

Απαλλακτική εργασία στο μάθημα 'Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου' -Ιούνιος 2025

13 Ιουνίου 2025

1. Να αποδειχθεί ότι αν μία τυχαία μεταβλητή $Q : \Omega \rightarrow R$ είναι μετρήσιμη, τότε και κάθε πολυώνυμο της μορφής $a_0 + a_1X + \dots + a_kX^k$ είναι μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή. Οι τιμές της Q θεωρούμε ότι είναι υποσύνολο των πραγματικών αριθμών και $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι ένας μη ατομικός χώρος πιθανότητας.
2. Έστω Ω πεπερασμένο σύνολο και $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ μια διαμέρισή του. Να δείξετε ότι οι μετρήσιμες συναρτήσεις ως προς τη σ -άλγεβρα που παράγεται από τη διαμέριση αυτή είναι εκείνες που λαμβάνουν σταθερή τιμή σε κάθε σ_i , $i = 1, \dots, k$.
3. Αν $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι χώρος πιθανότητας τότε να δείξετε ότι αν μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n \in N}$ -όπου N είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών συγκλίνει κατά L^1 σε κάποια τυχαία μεταβλητή X , τότε η ακολουθία των ολοκληρωμάτων $E(X_n)$ αυτών των τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει στο ολοκλήρωμα $E(X)$ της X . Οι αναφερόμενες τυχαίες μεταβλητές ανήκουν στον $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έχουν πραγματικές τιμές.
4. Ισχύει το ίδιο αν οι τυχαίες μεταβλητές ανήκουν στον $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, όπου $1 < p < +\infty$;
5. Να δοθούν οι ορισμοί των οριακών ενδεχομένων $\limsup(A_n)$, $\liminf(A_n)$ μιας ακολουθίας ενδεχομένων $(A_n) \subseteq \Omega$ όπου $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι ένας μη ατομικός χώρος πιθανότητας. Να διατυπωθεί το Θεώρημα που είναι γνωστό ως 1ο Λήμμα Borel- Cantelli και να αποδειχθεί.