Μάθημα 7: (1/4/2024)

1) Σύγκλιση ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών: (Νόρμα):

Έστω E διανυσματικός χώρος.

Μια συνάρτηση $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$

και $x : \longmapsto \|x\|$ ονομάζεται νόρμα στον E,

αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

i) $\|x\| = 0 \Rightarrow \boxed{x = \emptyset.}$

ii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in E$

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $x \in E$

Παραδείγματα:

i) Η $\|X\|_2 = \left(\int_\Omega |X|^2(\omega)\, d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{2}}$ στον $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$,

όπου $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: χώρος πιθανότητας.

ii) Η $\|X\|_p = \left(\int_\Omega |X|^p(\omega)\, d\mu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < +\infty$,

Σαρώθηκε με το CamScanner

iii) Η $\|X\|_\infty = \underset{\substack{\shortparallel \\ \text{essential} \\ \text{supremum}}}{ess.sup}(|X|)$, όπου $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$

2) <u>Ολοκλήρωμα καρτεσιανού συνόλου με κανόνα Hölder:</u>
Με καρτεσιανό σύνολο $(\Omega, \mathcal{F}, \mu) \times$ πιθανότητες:

$$E(|XY|) = \int_\Omega |XY| d\mu \leq \|X\|_p \|Y\|_q.$$

Αν ισχύει ο κανόνας του Hölder: $\Longrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p < +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$.

3) <u>Ομοιόμορφες και L^p συγκλίσεις:</u>
Έστω $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μετρήσιμων τυχαίων μεταβλητών, όπου:

$$X_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} X \quad (X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega), \text{ κατά σημείο } \mu\text{-σ.β. (σχεδόν βέβαια)}).$$

Αν $X_n \xrightarrow{o\mu.} X$, τότε: Από παρατήρηση, από τον ορισμό της $\|\cdot\|_\infty$, στην L^∞:

$$\lim_{n\to+\infty} \|X_n - X\|_\infty = 0.$$

Αν $X_n \xrightarrow{L^p} X \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \|X_n - X\|_p = 0$, αν $1 \leq p < +\infty$.

Σαρώθηκε με το CamScanner

4) Πρόταση (Σύγκλιση L^p χώρου – Πρόταση Young):

$$\text{Αν } X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X, \quad 1 \le p < +\infty$$

$$(\not\Leftarrow)$$

5) Συνάρτηση Young:

$$\phi(x) = \frac{1}{p}|x|^p, \quad \text{με} \quad \|x\| = \left(\int_\Omega |x|\, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

6) Εσωτερικό Γινόμενο:

Αν το $p=\frac{1}{2}$, και $q=\frac{1}{2}$, από κανόνα Hölder:

$$\int_\Omega |xy|\, d\mu \le \|x\|_2 \, \|y\|_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x, y\rangle = \int_\Omega xy\, d\mu.}$$

7) Χώρος Hilbert:

Απάντηση: Θέτω ανισότητα Hölder $x_1 = X_n - X$ και $y_1 = 1_\Omega$.

Τότε: $0 \le \int (|X_n - X| \cdot 1)\, d\mu \le \|X_n - X\| \, \|1_\Omega\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Τότε: $0 \leq \underbrace{\int_{\Omega}(|X_n - X| - 1)\, d\mu}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0.} \leq \|X_n - X\|_p \cdot \|\ell_2\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

Ο χώρος $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ είναι Χώρος Hilbert. $(E, \langle , \rangle, \|\cdot\|, \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in E, \langle x, y\rangle \geq 0,$

με: $\ell^2(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu) = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \overset{\mu(\{n\})}{\overset{\shortparallel}{\mu_n}} < +\infty\}$

(Ο χώρος Hilbert ισχύει μόνον όταν: $\boxed{p=2}$, δηλαδή μόνον ο $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ είναι χώρος Hilbert

8) Ορισμοί:

Αν $X_n \to X$, και $Y_n \to Y \Rightarrow \boxed{X = Y}$ ή $\boxed{X \neq Y}$.

Αν $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0 \Rightarrow \boxed{X \neq Y}$

και τότε: $\|X_n - X + (Y - X_n)\| \leq \|X_n - X\| + \|X_n - Y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, με $0 < \|X - Y\|$. $\left(\overset{\text{ή}}{Y - X}\right)$

9) Ανισότητα Markov:

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και έστω $X: \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-μετρήσιμη.

Αν $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, τότε:

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$0 \le \mu\Big(\underbrace{|\overset{Y_n - Y}{\overset{\parallel}{X}}| \ge \varepsilon}_{\{\omega\in\Omega \,|\, |X|\ge\varepsilon\}}\Big) \le \frac{\int_\Omega |X|\, d\mu \,(=E(|X|))}{\varepsilon}$$

$$\to \underbrace{\alpha(|Y_n - Y|)}_{\alpha_n} < \delta.$$

(Από Πιθανότητες 1, $P(|X|\ge\alpha)\le \frac{E(|X|)}{\alpha}$ (Ανισότητα Markov)).

Έστω $Y_n \xrightarrow{\mu} Y$, και $\varepsilon>0$ <u>ενδεχόμενο</u>, με $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, Y, $\delta>0$, $n_0(\delta)$, όπου $n\ge n_0(\delta)$.

Τότε για να βρούμε την μοναδικότητα του ορίου κατά πιθανότητα ($Y_n \xrightarrow{d} Y$), κάναμε χρήση των ιδιοτήτων της μετρικής, και ένας τύπος υπολογισμού της απόστασης είναι:

$$d(X,Y)=\int_\Omega \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\,d\mu.$$

(Στην αντίθετη περίπτωση, κάναμε χρήση των ιδιοτήτων της νόρμας, όπως παραπάνω και βρήκαμε τη μοναδικότητα των ακολουθιών $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.)

Σαρώθηκε με το CamScanner