Εργασία στο μάθημα 'Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου' -Σεπτέμβριος 2024

9 Σεπτεμβρίου 2024

1. Αν (Ω, F, P) είναι χώρος πιθανότητας τότε να δείξετε ότι αν μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\in N}$-όπου N είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια τυχαία μεταβλητή X, τότε η ακολουθία των ολοκληρωμάτων $E(X_n)$ αυτών των τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει στο ολοκλήρωμα $E(X)$ της X. Οι αναφερόμενες τυχαίες μεταβλητές ανήκουν στον $L^1(\Omega, F, P)$ και έχουν πραγματικές τιμές.

2. Αν (Ω, F, P) είναι χώρος πιθανότητας τότε να δείξετε ότι αν μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $(X_n)_{n\in N}$-όπου N είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών συγκλίνει κατά L^1 σε κάποια τυχαία μεταβλητή X, τότε η ακολουθία των ολοκληρωμάτων $E(X_n)$ αυτών των τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει στο ολοκλήρωμα $E(X)$ της X. Οι αναφερόμενες τυχαίες μεταβλητές ανήκουν στον $L^1(\Omega, F, P)$ και έχουν πραγματικές τιμές.

3. Ισχύει το ίδιο αν οι τυχαίες μεταβλητές ανήκουν στον $L^p(\Omega, F, P)$, όπου $1 < p < +\infty$;

4. Να δοθεί ο ορισμός της σύγκλισης κατά μέτρο και του μετρησίμου συνόλου.