27/03/2024

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ : χώρος μέτρου

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mathbb{I}_{A_i}, \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ και } A_i \in \mathcal{F}, \; i=1,\dots,k$$

απλές συναρτήσεις

$$\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{1}^{k} a_i \mu(A_i)$$

Εαν $v = v^+ - v^-$, $v^+ = \max\{v, 0\}$
και $v^- = \max\{-v, 0\}$

Τα παρακάτω ισχύουν αν $v$ θετική συνάρτηση και εξαιτίας της παραπάνω σημείωσης και ισχύουν και αντίστοιχα για τις αντίστοιχες συναρτήσεις

**ΟΡΙΣΜΟΣ**: Μια άνω συνάρτηση $f$ (upper function) είναι το κατά σημείο όριο ($\mu$ - σ.β.) μιας ακολουθίας $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (θετικών) απλών συναρτήσεων και είναι και αύξουσα η $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δηλαδή $\varphi_{n+1}(\omega) \geq \varphi_n(\omega)$ $\forall\, \omega \in \Omega$ ($\mu$ - σ.β.) και το

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \varphi_n \, d\mu < +\infty \; *$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

εάν υπάρχει το ελάχιστο

$\min\{\varphi_n, \psi_n\} = k_n$ ~~[illegible]~~ θα είναι και αυτή μια ακολουθία από απλές εκθετικές συναρτήσεις $k_n \uparrow$ και

$$\lim k_n < +\infty$$

Το θεώρημα που προκύπτει από την $k_n$ είναι το Θ. κυριαρχημένης σύγκλισης.

~~ΘΕΩΡΗΜΑ (κυριαρχημένης σύγκλισης) εάν $\exists$ μια τέτοια~~

Το $*$ είναι κοινό και για τις δύο ακολουθίες.

**ΟΡΙΣΜΟΣ** Το ολοκλήρωμα $(*)$ μιας άνω συνάρτησης είναι το όριο

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \int_\Omega \varphi_n \, d\mu = \int_\Omega f \, d\mu$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ** (μονότονης σύγκλισης)

Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία άνω συναρτήσεων η οποία είναι αύξουσα ($\mu$-σ.β.) δηλ. $f_{n+1}(\omega) \geq f_n(\omega)$ και συγκλίνει κατά σημείο ($\mu$-σ.β.) στην $f$.

Παίρνοντας μία ακολ. απλών συν. που συγκλίνουν στην $f_n$ μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ακολ. αύξουσα που συγκλίνει στην $f$.

Το Θ. μας λέει ότι το κατά σημείο όριο της ακολουθίας των άνω συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu$$

Το οποίο αυτόν πρέπει ορισμό $\exists \, \forall \, f_n$

Το Θ. κυριαρχημένης σύγκλισης έχει ίδιες υποθέσεις με της μονότονης

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u> (κυριαρχημένης σύγκλισης)
Έστω ακολουθία άνω συναρτήσεων $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που συγκλίνει κατά σημείο ($\mu$-σ.π.) σε μία $f: \Omega \to \mathbb{R}$ και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένες από μία $g: \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-μετρήσιμη.
Τότε το $\lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu = \int_{\Omega} f \, d\mu$.

$L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \{ f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ μετρήσιμη και ισχύει $\int_{\Omega} |f| \, d\mu < +\infty \}$.

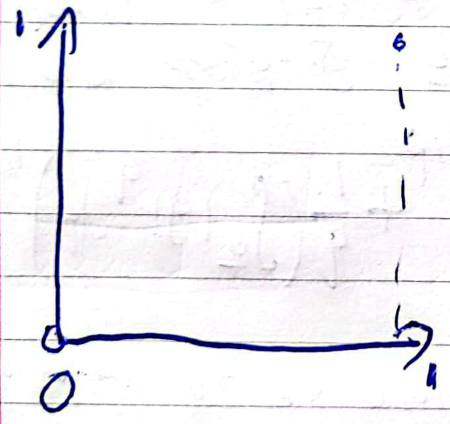
Στις συναρτήσεις ορίζουμε την πρόσθεση $f+g$ και πολ/σμό $\lambda \cdot f$.

Το σύνολο αυτών των πράξεων είναι διανυσματικός χώρος. Αυτό ισχύει και για $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

$$= \{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \mathcal{F}\text{-μετρ.} \int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty \}$$

Για να αποδειχθεί η συνθήκη ότι $\forall\, p \geq 1$ ισχύει ότι το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο για τον βαθμωτό πολ/μο

Η απόδειξη για το άθροισμα γίνεται με τη ακολουθία Minkowski



$g: \to \mathbb{R} \quad \lambda \in [0,1]$

$$g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$$

Επομένως οι $|x|^p$ για $p \geq 1$

Έστω $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-μετρήσιμες και

$$\int_\Omega |f|^p d\mu, \int_\Omega |g|^p d\mu < +\infty$$

Το ολοκλήρωμα της $f+g$ θα δ.ο. είναι πεπερασμένο

Στην βάση της κυρτότητας $|f+g|^p = 2^p \cdot \left|\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g\right|^p$

εάν $\lambda = 1/2$ τότε $(1-\lambda) = 1/2$

Επειδή η $h(x) = |x|^p$ είναι κυρτή

$2^p\left(\frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p\right)$

$L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \{f: \Omega \to \mathbb{R}, \mathcal{F}$ μετρήσιμες

απολύτως φραγμένες και $\inf\{M > 0 \mid |x| \leq M \ \mu\text{-}\sigma.\beta.\} < +\infty$

Δυο $p, q \in \mathbb{R}$ και $p, q > 1$ και
αν $p = 1$, $q = +\infty$
ονομάζεται συζυγείς ανν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

<u>Ανισότητα Hölder</u>: Έστω ότι $f$ και $g$ είναι
μετρήσιμες στο $\Omega$, $\mathcal{F}$-σχεδόν παντού.

Εάν $\int_\Omega |f \cdot g| \, d\mu \leq \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{1/p} + \frac{1}{q}\left(\int_\Omega |g|^q d\mu\right)^{1/q}$

Στην ειδική περίπτωση όπου κάποιο απ' τα $p$ ή $q$
είναι ίσο με το $\infty$
$\inf\{M > 0 \mid |g| \leq M \ \mu\text{-}\sigma.\beta.\}$

Έτσι θα ενδιαφέρει η περίπτωση μέτρων
πιθανότητας $\mu^*(\Omega) = 1$