Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

26/02/2024

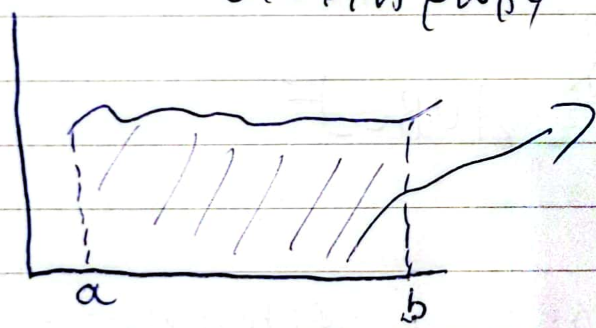
Εξέταση: Απαλλακτική Εργ.

Βιβλία: 1 Θεωρία Μέτρου Κουμουλλής και Νεγρεπόντης.
2 Πραγματική Ανάλυση Σταθακόπουλος.
3 Θεωρία Μέτρου Σημειώσεις Γιαννόπουλος.
4 Principals of real Analysis Aliprantis
5 Infenite-dimensional Analysis (e-book)

Ακολουθούμε το βιβλίο 5 απ'το κεφ. 4 και μετά.

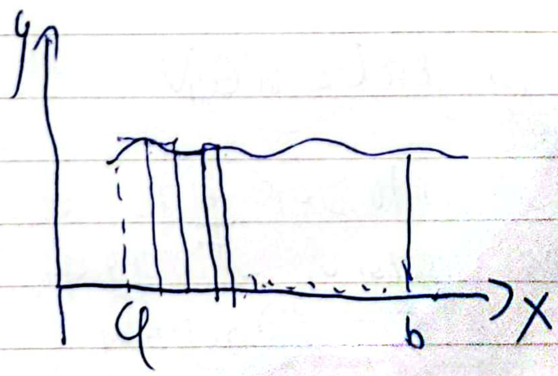
~~Θεωρία~~

Ολοκλήρωμα Rhiemann



$\int_a^b f(x)\,dx$

Αρχιμήδης - Εύδοξος
Μέθοδος εξάντλησης



Θεωρία Μέτρου: → Lebesgue, Riesz, Banach, Von Neumann

Μέτρο $\to \underline{\Omega} \neq \emptyset$

$\mu : \underline{\Omega} \to \mathbb{R}_{(+)}$ με τις εξείς ιδιότητες

α) $\mu(\underline{\Omega}) > 0$

β) $\mu(\emptyset) = 0$

γ) Για κάθε $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ το $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

$\mathcal{F}$: Μια άλγεβρα υποσυνόλων του $\underline{\Omega}$.
δηλαδή $A \in \mathcal{F}$ τότε $(A \subseteq \underline{\Omega})$
με τις εξείς ιδιότητες:

α) $\emptyset \in \mathcal{F}$

β) Αν $(A, B) \in \mathcal{F}$ τότε $A \cup B \in \mathcal{F}$

γ) $A^c \in \mathcal{F}$

Αν έχουμε μια αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων της $\mathcal{F}$ με το κάθε $A_n \in \mathcal{F}$ τότε και η ένωση τους ανήκει στην $\mathcal{F}$. (Διαφόρα Αλγεβρας-σ-Αλγ.)

Αν έχω $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $A_n \in \mathcal{F}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Αν πάρω ενα πεπερασμένο πλήθος από αυτά και η ένωση τους ανήκει στην $\mathcal{F}$ αφού είναι σ-άλγεβρα. Άρα κάθε σ-άλγεβρα είναι και άλγεβρα.
Εάν η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα τότε ισχύει ότι:
$A_1, \dots, A_k$ με $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, k$ τότε η τομή τους ανήκει στην $\mathcal{F}$ $(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{F})$; (Ερώτηση)

Απάντηση: Ναι ανήκει διότι από τις βασικές σχέσεις συνόλων ισχύει ότι

$$\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i^c\right)^c = \bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{F} \quad (\text{De Morgan})$$

Άρα οι τομές οποιουδήποτε συνόλω της $\mathcal{F}$ ανήκουν στην $\mathcal{F}$

Σ. Borel

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, X \to$ (μετρικός ~~[illegible]~~. χώρος)

Η σ-αλγ Borel ονομάζουμε την σ-αλγ που παράγεται $\sigma(\mathcal{T})$

Στο σύνολο των πραγματικών ένα τέτοιο είναι η απόλυτη τιμή

$$|x-y| = d(x,y) \; \mathbb{R}$$

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{F}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, \quad A_n \in \mathcal{A}$$

σ-αλγ Borel: Είναι η σ-αλγ. που παράγουν τα ανοιχτά διαστήματα. $\mathbb{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{T})$

Έστω x μονοσύνολο

$x \in \mathbb{R}$ $\quad \{x\} \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}(j)$

$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$ Άρα ανήκει $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$

Άρα $\{x\} \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ ισχύει $\square$

Το $\mathbb{R} \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}(j)$

Ναι διότι $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n)$ $\square$

$(a, b) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$, $a \leq b$

$[a, b) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}(j)$

Ναι διότι $[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b)$ $\square$

Το $[a, b] \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ j

Ναι διότι $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b + 1/n)$ $\square$

Το $(a, b] \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}(j)$

Ναι διότι $(a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a, b + 1/n)$ $\square$

Το $(a,+\infty) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ διότι
$(a,+\infty) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (a,n)$

όμοια $(-\infty,a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n,a) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

Όπως και τα συμπληρωματικά

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: (πληρότητα των πραγματικών αριθμών.)
Αν έχουμε μια σχέση $x \leq y$
Το σύνολο των ρητών αριθμών με όλες τις ιδιότητες.
Κάθε μη κενό σύνολο Σ που έχει ιδιότητες πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού όμοιες με των ρητών ονομάζεται σώμα. Και θεωρούμε την εξής ιδιότητα. (πότε είναι φυσικοί είναι μεγαλύτεροι από έναν άλλο και πότε
$x < y$ και $x \leq y$ και $x \neq y$
Έστω Α υποσύνολο των ρητών και άνω φραγμένο. Έχει κάθε σύνολο άνω φραγμένο σύνολο των ρητών ελάχιστο άνω φράγμα;)
Όχι $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$
και αντίστοιχα κάθε κάτω φραγμένο δεν έχει μέγιστο κάτω φράγμα $\boxed{x^2 > 2}$

Εάν θεωρήσουμε ένα σώμα που είναι εφοδιασμένο με $x \neq y$ και επιπλέον κάθε φραγ. έχει ελ. αν. φράγμα και κάτω φραγμή, έχει μέγιστο κάτω φράγμα τότε το ελάχιστο σώμα που προκύπτει είναι οι πραγματικοί αριθμοί.

Βασική μορφή της πληρότητας: Αρχιμήδεια ιδιότητα δηλαδή $\frac{1}{n} \to 0$ ή για κάθε $\varepsilon > 0 \; \exists \, n_0$

ώστε $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0(\varepsilon)} < \varepsilon$

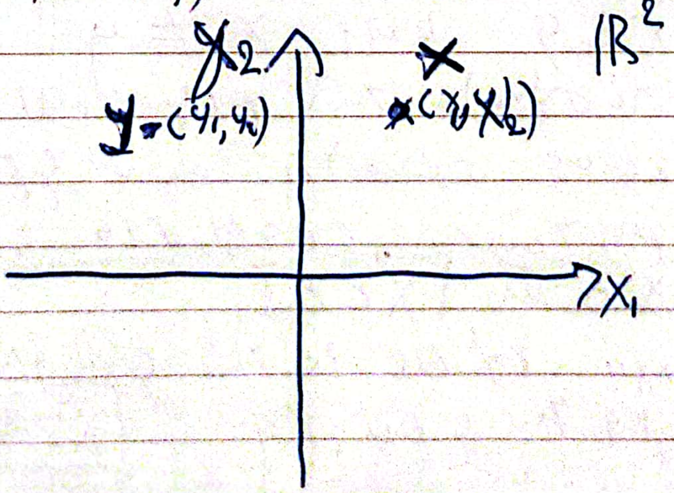
ΟΡΙΣΜΟΣ 1 (Μετρικής)

~~Μετρική~~ Παίρνουμε ένα σύνολο $X \neq \emptyset$
Μετρική στον X ονομάζουμε μία συνάρτηση
$d : X \times X \to \mathbb{R}_+$
Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται μετρική αν:

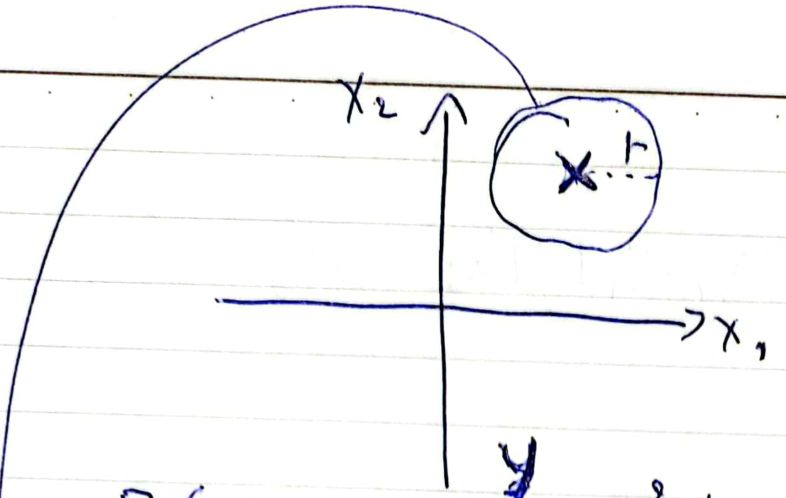
α) $d(x,y) = d(y,x)$ (συμμετρική ιδιότητα)

β) $d(x,x) = 0 \iff$ Ανν $x=0$ εάν X είναι διανυσματικός χώρος

γ) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (τριγωνική ανισ.)



$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2} \to \text{μετρική συνάρτηση}$$



$$B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^2 \mid d(x,y) < r \}$$

~~[illegible]~~

Ο $(\mathbb{R}^2, d)$ είναι ένας μετρικός χώρος)

Ονομάζουμε σ-αλγ. Borel που παράγεται από τον $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2, d) = \sigma(\mathcal{T})$

<u>π.χ.</u>

$p > 2$

$$d_p = \sqrt[p]{(x_1-y_1)^p + (x_2-y_2)^p}$$

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2, d) = \sigma(\mathcal{T}_p)$$

Για την 1 μετρική

$$d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$$

Η σ-αλγ Borel είναι αυτή που παράγεται από τα ανοιχτά σύνολα.

~~[illegible]~~ Κάθε ανοιχτό σύνολο σε κάθε μετρ. χώρο είναι σύνολο που προκύπτει από ένωση ανοιχτών σφαιρών.

Για $p=\infty$

$$d_\infty(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$$

Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ A_n: ξένα μεταξύ τους και $A_n \in \mathcal{F}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$

Τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

Το πεδίο τιμών κάθε μέτρου είναι θετικοί πραγματικοί.
Εαν η σειρα συγκλίνει τότε $a_n=(\mu A_n)\to 0$
Αυτό πάλι έχει να κάνει με την Αρχιμήδειο ιδιότητα των πραγματικών.

Αν $a_n=\frac{1}{n}$ τότε $a_n\to\infty$