

Δεύτερο Φυλλάδιο  
Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά I  
Νίκος Χαλιδιάς

Πρώτο Θέμα

Υποθέστε ότι θέλετε να επενδύσετε το ποσό των 1.000 Ευρώ σε δυο μετοχές. Μετά από μελέτη ιστορικών και άλλων δεδομένων καταλήξατε στις εξής εκτιμήσεις οι οποίες αφορούν μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο (π.χ. ένα χρόνο)

$$m_1 = 0.3, m_2 = 0.5, \sigma_1 = 0.04, \sigma_2 = 0.5, \sigma_{12} = 0.002$$

Πως ακριβώς θα επενδύσετε το ποσό των 1.000 Ευρώ σε αυτές τις δυο μετοχές; Ποια είναι η πιθανότητα να χάσετε περισσότερα από 900 Ευρώ στο τέλος της χρονικής περιόδου; Σε ποιο σενάριο θα έχετε κέρδος; Συγκρίνετε την παραπάνω κατασκευή με την κατασκευή που περιλαμβάνει επίσης συμβόλαια αγοράς και πώλησης.

Δεύτερο Θέμα

Έστω ότι στην αγορά υπάρχει μια μετοχή με σημερινή τιμή  $S_0$ , ένα συμβόλαιο αγοράς  $C(K_1) = Y_1$  και ένα συμβόλαιο πώλησης  $P(K_2) = Y_2$  τα οποία λήγουν στο χρόνο  $T$ . Χρησιμοποιήστε πραγματικά δεδομένα για τα παραπάνω. Υποθέστε ότι θέλετε να πουλήσετε ένα καινούριο συμβόλαιο αγοράς με τιμή εξάσκησης  $L > K_1$ .

Υπολογίστε το διάστημα τιμών του νέου συμβολαίου που δεν δημιουργούν ευκαιρία σίγουρου κέρδους ούτε στον πωλητή ούτε στον αγοραστή.

Έστω ότι το πουλήσατε σε μια τιμή η οποία βρίσκεται μέσα σε αυτό το διάστημα. Ποιο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο μπορείτε να κατασκευάσετε και τι γίνεται με την πιθανή ζημιά; Σχεδιάστε τη συνάρτηση κέρδους αυτού του χαρτοφυλακίου.

Τρίτο Θέμα

Υποθέστε ότι πουλήσατε ένα συμβόλαιο αγοράς  $C(L) = Y$  (χρησιμοποιήστε τα δεδομένα της προηγούμενης άσκησης) το οποίο λήγει στο χρόνο  $T$ . Έστω ότι θέλετε να εφαρμόσετε το διωνυμικό μοντέλο για να κατασκευάσετε ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να κάνετε μια πρόβλεψη για τη μικρότερη πιθανή τιμή της μετοχής στο χρόνο  $T$ , για παράδειγμα προβλέπετε ότι δεν θα πέσει κάτω από τη τιμή  $S^d < K$ . Οπότε σε αυτή την περίπτωση θέτουμε  $d = \frac{S^d}{S_0}$ . Στη συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε το κατάλληλο  $u$  έτσι ώστε να ισχύει

$$aS_0 + b = Y$$

όπου  $a, b$  ορίζονται από το διωνυμικό μοντέλο. Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο ξεκινώντας από το να προβλέψουμε το  $u$  και να υπολογίσουμε το  $d$ . Σχεδιάστε τη συνάρτηση κέρδους για τον πωλητή η οποία είναι η

$$\Pi(x) = ax + b - (x - K)^+$$

Για ποιες τιμές της μετοχής θα έχει κέρδος ο πωλητής; Ποιο είναι το μέγιστο κέρδος και σε ποια τιμή επιτυγχάνεται αυτό; Η πιθανή ζημιά είναι περιορισμένη ή όχι; Μπορείτε να αποδείξετε ότι αυτά τα αποτελέσματα ισχύουν γενικά και όχι μόνο στην συγκεκριμένη περίπτωση; Συγκρίνετε αυτό το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο με αυτά που περιέχουν και άλλα συμβόλαια αγοράς και πώλησης όπως αυτό του προηγούμενου θέματος.