04/03/2024

Επομενη:
Ανοικτά σύνολα σε μετρ. και τοπολ. χώρο, B_X, $B_{\mathbb{R}}$

Διαμέριση D ενός $\Omega \neq \varnothing$ ονομάζεται κάθε οικογένεια μη κενών και ξένων μεταξύ τους υποσυνόλων του Ω. συμβολ: $\sigma(D)$

Η σημασία της ενοίας αυτής της χρήσης των διαμερίσεων φαίνεται από παράδειγμα

Εστω Ω πεπερασμένο σύνολο. Ορίζουμε κάθε $f: \Omega \to \mathbb{R}$.
Μια f ονομάζεται μετρήσιμη για την ατείρμια f- μετρήσιμη αν θεωρήσουμε ότι ο Ω είναι εφοδιασμένος με μια σ-αλγ. $\mathcal{F}$ δηλ $(\Omega, \mathcal{F})$ αν και μόνο αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ για κάθε σύνολο $B \in B_{\mathbb{R}}$.
Και επειδή από πράξεις συνόλων η αντιστρ. εικονα διατηρεί όλες τις ιδιότητες για να είναι μια $\mathcal{F}$-μετρήσιμη αρκεί ν.δ.ο. η $f^{-1}(\Sigma) \in \mathcal{F}$ για κάθε $\Sigma \in \mathcal{T}$ τ.ω. $B_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{T})$ π.χ. τα ανοιχτά διαστήματα.
(π.χ.) $\mathcal{T} = \{ I \subseteq \mathbb{R}, I$ ανοιχτό διασ$\}$
Για να ελέγξω την διαμερισιμότητα της f αρκεί ν.δ.ο. $\boxed{f^{-1}(B) \in \mathcal{F}}$

Μετρισιμότητα σημαίνει ό η σχέση των διαμερίσεων και τις σ-αλγ.

π.χ.
Αν υποθέσουμε ότι $\Omega = \{1, 2, \dots, k\}$ και έστω D μία διαμέριση του Ω που αποτελείται από τα $\sigma_1, \dots, \sigma_m$. π.χ. ($\Omega = \{1, \dots, 5\}$) μία διαμέριση είναι αυτή που αποτελείται από το $\sigma_1 = \{1,2,3\}$ και $\sigma_2 = \{4\}$ και $\sigma_3 = \{5\}$
Μπορεί σε κάθε σημείο του συνόλου μια συνάρτηση $f: \Omega \to \mathbb{R}$ μπορεί να παίρνει διαφ. τιμές.
π.χ. $f(\{1\}) \neq f(\{2\}), \dots, \neq f(\{5\})$
Οπότε μέσω των τιμών της f αυτό που λαμβάνει και την αντίστοιχη πληροφ. σ-αλγ αυτή αντιστοιχεί σε διαμέριση μονοσυνόλων.

Μπορεί όμως και να μην είναι έτσι. όπως
Σε αυτήν την περίπτωση η μετρισιμότητα, αυτό υποχρεώνει το πόσο διαφορετικές είναι μεταξύ τους οι τιμές της f. Άρα αυτά στοιχεία για την διαμέριση, στα σύνολα τα οποία παράγουν την σ-αλγ.

Έστω ότι έχω μια διαμέριση
Ω: πεπερασμένο σύνολο και η $D = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ είναι μια διαμέριση του Ω.
Τότε ισχύει η εξής πρόταση

ΠΡΟΤΑΣΗ | Αν η $\mathcal{F} = \sigma(D)$ και $f: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρίσιμη, τότε η f παίρνει το πολύ κ διακεκριμένες τιμές ~~f_1, f_2~~ ... $f_i = f(\sigma_i) = f_i(S)$ για κάθε $i = 1, \dots, k$

και $S \in \sigma_i$

δηλαδή είναι σταθ. στα στοιχεία της διαμέρισης

ΑΠΟΔΕΙΞΗ | (Με άτοπο απαγωγή)
Αν υπήρχε κάποιο διάστημα το οποίο θα περιείχε ~~κάποια~~ κάποια διαφορετική τιμή από τις $f_1, \dots, f_k$ έπρεπε μεταξύ κάποιων $f^{-1}((\;)) \in D$

Άρα μετρισιμότητα σημαίνει ότι κάθε σ-άλγεβρα είναι μια ένδειξη της πληροφορίας που έχουμε για τη τιμή της ~~κάθε~~ συνάρτησης.
Όσο λεπτύνει η ~~σ~~ σ-αλγ. (διαμέριση) σημαίνει ότι ~~ο~~ παίρνει περισσότερες διακυμάνσεις στο πλήθος τιμές μια συνάρτηση.

Η $\sigma(f)$ που παράγουν οι αντίστροφες εικόνες των ανοικτών διαστ. $f^{-1}(a, b)$, $a < b$

Για τις ακολουθίες τυχ. μετ. ή συναρτ. έχουμε:

Μια ακολουθία συναρτ. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ όπου f_n
$f_n: \Omega \to \mathbb{R}$ για καθε $n \in \mathbb{N}$ και υπο
θέτουμε ότι το $\Omega \neq \mathbb{R}$, ή κάποιο κλειστό
~~υποσύνολο~~ υποδιάστημα του.
Θα λέμε ότι $f_n \xrightarrow[\text{σημείο}]{\text{κατα}} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$

τέτοιο ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Δηλαδη η f_n είναι ακολ. πραγμ. αριθμών
που εξαρταται απ'το x και συγκλίνει στο Ω
αλλα η συγκλιση εξαρταται απ'το x.
Ενω εαν δεν εξαρτάται απ'το x τότε
η σύγκλιση ονομάζεται ομοιόμορφη
στην f.
~~Επομενως~~ Η ομοιομορφη επεται στην
κατα σημειο σύγκλιση αλλα το αντί-
στροφο δεν ισχυει.

~~Παρατηρηση εαν η ακολουθια f_n συγκλίνει
στην f κατα σημειο~~

ΠΡΟΤΑΣΗ| Εαν η $f_{n,\ n\in\mathbb{N}} : \Omega \to \mathbb{R} \ ((\Omega, \mathcal{F}))$

Εαν το Ω είναι μετρ. χώρος τότε
$d(f_n, f) < \varepsilon \to$ (ομ. ομοιομ. συγκ. σε μετρ χώρους)
και είναι ονετ. του X όπου X σημείο του
μετρ. χώρου.
Εαν η $f_n \xrightarrow[\text{σημείο}]{\text{κατά}} f$ ~~τοτε~~ και η f_n είναι

$\mathcal{F}$-μετρήσιμη για κάθε $n \in |X|$, τότε και η f είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμη όπου $f: \Omega \to \mathbb{R}$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u> κάθε f_n $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ όπου A είναι ~~κάθε~~ κάποιο υποσύνολο μιας οικογένειας συνόλων C του $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $B_{\mathbb{R}} = \sigma(C)$.

Ως τέτοια σύνολα επιλέγω τα άνω μη φραγμ. ανοιχτά διαστήματα τα οποία παράγουν την $B_{\mathbb{R}}$

Έστω $C = \{(a, +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$

$f^{-1}((a, +\infty))$ ~~...~~ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Τα x που ανήκουν είναι εκείνα όπου ~~$f(x)>a$~~

$f(x) > a + \frac{1}{k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k} > \varepsilon > |f_n(x) - f(x)|$

Άρα $f^{-1}(a, +\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} f_n^{-1}\left(\left(a + \frac{1}{k}, +\infty\right)\right)\right) \in \mathcal{F}$

Άρα αποδεικνύεται ότι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρησίμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμο ~~...~~ άρα και το ομοιόμορφο όριο μιας f_n είναι μετρ. συναρτ.
Τα πιο απλά εργαλεία για να αναλύσουμε τις μετρ. συναρτ. είναι οι απλές.

$f: \Omega \to \mathbb{R}$ τ.ω. $f(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i I_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{F}$, $x \in \Omega$

Τα A_i μπορεί να είναι μια διαμέριση του Ω.

Στην περίπτωση αυτό είναι συμβατό με το ότι αρκεί να έχουμε τις τιμές της f στα σύνολα αυτά διακρίνει όπου ορίζει οι τιμές είναι τα A_i για να περιγράψουμε την f.

Το σύνολο των απλών συναρτήσεων είναι εκτός από διαν. χώρος είναι και διαν. σύνδεσμος.

Έστω f απλή συν. Τότε $|f|, f^+, f^-$ όπου $|f| = (f) \underset{\text{μέγιστο}}{\vee} (-f)$, $f^+ = f \vee 0$ → μηδενική συν.

και $f^- = (-f) \vee 0$

Επίσης ισχύει ότι για κάθε χώρο συναρτήσεων (διαν. συνδέσμου) $f = f^+ - f^-$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ → μέτρο.

Αυτή η τριάδα ονομάζεται χώρος μέτρου.

Το ολοκλήρωμα κάθε απλής

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{k} a_i \, \mu(A_i)$$