, & x > 1 + \varepsilon, \\ 0, & x \leq 1 + \varepsilon. \end{cases}$$

Έτσι αποφεύγονται μικρές συναλλαγές που δεν καλύπτουν το κόστος. Αν η τιμή πέσει κάτω από το αρχικό επίπεδο, ο επενδυτής μπορεί να επαναγοράσει μέρος των μετοχών που είχε πωλήσει και να επαναφέρει το σημείο αναφοράς S_0 σε χαμηλότερη τιμή.

Μια απλούστερη στρατηγική είναι, για $a > 0$,

$$a_k = a_{k-1} - a_{k-1} \delta \left(\frac{S_{t_k}}{S_0} \right), \quad (8.3)$$

και, για $a < 0$,

$$a_k = a_{k-1} - a_{k-1} \delta \left(\frac{S_0}{S_{t_k}} \right). \quad (8.4)$$

Μια συμμετρικότερη εκδοχή επιτρέπει τόσο μείωση όσο και επαναφορά της θέσης:

$$a_k = a_{k-1} - a_{k-1} \delta \left(\frac{S_{t_k}}{S_0} \right) + (a - a_{k-1}) \delta \left(\frac{S_0}{S_{t_k}} \right), \quad a > 0,$$

και με αντεστραμμένους λόγους όταν $a < 0$. Οι δύο συναρτήσεις δ μπορούν να είναι διαφορετικές.

Για τη στρατηγική (8.3)–(8.4), μια απλοποιημένη τελική αξία με αναλογικό συντελεστή κόστους ε είναι

$$\Pi = a_N S_T + \sum_{k=1}^N S_{t_k} (1 - \varepsilon) (a_k - a_{k-1}) e^{r(T-t_k)} + b e^{rT}.$$

Στην πράξη, το πρόσημο της μεταβολής θέσης και οι διαφορετικές τιμές bid/ask πρέπει να μοντελοποιούνται ρητά· ο παραπάνω τύπος είναι σχηματικός.

Ερώτηση 8.2. Αν η τιμή ακολουθεί στοχαστική διαφορική εξίσωση, μπορούμε να προσο-
μοιώσουμε διαδρομές με αριθμητικό σχήμα που διατηρεί τη θετικότητα και να επιλέξουμε
τις παραμέτρους της δ μέσω βελτιστοποίησης. Για n συσχετισμένες μετοχές πρέπει επι-
πλέον να επιλεγούν η συχνότητα αναπροσαρμογής και οι διασταυρούμενες εξαρτήσεις.
Η γενική δυναμική κατασκευή με μετοχές και δικαιώματα απαιτεί στοχαστική ανάλυση,
αριθμητική επίλυση SDE και δυναμικό προγραμματισμό.

Εργαστήριο 8.3 (Παράμετροι δυναμικών συναλλαγών). Το σημειωματάριο **Pricing-
and-Hedging-Lookback-Options-Sell-High-and-Binomial.ipynb** μπο-
ρεί να προσαρμοστεί για την εκτίμηση παραμέτρων δυναμικής στρατηγικής. Αντί της
απολαβής παραγώγου χρησιμοποιείται το ποσό Y ή το αντίστοιχο κριτήριο τελικού
πλούτου.

8.1 Ασκήσεις

Σωστό ή Λάθος

1. Στις (8.3)–(8.4), η δ καθορίζει το ποσοστό της θέσης που μεταβάλλεται. **Σ/Λ:** _____
2. Μεγαλύτερο ε μειώνει συνήθως τον αριθμό συναλλαγών αλλά μπορεί να αυξήσει το σφάλμα παρακολούθησης. **Σ/Λ:** _____
3. Για $a < 0$, οι (8.2) και (8.4) είναι πάντοτε ισοδύναμες αν η δ είναι συμμετρική. **Σ/Λ:** _____
4. Το r δεν επηρεάζει άμεσα τον κανόνα a_k , αλλά επηρεάζει την τελική αξία και άρα τη βέλτιστη επιλογή παραμέτρων. **Σ/Λ:** _____
5. Η (8.1) εγγυάται κέρδος όταν $S_{t_k} > S_0$ για όλα τα k . **Σ/Λ:** _____

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Στον τύπο της II, το κόστος συναλλαγών εκφράζεται σχηματικά από:

- (A) $a_N S_T$,
- (B) μόνο το άθροισμα χωρίς ε ,
- (C) τον συντελεστή ε στο $(1 - \varepsilon)$,
- (D) be^{rT} .

Απάντηση: _____

2. Η $\delta(S_{t_k}/S_0)$ καθορίζει:

- (A) το πλήθος δεδομένων backtest,
- (B) το μέγεθος της θέσης που κλείνει ή ανοίγει στον t_k ,
- (C) το επιτόκιο,
- (D) μόνο το πλήθος ημερομηνιών.

Απάντηση: _____

3. Μεγαλύτερο N συνήθως:

- (A) μειώνει το S_T ,
- (B) αυξάνει τα συνολικά κόστη,
- (C) μειώνει το a_0 ,
- (D) αυξάνει το r .

Απάντηση: _____

4. Ο όρος $(a - a_{k-1})\mathbb{I}_{\{S_0 > S_{t_k}\}}$ σημαίνει:

- (A) επαναφορά προς την αρχική θέση όταν η τιμή είναι χαμηλότερη,
- (B) πώληση όλων των μετοχών στην άνοδο,

(C) αγορά νέου δικαιώματος,

(D) μεταβολή του επιτοκίου.

Απάντηση: _____

5. Η κύρια διαφορά των (8.1) και (8.3) είναι ότι:

(A) η πρώτη έχει πρόσθετο όρο επαναφοράς με δείκτρια,

(B) μόνο η δεύτερη χρησιμοποιεί r ,

(C) η πρώτη χρησιμοποιεί πάντοτε τον αντίστροφο λόγο,

(D) η δεύτερη απαιτεί $\delta \equiv 1$.

Απάντηση: _____

Αντιστοίχιση

1. $a_k = a_{k-1} - a_{k-1}\delta(S_{t_k}/S_0)$

2. $a_k = a_{k-1} - a_{k-1}\delta(S_0/S_{t_k})$

3. $\varepsilon > 0$

4. $(a - a_{k-1})\mathbb{I}_{\{S_0 > S_{t_k}\}}$

A. Απλή δυναμική αναπροσαρμογή

B. Προσαρμογή αρνητικής θέσης

Γ. Κατώφλι/κόστος συναλλαγών

Δ. Επαναφορά προς την αρχική θέση

Συμπλήρωση κενών

1. Το ε εισάγεται για να καλύπτει _____.

2. Η δείκτρια $\mathbb{I}_{\{S_0 > S_{t_k}\}}$ ενεργοποιεί _____.

3. Το $a_k - a_{k-1}$ είναι η _____ της θέσης.

4. Τα z_1, z_2, z_3 καθορίζουν το _____ της απόκρισης δ .

5. Το be^{rT} είναι η τελική αξία της _____.

Θεωρητικές και υπολογιστικές ασκήσεις

1. Μελετήστε την επίδραση του z_2 στη συνάρτηση δ .

2. Διατυπώστε πρόβλημα επιλογής $(\varepsilon, z_1, z_2, z_3)$ που μεγιστοποιεί $\mathbb{E}\Pi$ υπό $\text{Var}(\Pi) \leq \sigma_0^2$.

3. Συγκρίνετε αριθμητικά την απλή και την πλήρη στρατηγική σε ίδιες διαδρομές τιμών.

4. Εξηγήστε την αντιστάθμιση ανάμεσα σε σφάλμα παρακολούθησης και κόστος όταν αυξάνει το N .

5. Για GBM $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, γράψτε την αναδρομή του a_k πάνω σε προσομοιωμένες τιμές.

6. Διατυπώστε δυναμικό πρόγραμμα με N αναπροσαρμογές, κόστος c και προεξόφληση $e^{-r\Delta t}$.

Ασκήσεις με Python

1. Υλοποιήστε συνάρτηση που δέχεται $\{S_{t_k}\}$ και δ και επιστρέφει $\{a_k\}$ και Π .
2. Με `scipy.optimize`, εκτιμήστε $(z_1, z_2, z_3, \varepsilon)$ από προσομοιωμένες διαδρομές GBM.
3. Συγκρίνετε την απόδοση για $N \in \{5, 10, 20, 50\}$ και παρουσιάστε τα αποτελέσματα με `matplotlib`.

Κεφάλαιο 9

Τιμολόγηση Δικαιωμάτων

Αν θέλετε να σχεδιάσετε μαθηματική μέθοδο τιμολόγησης δικαιωμάτων, δηλαδή να υπολογίσετε μια δίκαιη τιμή χωρίς αρμπιτράζ, μην απαιτείτε να ταυτιστεί με την τιμή που τελικά θα παρατηρηθεί στην αγορά. Οι επενδυτές ούτε γνωρίζουν ούτε σκέφτονται σύμφωνα με το δικό σας μοντέλο.

Όταν κάποιος πρόκειται να αγοράσει ή να πωλήσει ένα δικαίωμα, προκύπτει το ερώτημα αν υπάρχει δίκαιη τιμή. Αυτό είναι το πρόβλημα τιμολόγησης δικαιωμάτων. Θα εξετάσουμε το διωνυμικό υπόδειγμα και το υπόδειγμα Black--Scholes, θα αναδείξουμε τους πρακτικούς περιορισμούς τους και στη συνέχεια θα αναπτύξουμε μια κατασκευή βασισμένη σε εφαρμόσιμα χαρτοφυλάκια αντιστάθμισης.

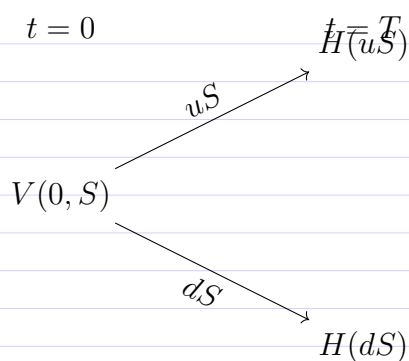
Οι πραγματικές τιμές διαμορφώνονται από προσφορά και ζήτηση. Οι ευκαιρίες αρμπιτράζ, όμως, επηρεάζουν επίσης τη διαδικασία: όταν μια διάταξη τιμών επιτρέπει κέρδος χωρίς κίνδυνο, οι συναλλαγές τείνουν να μετακινούν τις τιμές προς περιοχή χωρίς τέτοιες ευκαιρίες. Πριν από τη διαπραγμάτευση, αγοραστής και πωλητής χρειάζονται μια εύλογη τάξη μεγέθους.

Ορισμός 9.1 (Τάξη μεγέθους της τιμής). Τάξη μεγέθους της τιμής είναι ένα διάστημα στο οποίο δύο ενημερωμένοι επενδυτές θα μπορούσαν εύλογα να ενεργήσουν ως αγοραστής και πωλητής.

Το διάστημα τιμών χωρίς αρμπιτράζ, όταν υπάρχει, αποτελεί φυσικό σημείο εκκίνησης. Αργότερα θα ορίσουμε την τιμή Y^{D*} , η οποία προκύπτει από συμμετρικό κριτήριο εφαρμόσιμης αντιστάθμισης και είναι χωρίς αρμπιτράζ από την κατασκευή της.

9.1 Διωνυμικό Υπόδειγμα

Το διωνυμικό υπόδειγμα κατασκευάζει χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης σε διακριτό χρόνο. Στόχος είναι το χαρτοφυλάκιο που σχηματίζεται στον χρόνο 0 να έχει στον χρόνο T την ίδια αξία με την απολαβή του δικαιώματος.



Σχήμα 9.1: Διωνυμικό υπόδειγμα μίας περιόδου.

Υποθέτουμε ότι η επόμενη τιμή θα είναι είτε uS είτε dS . Το χαρτοφυλάκιο έχει αρχική αξία $V_0 = aS + b$, όπου a είναι ο αριθμός μετοχών και b η θέση στην επένδυση χωρίς κίνδυνο. Για τελικές απολαβές $H(uS)$ και $H(dS)$, η αναπαράγωγή δίνει

$$a = \frac{H(uS) - H(dS)}{(u - d)S}, \quad b = \frac{uH(dS) - dH(uS)}{(u - d)e^{rT}}.$$

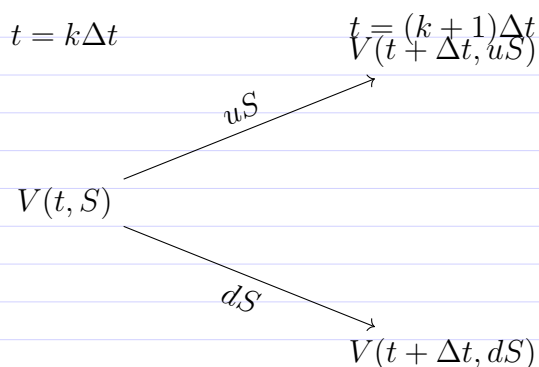
Σε πολλές περιόδους, αν Δt είναι το βήμα και $d < e^{r\Delta t} < u$, θέτουμε

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \in (0, 1).$$

Η προς τα πίσω αναδρομή είναι

$$V(t, S) = e^{-r\Delta t} [qV(t + \Delta t, uS) + (1 - q)V(t + \Delta t, dS)].$$

Σε κάθε κόμβο, το $V(t, S) = aS + b$ καθορίζει τις νέες θέσεις σε μετοχή και τραπεζικό λογαριασμό.



Σχήμα 9.2: Ένα βήμα πολυπεριοδικού διωνυμικού υποδείγματος.

Η κατασκευή είναι υπολογιστικά εφαρμόσιμη, αλλά στηρίζεται στην υπόθεση ότι η επόμενη τιμή παίρνει μόνο δύο συγκεκριμένες τιμές. Στην πραγματική αγορά η πραγματοποιηθείσα τιμή σχεδόν ποτέ δεν συμπίπτει ακριβώς με αυτές, οπότε το χαρτοφυλάκιο δεν αναπαράγει την απολαβή εκτός του δένδρου.

Ερώτηση 9.2. Αν η πραγματική άνοδος είναι $u^* \neq u$ ή η πραγματική πτώση $d^* \neq d$, ποια είναι η τελική αξία του χαρτοφυλακίου και ποιο το κέρδος ή η ζημία του πωλητή;

Λήμμα 9.3. Αν ο πωλητής εφαρμόσει διωνυμικό υπόδειγμα μίας περιόδου σε δικαίωμα αγοράς ή πώλησης με τιμή εξάσκησης K , η μη τετριμμένη περίπτωση απαιτεί $dS_0 < K < uS_0$.

Απόδειξη. Για δικαίωμα αγοράς, αν $dS_0 > K$, και οι δύο τελικές τιμές είναι εντός χρήματος. Τότε $a = 1$ και $be^{rT} = -K$, οπότε

$$\Pi = S_T - K - (S_T - K)^+.$$

Η τιμή είναι 0 όταν $S_T > K$ και μη θετική όταν $S_T \leq K$, άρα ο πωλητής δεν μπορεί να έχει θετικό κέρδος. Παρόμοια, για δικαίωμα πώλησης, αν $uS_0 < K$, τότε $a = -1$, $be^{rT} = K$ και

$$\Pi = K - S_T - (K - S_T)^+ \leq 0.$$

Συνεπώς, η ενδιαφέρουσα επιλογή είναι $dS_0 < K < uS_0$. □

Θέωρημα 9.4. Στο διωνυμικό υπόδειγμα μίας περιόδου, με $dS_0 < K < uS_0$, ο πωλητής δικαιώματος αγοράς ή πώλησης έχει θετικό κέρδος όταν $S_T/S_0 \in (d, u)$ και ζημία όταν $S_T/S_0 \notin [d, u]$. Το μέγιστο θετικό κέρδος είναι φραγμένο, ενώ η δυνατή ζημία μπορεί να είναι μη φραγμένη.

Απόδειξη. Για δικαίωμα αγοράς, $a \in (0, 1)$. Αν $S_T > K$, από την αναπαράγωγή στο uS_0 παίρνουμε

$$\Pi = (S_T - uS_0)(a - 1).$$

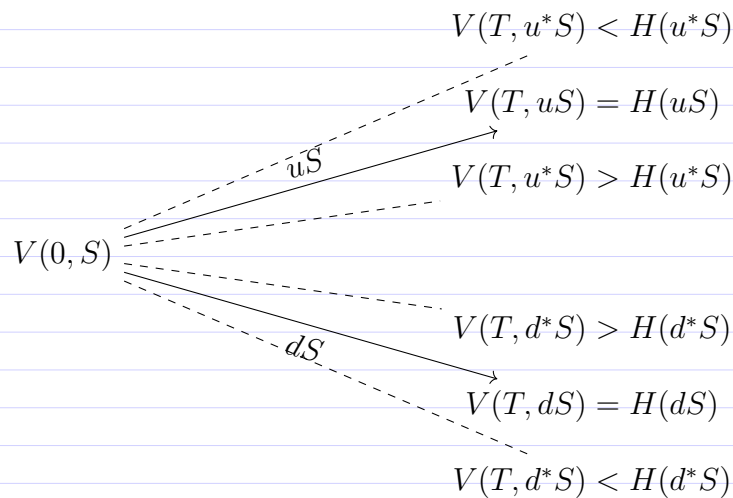
Άρα $\Pi > 0$ για $S_T < uS_0$ και $\Pi < 0$ για $S_T > uS_0$, με $\Pi \rightarrow -\infty$ όταν $S_T \rightarrow \infty$. Αν $S_T < K$, από την αναπαράγωγή στο dS_0 προκύπτει

$$\Pi = a(S_T - dS_0),$$

οπότε το κέρδος είναι θετικό για $S_T > dS_0$ και αρνητικό για $S_T < dS_0$. Η περίπτωση δικαιώματος πώλησης είναι ανάλογη με $a \in (-1, 0)$. Το φραγμένο μέγιστο προκύπτει στο $S_T = K$ και ισούται με

$$\frac{(uS_0 - K)(K - dS_0)}{(u - d)S_0}.$$

□



Σχήμα 9.3: Εντός του διαστήματος (dS, uS) η γραμμική αντιστάθμιση υπερκαλύπτει την κυρτή απολαβή· έξω από αυτό την υποκαλύπτει.

Ερώτηση 9.5. Πώς συμπεριφέρεται το κέρδος όταν το διωνυμικό υπόδειγμα εφαρμόζεται με πολλές περιόδους;

Υπόθεση 9.6. Η πραγματική τιμή ικανοποιεί

$$S_T = S_0 + m \int_0^T S_s ds + \sigma \int_0^T S_s dW_s,$$

δηλαδή, ισοδύναμα για σταθερούς συντελεστές, $S_T = S_0 \exp\{(m - \sigma^2/2)T + \sigma W_T\}$.

Θέωρημα 9.7. Έστω ότι ένα δικαίωμα αγοράς τιμολογείται σε n περιόδους με

$$u = e^{\sigma z_p \sqrt{T/n + (m - \sigma^2/2)T/n}}, \quad d = e^{-\sigma z_p \sqrt{T/n + (m - \sigma^2/2)T/n}},$$

όπου το z_p καθορίζει το επιλεγμένο εύρος ενός βήματος και $d < 1 < u$. Αν ο πωλητής ακολουθεί το αρχικά σχεδιασμένο χαρτοφυλάκιο στους κόμβους του δένδρου, τότε η πιθανότητα μη αρνητικού σφάλματος αντιστάθμισης στο τελευταίο βήμα τείνει στο μηδέν καθώς $n \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Στο τελευταίο βήμα, με εκτιμημένη τιμή S_{n-1} και πραγματικό πολλαπλασιαστή $U = \exp\{\sigma W_T + (m - \sigma^2/2)T\}$, το κέρδος είναι

$$\Pi = aUS_0 + b - H(US_0),$$

όπου η ευθεία $ax + b$ παρεμβάλλει την κυρτή απολαβή H στα σημεία dS_{n-1} και uS_{n-1} . Από την κυρτότητα,

$$\Pi \geq 0 \iff dS_{n-1} \leq US_0 \leq uS_{n-1},$$

ενώ έξω από το διάστημα η προεκτεταμένη τέμνουσα βρίσκεται κάτω από την κυρτή απολαβή.

Για κάθε πιθανό κόμβο του προηγούμενου βήματος, το αντίστοιχο διάστημα για το σW_T έχει μήκος $2\sigma z_p \sqrt{T/n}$. Η πυκνότητα του $W_T \sim N(0, T)$ φράσσεται από $1/\sqrt{2\pi T}$, άρα η πιθανότητα κάθε τέτοιου στενού διαστήματος είναι το πολύ $2\sigma z_p / \sqrt{2\pi n}$. Με την κατάλληλη στάθμιση των κόμβων παίρνουμε άνω φράγμα τάξης $n^{-1/2}$, το οποίο τείνει στο μηδέν. $\square$

Θέωρημα 9.8 (Πώληση χαμηλά--αγορά υψηλά στο CRR). Στο υπόδειγμα Cox--Ross--Rubinstein, έστω κυρτή τελική απολαβή F και

$$\Delta_n(S) = \frac{V_{n+1}(uS) - V_{n+1}(dS)}{(u - d)S}.$$

Αν ο πωλητής αναπροσαρμόζεται σε αυτό το delta, τότε μετά από άνοδο αγοράζει επιπλέον μετοχές στην υψηλότερη τιμή, ενώ μετά από πτώση πωλεί μετοχές στη χαμηλότερη τιμή.

Απόδειξη. Η προς τα πίσω αναδρομή διατηρεί την κυρτότητα. Για κυρτή συνάρτηση οι κλίσεις των τεμνουσών είναι μη φθίνουσες, άρα η $S \mapsto \Delta_n(S)$ είναι μη φθίνουσα. Επιπλέον,

$$\Delta_n(S) = e^{-r\Delta t} [qu\Delta_{n+1}(uS) + (1 - q)d\Delta_{n+1}(dS)].$$

Τα βάρη $e^{-r\Delta t}qu$ και $e^{-r\Delta t}(1 - q)d$ είναι μη αρνητικά και αθροίζουν στο 1. Επομένως,

$$\Delta_{n+1}(uS) \geq \Delta_n(S) \geq \Delta_{n+1}(dS).$$

Μετά από άνοδο ο νέος στόχος είναι μεγαλύτερος, οπότε αγοράζονται μετοχές στην τιμή uS . Μετά από πτώση ο στόχος είναι μικρότερος, οπότε πωλούνται μετοχές στην τιμή dS . $\square$

Συμπέρασμα 9.9. Το διωνυμικό υπόδειγμα δεν επιβάλλει μια μοναδική πραγματική τιμή: τα u, d είναι επιλογές μοντελοποίησης και η υπόθεση δύο μόνο τιμών ανά περίοδο δεν επαληθεύεται στην αγορά. Το υπόδειγμα είναι κυρίως μια συγκεκριμένη στρατηγική αντιστάθμισης, όχι ένας μηχανισμός που υποχρεώνει την αγορά να αποδεχθεί την τιμή του.

Μπορεί, πάντως, να χρησιμοποιηθεί ως στρατηγική: ο πωλητής κερδίζει όταν η πραγματική κίνηση παραμένει εντός του σχεδιασμένου εύρους και ζημιώνεται έξω από αυτό. Επειδή η δυνατή ζημία είναι μη φραγμένη, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούνται πρόσθετα συμβόλαια που επιβάλλουν καθολικό όριο ζημίας.

Έστω ότι πωλείται δικαίωμα αγοράς με τιμή $C(K)$ και αγοράζεται άλλο με υψηλότερη τιμή εξάσκησης $K' > K$ και τιμή $C(K') < C(K)$. Το υπόλοιπο $Y = C(K) - C(K')$ επενδύεται σε Y/S_0 μετοχές. Η συνάρτηση κέρδους είναι

$$\Pi(x) = \frac{Y}{S_0}x + (x - K')^+ - (x - K)^+.$$

Αν $x < K$, τότε $\Pi(x) = Yx/S_0 > 0$. Αν $K < x < K'$, τότε

$$\Pi(x) = x \left(\frac{Y}{S_0} - 1 \right) + K,$$

οπότε η ζημία είναι φραγμένη στο πεπερασμένο διάστημα. Αν $x > K'$,

$$\Pi(x) = \frac{Y}{S_0}x + K - K',$$

που έχει πεπερασμένο κάτω φράγμα και τείνει στο $+\infty$ καθώς $x \rightarrow \infty$. Άρα η πρόσθετη αγορά δικαιώματος περιορίζει τη ζημία και διατηρεί απεριόριστη ανοδική δυνατότητα κέρδους.

Αν δεν υπάρχει άλλο δικαίωμα αγοράς, μέρος της πώλησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αγορά της υποκείμενης μετοχής. Αν ούτε αυτό είναι εφικτό, ο πωλητής πρέπει τουλάχιστον να εκτιμήσει τον κίνδυνο και να γνωρίζει ότι η εκτίμηση δεν αποτελεί εγγύηση.

Εργαστήριο 9.10 (Εφαρμογή του διωνυμικού υποδείγματος). Το `BinomialModel.ipynb` υπολογίζει την τιμή που προκύπτει από το υπόδειγμα και σχεδιάζει το αντίστοιχο δένδρο.

9.1.1 Ασκήσεις

Σωστό ή Λάθος

1. Στο διωνυμικό υπόδειγμα μίας περιόδου, το αναπαραγωγικό χαρτοφυλάκιο $V_0 = aS + b$ είναι μοναδικό όταν $u \neq d$. **Σ/Λ:** _____
2. Ο συντελεστής $q = (e^{rT} - d)/(u - d)$ δεν εξαρτάται από την πραγματική πιθανότητα ανόδου p . **Σ/Λ:** _____
3. Αν $e^{r\Delta t} < d$, το διωνυμικό υπόδειγμα παραβιάζει τη συνθήκη απουσίας αρμπιτράζ. **Σ/Λ:** _____
4. Στο πολυπεριοδικό υπόδειγμα η τιμολόγηση γίνεται με προς τα πίσω επαγωγή. **Σ/Λ:** _____
5. Η πιθανότητα κέρδους του πωλητή στο Θεώρημα 9.7 τείνει στο 1 όταν $n \rightarrow \infty$. **Σ/Λ:** _____

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ο αριθμός μετοχών στην αναπαραγωγή είναι:

- (A) $\frac{e^{rT}H(uS)-H(dS)}{(u-d)S}$,
- (B) $\frac{H(uS)-H(dS)}{(u-d)S}$,
- (C) $\frac{H(uS)-e^{-rT}H(dS)}{(u-d)S}$,
- (D) $\frac{uH(uS)-dH(dS)}{(u-d)e^{rT}S}$.

Απάντηση: _____

2. Αν το $u - d$ είναι πολύ μικρό, οι συντελεστές αντιστάθμισης:

- (A) μπορεί να γίνουν πολύ μεγάλοι και αριθμητικά ασταθείς,
- (B) γίνονται πάντοτε μηδενικοί,
- (C) δεν ορίζονται μόνο όταν $u + d = 0$,
- (D) δεν επηρεάζονται.

Απάντηση: _____

3. Η πολυπεριοδική τιμολόγηση χρησιμοποιεί:

- (A) Monte Carlo,
- (B) προς τα πίσω επαγωγή,
- (C) μόνο πεπερασμένες διαφορές,
- (D) μόνο παλινδρόμηση LSM.

Απάντηση: _____

4. Το q παίζει τον ρόλο:

- (A) πραγματικής πιθανότητας ανόδου,
- (B) ουδέτερης ως προς τον κίνδυνο πιθανότητας ανόδου,
- (C) λόγου u/d ,
- (D) εκτίμησης μεταβλητότητας.

Απάντηση: _____

5. Η προεξόφληση γίνεται με:

- (A) p ,
- (B) $e^{-r\Delta t}[q \cdot + (1 - q) \cdot]$,
- (C) μόνο $aS_0 + b$,
- (D) $\max\{u, d\}$.

Απάντηση: _____

Αντιστοίχιση

- | | |
|--|---|
| 1. $V_0 = e^{-r\Delta t}(qV_u + (1-q)V_d)$ | A. Αποτίμηση ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο |
| 2. $q = (e^{r\Delta t} - d)/(u - d)$ | B. Ουδέτερη πιθανότητα |
| 3. $V_0 = aS_0 + b$ | Γ. Αναπαραγωγικό χαρτοφυλάκιο |
| 4. $H(S_T) = (S_T - K)^+$ | Δ. Απολαβή ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς |

Συμπλήρωση κενών

1. Τα u, d είναι οι συντελεστές _____ και _____ της τιμής.
2. Το χαρτοφυλάκιο κατασκευάζεται ώστε στους κόμβους να ισχύει $V_T =$ _____.
3. Το r είναι το _____.
4. Η πολυπεριοδική τιμή υπολογίζεται με _____ επαγωγή.
5. Η μη φραγμένη ζημία οφείλεται στην πιθανότητα η πραγματική κίνηση να βρεθεί _____ του (d, u) .

Θεωρητικές και υπολογιστικές ασκήσεις

1. Αποδείξτε τη μοναδικότητα του (a, b) για $u \neq d$.
2. Γράψτε την πλήρη προς τα πίσω αναδρομή για n περιόδους.
3. Εξηγήστε γιατί το πραγματικό p δεν εμφανίζεται στην αναπαραγωγική τιμή.
4. Περιγράψτε υπό ποιες επιλογές u_n, d_n το CRR συγκλίνει στην τιμή Black--Scholes.
5. Υλοποιήστε δένδρο $n = 50$ και συγκρίνετε με τον αναλυτικό τύπο Black--Scholes.
6. Αναλύστε το αρμπιτράζ όταν $e^{r\Delta t} \notin (d, u)$.

Ασκήσεις με Python

1. Γράψτε συνάρτηση τιμολόγησης ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με δένδρο n περιόδων.
2. Σχεδιάστε τη σύγκλιση για $n \in \{10, 50, 100, 500\}$.
3. Χρησιμοποιήστε $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$ και επαναλάβετε τη σύγκριση.

9.2 Υπόδειγμα Black--Scholes

Δεν πρέπει να επιχειρούμε να προβλέψουμε την αγοραία τιμή ενός δικαιώματος. Κάθε μοντέλο με ελεύθερη παράμετρο μπορεί να προσαρμοστεί στις παρατηρούμενες τιμές. Η ουσιαστική δυσκολία είναι να κατασκευαστεί εφικτή στρατηγική αντιστάθμισης για την τιμή στην οποία πράγματι γίνεται η συναλλαγή.

Το υπόδειγμα Black--Scholes υποθέτει ότι η υποκείμενη τιμή ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown

$$dS_t = mS_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_t = S_0 \exp \left\{ \left(m - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}.$$

Ο πωλητής επιδιώκει να κατασκευάσει στον χρόνο 0 ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο που στη λήξη έχει αξία ίση με την απολαβή. Αν $a(t, S_t)$ είναι οι μετοχές και B_t η χρηματική θέση, τότε

$$V_t = a(t, S_t)S_t + B_t.$$

Με τραπεζικό λογαριασμό $dB_t = rB_t dt$ και χωρίς εξωτερικές εισροές, η αυτοχρηματοδότηση γράφεται

$$dV_t = a(t, S_t) dS_t + rB_t dt.$$

Αρνητικά a ή B αντιστοιχούν σε δανεισμό ή θέση πώλησης.

Θεώρημα 9.11. Έστω αυτοχρηματοδοτούμενη μαρκοβιανή στρατηγική και $u \in C^{1,2}((0, T) \times (0, \infty))$ με $V_t = u(t, S_t)$. Τότε

$$u_t + \frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx} + rxu_x - ru = 0, \quad (t, x) \in (0, T) \times (0, \infty), \quad (9.1)$$

και η θέση στη μετοχή είναι

$$a(t, x) = u_x(t, x).$$

Η (9.1) ονομάζεται εξίσωση Black--Scholes.

Απόδειξη. Από την αυτοχρηματοδότηση,

$$dV_t = (ma(t, S_t)S_t + rB_t)dt + \sigma a(t, S_t)S_t dW_t.$$

Από τον τύπο Itô,

$$du(t, S_t) = \left(u_t + mS_t u_x + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} u_{xx} \right) dt + \sigma S_t u_x dW_t.$$

Η μοναδικότητα των συντελεστών στην αναπαράσταση Itô δίνει $a = u_x$ και $B_t = u(t, S_t) - S_t u_x(t, S_t)$. Εξισώνοντας τους συντελεστές του dt και αντικαθιστώντας το B_t , ο όρος m απαλείφεται και προκύπτει η (9.1). $\square$

Για ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς η τελική συνθήκη είναι

$$u(T, x) = (x - K)^+.$$

Η θεωρητική αναπαραγωγική στρατηγική είναι

$$a(t, S_t) = u_x(t, S_t), \quad B_t = u(t, S_t) - S_t u_x(t, S_t).$$

9.2.1 Μετασχηματισμός της εξίσωσης Black--Scholes στην εξίσωση θερμότητας

Θέτουμε

$$\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T - t), \quad S = e^x, \quad V(t, S) = v(\tau, x).$$

Τότε

$$V_t = -\frac{\sigma^2}{2}v_\tau, \quad V_S = \frac{1}{S}v_x, \quad V_{SS} = \frac{v_{xx} - v_x}{S^2}.$$

Με $k = 2r/\sigma^2$, η (9.1) γίνεται

$$v_\tau = v_{xx} + (k - 1)v_x - kv.$$

Θέτουμε

$$v(\tau, x) = e^{ax+b\tau}w(\tau, x), \quad a = -\frac{k-1}{2}, \quad b = -\frac{(k+1)^2}{4}.$$

Τότε

$$w_\tau = w_{xx}.$$

Αν $V(T, S) = F(S)$, η αρχική συνθήκη για την εξίσωση θερμότητας είναι

$$w(0, x) = e^{(k-1)x/2}F(e^x).$$

Με $f(x) = e^{(k-1)x/2}F(e^x)$, η λύση είναι

$$w(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-(x-z)^2/(4\tau)} dz. \quad (9.2)$$

9.2.2 Αξία ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς

Για $F(S) = (S - K)^+$, η ολοκλήρωση του πυρήνα θερμότητας δίνει τον κλασικό τύπο

$$C(t, S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), \quad (9.3)$$

όπου

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t},$$

και

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

Άρα ισοδύναμα

$$C(t, S) = S \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{d_1}{\sqrt{2}}\right) \right] - Ke^{-r(T-t)} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{d_2}{\sqrt{2}}\right) \right].$$

Για συνεχή μερισματική απόδοση q , ο τύπος γίνεται

$$C(t, S) = Se^{-q(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

με

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - q + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}.$$

9.2.3 Ιστορική και τεκμαρτή μεταβλητότητα

Έστω παρατηρούμενες τιμές $P_{t_0}, \dots, P_{t_n}$ και λογαριθμικές αποδόσεις

$$r_i = \ln \frac{P_{t_i}}{P_{t_{i-1}}}.$$

Για ίσο χρονικό βήμα Δt σε έτη, η δειγματική εκτίμηση ετησιοποιημένης μεταβλητότητας είναι

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i, \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2, \quad \hat{\sigma}_{\text{ann}} = \sqrt{\frac{s^2}{\Delta t}}.$$

Μια εκτίμηση μέσω πραγματοποιηθείσας διακύμανσης είναι

$$RV = \sum_{i=1}^n r_i^2, \quad \hat{\sigma}_{\text{ann}} = \sqrt{\frac{RV}{n\Delta t}}.$$

Για άνισα βήματα και συνολικό χρονικό μήκος $T = t_n - t_0$ χρησιμοποιείται συχνά

$$\hat{\sigma}_{\text{ann}} = \sqrt{\frac{\sum_i r_i^2}{T}}.$$

Η *τεκμαρτή μεταβλητότητα* (implied volatility) ενός δικαιώματος είναι η τιμή $\sigma_{\text{impl}} > 0$ που λύνει

$$C_{\text{BS}}(\sigma_{\text{impl}}) = C_{\text{mkt}} \quad \text{ή} \quad P_{\text{BS}}(\sigma_{\text{impl}}) = P_{\text{mkt}}.$$

Δεν είναι άμεση παρατήρηση μελλοντικής μεταβλητότητας, αλλά η παράμετρος που απαιτείται ώστε ο τύπος Black--Scholes να αναπαράγει τη σημερινή αγοραία τιμή.

9.3 Μεταβλητότητα στο $[0, T]$, περιορισμοί αντιστάθμισης και τιμολόγηση χωρίς μοντέλο

Παρατήρηση 9.12 (Μελλοντική, ιστορική και τεκμαρτή μεταβλητότητα). Η μεταβλητότητα που πραγματοποιείται κατά τη διάρκεια ζωής του συμβολαίου εξαρτάται από τη μελλοντική διαδρομή στο $[0, T]$. Για $X_t = \log S_t$ και διακριτές αποδόσεις $r_i = \Delta X_{t_i}$,

$$\hat{\sigma}_{[0,T]} = \left(\frac{1}{T} \sum_{i=1}^n r_i^2 \right)^{1/2}.$$

Η ποσότητα αυτή γενικά διαφέρει από ιστορική μεταβλητότητα που υπολογίζεται πριν από τον χρόνο 0. Η τεκμαρτή μεταβλητότητα εξάγεται σήμερα από την αγοραία τιμή και αντανakλά τις σημερινές προσδοκίες και προτιμήσεις της αγοράς· δεν είναι βέβαιο ότι θα ισούται με την πραγματοποιηθείσα τιμή.

Παρατήρηση 9.13 (Η στιγμιαία αναπροσαρμογή δεν είναι εφικτή). Η ακριβής αναπαραγωγή συνεχούς χρόνου απαιτεί συνεχή μεταβολή του $\Delta = u_x(t, S_t)$. Οι πραγματικές αγορές έχουν διακριτές εντολές, καθυστέρηση, ελάχιστα μεγέθη, κόστη και bid--ask spread. Επομένως, η θεωρητική στρατηγική εφαρμόζεται μόνο προσεγγιστικά σε διακριτό χρόνο.

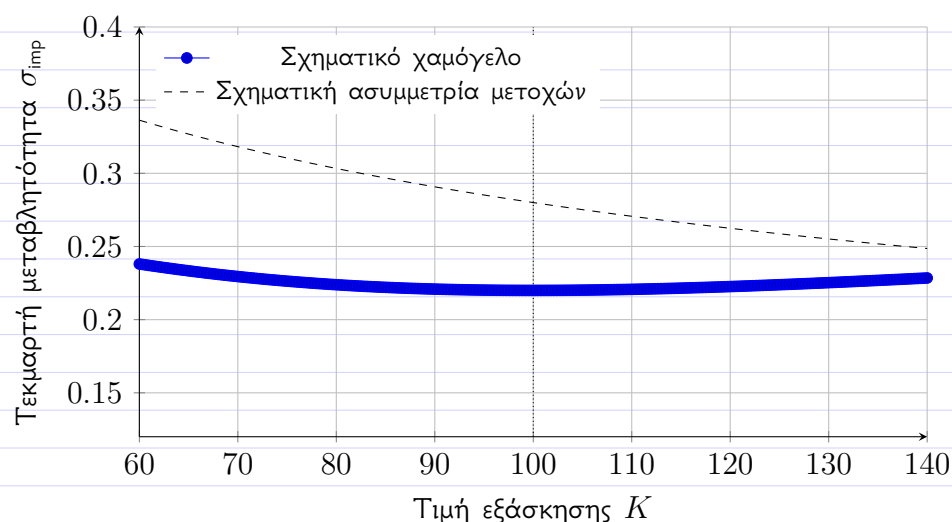
Παρατήρηση 9.14 (Προβλεπτικότητα και πρακτική αντιστάθμιση). Το Black--Scholes και τα δένδρα δεν προβλέπουν μελλοντικές τιμές. Παρέχουν στρατηγικές υπό συγκεκριμένες δυναμικές και παραμέτρους. Η πραγματική επίδοση της διακριτής αντιστάθμισης εξαρτάται από την πραγματοποιηθείσα διαδρομή, τη μεταβλητότητα και τα κόστη.

Ακόμη και αν ο πωλητής μπορούσε να αναπροσαρμόζεται συχνά, θα έπρεπε να επιλέξει εισροή σ . Αν αυτή δεν αντιστοιχεί στη μελλοντική μεταβλητότητα, δημιουργείται σφάλμα αντιστάθμισης. Η αύξηση της συχνότητας δεν εγγυάται βελτίωση μετά τα κόστη και μπορεί να ενισχύσει την έκθεση σε μεταβαλλόμενο bid--ask spread.

Συμπέρασμα 9.15 (Γιατί η δίκαιη τιμή πρέπει να είναι ανεξάρτητη από μοντέλο). Μια «δίκαιη» τιμή που εξαρτάται από συγκεκριμένο μοντέλο και παραμέτρους είναι εύθραυστη, επειδή οι δύο αντισυμβαλλόμενοι δεν είναι υποχρεωμένοι να συμφωνούν σε αυτά. Μια ισχυρότερη έννοια πρέπει να δικαιολογείται από παρατηρήσιμες αγοραίες τιμές και από εφαρμόσιμες στρατηγικές αντιστάθμισης.

9.3.1 Το χαμόγελο μεταβλητότητας

Για κάθε K, T , η επιφάνεια τεκμαρτής μεταβλητότητας $\sigma_{\text{imp}}(K, T)$ ορίζεται μέσω της εξίσωσης προσαρμογής της αγοραίας τιμής. Στην πράξη δεν είναι επίπεδη. Στις αγορές συναλλάγματος εμφανίζεται συχνά συμμετρικό «χαμόγελο», ενώ στις μετοχές συνηθέστερα παρατηρείται αριστερή ασυμμετρία με υψηλότερη τεκμαρτή μεταβλητότητα για εκτός χρήματος δικαιώματα πώλησης. Η μορφή εξαρτάται από τη λήξη και αντανακλά, μεταξύ άλλων, κίνδυνο άλματος, μόχλευση και στοχαστική μεταβλητότητα. Η επιφάνεια πρέπει να ικανοποιεί κοινές συνθήκες απουσίας αρμπιτράζ ως προς K και T .



Σχήμα 9.4: Σχηματικές καμπύλες τεκμαρτής μεταβλητότητας για σταθερή λήξη.

Εργαστήριο 9.16 (Εφαρμογή του υποδείγματος Black--Scholes). • Το **Black-Scholes-Fair-Price.ipynb** υπολογίζει την τιμή του τύπου για διαφορετικές ιστορικές εκτιμήσεις της μεταβλητότητας.

- Το **DiscreteBS.ipynb** εξετάζει την πραγματική διακριτή εφαρμογή της delta αντιστάθμισης και το σφάλμα της.
- Το **Volatility-Smile.ipynb** υπολογίζει τεκμαρτές μεταβλητότητες ως προς την τιμή εξάσκησης.
- Το **BackTesting-Black-Scholes.ipynb** εκτελεί αναδρομικό έλεγχο με ιστορικές τιμές και διακριτή αναπροσαρμογή.

9.3.2 Ασκήσεις

Σωστό ή Λάθος

1. Η θεωρητική delta στρατηγική Black-Scholes είναι αυτοχρηματοδοτούμενη. **Σ/Λ:** _____
2. Ο όρος $\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx}$ προκύπτει από τη διόρθωση Itô. **Σ/Λ:** _____
3. Το r είναι το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο του μοντέλου. **Σ/Λ:** _____
4. Η λύση με τελική συνθήκη $(x - K)^+$ δίνει τη θεωρητική τιμή ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς. **Σ/Λ:** _____
5. Στο βασικό υπόδειγμα η σ θεωρείται σταθερή. **Σ/Λ:** _____

Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Το delta είναι:

- (A) $u - xu_x$,
- (B) u_x ,
- (C) u_{xx} ,
- (D) u_t .

Απάντηση: _____

2. Η απαλοιφή του πραγματικού drift m από την PDE οδηγεί στην ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο δυναμική με drift:

- (A) 0,
- (B) r ,
- (C) $\sigma^2/2$,
- (D) $m - \sigma^2/2$.

Απάντηση: _____

3. Η τελική συνθήκη ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης είναι:

- (A) $(x - K)^+$,
- (B) $(K - x)^+$,
- (C) αρχική συνθήκη $(x - K)^+$,
- (D) αρχική συνθήκη $(K - x)^+$.

Απάντηση: _____

4. Με συνεχή μερισματική απόδοση q , η τιμή δικαιώματος αγοράς είναι:

- (A) $S_0 N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$,
- (B) $K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$,
- (C) $S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2)$,

(D) $S_0 N(d_2) - K e^{-rT} N(d_1)$.

Απάντηση: _____

5. Στην PDE με μερισματική απόδοση, ο όρος drift γίνεται $(r - q)xu_x$, δηλαδή σε σχέση με την απλή PDE προστίθεται:

(A) $-qxu_x$,

(B) $+qu$,

(C) $-qu$,

(D) $+qxu_x$.

Απάντηση: _____

Αντιστοίχιση

- | | |
|--|---|
| 1. $u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0$ | A. PDE Black--Scholes |
| 2. $dS_t = mS_t dt + \sigma S_t dW_t$ | B. Γεωμετρική κίνηση Brown |
| 3. $a = u_x$, $B = u - xu_x$ | Γ. Αναπαραγωγική στρατηγική |
| 4. $u(T, x) = (K - x)^+$ | Δ. Απολαβή ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης |

Συμπλήρωση κενών

1. Ο τύπος _____ εφαρμόζεται στην $u(t, S_t)$.
2. Το delta είναι $\Delta(t, S_t) =$ _____.
3. Η τελική συνθήκη call είναι _____.
4. Η ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο περιγραφή αντικαθιστά το drift με το _____.
5. Η υπόθεση σταθερής σ είναι μια _____ του μοντέλου.

Θεωρητικές και υπολογιστικές ασκήσεις

1. Παραγάγετε την PDE με τον τύπο Itô και την αυτοχρηματοδότηση.
2. Παραγάγετε τον κλειστό τύπο του ευρωπαϊκού call από τον πυρήνα θερμότητας.
3. Εξηγήστε πώς αλλάζει η PDE όταν $\sigma = \sigma(t)$.
4. Δώστε τις βασικές συνθήκες σύγκλισης του CRR προς Black--Scholes.
5. Συγκρίνετε αριθμητικά τιμή Black--Scholes και δένδρο για διάφορα n .

Ασκήσεις με Python

1. Προσομοιώστε GBM και εκτιμήστε την τιμή ευρωπαϊκού call με Monte Carlo.
2. Υλοποιήστε πεπερασμένες διαφορές για την PDE, με έμμεσο ή Crank--Nicolson σχήμα.
3. Προσομοιώστε διακριτή delta αντιστάθμιση και μετρήστε το τελικό σφάλμα.

Κεφάλαιο 10

Διαστήματα τιμών και αντιστάθμιση δικαιωμάτων

10.1 Διάστημα τιμών χωρίς αρμπιτράζ

Είναι ρεαλιστικές οι τιμές που παράγουν τα πιθανοτικά μοντέλα; Την πραγματικότητα της αγοράς την καθορίζουν οι επενδυτές: αυτοί διαμορφώνουν τις τιμές των δικαιωμάτων που πράγματι διαπραγματεύονται. Ένα μοντέλο δεν είναι ρεαλιστικό, εκτός αν λαμβάνει ρητά υπόψη τους επενδυτές μέσω των παρατηρούμενων τιμών των διαθέσιμων δικαιωμάτων.

Πάγιες υποθέσεις. Εργαζόμαστε σε αγορά χωρίς τριβές, με έναν τραπεζικό λογαριασμό χωρίς κίνδυνο, ο οποίος αποδίδει επιτόκιο r στο διάστημα $[0, T]$. Η μεταβλητή b δηλώνει τη χρηματική θέση στον χρόνο μηδέν: $b > 0$ σημαίνει κατάθεση, ενώ $b < 0$ σημαίνει δανεισμό. Στη λήξη η θέση αυτή γίνεται be^{rT} . Οι ανοικτές πωλήσεις και οι στατικές θέσεις στα εισηγμένα δικαιώματα επιτρέπονται σύμφωνα με τους περιορισμούς κάθε προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού.

Θεωρούμε ένα συμβόλαιο με συνάρτηση απολαβής $f(x)$, το οποίο πρόκειται να αγοραστεί ή να πωληθεί. Για παράδειγμα, για δικαίωμα αγοράς έχουμε $f(x) = (x - K)^+$, ενώ για δικαίωμα πώλησης $f(x) = (K - x)^+$. Η πραγματική τιμή του συμβολαίου διαμορφώνεται από την προσφορά και τη ζήτηση. Καθοριστικό ρόλο, όμως, παίζει η ύπαρξη ή μη ευκαιρίας αρμπιτράζ. Για να προσδιορίσουμε ένα διάστημα τιμών χωρίς αρμπιτράζ, πρέπει τουλάχιστον να λάβουμε υπόψη τα διαθέσιμα δικαιώματα αγοράς και πώλησης και να λύσουμε τα ακόλουθα προβλήματα.

ελαχιστοποίηση Y ,

$$\begin{aligned} \text{υπό τους περιορισμούς} \quad & aS_0 + b + \sum_{i=1}^n (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = Y, \\ & \Pi^{\text{writer}}(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \geq 0, \\ & \sum_{i=1}^n (|\gamma_i| + |\delta_i|) \leq N, \\ & \gamma_i, \delta_i \in [-N_i, N_i]. \end{aligned} \tag{10.1}$$

μεγιστοποίηση Y ,

$$\begin{aligned} \text{υπό τους περιορισμούς} \quad & aS_0 + b + \sum_{i=1}^n (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = -Y, \\ & \Pi^{\text{buyer}}(x) \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \geq 0, \\ & \sum_{i=1}^n (|\gamma_i| + |\delta_i|) \leq N, \\ & \gamma_i, \delta_i \in [-N_i, N_i], \end{aligned} \tag{10.2}$$

όπου

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{writer}}(x) &= ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^n \gamma_i (x - K_i)^+ + \sum_{i=1}^n \delta_i (K_i - x)^+ - f(x), \\ \Pi^{\text{buyer}}(x) &= ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^n \gamma_i (x - K_i)^+ + \sum_{i=1}^n \delta_i (K_i - x)^+ + f(x). \end{aligned}$$

Η λύση του πρώτου προβλήματος δίνει το μικρότερο αρχικό ποσό με το οποίο ο πωλητής μπορεί να κατασκευάσει χαρτοφυλάκιο χωρίς ζημία σε καμία δυνατή κατάσταση της αγοράς. Η λύση του δεύτερου δίνει το μεγαλύτερο ποσό που μπορεί να καταβάλει ο αγοραστής, διατηρώντας παράλληλα χαρτοφυλάκιο χωρίς δυνατή ζημία.

Έστω Y^{writer} η λύση του πρώτου προβλήματος και Y^{buyer} η λύση του δεύτερου. Εφόσον $Y^{\text{buyer}} < Y^{\text{writer}}$, το ανοικτό διάστημα $(Y^{\text{buyer}}, Y^{\text{writer}})$ είναι το διάστημα τιμών χωρίς αρμπιτράζ.

Ορισμός 10.1. Το διάστημα $(Y^{\text{buyer}}, Y^{\text{writer}})$ ονομάζεται *διάστημα τιμών χωρίς αρμπιτράζ* για το δικαίωμα με απολαβή $f(x)$.

Συμπέρασμα 10.2. Κάθε τιμή συναλλαγής έξω από το $(Y^{\text{buyer}}, Y^{\text{writer}})$ δημιουργεί ευκαιρία αρμπιτράζ για ένα από τα δύο μέρη και, συνεπώς, δεν είναι αποδεκτή για το μέρος που δεν μπορεί να εκμεταλλευθεί την ευκαιρία. Μέσα στο διάστημα κανένα από τα δύο μέρη δεν διαθέτει τέτοιο εγγυημένο κέρδος χωρίς κίνδυνο.

Τιμές μοντέλων και φράγματα χωρίς αρμπιτράζ

Οι τιμές που παράγουν μη βαθμονομημένα πιθανοτικά μοντέλα, όπως το διωνυμικό μοντέλο ή το Black--Scholes με ιστορικές παραμέτρους, δεν είναι αναγκαίο να ανήκουν στο διάστημα που συνεπάγονται οι τρέχουσες τιμές των διαπραγματεύσιμων δικαιωμάτων. Μπορεί, επομένως, να είναι ασύμβατες με την παρατηρούμενη αγορά. Το διάστημα χωρίς αρμπιτράζ αποτελεί ένα ανθεκτικό εύρος διαπραγμάτευσης και κάθε μοντέλο αποτίμησης οφείλει να το σέβεται.

10.2 Δίκαιες τιμές δικαιωμάτων ανεξάρτητες από μοντέλο

Ο υπολογισμός της δίκαιης τιμής ενός δικαιώματος είναι χροός για δύο. Για αυτόν τον λόγο δεν υπάρχει θέση για πρόβλεψη μέσα στην ίδια τη μεθοδολογία τιμολόγησης.

Ο επενδυτής μπορεί να υπολογίσει το ελάχιστο ποσό που πρέπει να εισπράξει, ή το μέγιστο ποσό που μπορεί να καταβάλει, ώστε να εφαρμόσει την αντισταθμιστική στρατηγική που τον ενδιαφέρει. Για δικαιώματα που δεν εξαρτώνται από τη διαδρομή, το ποσό αυτό δεν είναι κατ' ανάγκη μέσα στο διάστημα χωρίς αρμπιτράζ. Ακόμη και μια τιμή που ανήκει στο διάστημα μπορεί να μην είναι πρακτικά εφικτή για επενδυτή με περιορισμένο κεφάλαιο. Για δικαιώματα εξαρτώμενα από τη διαδρομή η ίδια πρόταση δεν ισχύει με αυτή τη μορφή.

Όταν η τιμή έχει ήδη διαμορφωθεί στην αγορά, ο επενδυτής πρέπει να κρίνει αν είναι συμβατή με την αντιστάθμιση που σκοπεύει να εφαρμόσει. Διαφορετικά δεν συμμετέχει στη συναλλαγή. Όταν η τιμή δεν έχει ακόμη διαμορφωθεί, υπολογίζει το αντίστοιχο ελάχιστο ή μέγιστο αποδεκτό ποσό και το χρησιμοποιεί στη διαπραγμάτευση. Μια τεχνική που δεν προτείνει πρακτικά υλοποιήσιμη στρατηγική αντιστάθμισης δεν προσφέρει κάτι στον επενδυτή, εκτός αν χρησιμοποιείται αποκλειστικά ως προγνωστική τεχνική.

Μελετούμε δικαίωμα λήξης $T > 0$ με απολαβή $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι κατά τμήματα γραμμική με πεπερασμένο πλήθος κλάδων. Θέτουμε $z^+ = \max\{z, 0\}$ και $z^- = \max\{-z, 0\}$. Υπάρχει τραπεζικός λογαριασμός χωρίς τριβές με συνεχή ανατοκισμό επιτοκίου r , ενώ η χρηματική θέση $b \in \mathbb{R}$ είναι ελεύθερη. Με S_0 συμβολίζουμε την τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου και με $C(K_i), P(K_i)$ τις τρέχουσες τιμές δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης στις τιμές εξάσκησης $K_i, i = 1, \dots, n$.

Γραμμικά προβλήματα πωλητή και αγοραστή. Για δεδομένο επίπεδο προϋπολογισμού $Y \in \mathbb{R}$, ο πωλητής λύνει

ελαχιστοποίηση D ,

υπό τον περιορισμό $aS_0 + b + \sum_{i=1}^n (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = Y,$

$$\Pi^{\text{writer}}(x) \geq -D \quad \text{για κάθε } x \geq 0, \quad (10.3)$$

$$\sum_{i=1}^n (|\gamma_i| + |\delta_i|) \leq N,$$

$$\gamma_i, \delta_i \in [-N_i, N_i],$$

με τελικό κέρδος, μετά την αφαίρεση της υποχρέωσης,

$$\Pi^{\text{writer}}(x) = ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^n \gamma_i (x - K_i)^+ + \sum_{i=1}^n \delta_i (K_i - x)^+ - f(x).$$

Αντίστοιχα, ο αγοραστής λύνει

ελαχιστοποίηση D ,

υπό τον περιορισμό $aS_0 + b + \sum_{i=1}^n (\gamma_i C(K_i) + \delta_i P(K_i)) = -Y$,

$$\Pi^{\text{buyer}}(x) \geq -D \quad \text{για κάθε } x \geq 0, \quad (10.4)$$

$$\sum_{i=1}^n (|\gamma_i| + |\delta_i|) \leq N,$$

$$\gamma_i, \delta_i \in [-N_i, N_i],$$

όπου

$$\Pi^{\text{buyer}}(x) = ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^n \gamma_i (x - K_i)^+ + \sum_{i=1}^n \delta_i (K_i - x)^+ + f(x).$$

Ορισμός 10.3. Με $D^{\text{writer}}(Y)$ συμβολίζουμε την ελάχιστη τιμή του προβλήματος (10.3) και με $D^{\text{buyer}}(Y)$ την ελάχιστη τιμή του προβλήματος (10.4). Επιπλέον, Y^{writer} είναι το άνω φράγμα υπεραντιστάθμισης, δηλαδή η ελάχιστη τιμή του (10.1), ενώ Y^{buyer} είναι το κάτω φράγμα, δηλαδή η μέγιστη τιμή του (10.2).

Ενσωμάτωση διαφοράς τιμών αγοράς--πώλησης. Όταν υπάρχουν τιμές bid και ask, ο περιορισμός του προϋπολογισμού αντικαθίσταται από

$$aS_0 + b + \sum_{i=1}^n (\gamma_i^{\text{ask}} C^{\text{ask}}(K_i) - \gamma_i^{\text{bid}} C^{\text{bid}}(K_i) + \delta_i^{\text{ask}} P^{\text{ask}}(K_i) - \delta_i^{\text{bid}} P^{\text{bid}}(K_i)) = Y,$$

με $\gamma_i^{\text{bid}}, \gamma_i^{\text{ask}}, \delta_i^{\text{bid}}, \delta_i^{\text{ask}} \geq 0$. Για τον πωλητή η συνάρτηση κέρδους γίνεται

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{writer}}(x) = & ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^n (\gamma_i^{\text{ask}} - \gamma_i^{\text{bid}})(x - K_i)^+ \\ & + \sum_{i=1}^n (\delta_i^{\text{ask}} - \delta_i^{\text{bid}})(K_i - x)^+ - f(x). \end{aligned}$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση του αγοραστή προκύπτει με τον ίδιο τρόπο.

Λήμμα 10.4 (Μονοτονία και συνέχεια της D^{writer}). Υπό τις πάγιες υποθέσεις, για $Y_2 > Y_1$ ισχύει

$$\begin{aligned} D^{\text{writer}}(Y_2) & \leq D^{\text{writer}}(Y_1) - e^{rT}(Y_2 - Y_1), \\ D^{\text{writer}}(Y_1) & \leq D^{\text{writer}}(Y_2) + e^{rT}(Y_2 - Y_1). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Άρα

$$D^{\text{writer}}(Y_2) - D^{\text{writer}}(Y_1) = -e^{rT}(Y_2 - Y_1).$$

Η D^{writer} είναι, επομένως, συνεχής, αφινική και γνησίως φθίνουσα. Αν $Y^{\text{writer}} > -\infty$, τότε $D^{\text{writer}}(Y^{\text{writer}}) = 0$ και, ειδικότερα, για $Y \leq Y^{\text{writer}}$,

$$D^{\text{writer}}(Y) = e^{rT}(Y^{\text{writer}} - Y).$$

Απόδειξη. Έστω $Y_1 < Y_2$ και έστω ότι $(a, b, \gamma, \delta, D)$ είναι εφικτή λύση του (10.3) για προϋπολογισμό Y_1 . Θέτουμε $\tilde{b} = b + (Y_2 - Y_1)$ και κρατούμε τα υπόλοιπα στοιχεία αμετάβλητα. Ο νέος προϋπολογισμός είναι Y_2 και

$$\tilde{\Pi}^{\text{writer}}(x) = \Pi^{\text{writer}}(x) + e^{rT}(Y_2 - Y_1).$$

Άρα η ίδια στρατηγική είναι εφικτή στο Y_2 με αντικειμενική τιμή $D - e^{rT}(Y_2 - Y_1)$. Λαμβάνοντας infimum παίρνουμε την πρώτη ανισότητα της (10.5). Αντιστρέφοντας τους ρόλους των Y_1, Y_2 παίρνουμε τη δεύτερη και, συνεπώς, την ισότητα.

Από τον ορισμό του Y^{writer} και τη συνέχεια της D^{writer} προκύπτει $D^{\text{writer}}(Y^{\text{writer}}) = 0$. Η τελευταία σχέση του λήμματος έπεται αμέσως από την αφινική μορφή της συνάρτησης. $\square$

Λήμμα 10.5 (Μονοτονία και συνέχεια της D^{buyer}). Υπό τις πάγιες υποθέσεις, για $Y_2 > Y_1$ ισχύει

$$\begin{aligned} D^{\text{buyer}}(Y_2) &\leq D^{\text{buyer}}(Y_1) + e^{rT}(Y_2 - Y_1), \\ D^{\text{buyer}}(Y_1) &\leq D^{\text{buyer}}(Y_2) - e^{rT}(Y_2 - Y_1). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Άρα

$$D^{\text{buyer}}(Y_2) - D^{\text{buyer}}(Y_1) = e^{rT}(Y_2 - Y_1).$$

Η D^{buyer} είναι συνεχής, αφινική και γνησίως αύξουσα. Αν $Y^{\text{buyer}} > -\infty$, τότε $D^{\text{buyer}}(Y^{\text{buyer}}) = 0$ και για $Y \geq Y^{\text{buyer}}$,

$$D^{\text{buyer}}(Y) = e^{rT}(Y - Y^{\text{buyer}}).$$

Απόδειξη. Έστω $Y_1 < Y_2$ και εφικτή λύση του (10.4) στο Y_1 . Θέτοντας $\tilde{b} = b - (Y_2 - Y_1)$, ο προϋπολογισμός γίνεται $-Y_2$ και

$$\tilde{\Pi}^{\text{buyer}}(x) = \Pi^{\text{buyer}}(x) - e^{rT}(Y_2 - Y_1).$$

Παίρνουμε έτσι την πρώτη ανισότητα της (10.6). Η αντίστροφη μετατόπιση της χρηματικής θέσης δίνει τη δεύτερη. Η αφινική ταυτότητα, η συνέχεια και η τιμή στο Y^{buyer} ακολουθούν όπως στο προηγούμενο λήμμα. $\square$

Θεώρημα 10.6 (Δίκαιη τιμή και μέσο του διαστήματος). Αν $Y^{\text{buyer}} < Y^{\text{writer}}$, υπάρχει μοναδική τιμή $Y^{D^*} \in (Y^{\text{buyer}}, Y^{\text{writer}})$ τέτοια ώστε

$$D^{\text{writer}}(Y^{D^*}) = D^{\text{buyer}}(Y^{D^*}) =: D^* > 0.$$

Μάλιστα,

$$Y^{D^*} = \frac{Y^{\text{buyer}} + Y^{\text{writer}}}{2}, \quad D^* = \frac{e^{rT}}{2}(Y^{\text{writer}} - Y^{\text{buyer}}).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $G(Y) = D^{\text{writer}}(Y) - D^{\text{buyer}}(Y)$. Από τα Λήμματα 10.4 και 10.5, η G είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[Y^{\text{buyer}}, Y^{\text{writer}}]$, ενώ

$$G(Y^{\text{buyer}}) = e^{rT}(Y^{\text{writer}} - Y^{\text{buyer}}) > 0$$

και

$$G(Y^{\text{writer}}) = -e^{rT}(Y^{\text{writer}} - Y^{\text{buyer}}) < 0.$$

Το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών δίνει μοναδική ρίζα Y^{D^*} . Οι ρητοί τύποι προκύπτουν εξισώνοντας $e^{rT}(Y^{\text{writer}} - Y)$ και $e^{rT}(Y - Y^{\text{buyer}})$. $\square$

Παρατήρηση 10.7. Ισχύουν

$$Y^{\text{writer}} = e^{-rT} D^{\text{writer}}(0), \quad Y^{\text{buyer}} = -e^{-rT} D^{\text{buyer}}(0),$$

και επομένως

$$Y^{D^*} = e^{-rT} \frac{D^{\text{writer}}(0) - D^{\text{buyer}}(0)}{2}, \quad D^* = \frac{D^{\text{writer}}(0) + D^{\text{buyer}}(0)}{2}.$$

Θεώρημα 10.8 (Κλειστό διάστημα χωρίς αρμπιτράζ). Αν $Y^{\text{buyer}} \leq Y^{\text{writer}}$, κάθε τιμή

$$p \notin [Y^{\text{buyer}}, Y^{\text{writer}}]$$

δημιουργεί αρμπιτράζ, ενώ κάθε τιμή μέσα στο κλειστό διάστημα είναι συμβατή με την κατασκευή των παραπάνω φραγμάτων. Ειδικότερα, η τιμή Y^{D^*} του Θεωρήματος 10.6 είναι χωρίς αρμπιτράζ.

Απόδειξη. Αν $p > Y^{\text{writer}}$, πωλούμε το δικαίωμα στην τιμή p , αγοράζουμε την υπεραντιστάθμιση του πωλητή με κόστος Y^{writer} και επενδύουμε τη διαφορά. Η τελική αξία είναι $(p - Y^{\text{writer}})e^{rT} > 0$. Αν $p < Y^{\text{buyer}}$, αγοράζουμε το δικαίωμα, το συνδυάζουμε με τη στρατηγική του αγοραστή που παράγει αρχική εισροή Y^{buyer} και επενδύουμε τη διαφορά. Η τελική αξία είναι $(Y^{\text{buyer}} - p)e^{rT} > 0$. $\square$

Υπάρχουν πολλές έννοιες δίκαιης τιμής. Για μια πολυμεταβλητή συναρτησιακή F , μπορούμε να ορίσουμε

$$\mathcal{F}^{\text{writer}}(a, b, \gamma, \delta) = F\left(D, \int_0^\infty (\Pi^{\text{writer}}(x))^- dx, \int_0^M (\Pi^{\text{writer}}(x))^+ dx, \int_0^M \Pi^{\text{writer}}(x) dx, \dots\right),$$

για $M > 0$, και ανάλογα την $\mathcal{F}^{\text{buyer}}$. Για δεδομένο Y , ο πωλητής και ο αγοραστής ελαχιστοποιούν τις αντίστοιχες συναρτησιακές υπό τους περιορισμούς (10.3) και (10.4). Μπορούμε να ονομάσουμε $Y^{\mathcal{F}}$ δίκαιη τιμή ανεξάρτητη από μοντέλο όταν

$$\min \mathcal{F}^{\text{writer}} = \min \mathcal{F}^{\text{buyer}}.$$

Πόρισμα 10.9 (Μοναδικότητα υπό περιορισμένη έννοια). Αν $Y^{\text{buyer}} \leq Y^{\text{writer}}$, τότε, ανάμεσα στις τιμές που ορίζονται με εξίσωση ελάχιστων κριτηρίων, η τιμή ίσης μέγιστης ζημίας Y^{D^*} είναι πάντοτε χωρίς αρμπιτράζ.

10.3 Αντιστάθμιση ενός δικαιώματος

Γιατί να αγοράσω ή να πωλήσω
ένα δικαίωμα στην τιμή που
προτείνει μια μέθοδος τιμολόγησης;
Η απάντηση πρέπει να δίνεται από
μια εφικτή στρατηγική
αντιστάθμισης.

Οι συναλλασσόμενοι μπορούν να υπολογίσουν το Y^{D^*} ως μια τάξη μεγέθους χρήσιμη στο στάδιο της διαπραγμάτευσης. Η τελική τιμή της αγοράς καθορίζεται από την προσφορά

και τη ζήτηση και δεν είναι υποχρεωτικό να είναι δίκαιη ή ακόμη και χωρίς αρμπιτράζ. Η ανάλυση επεκτείνεται σε δικαιώματα πάνω σε περισσότερους τίτλους. Για συμβόλαια αμερικανικού τύπου μπορούν να περιληφθούν στα διαπραγματεύσιμα μέσα αμερικανικά δικαιώματα αγοράς και πώλησης.

Προσοχή στις «δίκαιες» τιμές των μοντέλων. Οι τιμές που παράγουν στοχαστικά μοντέλα, όπως Black--Scholes ή διωνυμικά δένδρα, δεν είναι κατ' ανάγκη δίκαιες στην πράξη, διότι οι προτεινόμενες αναπαραγωγικές στρατηγικές δεν εφαρμόζονται ακριβώς. Δεν είναι επίσης κατ' ανάγκη χωρίς αρμπιτράζ με την ανεξάρτητη από μοντέλο έννοια, αφού μπορεί να βρίσκονται έξω από το διάστημα $[Y^{\text{buyer}}, Y^{\text{writer}}]$ που προκύπτει από τις τρέχουσες τιμές της αγοράς.

Εργαστήριο 10.10 (Κώδικες Python για τιμολόγηση και αντιστάθμιση). Με το σημειωματάριο **FairValueOption1.ipynb** υπολογίζονται η τιμή Y^{D^*} και το διάστημα χωρίς αρμπιτράζ, όταν αυτό υπάρχει.

Η πραγματική τιμή Y θα διαμορφωθεί από την προσφορά και τη ζήτηση και μπορεί να μην είναι ούτε δίκαιη ούτε χωρίς αρμπιτράζ. Ο πωλητής και ο αγοραστής μπορούν να χρησιμοποιήσουν αυτό το ποσό με διαφορετικούς τρόπους:

- Ο πωλητής μπορεί να κατασκευάσει χαρτοφυλάκιο με την ελάχιστη δυνατή μέγιστη ζημία D λύνοντας το πρόβλημα (10.3). Η υλοποίηση γίνεται με το **WriterOption.ipynb**. Αντίστοιχα, ο αγοραστής μπορεί να χρησιμοποιήσει το **BuyerOptions.ipynb**.
- Ο πωλητής μπορεί να διατυπώσει πρόβλεψη για τη μελλοντική τιμή του υποκείμενου τίτλου και να λύσει πρόβλημα όπως το (4.13). Η συνάρτηση κέρδους είναι

$$\Pi(x) = ax + be^{rT} + \sum_{i=1}^d (\gamma_i(x - K_i)^+ + \delta_i(K_i - x)^+) - f(x).$$

Η διαδικασία υλοποιείται με το **WriterHedgingOption1.ipynb**. Για τον αγοραστή υπάρχει το **BuyerHedgingOption1.ipynb**.

- Οι επενδυτές μπορούν να εφαρμόσουν δυναμική στρατηγική «πώλησε ψηλά--αγόρασε χαμηλά», όπως στην Ενότητα 11.1. Επειδή είναι δυναμική αντιστάθμιση, επηρεάζεται από την άγνωστη μελλοντική μεταβλητότητα, τη διαφορά τιμών αγοράς--πώλησης και τα κόστη συναλλαγών, όπως και οι αντισταθμίσεις του διωνυμικού μοντέλου και του Black--Scholes.

Το **Minimum-Loss-Writer-Buyer-Option-and-Hedging.ipynb** συγκεντρώνει τα παραπάνω σε ένα ενιαίο πρόγραμμα.

Ένας πωλητής με αξιόπιστη πληροφόρηση ή ισχυρό προγνωστικό μοντέλο μπορεί, χρησιμοποιώντας το **WriterHedgingOption1.ipynb**, να πωλήσει κερδοφόρα το δικαίωμα σε τιμή $Y < Y^{\text{buyer}}$, εφόσον η πρόβλεψή του επαληθευθεί. Συμμετρικά, αγοραστής με προγνωστικό πλεονέκτημα μπορεί να καταβάλει $Y > Y^{\text{writer}}$ και να πραγματοποιήσει κέρδος στο σενάριο που προβλέπει. Αυτό, όμως, είναι κέρδος υπό συνθήκη πρόβλεψης και όχι αρμπιτράζ.

Ορίζουμε ως $Y_{\text{prediction}}^{\text{writer}}$ το χαμηλότερο τίμημα στο οποίο ο πωλητής παραμένει κερδοφόρος, υπό την προϋπόθεση ότι η πρόβλεψή του πραγματοποιείται. Αν η τιμή της αγοράς είναι χαμηλότερη, κάποιοι πωλητές είτε έχουν διαφορετικές πεποιθήσεις είτε έχουν κάνει διαφορετικούς ή λανθασμένους υπολογισμούς. Για αυτό δεν είναι συνετό να συμμετέχει κανείς σε μια συναλλαγή χωρίς δικές του προβλέψεις και υπολογισμούς. Η τιμή ενός

δικαιώματος είναι δύσκολο να προβλεφθεί, επειδή δεν γνωρίζουμε τις πεποιθήσεις, τους περιορισμούς και τις μεθόδους όλων των επενδυτών.

Παρατήρηση 10.11 (Συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, προθεσμιακά και ανταλλαγές). Για συμβόλαιο πάνω στα στοιχεία $S_1, \dots, S_d$, ο επενδυτής πρέπει να προσθέσει τη δυνατότητα αγοράς ή πώλησης όλων των διαθέσιμων συμβολαίων πάνω στους ίδιους υποκείμενους τίτλους, όπως futures, forwards και swaps. Η βασική ιδέα και η μορφή των προβλημάτων βελτιστοποίησης παραμένουν ίδιες. Η μαθηματική πολυπλοκότητα αλλάζει ουσιαστικά όταν προστίθενται συμβόλαια με μη γραμμική απολαβή.

Παρατήρηση 10.12 (Σύνοψη κωδικών ανεξάρτητων από μοντέλο). • Το **PCUP.ipynb** κατασκευάζει βέλτιστο χαρτοφυλάκιο ενός τίτλου και δικαιωμάτων υπό δεδομένη πρόβλεψη. Το **Multi-Asset4.ipynb** αφορά δύο τίτλους και δικαιώματα.

- Το **FindingArbitrage.ipynb** ανιχνεύει ευκαιρίες αρμπιτράζ.
- Το **Minimum-Loss-Writer-Buyer-Option-and-Hedging.ipynb** αντιμετωπίζει το πρόβλημα τιμολόγησης. Υπολογίζει το διάστημα χωρίς αρμπιτράζ, την τιμή Y^{D*} , το D^* και στατικές, άρα πρακτικά εφικτές, στρατηγικές για πωλητή και αγοραστή, όταν η απολαβή είναι κατά τμήματα γραμμική με πεπερασμένους κλάδους.

Παρατήρηση 10.13 (Ένα θεωρητικό παράδειγμα). Έστω ότι ο πωλητής τιμολογεί ένα δικαίωμα με στοχαστικό μοντέλο, ενώ ο αγοραστής γνωρίζει τα ανεξάρτητα από μοντέλο φράγματα $[Y^{\text{buyer}}, Y^{\text{writer}}]$. Αν το μοντέλο δεν είναι βαθμονομημένο στις επικρατούσες τιμές δικαιωμάτων, μπορεί να δώσει Y έξω από το διάστημα.

Περίπτωση 1: Αν $Y < Y^{\text{buyer}}$, ο αγοραστής μπορεί να αγοράσει στην τιμή Y και να κλειδώσει κέρδος χωρίς κίνδυνο, ενώ το στοχαστικό μοντέλο του πωλητή ενδέχεται να μην εντοπίζει το αρμπιτράζ από την πλευρά του αγοραστή.

Περίπτωση 2: Αν $Y > Y^{\text{writer}}$, υπάρχει φθηνότερη υπεραντιστάθμιση κόστους Y^{writer} . Ένας ορθολογικός αγοραστής δεν έχει λόγο να καταβάλει το Y . Ακόμη και αν πραγματοποιηθεί η πώληση, η αντιστάθμιση του μη βαθμονομημένου μοντέλου δεν είναι αυτή που αποδεικνύει το εγγυημένο κέρδος.

Άρα τιμές που αγνοούν τις διαπραγματεύσιμες τιμές μπορεί να μην είναι ούτε χωρίς αρμπιτράζ ούτε συνεπείς με την αγορά.

10.4 Ασκήσεις για τα διαστήματα τιμών και την αντιστάθμιση

Σωστό ή λάθος

1. Αν $Y < Y^{\text{buyer}}$, ο αγοραστής μπορεί να εξασφαλίσει κέρδος χωρίς κίνδυνο.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

2. Το διάστημα $(Y^{\text{buyer}}, Y^{\text{writer}})$ είναι υποχρεωτικά κενό όταν η f δεν είναι κατά τμήματα γραμμική με πεπερασμένους κλάδους.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

3. Για να υπολογίσουμε το Y^{writer} , αρκούν μόνο οι τρέχουσες τιμές $C(K_i), P(K_i)$.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

4. Αν $Y^{\text{buyer}} < Y < Y^{\text{writer}}$, τα παραπάνω στατικά χαρτοφυλάκια δεν δημιουργούν αρμπιτράζ.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

5. Η τιμή Black--Scholes ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς είναι πάντοτε χωρίς αρμπιτράζ ως προς τις τρέχουσες τιμές όλων των διαθέσιμων δικαιωμάτων.

Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

Πολλαπλής επιλογής

1. Στο (10.1), ο στόχος $\min Y$ αντιστοιχεί:

- (A) σε μηδενική μέγιστη ζημία του πωλητή,
- (B) σε μηδενική πιθανότητα ζημίας του αγοραστή,
- (C) σε μηδενικό κόστος συναλλαγών,
- (D) σε μηδενική διαφορά μεταξύ των δύο τιμών.

Απάντηση: _____

2. Στο (10.2), η σχέση $aS_0 + b + \dots = -Y$ σημαίνει ότι:

- (A) ο αγοραστής καταβάλλει Y σήμερα,
- (B) ο πωλητής καταβάλλει Y σήμερα,
- (C) ο αγοραστής εισπράττει Y σήμερα,
- (D) κανένα από τα παραπάνω.

Απάντηση: _____

3. Οι μεταβλητές $\gamma^{\text{ask}}, \gamma^{\text{bid}}$ χρησιμοποιούνται ώστε:

- (A) οι τιμές bid και ask να ταυτίζονται,
- (B) το χαρτοφυλάκιο να αποτιμάται στη μέση τιμή,
- (C) οι αγοραζόμενες και οι πωλούμενες ποσότητες να καταγράφονται χωριστά,
- (D) να μηδενίζεται η διαφορά bid--ask.

Απάντηση: _____

4. Με την προσθήκη περισσότερων διαπραγματεύσιμων παραγώγων, το διάστημα χωρίς αρμπιτράζ συνήθως:

- (A) διευρύνεται,
- (B) στενεύει ή παραμένει ίδιο,
- (C) γίνεται απεριορίστο,
- (D) δεν επηρεάζεται ποτέ.

Απάντηση: _____

5. Αν $Y^{\text{buyer}} = Y^{\text{writer}}$, τότε:

- (A) υπάρχει μοναδική τιμή χωρίς αρμπιτράζ,

- (B) δεν υπάρχει δίκαιη τιμή,
 (C) το διάστημα είναι απεριόριστο,
 (D) η αγορά βρίσκεται υποχρεωτικά σε κρίση.

Απάντηση: _____

Αντιστοίχιση

- | | |
|---|-----------------------------------|
| 1. $\Pi^{\text{writer}}(x) \geq 0$ για κάθε x | A. Αντιστάθμιση χωρίς ζημία |
| 2. $\min Y$ στο (10.1) | B. Άνω φράγμα χωρίς αρμπιτράζ |
| 3. $\max Y$ στο (10.2) | Γ. Κάτω φράγμα χωρίς αρμπιτράζ |
| 4. $(Y^{\text{buyer}}, Y^{\text{writer}})$ | Δ. Διάστημα τιμών χωρίς αρμπιτράζ |

Απαντήσεις: 1. _____ 2. _____ 3. _____ 4. _____

Συμπλήρωση κενών

1. Η $\Pi^{\text{writer}}(x)$ περιλαμβάνει τους όρους _____.
2. Το Y^{writer} είναι το μικρότερο κόστος _____ του πωλητή.
3. Η συνθήκη $\Pi^{\text{buyer}}(x) \geq 0$ εξασφαλίζει ότι ο αγοραστής _____.
4. Το εύρος των τιμών εξάσκησης επηρεάζει το πλάτος του _____.
5. Η τιμή Y^{D^*} ορίζεται από την εξίσωση $D^{\text{writer}} =$ _____.

Θεωρητικές και υπολογιστικές ασκήσεις

1. Αποδείξτε ότι $Y^{\text{buyer}} \leq Y^{\text{writer}}$ υπό την υπόθεση ότι η αγορά των διαθέσιμων τίτλων δεν περιέχει αρμπιτράζ.
2. Διατυπώστε το (10.1) με bid-ask spread για δύο τιμές εξάσκησης $K_1 < K_2$.
3. Για $f(x) = (x - K)^+$, υπολογίστε αριθμητικά το διάστημα όταν διατίθενται μόνο $C(K)$ και $P(K)$.
4. Γενικεύστε τα προβλήματα σε δύο υποκείμενους τίτλους S^1, S^2 .
5. Ενσωματώστε συνεχή μερισματική απόδοση q .
6. Αν η f είναι κυρτή αλλά όχι κατά τμήματα γραμμική, συζητήστε την επιλογή κόμβων για κατά τμήματα γραμμική προσέγγιση.

Ασκήσεις με Python

1. Υλοποιήστε το (10.1) με `scipy.optimize.linprog` για $n = 3$.
2. Για μεταβαλλόμενο r , σχεδιάστε τα Y^{buyer} και Y^{writer} .
3. Προσθέστε bid-ask spread και μελετήστε πώς μεταβάλλεται το διάστημα όταν το spread αυξάνεται.

Κεφάλαιο 11

Δικαιώματα εξαρτώμενα από τη διαδρομή

11.1 Τιμολόγηση και δυναμική αντιστάθμιση

Η αντιστάθμιση δικαιωμάτων εξαρτώμενων από τη διαδρομή (path-dependent options) είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον πρόβλημα. Μια δυνατότητα είναι η εφαρμογή κατάλληλης στρατηγικής «πώλησε ψηλά--αγόρασε χαμηλά», της οποίας οι παράμετροι εξαρτώνται από τη μορφή της απολαβής.

Το αναπαραγωγικό χαρτοφυλάκιο της θεωρίας Black--Scholes μπορεί στην πράξη να εφαρμοστεί μόνο σε διακριτό χρόνο. Η διακριτή delta αντιστάθμιση μπορεί μάλιστα να επιβάλλει αγορές μετά από άνοδο και πωλήσεις μετά από πτώση, δηλαδή συμπεριφορά τύπου «αγόρασε ψηλά--πώλησε χαμηλά». Για τη δυναμική αντιστάθμιση μπορούμε να επιλέξουμε διαφορετικό κανόνα συναλλαγών, προσαρμοσμένο στην απολαβή.

- *Πρόβλημα τιμολόγησης.* Για δεδομένο $\alpha \in (0, 1)$, ο πωλητής υπολογίζει το ελάχιστο ποσό Y για το οποίο υπάρχουν παράμετροι της στρατηγικής ώστε

$$\mathbb{P}(V_n \geq f(S_1, \dots, S_n)) \geq \alpha,$$

όπου $V_n = a_n S_n + b_n$ και $Y = a_0 S_0 + b_0$. Το ποσό δίνει μια τάξη μεγέθους χρήσιμη στη διαπραγμάτευση.

- *Πρόβλημα αντιστάθμισης.* Για δεδομένη πραγματική τιμή Y , ο πωλητής υπολογίζει το μέγιστο $\alpha \in (0, 1)$ για το οποίο υπάρχουν παράμετροι με

$$\mathbb{P}(V_n \geq f(S_1, \dots, S_n)) \geq \alpha, \quad Y = a_0 S_0 + b_0.$$

Έτσι αποκτά μια συγκεκριμένη, πρακτικά εφαρμόσιμη δυναμική στρατηγική.

Στο πρόβλημα ελαχιστοποίησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η αναμενόμενη υστέρηση (expected shortfall). Μπορούν επίσης να προστεθούν δικαιώματα αγοράς και πώλησης, ώστε να βελτιστοποιούνται οι ποσότητές τους. Τέλος, ο κανόνας δεν είναι ανάγκη να είναι αποκλειστικά «πώλησε ψηλά--αγόρασε χαμηλά»: μπορούν να επιλεγούν γενικότερες προσαρμοσμένες ακολουθίες θέσεων a_k για την ελαχιστοποίηση του επιθυμητού μέτρου κινδύνου.

Εδώ ο στόχος της τιμολόγησης δεν είναι η εύρεση μοναδικής δίκαιης τιμής ή τιμής χωρίς αρμπιτράζ, αλλά η εκτίμηση της τάξης μεγέθους ενός τιμήματος που υποστηρίζεται από συγκεκριμένη στρατηγική. Η ίδια λογική εφαρμόζεται και από την πλευρά του αγοραστή.

Παρατήρηση 11.1. Η διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί και σε απλούστερα συμβόλαια, όπως δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Επειδή όμως δεν ενσωματώνει υποχρεωτικά τις τιμές των ήδη διαπραγματεύσιμων δικαιωμάτων, δεν παράγει γενικά τιμές χωρίς αρμπιτράζ. Εφαρμόζεται επίσης σε μη γραμμικές και γενικότερες απολαβές.

Εργαστήριο 11.2 (Δικαίωμα αναδρομικής παρατήρησης). Με το σημειωματάριο `Pricing-and-Hedging-Lookback-Options-Sell-High-and-Binomial.ipynb` μπορούμε να τιμολογήσουμε και να αντισταθμίσουμε ένα δικαίωμα αναδρομικής παρατήρησης (lookback option) με στρατηγική «πώλησε ψηλά--αγόρασε χαμηλά».

11.2 Ασκήσεις

Σωστό ή λάθος

1. Στη στρατηγική, οι θέσεις a_n, b_n εξαρτώνται αποκλειστικά από την τρέχουσα τιμή S_n .
Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____
2. Η εκτίμηση Y του πωλητή δεν εξαρτάται από το επίπεδο $\alpha \in (0, 1)$.
Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____
3. Η μέθοδος δίνει το ίδιο χαρτοφυλάκιο για κάθε μορφή της $f(S_1, \dots, S_n)$.
Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____
4. Το πρόβλημα τιμολόγησης γράφεται ως $\min Y$ υπό τη συνθήκη $\mathbb{P}(V_n \geq f) \geq \alpha$.
Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____
5. Για δεδομένο Y , το πρόβλημα αντιστάθμισης επιδιώκει τη μεγιστοποίηση του α .
Σωστό / Λάθος: _____ **Αιτιολόγηση:** _____

Πολλαπλής επιλογής

1. Στο πρόβλημα τιμολόγησης, το α εκφράζει:
(A) την πιθανότητα η αντιστάθμιση να καλύψει την απολαβή,
(B) το ποσοστό κεφαλαίου σε μετοχές,
(C) το βάρος μιας μόνο προσομοίωσης,
(D) το κόστος συναλλαγών.
Απάντηση: _____
2. Η μορφή $V_n = a_n S_n + b_n$ περιγράφει:
(A) στατικό χαρτοφυλάκιο,
(B) δυναμικά αναπροσαρμόζόμενο χαρτοφυλάκιο,
(C) μοντέλο κατανάλωσης,
(D) χαρτοφυλάκιο αναφοράς χωρίς συναλλαγές.
Απάντηση: _____
3. Για απολαβή lookback, η $f(S_1, \dots, S_n)$ εξαρτάται:

- (A) μόνο από το S_n ,
- (B) από ολόκληρη τη διαδρομή,
- (C) μόνο από τα a_n, b_n ,
- (D) υποχρεωτικά από το $\sum S_k$.

Απάντηση: _____

4. Οι παράμετροι της στρατηγικής επιλέγονται κυρίως με βάση:

- (A) την απολαβή και το κριτήριο κινδύνου,
- (B) μια σταθερή θέση a_n ,
- (C) την υπόθεση μηδενικής μεταβλητότητας,
- (D) την αγνόηση της ιστορίας των τιμών.

Απάντηση: _____

Αντιστοίχιση

- | | |
|---|-----------------------------|
| 1. $\min Y$ με $\mathbb{P}(V_n \geq f) \geq \alpha$ | A. Τιμολόγηση |
| 2. $\max \alpha$ με δεδομένο $Y = a_0 S_0 + b_0$ | B. Αντιστάθμιση |
| 3. $V_n = a_n S_n + b_n$ | Γ. Δυναμικό χαρτοφυλάκιο |
| 4. Οι θέσεις εξαρτώνται από την f | Δ. Εξάρτηση από τη διαδρομή |

Απαντήσεις: 1. _____ 2. _____ 3. _____ 4. _____

Συμπλήρωση κενών

1. Το $V_n = a_n S_n + b_n$ είναι ένα _____.
2. Η απολαβή ενός lookback option είναι _____.
3. Στην τιμολόγηση, το Y ελαχιστοποιείται ώστε _____.
4. Στην αντιστάθμιση, το α μεγιστοποιείται για δεδομένο _____.
5. Η δυναμική στρατηγική καθορίζεται από _____.

Θεωρητικές και υπολογιστικές ασκήσεις

1. Διατυπώστε πλήρως το πρόβλημα $\min Y$ σε διακριτό σύνολο προσομοιωμένων διαδρομών.
2. Για $f(S_1, \dots, S_n) = (\max_{1 \leq k \leq n} S_k - K)^+$, προτείνετε κριτήρια επιλογής των θέσεων a_k .
3. Υλοποιήστε με Monte Carlo την εκτίμηση του Y υπό τη συνθήκη $\mathbb{P}(V_n \geq f) \geq \alpha$.
4. Μελετήστε ισχυρά ανοδικές και ισχυρά καθοδικές διαδρομές.
5. Αναλύστε πώς αλλάζει το Y όταν αυξάνεται το α .
6. Διατυπώστε τα προβλήματα για ασιατικό δικαίωμα $f = (n^{-1} \sum_{k=1}^n S_k - K)^+$.

Ασκήσεις με Python

1. Υλοποιήστε την πεπερασμένη εκδοχή του προβλήματος για ασιατικό δικαίωμα με `scipy.optimize.linprog`.
2. Βαθμονομήστε τις παραμέτρους με Monte Carlo ώστε $\mathbb{P}(V_n \geq f) \approx \alpha$.
3. Δοκιμάστε το σημειωματάριο lookback για διαφορετικές τιμές των α και n .

Κεφάλαιο 12

Αριθμητική προσέγγιση στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων

12.1 Ισχυρή τάξη ένα του ημιδιακριτού σχήματος

12.1.1 Μοντέλο και αριθμητικό σχήμα

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας που υποστηρίζει μονοδιάστατη κίνηση Brown $(W_t)_{t \geq 0}$. Θεωρούμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = f(X_t) dt + g(X_t) dW_t, \quad X_0 = 1, \quad (12.1)$$

με

$$f(x) = x - x^3 = x(1 - x^2), \quad g(x) = x.$$

Για τελικό χρόνο $T > 0$, θεωρούμε το ομοιόμορφο πλέγμα $t_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$, όπου $h = T/N$, και θέτουμε

$$\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n} \sim \mathcal{N}(0, h).$$

Ορισμός 12.1 (Ημιδιακριτό σχήμα ή εκθετικό Euler). Η ακολουθία $(X_n)_{n=0}^N$ ορίζεται από $X_0 = 1$ και

$$X_{n+1} = X_n \exp \left[\left(1 - X_n^2 - \frac{1}{2} \right) h + \Delta W_n \right], \quad n = 0, \dots, N-1. \quad (12.2)$$

Το σχήμα διατηρεί τη θετικότητα: αν $X_n > 0$, τότε $X_{n+1} > 0$ για κάθε πραγματοποίηση της προσαύξησης Brown.

12.1.2 Κύριο αποτέλεσμα

Θεώρημα 12.2 (Ισχυρή τάξη σύγκλισης ένα). Έστω X_t η μοναδική ισχυρή λύση της (12.1) και (X_n) η προσέγγιση (12.2). Υποθέτουμε ότι η ακριβής και η αριθμητική λύση έχουν ομοιόμορφα φραγμένες ροπές επαρκώς υψηλής τάξης: για κάποιο $p \geq 8$,

$$\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E}|X_t|^p < \infty, \quad \sup_{0 \leq n \leq N} \mathbb{E}|X_n|^p < \infty. \quad (12.3)$$

Τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$, ανεξάρτητη από το h , τέτοια ώστε

$$(\mathbb{E}|X_T - X_N|^2)^{1/2} \leq Ch. \quad (12.4)$$

Άρα το ημιδιακριτό σχήμα έχει ισχυρή, ή ισοδύναμα μέση τετραγωνική, τάξη σύγκλισης ένα.

Παρατήρηση 12.3. Οι φραγμένες ροπές της ακριβούς λύσης οφείλονται στον διασκορπιστικό κυβικό όρο $-x^3$, ο οποίος κυριαρχεί για μεγάλες τιμές του $|x|$. Για το αριθμητικό σχήμα μπορούν να αποδειχθούν αντίστοιχα φράγματα με συναρτήσεις Lyapunov. Εδώ τα χρησιμοποιούμε ως ρητή υπόθεση, ώστε η απόδειξη να επικεντρωθεί στην τοπική συνέπεια και στην τάξη σύγκλισης.

12.1.3 Προπαρασκευαστικές εκτιμήσεις

Για τις προσαυξήσεις Brown ισχύουν

$$\mathbb{E}\Delta W_n = 0, \quad \mathbb{E}(\Delta W_n)^2 = h, \quad \mathbb{E}(\Delta W_n)^4 = 3h^2, \quad \mathbb{E}(\Delta W_n)^6 = 15h^3, \quad (12.5)$$

καθώς και

$$\mathbb{E} [((\Delta W_n)^2 - h)^2] = 2h^2. \quad (12.6)$$

Λήμμα 12.4 (Πολυωνυμικό φράγμα Lipschitz). Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^2 + |y|^2)|x - y|. \quad (12.7)$$

Επιπλέον, η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη

$$(x - y)(f(x) - f(y)) \leq |x - y|^2. \quad (12.8)$$

Απόδειξη. Από $f'(x) = 1 - 3x^2$ και το θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει η (12.7). Επίσης,

$$f(x) - f(y) = (x - y)(1 - x^2 - xy - y^2),$$

και επειδή $x^2 + xy + y^2 \geq 0$, παίρνουμε τη (12.8). $\square$

12.1.4 Βήμα 1: ανάπτυγμα Itô--Taylor της ακριβούς λύσης

Για μονοδιάστατο θόρυβο, το ανάπτυγμα Itô--Taylor ισχυρής τάξης ένα, δηλαδή το ανάπτυγμα Milstein, είναι

$$\begin{aligned} X_{t_{n+1}} &= X_{t_n} + f(X_{t_n})h + g(X_{t_n})\Delta W_n \\ &\quad + \frac{1}{2}g(X_{t_n})g'(X_{t_n})((\Delta W_n)^2 - h) + R_{n+1}^{\text{ex}}. \end{aligned} \quad (12.9)$$

Λήμμα 12.5 (Φράγματα του υπολοίπου της ακριβούς ανάπτυξης). Υπάρχουν $C > 0$ και ακέραιος $q \geq 0$ ώστε

$$|\mathbb{E}(R_{n+1}^{\text{ex}} | \mathcal{F}_{t_n})| \leq C(1 + |X_{t_n}|^q)h^2, \quad (12.10)$$

$$\mathbb{E}(|R_{n+1}^{\text{ex}}|^2 | \mathcal{F}_{t_n}) \leq C(1 + |X_{t_n}|^q)h^3. \quad (12.11)$$

Άρα $\|R_{n+1}^{\text{ex}}\|_{L^2} = O(h^{3/2})$.

Απόδειξη. Οι συντελεστές f, g είναι λείοι και οι παράγωγοί τους έχουν πολυωνυμική αύξηση. Τα συνήθη φράγματα των πολλαπλών στοχαστικών ολοκληρωμάτων στο ανάπτυγμα Itô--Taylor δίνουν το υπό συνθήκη μέσο τάξης h^2 και τη μέση τετραγωνική τάξη h^3 . $\square$

Επειδή $g(x) = x$ και $g'(x) = 1$, η (12.9) γράφεται

$$\begin{aligned} X_{t_{n+1}} &= X_{t_n} + (X_{t_n} - X_{t_n}^3)h + X_{t_n}\Delta W_n \\ &\quad + \frac{1}{2}X_{t_n}((\Delta W_n)^2 - h) + R_{n+1}^{\text{ex}}. \end{aligned} \quad (12.12)$$

12.1.5 Βήμα 2: το ημιδιακριτό σχήμα ως Milstein με υπόλοιπο

Θέτουμε

$$a(x) = 1 - x^2, \quad Z_n = \left(a(X_n) - \frac{1}{2}\right)h + \Delta W_n.$$

Τότε $X_{n+1} = X_n e^{Z_n}$. Από το ανάπτυγμα $e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}e^{\theta z}z^3$, $\theta \in (0, 1)$, προκύπτει

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + f(X_n)h + g(X_n)\Delta W_n \\ &\quad + \frac{1}{2}g(X_n)g'(X_n)((\Delta W_n)^2 - h) + R_{n+1}^{\text{SD}}, \end{aligned} \quad (12.13)$$

όπου

$$R_{n+1}^{\text{SD}} = X_n \left[\left(a(X_n) - \frac{1}{2}\right)h\Delta W_n + \frac{1}{2}\left(a(X_n) - \frac{1}{2}\right)^2 h^2 + R_n^{\text{exp}} \right], \quad (12.14)$$

με $R_n^{\text{exp}} = \frac{1}{6}e^{\theta Z_n}Z_n^3$.

Λήμμα 12.6 (Φράγματα του υπολοίπου του σχήματος). Υπάρχουν $C > 0$ και ακέραιος $q \geq 0$ ώστε

$$|\mathbb{E}(R_{n+1}^{\text{SD}} | \mathcal{F}_{t_n})| \leq C(1 + |X_n|^q)h^2, \quad (12.15)$$

$$\mathbb{E}(|R_{n+1}^{\text{SD}}|^2 | \mathcal{F}_{t_n}) \leq C(1 + |X_n|^q)h^3. \quad (12.16)$$

Απόδειξη. Θέτουμε $A_n = a(X_n) - \frac{1}{2}$. Υπό τον όρο $\mathcal{F}_{t_n}$, το A_n είναι γνωστό και

$$\mathbb{E}|X_n A_n h \Delta W_n|^2 = |X_n|^2 |A_n|^2 h^3.$$

Ο δεύτερος όρος της (12.14) έχει τετράγωνο τάξης h^4 . Επιπλέον, $Z_n = \Delta W_n + A_n h$ και

$$\mathbb{E}(|Z_n|^6 | \mathcal{F}_{t_n}) \leq C(1 + |A_n|^6)h^3.$$

Οι εκθετικές ροπές της μετατοπισμένης κανονικής μεταβλητής είναι πεπερασμένες, οπότε το R_n^{exp} έχει υπό συνθήκη δεύτερη ροπή τάξης h^3 . Για το υπό συνθήκη μέσο, οι όροι περιττής τάξης της ΔW_n μηδενίζονται και οι πρώτοι μη μηδενικοί όροι είναι τάξης h^2 . Συνδυάζοντας τα φράγματα και χρησιμοποιώντας την πολυωνυμική μορφή του A_n παίρνουμε το αποτέλεσμα. $\square$

12.1.6 Βήμα 3: αναδρομή του σφάλματος

Ορίζουμε το σφάλμα στους κόμβους

$$e_n = X_{t_n} - X_n.$$

Αφαιρώντας τη (12.13) από τη (12.9), παίρνουμε

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n + (f(X_{t_n}) - f(X_n))h + (g(X_{t_n}) - g(X_n))\Delta W_n \\ &\quad + \frac{1}{2}(g(X_{t_n})g'(X_{t_n}) - g(X_n)g'(X_n))((\Delta W_n)^2 - h) + \rho_{n+1}, \end{aligned} \quad (12.17)$$

όπου $\rho_{n+1} = R_{n+1}^{\text{ex}} - R_{n+1}^{\text{SD}}$. Από τα προηγούμενα λήμματα,

$$|\mathbb{E}(\rho_{n+1} | \mathcal{F}_{t_n})| \leq C(1 + |X_{t_n}|^q + |X_n|^q)h^2, \quad (12.18)$$

$$\mathbb{E}(|\rho_{n+1}|^2 | \mathcal{F}_{t_n}) \leq C(1 + |X_{t_n}|^q + |X_n|^q)h^3. \quad (12.19)$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα $g(X_{t_n}) - g(X_n) = e_n$ και $g(X_{t_n})g'(X_{t_n}) - g(X_n)g'(X_n) = e_n$. Άρα

$$e_{n+1} = e_n + (f(X_{t_n}) - f(X_n))h + e_n \Delta W_n + \frac{1}{2}e_n((\Delta W_n)^2 - h) + \rho_{n+1}. \quad (12.20)$$

Λήμμα 12.7 (Μέση τετραγωνική ευστάθεια ενός βήματος). Υπό την (12.3), υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$\mathbb{E}|e_{n+1}|^2 \leq (1 + Ch)\mathbb{E}|e_n|^2 + Ch^3. \quad (12.21)$$

Απόδειξη. Αναπτύσσουμε το τετράγωνο στη (12.20) και παίρνουμε υπό συνθήκη μέση τιμή ως προς $\mathcal{F}_{t_n}$. Οι σχέσεις $\mathbb{E}\Delta W_n = 0$, $\mathbb{E}((\Delta W_n)^2 - h) = 0$ και $\mathbb{E}[\Delta W_n((\Delta W_n)^2 - h)] = 0$ μηδενίζουν τους αντίστοιχους μεικτούς όρους. Ο όρος drift ελέγχεται από τη μονόπλευρη ανισότητα (12.8), ενώ το τετράγωνό του ελέγχεται από τη (12.7), τις φραγμένες ροπές και ανισότητα Young. Οι μεικτοί όροι με το ρ_{n+1} ελέγχονται με ταυτόχρονη χρήση των (12.18) και (12.19). Έτσι προκύπτει

$$\mathbb{E}(|e_{n+1}|^2 | \mathcal{F}_{t_n}) \leq (1 + Ch)|e_n|^2 + C(1 + |X_{t_n}|^q + |X_n|^q)h^3.$$

Λαμβάνοντας συνολική μέση τιμή και χρησιμοποιώντας τη (12.3), παίρνουμε τη (12.21). $\square$

12.1.7 Ολοκλήρωση της απόδειξης

Απόδειξη του Θεωρήματος 12.2. Από το Λήμμα 12.7,

$$\mathbb{E}|e_{n+1}|^2 \leq (1 + Ch)\mathbb{E}|e_n|^2 + Ch^3, \quad e_0 = 0.$$

Η διακριτή ανισότητα Grönwall δίνει $\mathbb{E}|e_N|^2 \leq Ch^2$. Επομένως

$$(\mathbb{E}|X_T - X_N|^2)^{1/2} = \|e_N\|_{L^2} \leq Ch.$$

$\square$

Πόρισμα 12.8 (Ομοιόμορφο σφάλμα στους κόμβους). Υπό τις υποθέσεις του Θεωρήματος 12.2,

$$\max_{0 \leq n \leq N} (\mathbb{E}|X_{t_n} - X_n|^2)^{1/2} \leq Ch.$$

12.2 Καλή τοποθέτηση και ακριβής λύση της SDE

Θεωρούμε ξανά

$$dX_t = (X_t - X_t^3) dt + X_t dW_t, \quad X_0 = 1. \quad (12.22)$$

Οι συντελεστές $f(x) = x - x^3$ και $g(x) = x$ είναι $C^\infty(\mathbb{R})$ και, άρα, τοπικά Lipschitz.

12.2.1 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθολικής ισχυρής λύσης

Θεώρημα 12.9 (Καθολική ισχυρή ύπαρξη και μοναδικότητα κατά διαδρομές). Η (12.22) έχει μοναδική καθολική ισχυρή λύση στο $[0, T]$ για κάθε $T > 0$. Ειδικότερα, δεν υπάρχει έκρηξη σε πεπερασμένο χρόνο.

Απόδειξη. **Βήμα 1: τοπική λύση.** Η τοπική ιδιότητα Lipschitz δίνει ισχυρή λύση και μοναδικότητα κατά διαδρομές μέχρι τον ενδεχόμενο χρόνο έκρηξης

$$\tau_\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \tau_R, \quad \tau_R = \inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq R\}.$$

Βήμα 2: εκτίμηση Lyapunov. Εφαρμόζοντας τον τύπο Itô στη $V(x) = x^2$ και στη σταματημένη διαδικασία, παίρνουμε

$$d(X_t^2) = (3X_t^2 - 2X_t^4) dt + 2X_t^2 dW_t. \quad (12.23)$$

Άρα

$$X_{t \wedge \tau_R}^2 = 1 + \int_0^{t \wedge \tau_R} (3X_s^2 - 2X_s^4) ds + \int_0^{t \wedge \tau_R} 2X_s^2 dW_s. \quad (12.24)$$

Με λήψη μέσης τιμής και Grönwall,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} X_{t \wedge \tau_R}^2 \leq e^{3T}. \quad (12.25)$$

Βήμα 3: αποκλεισμός έκρηξης. Στο γεγονός $\{\tau_R \leq T\}$ ισχύει $X_{\tau_R}^2 = R^2$. Επομένως

$$R^2 \mathbb{P}(\tau_R \leq T) \leq \mathbb{E} X_{\tau_R \wedge T}^2 \leq e^{3T},$$

και

$$\mathbb{P}(\tau_R \leq T) \leq \frac{e^{3T}}{R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Άρα $\tau_\infty = \infty$ σχεδόν βέβαια. Η τοπική λύση είναι καθολική και η μοναδικότητα κατά διαδρομές διατηρείται. $\square$

12.2.2 Ακριβής λύση σε κλειστή μορφή

Θέτουμε $Y_t = X_t^{-2}$ και δικαιολογούμε τον μετασχηματισμό με κατάλληλους χρόνους διακοπής.

Πρόταση 12.10 (Γραμμική SDE για το αντίστροφο τετράγωνο). *Ορίζουμε*

$$\sigma_m = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq 1/m\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Στο $[0, \sigma_m)$ η διαδικασία $Y_t = X_t^{-2}$ ικανοποιεί

$$dY_t = (Y_t + 2) dt - 2Y_t dW_t, \quad Y_0 = 1. \quad (12.26)$$

Κατά συνέπεια, η σχέση ισχύει μέχρι τον χρόνο προσέγγισης του μηδενός $\tau_0 = \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\}$.

Απόδειξη. Στο $[0, \sigma_m)$ έχουμε $X_t \geq 1/m > 0$. Για $\varphi(x) = x^{-2}$, $\varphi'(x) = -2x^{-3}$ και $\varphi''(x) = 6x^{-4}$. Ο τύπος Itô δίνει

$$\begin{aligned} dY_t &= -2X_t^{-3}((X_t - X_t^3)dt + X_t dW_t) + 3X_t^{-4}X_t^2 dt \\ &= (X_t^{-2} + 2)dt - 2X_t^{-2}dW_t, \end{aligned}$$

που είναι η (12.26). $\square$

Θεώρημα 12.11 (Κλειστός τύπος και θετικότητα). Η λύση δίνεται κατά διαδρομές από

$$Y_t = e^{-t-2W_t} \left(1 + 2 \int_0^t e^{s+2W_s} ds \right), \quad (12.27)$$

και

$$X_t = Y_t^{-1/2} = \left[e^{-t-2W_t} \left(1 + 2 \int_0^t e^{s+2W_s} ds \right) \right]^{-1/2}. \quad (12.28)$$

Ειδικότερα, $Y_t > 0$ και $X_t > 0$ για κάθε $t \geq 0$ σχεδόν βέβαια, οπότε $\tau_0 = \infty$ σχεδόν βέβαια.

Απόδειξη. Η ομογενής γραμμική εξίσωση που αντιστοιχεί στη (12.26) έχει στοχαστικό ολοκληρωτικό παράγοντα

$$\Phi_t = \exp \left[\left(1 - \frac{1}{2}(-2)^2 \right) t - 2W_t \right] = e^{-t-2W_t}.$$

Ο τύπος μεταβολής των σταθερών δίνει

$$Y_t = \Phi_t \left(Y_0 + 2 \int_0^t \Phi_s^{-1} ds \right),$$

δηλαδή τη (12.27). Ο εκθετικός παράγοντας είναι θετικός και ο όρος μέσα στην παρένθεση είναι αυστηρά θετικός. Άρα η (12.28) ορίζεται για κάθε χρόνο. Αν εφαρμόσουμε τον τύπο Itô στη συνάρτηση $y \mapsto y^{-1/2}$, επαληθεύουμε ότι η διαδικασία ικανοποιεί την αρχική SDE. $\square$

Πόρισμα 12.12 (Μοναδικότητα από την ακριβή αναπαράσταση). Κάθε ισχυρή λύση της (12.22) με $X_0 = 1$ συμπίπτει σχεδόν βέβαια με τη (12.28).

Απόδειξη. Για οποιαδήποτε άλλη λύση $\tilde{X}$, η διαδικασία $\tilde{Y} = \tilde{X}^{-2}$ ικανοποιεί τη γραμμική SDE (12.26) μέχρι ενδεχόμενο μηδενισμό. Η γραμμική SDE έχει παγκοσμίως Lipschitz συντελεστές και μοναδική ισχυρή λύση, τη (12.27). Η θετικότητά της αποκλείει τον μηδενισμό και δίνει $\tilde{X} = X$. $\square$

Βιβλιογραφία

- [1] N. Halidias and I. Stamatiou, *Stochastic Analysis: Financial Mathematics with MATLAB®*, De Gruyter, 2025.
- [2] N. Halidias, *A novel portfolio optimization method and its application to the hedging problem*, Monte Carlo Methods and Applications, 30(3), 2024, 249--267.
- [3] N. Halidias, *On the Option Pricing by the Binomial Model*, Asian Journal of Mathematics and Applications, 2022:9, 2022.
- [4] N. Halidias, *Financial Mathematics with Python Codes: A Modern Point of View*, ResearchGate, 2025.