Θεωρητικές Ερωτήσεις Χρηματοοικονομικής Μηχανικής

Ερωτημα 1 *Να δώσετε τον ορισμό της μετοχής και να εξηγήσετε πώς η προσφορά και η ζήτηση στη χρηματιστηριακή αγορά διαμορφώνουν την τιμή της σε μια δεδομένη ημέρα συναλλαγών. Εξηγήστε τι είναι τα μερίσματα και πως αυτά επιδρούν στην αξία μιας μετοχής.*

Ερωτημα 2 *(α) Τι είναι* Market Maker *(διαμορφωτής αγοράς)*;

(β) Τι ονομάζουμε bid–ask spread *και ποια είναι η οικονομική του σημασία*;

(γ) Να αναφέρετε και να σχολιάσετε τουλάχιστον τρεις παράγοντες που επηρεάζουν το μέγεθος του bid–ask spread (π.χ. ρευστότητα, χρονική στιγμή συνεδρίασης, μεταβλητότητα της αγοράς).

Ερωτημα 3 *Να ορίσετε τις παρακάτω έννοιες προαιρέσεων (options):*

1. *Ευρωπαϊκή προαίρεση (European option),*
2. *Αμερικανική προαίρεση (American option),*
3. *προαίρεση αγοράς (call),*
4. *προαίρεση πώλησης (put).*

Για κάθε τύπο προαίρεσης να περιγράψετε με λόγια το δικαίωμα που προσφέρει στον αγοραστή και την υποχρέωση που συνεπάγεται για τον πωλητή.

Ερωτημα 4 *Τι είναι τα transactions costs και ποια είναι η διαφορά του writer ενός συμβολαίου από τον απλό πωλητή ενός συμβολαίου*;

Ερωτημα 5 *Θεωρήστε μια ευρωπαϊκή προαίρεση αγοράς (European call option) με τιμή άσκησης* K *και ασφάλιστρο (τιμή προαίρεσης)* Y. *Στη λήξη* T *το κέρδος του κατόχου δίνεται από*

$$\Pi(x) = (x - K)^+ - Y, \qquad (z)^+ = \max\{z, 0\},$$

όπου x *είναι η τιμή της μετοχής στη λήξη.*

1. *Να εξηγήσετε τη σημασία των μεγεθών* x, K, Y.
2. *Να περιγράψετε λεκτικά τις περιοχές όπου ο επενδυτής έχει κέρδος, ζημία ή είναι αδιάφορος.*

3. *Ποιο είναι το «μέγιστο» δυνατό κέρδος και ποια η «μέγιστη» δυνατή ζημία για τον αγοραστή της προαίρεσης call;*

Ερωτημα **6** *Να ορίσετε με σαφήνεια την έννοια* αρμπιτράζ *(arbitrage) σε χρηματοοικονομικές αγορές. Πώς συνδέεται η απουσία αρμπιτράζ (no–arbitrage) με τη διαμόρφωση των τιμών των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων;*

Ερωτημα **7** *Έστω ότι μια μετοχή διαπραγματεύεται σήμερα σε τιμή S, το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο είναι r (συνεχώς ανατοκιζόμενο, continuously compounded), η λήξη είναι $T > 0$ και δεν υπάρχουν μερίσματα.*

1. *Να γράψετε τις ανισότητες χωρίς αρμπιτράζ για την τιμή μιας ευρωπαϊκής προαίρεσης αγοράς C:*
$$C \geq \max\bigl(0,\, S - Ke^{-rT}\bigr), \qquad C \leq S.$$
2. *Να εξηγήσετε, σε επίπεδο ιδέας, πώς μπορεί να προκύψει καθεμία από τις παραπάνω ανισότητες χρησιμοποιώντας κατάλληλες κατασκευές χαρτοφυλακίων (portfolios) και το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (risk–free rate).*

Ερωτημα **8** *(Ταυτότητα put–call parity) Στο ίδιο πλαίσιο με το προηγούμενο ερώτημα, για μια ευρωπαϊκή προαίρεση αγοράς με τιμή C και μια ευρωπαϊκή προαίρεση πώλησης με τιμή P και ίδια K, T, ισχύει η σχέση*
$$C - P = S - Ke^{-rT}.$$

1. *Να διατυπώσετε με λόγια τι εκφράζει η παραπάνω σχέση put–call parity.*
2. *Να περιγράψετε δύο χαρτοφυλάκια με ίδια τελική αποπληρωμή στη λήξη, έτσι ώστε να προκύπτει η σχέση put–call parity από την αρχή της απουσίας αρμπιτράζ.*

Ερωτημα **9** *Να ορίσετε:*

1. *το* προθεσμιακό συμβόλαιο *(forward contract),*
2. *το* συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης *(futures contract).*

Να περιγράψετε τις βασικές διαφορές τους όσον αφορά:

1. *την τυποποίηση του συμβολαίου (standardization),*
2. *τον τρόπο καθημερινού διακανονισμού (marking to market),*
3. *τον κίνδυνο αντισυμβαλλομένου (counterparty risk).*

Ερωτημα **10** *Να εξηγήσετε τη διαφορά μεταξύ οργανωμένης αγοράς (χρηματιστηριακής αγοράς) και εξωχρηματιστηριακής αγοράς (Over The Counter, OTC) για τα παράγωγα προϊόντα. Ποια είναι τα βασικά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της καθεμιάς για έναν επενδυτή;*

Ερωτημα 11 *(α) Να εξηγήσετε πώς προκύπτουν οι συναρτήσεις κέρδους (payoff functions) για μια ευρωπαϊκή προαίρεση αγοράς (call) και μια ευρωπαϊκή προαίρεση πώλησης (put) πάνω σε μια μετοχή με τιμή στη λήξη S_T. Να περιγράψετε ρητά τα σενάρια $S_T > K$, $S_T = K$, $S_T < K$ και να γράψετε τους αντίστοιχους τύπους payoff.*

(β) Τι σημαίνει ότι ένας επενδυτής παίρνει θέση long *ή θέση* short *σε ένα χρηματοοικονομικό μέσο· Να δώσετε παραδείγματα για long call, short call, long put, short put και να σχολιάσετε, σε κάθε περίπτωση, τη γενική μορφή του payoff.*

(γ) Στα υποδείγματα χωρίς αρμπιτράζ μιλάμε για ένα arbitrage–free interval επιτρεπτών τιμών για ένα χρηματοοικονομικό προϊόν. Να εξηγήσετε γιατί, όσο λαμβάνουμε υπόψη μας περισσότερα διαθέσιμα options (με διαφορετικές τιμές άσκησης ή λήξεις), τόσο τείνει να «στενεύει» αυτό το διάστημα επιτρεπτών τιμών. Να σχολιάσετε ποια είναι η διαισθητική σχέση ανάμεσα στην πληθώρα διαπραγματευόμενων options και στους περιορισμούς που επιβάλλει η αρχή no–arbitrage στις τιμές τους.

Ερωτημα 12 *(Κεφάλαιο 2: Συνάρτηση κέρδους χαρτοφυλακίου) Έστω χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από μία μετοχή και πεπερασμένο αριθμό προαιρέσεων αγοράς (call options) και πώλησης (put options).*

(α) Να δώσετε τον γενικό ορισμό της συνάρτησης κέρδους (profit function) ενός χαρτοφυλακίου στη λήξη T. Τι εκφράζει η τιμή $\Pi(S_T)$ της συνάρτησης, όπου S_T είναι η τιμή της μετοχής στη λήξη;

(β) Να εξηγήσετε πώς μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση κέρδους του χαρτοφυλακίου ως άθροισμα των payoff των επιμέρους συστατικών (μετοχή, call, put), με κατάλληλους συντελεστές που εκφράζουν θέσεις long και short.

(γ) Ποια είναι η ποιοτική διαφορά στη μορφή της συνάρτησης payoff όταν αυξάνουμε τον αριθμό των call σε σχέση με το όταν αυξάνουμε τον αριθμό των put στο ίδιο χαρτοφυλάκιο· Να σχολιάσετε με βάση τη διαισθητική ερμηνεία των αντίστοιχων στρατηγικών.

Ερωτημα 13 *(Επιλογή σεναρίου και σχεδιασμός χαρτοφυλακίου) Στο Κεφάλαιο 2 τονίζεται ότι κάθε στρατηγική είναι συμφέρουσα σε διαφορετικό σενάριο για την τιμή της μετοχής.*

(α) Να εξηγήσετε τη φράση ότι «κάθε στρατηγική είναι συμφέρουσα σε διαφορετικό σενάριο» και πώς αυτό συνδέεται με την ανάγκη να μελετήσουμε μαθηματικά τις συναρτήσεις κέρδους των χαρτοφυλακίων.

(β) Γιατί οι περιορισμοί ρευστότητας και η διαθεσιμότητα συγκεκριμένου αριθμού μετοχών ή συμβολαίων στις διάφορες τιμές της αγοράς επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να υλοποιήσουμε ένα θεωρητικά επιθυμητό payoff; Να αναφερθείτε συγκεκριμένα σε περιορισμούς στο πόσα συμβόλαια long ή short μπορούμε να πάρουμε σε μια δεδομένη τιμή.

(γ) Πώς μπορεί ο επενδυτής να χρησιμοποιήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης payoff ενός χαρτοφυλακίου για να ελέγξει αν η στρατηγική που διάλεξε ανταποκρίνεται στο σενάριο που επιθυμεί (π.χ. προστασία από μεγάλες πτώσεις, κέρδος μόνο σε μεγάλη άνοδο κ.λπ.)· Να συζητήσετε σε ποιο βαθμό η ύπαρξη πολλών διαθέσιμων options «σφίγγει» τα περιθώρια για αυθαίρετες τιμές, οδηγώντας σε στενότερα arbitrage–free intervals για τα χαρτοφυλάκια.

Ερωτημα 14 *(Κεφάλαιο 4: Βέλτιστα χαρτοφυλάκια και μέγιστη ζημιά)*

Στο Κεφάλαιο 4 ορίζουμε ως βέλτιστο χαρτοφυλάκιο *εκείνο που ελαχιστοποιεί τη μέγιστη δυνατή ζημιά σε όλα τα δυνατά σενάρια για την τιμή του υποκείμενου τίτλου.*

1. *Να εξηγήσετε με λόγια τι σημαίνει «ελαχιστοποίηση της μέγιστης ζημιάς» (minimization of the maximal loss) και πώς αυτό διαφέρει από κριτήρια που βασίζονται στον μέσο ή αναμενόμενο κίνδυνο.*

2. *Έστω ότι η συνάρτηση κέρδους ενός χαρτοφυλακίου είναι $\Pi(x)$ για τιμή υποκείμενης μετοχής x στη λήξη. Πώς εισάγεται μια μεταβλητή D ώστε ο στόχος «η μέγιστη ζημιά να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη» να μπορεί να διατυπωθεί ως μαθηματικό πρόβλημα βελτιστοποίησης;*

Ερωτημα 15 *(Κεφάλαιο 4: Γραμμικό πρόγραμμα και πεπερασμένο πλήθος ανισοτήτων)*
Έστω ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από μετοχές και προαιρέσεις (options) με διάφορες τιμές άσκησης $K_1, \ldots, K_n$, με προφιτ φυνστιον

$$\Pi(x) = a_0 + a_1 x + \sum_{j=1}^{n} b_j (x - K_j)^+ + \sum_{j=1}^{n} c_j (K_j - x)^+ .$$

1. *Να εξηγήσετε γιατί η συνάρτηση $\Pi(x)$ είναι* κατά τμήματα γραμμική *(piecewise linear) με «κόμβους» στα σημεία $0, K_1, \ldots, K_n$.*

2. *Δείξτε ποιο είναι το βασικό επιχείρημα που επιτρέπει να αντικαταστήσουμε τον άπειρο αριθμό ανισοτήτων*
$$\Pi(x) \geq -D \quad \text{για όλα τα } x \geq 0$$
με ένα πεπερασμένο σύστημα γραμμικών ανισοτήτων στα σημεία $x = 0, K_1, \ldots, K_n$ και στην «τελική κλίση» (tail slope) της $\Pi(x)$ για μεγάλα x.

3. *Πώς αυτό το επιχείρημα επιτρέπει να γράψουμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης της μέγιστης ζημιάς ως linear program με μεταβλητές τις ποσότητες a_1, b_j, c_j και τη μεταβλητή D;*

Ερωτημα 16 *(Κεφάλαιο 4: Superhedging, arbitrage–free interval και διαθέσιμα οπτιονς)*
Στο Κεφάλαιο 4 μελετώνται static superhedging strategies σε πεπερασμένο πλέγμα τιμών (finite grid) και εισάγεται η έννοια ενός arbitrage–free interval για την τιμή ενός παράγωγου προϊόντος.

1. *Να εξηγήσετε τι σημαίνει ότι ένα χαρτοφυλάκιο superhedges μια δοσμένη συνάρτηση στόχο $f(x)$ (π.χ. την αποπληρωμή ενός option) πάνω σε ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών της μορφής $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$.*

2. *Πώς ορίζεται ένα arbitrage–free interval για την τιμή ενός option, όταν υπάρχουν διαθέσιμα χαρτοφυλάκια που* υπερ-αντιγράφουν *(superreplicate) και* υπο-αντιγράφουν *(subreplicate) την αποπληρωμή του;*

3. *Να συζητήσετε ποιοτικά γιατί, όσο λαμβάνουμε υπόψη μας περισσότερα διαθέσιμα options και άρα περισσότερους πιθανούς συνδυασμούς long και short θέσεων, τόσο το arbitrage–free interval για την τιμή ενός νέου option τείνει να «στενεύει». Ποια είναι η διαισθητική σχέση ανάμεσα στην πληθώρα διαπραγματευόμενων προϊόντων και στους περιορισμούς που επιβάλλει η αρχή no–arbitrage;*

4. *Αν έχετε αγοράσει/πουλήσει στη τιμή Y ένα option με συνάρτηση απολαβής $f(x)$ περιγράψτε τρόπους αντιστάθμισης, δηλαδή κατασκευής χαρτοφυλακίων τα οποία περιέχουν το συμβόλαιο αυτό (π.χ. χαρτοφυλάκιο με την ελάχιστη πιθανή ζημιά ή χαρτοφυλάκιο κερδοφόρο αν $S_T \in A$). Διαπιστώστε ότι παρόμοια κατασκευή χαρτοφυλακίου μπορεί να πραγματοποιηθεί χωρίς την πώληση ενός συμβολαίου, οπότε τη θέση του $f(x)$ στη συνάρτηση κέρδους θα βρίσκεται το ποσό επένδυσης Y.*

Ερωτημα 17 *(Κεφάλαιο 5: Ορισμός και ανίχνευση arbitrage)*

Στο Κεφάλαιο 5 ορίζουμε το αρμπιτράζ *(arbitrage) ως* μια ευκαιρία χωρίς κίνδυνο *(riskless profit opportunity) με κέρδος πάνω από 0 σε τουλάχιστον ένα σενάριο.*

1. *Να ξαναδιατυπώσετε με λόγια τον ορισμό του arbitrage. Ποιοι είναι οι δύο βασικοί όροι που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση κέρδους $\Pi(x)$ ενός χαρτοφυλακίου ώστε να μιλάμε για arbitrage;*

2. *Στο γενικό μοντέλο του κεφαλαίου η συνάρτηση κέρδους έχει τη μορφή*

$$\Pi(x) = ax + be^{rT} + \sum_i \gamma_i (x - K_i)^+ + \delta_i (K_i - x)^+ - Y.$$

Να εξηγήσετε τη σημασία των παραμέτρων $a, b, \gamma_i, \delta_i, Y$ και τι εκφράζει κάθε όρος της $\Pi(x)$ (θέση στη μετοχή, θέση σε bond, θέσεις σε call και put options, αρχικό κόστος).

3. *Το πρόβλημα (5.1) γράφεται με άγνωστα $a, b, \gamma_i, \delta_i, D$ και στόχο την ελαχιστοποίηση του D. Πώς ερμηνεύεται η συνθήκη $D < 0$ ως προς την ύπαρξη arbitrage· Γιατί σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι έχουμε εντοπίσει riskless profit opportunity·*

4. *Στο ίδιο πρόβλημα επιβάλλονται περιορισμοί $\gamma_i, \delta_i \in [-N, N]$. Να εξηγήσετε γιατί αυτοί οι περιορισμοί είναι σημαντικοί από μαθηματική άποψη (περιορισμός του linear program) και τι θα μπορούσε να συμβεί αν τους αφαιρέσουμε (πιθανότητα unbounded arbitrage με «άπειρο» κέρδος).*

Ερωτημα 18 *(Κεφάλαιο 5: Put–call parity, arbitrage–free interval και διαθέσιμα options)*

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται η σχέση put–call parity

$$C(K) + Ke^{-rT} = S_0 + P(K)$$

και συνδέεται με την ανίχνευση arbitrage μέσω κατάλληλων χαρτοφυλακίων.

1. *Να εξηγήσετε τι εκφράζει η σχέση put–call parity σε επίπεδο οικονομικής λογικής. Πώς συνδέει την τιμή της μετοχής S_0, την τιμή του call $C(K)$, του put $P(K)$ και της τραπεζικής κατάθεσης Ke^{-rT};*

2. *Να περιγράψετε με λόγια πώς μια παραβίαση της put–call parity οδηγεί σε κατασκευή χαρτοφυλακίου με arbitrage. Τι αγοράζουμε και τι πουλάμε στις βασικές περιπτώσεις; Πώς εξασφαλίζεται ότι το τελικό payoff είναι μη αρνητικό για όλα τα x και θετικό για κάποια τιμή;*

3. *Γενικότερα, όταν λαμβάνουμε υπόψη όλα τα διαθέσιμα options σε διάφορα strikes και χρησιμοποιούμε το πρόβλημα (5.1), μπορούμε να ορίσουμε ένα arbitrage–free interval επιτρεπτών τιμών για ένα νέο συμβόλαιο. Να σχολιάσετε ποιοτικά:*

   - *γιατί η παρουσία πολλών διαπραγματευόμενων options τείνει να «στενεύει» αυτό το διάστημα επιτρεπτών τιμών,*
   - *πώς η εισαγωγή bid–ask spread και transaction costs μειώνει το μέγεθος της πραγματικής ευκαιρίας arbitrage ή μπορεί και να την εξαλείψει.*
   - *πως το πρόβλημα για την εύρεση arbitrage είναι γενικότερο από την put–call parity formula.*

Ερωτημα 19 *Στα προβλήματα κατασκευής χαρτοφυλακίου εμφανίζεται η ανάγκη για μια πρόβλεψη της μορφής* $S_T \in A \subseteq \mathbb{R}_+$. *Υποθέστε ότι*

$$S_T = e^{s\sqrt{T}\xi + (m-\sigma^2/2)T}$$

όπου ξ *ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμη 0 και διακύμανση 1. Στη συνέχεια υπολογίστε ένα διάστημα* (c, v) *έτσι ώστε να ισχύει* $P(S_T \in (c, v)) = p$. *Για να το κάνετε αυτό επιλέξτε το* c *ή το* v *και στη συνέχεια υπολογίστε το άλλο έτσι ώστε να ισχύει η παραπάνω ισότητα για δοσμένο* p. *Εξηγήστε γιατί μια τέτοιου είδους πρόβλεψη είναι μακριά από τις προβλέψεις ενός έμπειρου επενδυτή.*

Ερωτημα *20* *(Κεφάλαιο 6: Markowitz choice theory και διαφοροποίηση)*

Στο Κεφάλαιο 6 μελετάμε χαρτοφυλάκια με βάρη $w_1, \ldots, w_n$ *σε* n *μετοχές, με διάνυσμα αναμενόμενης απόδοσης* $\mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ *και πίνακα συνδιακυμάνσεων* Σ.

1. *Να εξηγήσετε τι εκφράζει ο όρος* διαφοροποίηση *(diversification) στη θεωρία Markowitz. Πώς συνδέεται η* διαφοροποίηση *με τη μείωση της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου* $w^\top \Sigma w$;
2. *Να δώσετε τον ορισμό της efficient frontier. Πώς ορίζεται, μέσα από τη θεωρία Markowitz, το σύνολο των «βέλτιστων» χαρτοφυλακίων για δεδομένη διακύμανση ή για δεδομένη αναμενόμενη απόδοση;*

Ερωτημα *21* *(Κεφάλαιο 6: Το πρόβλημα επιλογής Markowitz και η χρήση του πίνακα συνδιακυμάνσεων)*

Θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα Markowitz όπου ψάχνουμε βάρη $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ *με* $\sum_i w_i = 1$.

1. *Να διατυπώσετε το πρόβλημα Markowitz με τη μορφή:*

   - *ελαχιστοποίηση της διακύμανσης* $w^\top \Sigma w$ *υπό τον περιορισμό ότι η αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι ίση με μια δοσμένη τιμή* m_0,
   - *ή ισοδύναμα, μεγιστοποίηση της αναμενόμενης απόδοσης υπό περιορισμό στη διακύμανση.*

Ερωτημα **22** *(Κεφάλαιο 6: Value at Risk (VaR) και μέτρηση κινδύνου)*

Στο Κεφάλαιο 6 εισάγεται η έννοια του Value at Risk (VaR) ως μέτρο κινδύνου (risk measure) για ένα χαρτοφυλάκιο με αρχική αξία V_0.

1. *Να δώσετε τον ορισμό του VaR στο επίπεδο εμπιστοσύνης $\alpha \in (0,1)$ για ένα χαρτοφυλάκιο. Πώς ερμηνεύεται η πρόταση «το VaR στο επίπεδο α είναι ίσο με L»;*

2. *Υποθέτουμε ότι η τυχαία μεταβολή $V_T - V_0$ του χαρτοφυλακίου ακολουθεί κανονική κατανομή (normal distribution) με κατάλληλες παραμέτρους. Να εξηγήσετε πώς εκφράζεται το VaR μέσω του ποσοστιαίου σημείου (quantile) της τυπικής κανονικής κατανομής και πώς συνδέεται με τη μεταβλητότητα (volatility) του χαρτοφυλακίου.*

3. *Να σχολιάσετε τη διαφορά ανάμεσα σε risk measurement και risk management όπως παρουσιάζεται στο κεφάλαιο. Γιατί η μέτρηση κινδύνου μέσω VaR εξαρτάται από την επιλογή κατανομής και παραμέτρων, ενώ η κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης κινδύνου (hedging portfolio) έχει πιο «αντικειμενικό» χαρακτήρα;*

Ερωτήσεις–Ασκήσεις για την Ενότητα 9.1 (Binomial Model)

Σωστό/Λάθος

1. ***Πρόταση:*** *Στο μονοπερίοδο μοντέλο binomial υποθέτουμε ότι, αν σήμερα η τιμή της μετοχής είναι S, τότε στη λήξη T θα είναι είτε uS είτε dS.*
   Σωστό / Λάθος: Αιτιολόγηση:

2. ***Πρόταση:*** *Στο μονοπερίοδο binomial μοντέλο η τιμή του option στο χρόνο 0 ταυτίζεται με την αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου $V_0 = aS + b$, όπου a είναι ο αριθμός των μετοχών και b το ποσό στον λογαριασμό χωρίς κίνδυνο, έτσι ώστε στη λήξη να αναπαράγονται οι τιμές $H(uS)$ και $H(dS)$.*
   Σωστό / Λάθος: Αιτιολόγηση:

3. ***Πρόταση:*** *Στο πολυπερίοδο μοντέλο binomial, ο τύπος*

   $$V(t,S) = e^{-r\delta}\big(qV(t+\delta, uS) + (1-q)V(t+\delta, dS)\big),$$

   με

   $$q = \frac{e^{r\delta} - d}{u - d},$$

   ισχύει μόνο όταν $d \le e^{r\delta} \le u$, ώστε $q \in (0,1)$.
   Σωστό / Λάθος: Αιτιολόγηση:

4. ***Πρόταση:*** *Βασικό μειονέκτημα του binomial μοντέλου είναι ότι σε κάθε περίοδο επιτρέπονται μόνο δύο δυνατές τιμές για την τιμή της μετοχής, κάτι που σπάνια επαληθεύεται στην πράξη.*
   Σωστό / Λάθος: Αιτιολόγηση:

Πολλαπλής επιλογής

1. *Στο μονοπερίοδο binomial μοντέλο, ποιος είναι ο σωστός τύπος για τον αριθμό μετοχών a του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου;*

   (α΄) $a = \dfrac{H(uS) - H(dS)}{(u-d)S}$

   (β΄) $a = \dfrac{H(uS) + H(dS)}{(u+d)S}$

   (γ΄) $a = \dfrac{H(uS) - H(dS)}{u-d}$

   (δ΄) $a = \dfrac{H(uS)}{uS}$

   Απάντηση:

Θεωρητικές / Υπολογιστικές ασκήσεις

1. *Θεωρούμε ένα ευρωπαϊκό call with payoff* $H(x) = (x-K)^+$, *τρέχουσα τιμή μετοχής* S_0, *ρυθμοί ανόδου και καθόδου* $u > 1$, $d < 1$, *επιτόκιο χωρίς κίνδυνο* r *και λήξη* T.

   (α΄) *Γράψτε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν τα* a, b *ώστε να ισχύει η αντιστάθμιση στο μονοπερίοδο μοντέλο.*

   (β΄) *Εξάγετε τους τύπους για* a *και* b *συναρτήσει του* $H(uS_0)$, $H(dS_0)$, u, d, S_0, r, T.

   (γ΄) *Εξηγήστε γιατί το* $V_0 = aS_0 + b$ *μπορεί να θεωρηθεί "θεωρητική τιμή" του option εντός του binomial μοντέλου.*

   (δ΄) *Εξηγήστε τις διαφορές με τους αντίστοιχους υπολογισμούς για Αμερικανικό call.*

2. *Δίνεται* $S_0 = 100$, $K = 110$, $u = 1.2$, $d = 0.8$, $r = 0.05$, $T = 1$ *και payoff* $H(x) = (x-K)^+$.

   (α΄) *Υπολογίστε* $H(uS_0)$ *και* $H(dS_0)$.

   (β΄) *Υπολογίστε* a, b *και την τιμή* V_0 *του call στο μονοπερίοδο binomial μοντέλο.*

   (γ΄) *Συζητήστε πώς θα αλλάξει το αποτέλεσμα αν αλλάξει το επιτόκιο* r.

3. *Αν ο writer εφαρμόσει το binomial μοντέλο για μια περίοδο αποδείξτε ότι θα επιλέξει* $u \geq \frac{K}{S_0}$ *και* $d \leq \frac{K}{S_0}$. *Αποδείξτε επίσης ότι θα έχει κέρδος αν* $S_T \in (dS_0, uS_0)$ *και ζημιά διαφορετικά. Μάλιστα η ζημιά είναι απεριόριστη. Τι άλλο μπορεί να κάνει ο writer για να έχει περιορισμένη πιθανή ζημιά αλλά απεριόριστο κέρδος;*

Ερωτημα **23** *Περιγράψτε πως αυξάνοντας το πλήθος των περιόδων στο διωνυμικό μοντέλο καταλήγουμε στο μοντέλο των Black-Scholes.*

- *Εξηγήστε για ποιο λόγο οι τιμές που δίνουν τα δυο αυτά μοντέλα δεν βρίσκονται, εν γένει, στο arbitrage-free interval.*

- *Εξηγήστε το γεγονός ότι ακόμη και αν οι τιμές βρεθούν στο arbitrage-free interval τα δυο αυτά μοντέλα δεν μας παρέχουν με πρακτικά υλοποιήσιμες στρατηγικές αντιστάθμισης.*
- *Εξηγήστε γιατί οι παράμετροι d, u, σ αποτελούν πρόβλεψη και ως εκ τούτου τα μοντέλα αυτά δεν μας παρέχουν δίκαιες τιμές.*

Ερωτήσεις–Ασκήσεις για την Ενότητα 9.4 (Arbitrage–Free Price Interval)

Σωστό/Λάθος

1. ***Πρόταση:*** *Για ένα ευρωπαϊκό call με τρέχουσα τιμή μετοχής S, τιμή εξάσκησης K, επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r και λήξη T, ισχύουν τα arbitrage–free όρια*

$$\max\bigl(0,\, S - Ke^{-rT}\bigr) \le C \le S.$$

   Σωστό / Λάθος: *Αιτιολόγηση:*

2. ***Πρόταση:*** *Αν η τιμή p ενός option είναι μεγαλύτερη από το Y_{writer}, τότε ο writer μπορεί να δημιουργήσει χαρτοφυλάκιο που του εξασφαλίζει σίγουρο κέρδος (arbitrage).*
   Σωστό / Λάθος: *Αιτιολόγηση:*

3. ***Στατεμεντ:*** *Αν $p < Y_{buyer}$, ο αγοραστής μπορεί να αγοράσει το option στην τιμή p, να συνδυάσει την θέση με το κατάλληλο superhedge του buyer και να "κλειδώσει" θετικό τελικό κέρδος.*
   Σωστό / Λάθος: *Αιτιολόγηση:*

4. ***Πρόταση:*** *Αν η τιμή p ανήκει στο διάστημα $[Y_{buyer}, Y_{writer}]$, τότε η τιμή είναι arbitrage–free.*
   Σωστό / Λάθος: *Αιτιολόγηση:*

5. ***Πρόταση:*** *Η προσθήκη περισσότερων διαπραγματεύσιμων call και put options πάνω στο ίδιο υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο τείνει να στενεύει το arbitrage–free διάστημα για ένα νέο συμβόλαιο.*
   Σωστό / Λάθος: *Αιτιολόγηση:*

Πολλαπλής επιλογής

1. *Ποια είναι η σωστή ερμηνεία του Y_{writer};*
   - (α′) *Η μέγιστη τιμή που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο αγοραστής.*
   - (β′) *Η ελάχιστη τιμή πώλησης του οπτιον ώστε ο writer να μπορεί να αντισταθμίσει πλήρως τον κίνδυνο με μη αρνητικό κέρδος σε όλα τα σενάρια.*
   - (γ′) *Η μέση τιμή των διαθέσιμων option στην αγορά.*
   - (δ′) *Η τιμή που δίνει το Black–Scholes μοντέλο.*

   Απάντηση:

2. *Το ζεύγος* (Y_{buyer}, Y_{writer}) *καλείται:*

   (α′) *Διάστημα πρόβλεψης της τιμής.*

   (β′) *Διάστημα εμπιστοσύνης της τιμής.*

   (γ′) *Arbitrage–free price interval.*

   (δ′) *Διάστημα τιμών που μεγιστοποιούν το κέρδος του writer.*

   Απάντηση:

3. *Ποιο από τα παρακάτω επηρεάζει τυπικά το πλάτος του arbitrage–free διαστήματος·*

   (α′) *Ο αριθμός και η επιλογή των διαθέσιμων strikes* K_i.

   (β′) *Η μορφή του payoff* $f(x)$.

   (γ′) *Το επιτόκιο* r.

   (δ′) *Όλα τα παραπάνω.*

   Απάντηση:

Θεωρητικές / Υπολογιστικές ασκήσεις

1. *Δείξτε ότι κάθε τιμή* $p \notin [Y_{buyer}, Y_{writer}]$ *οδηγεί σε ευκαιρία arbitrage. Πιο συγκεκριμένα:*

   (α′) *Περιγράψτε τη στρατηγική arbitrage όταν* $p > Y_{writer}$ *(θέση στο option και στο super-hedge του writer).*

   (β′) *Περιγράψτε τη στρατηγική arbitrage όταν* $p < Y_{buyer}$ *(θέση στο option και στο super-hedge του buyer).*

   (γ′) *Εξηγήστε γιατί κάθε τιμή μέσα στο διάστημα* $[Y_{buyer}, Y_{writer}]$ *είναι arbitrage–free.*

2. *Θεωρήστε ένα απλό παράδειγμα με υποκείμενο* $S_0 = 100$, *επιτόκιο* $r = 0.05$, *λήξη* $T = 1$ *και διαθέσιμα στην αγορά:*

$$C(100) = 12, \quad P(100) = 7.$$

   Θέλουμε να αποτιμήσουμε ένα νέο ευρωπαϊκό call με strike $K = 110$.

   (α′) *Χρησιμοποιήστε τις βασικές ανισότητες (bounds, put–call parity) για να προτείνετε απλά άνω/κάτω όρια για την τιμή του νέου call.*

   (β′) *Συζητήστε ποιο επιπλέον πληροφοριακό περιεχόμενο θα έδιναν περισσότερα διαθέσιμα strikes και πώς θα επηρέαζαν το arbitrage–free διάστημα.*

Ερωτήσεις–Ασκήσεις για την Ενότητα 9.5 (Model–Free Fair Prices of an Option)

Σωστό/Λάθος

1. ***Πρόταση:*** *Η τιμή ίσης ακτίνας Y_{D^*} ικανοποιεί $D_{writer}(Y_{D^*}) = D_{buyer}(Y_{D^*})$ και είναι πάντοτε arbitrage–free (υπό την υπόθεση ότι το arbitrage–free διάστημα $[Y_{buyer}, Y_{writer}]$ είναι μη κενό).*
   Σωστό / Λάθος: *Αιτιολόγηση:*

2. ***Πρόταση:*** *Η πραγματική αγοραία τιμή ενός option καθορίζεται από την προσφορά και τη ζήτηση και δεν είναι απαραίτητα ούτε "δίκαιη" ούτε arbitrage–free.*
   Σωστό / Λάθος: *Αιτιολόγηση:*

Πολλαπλής επιλογής

1. *Ποιος είναι ο βασικός ρόλος της τιμής ίσης ακτίνας Y_{D^*} στην πρακτική διαπραγμάτευση ενός οπτιον;*

   (α΄) *Να δώσει τη μοναδική αγοραία τιμή του option.*

   (β΄) *Να καθορίσει τα όρια του arbitrage–free διαστήματος.*

   (γ΄) *Να λειτουργήσει ως "σημείο αναφοράς" (canonical reference point) γύρω από το οποίο μπορούν να ξεκινήσουν οι διαπραγματεύσεις μεταξύ writer και buyer.*

   (δ΄) *Να ελαχιστοποιήσει τα transaction costs.*

   Απάντηση:

2. *Ποια από τα παρακάτω είναι σωστά σχετικά με τις model–free fair prices;*

   (α΄) *Χρησιμοποιούν μόνο τις αγοραίες τιμές των ήδη διαπραγματεύσιμων call και put οπτιονς.*

   (β΄) *Ορίζονται με βάση κριτήρια που εξαρτώνται από την κατανομή του κέρδους/ζημίας του writer και του buyer.*

   (γ΄) *Συμπίπτουν πάντα με την τιμή που δίνει το Black–Scholes μοντέλο.*

   (δ΄) *Δεν μπορούν να είναι arbitrage–free.*

   Απάντηση:

3. *Για να είναι μια τιμή μοντέλου πρακτικά χρήσιμη ως "δίκαιη τιμή" στην έννοια της ενότητας 9.5, πρέπει κατ' ελάχιστον:*

   (α΄) *να αγνοεί πλήρως τα διαθέσιμα αγοραία δεδομένα,*

   (β΄) *να εξασφαλίζει ότι οι αντίστοιχες στρατηγικές αντιστάθμισης είναι ακριβώς υλοποιήσιμες,*

   (γ΄) *να λαμβάνει υπόψη τις τιμές των διαπραγματεύσιμων options ώστε να βρίσκεται εντός του arbitrage–free διαστήματος,*

   (δ΄) *να ταυτίζεται με την ιστορική μέση τιμή του option.*

   Απάντηση: