Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

22/4/24

Έστω E: διανυσματικός χώρος. Συμβολίζουμε με E' τον διανυσματικό χώρο των γραμμικών ~~συναρτήσεων~~ συναρτησιακών του E, όλα τα $x' \in E'$ ανν $x' : E \to \mathbb{R}$ και $x'(ax_1 + \beta x_2) = ax'(x_1) + \beta x'(x_2)$
$a, \beta \in \mathbb{R}$ και $x_1, x_2 \in E$

Με E^* συμβολίζουμε τον υπόχωρο του E' ως προς τον οποίο ισχύει ότι: $x^*(x_n) \to x^*(x)$, όπου $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ και $x \in E$
(χώρος των συνεχών γραμμικών συναρτήσεων)

Ο E^* έχει το εξής νόημα στη Θ μέτρου και Θ. πιθανοτήτων ειδικότερα.

Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$: μετρήσιμος χώρος τα πρόσημα σημένα μέτρα απέχουν διανυσματικό χώρο και θεωρούμε μια ακολουθία $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ από πεπερασμένα πρόσημα σημένα μέτρα

Καθώς μ: γραμμικό συναρτησιακό που "δρα" πάνω "απλές" συναρτήσεις ($\sum_{j=1}^{k} a_i \mathbb{I}_{A_i}$, A_i ανά δύο ξένα μεταξύ τους και $a_i \in \mathbb{R}_i$)

$$\mu(A) = \mu(\mathbb{I}_A) \overset{(\Omega,\mathcal{F})}{=} \lim_{n\to+\infty} \mu_n(A) \quad A \in \mathcal{F}$$

Θεώρημα Vitali-Hahn-Saks. Το μ είναι μέτρο

Θεώρημα (Dieudonné). Το μ είναι μέτρο, αν η $\mathcal{F}$ είναι η Borel σ-άλγεβρα ενός μετρικού χώρου (X, d) ο οποίος είναι (διαχωρίσιμος)

(X, d) για τον οποίο υπάρχει ένα αριθμήσιμο $D(x_n) \leq (X)$ που είναι ~~μέτρο~~ $D = X$

$L^p(\Omega, F, \mu)$ $\ell^p(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ (Polish)

Borel

$(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$: ακολουθία μέτρων πιθανότητος (ορίζονται στη Borel σ-άλγεβρα ενός μετρικού χώρου)
και $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: ακολουθία πραγματικών αριθμών που συγκλίνει στο $+\infty$. $\lim P_n(A) = P(A)$ από το Θ. Vitali-Hahn-Saks

όπου A : Borel υποσύνολο του (X,d).

$F_n(A) = \frac{1}{a_n} \log P_n(A)$ $\log x < 0$, $0 < x < 1$

$-\inf(g(x)) \leq \liminf_{x\in A^{\circ}} (F_n(A)) \leq \limsup F_n(A) \leq -\inf(g(x))$ $x \in A$

$g: X \to \mathbb{R}_+$ συνεχής και φραγμένη