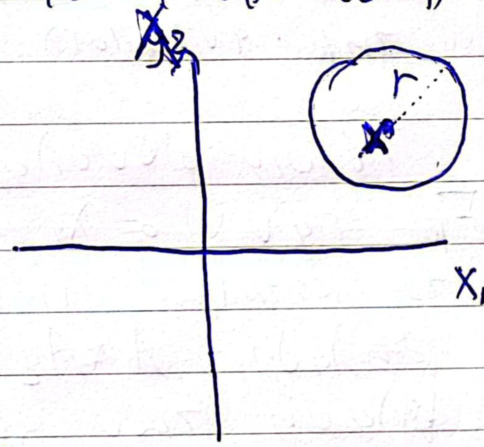
11/03/2024

Έστω (X, d) μετρικός χώρος με την μετρική d και $A \subseteq X$ μη κενό.
Το A° = η ένωση όλων των ανοικτών υποσυνόλων που περιέχουν το A και $\overline{A}$: η τομή όλων των κλειστών υποσυνόλων στα οποία περιέχεται το A.
Οι συνέπειες αυτών των δύο

ΠΡΟΤΑΣΗ | (i) A°: ανοικτό υποσύνολο του (X, d)
(ii) $\overline{A}$ = κλειστό υποσύνολο του (X, d).

ΠΟΡΙΣΜΑ | Τα A° ανήκουν στην $B(x,r)$ που παράγουν τα ανοικτά υποσύνολα $B(x,d)$ και το σύνορο του από ορισμό $(\partial A) = \overline{A} \cap (\overline{X \setminus A}) \in B(x,d)$.



$B(x,r) = \{ y \in \mathbb{R}^2 \}$

$\{ (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \leq r \}$

Το σύνορο ∂A αν το A είναι η μπάλα το σύνορο είναι η περιθώρια του κύκλου.

Πως ορίζω τα μέτρα σε καρτεσιανά γινόμενα μετρικών χώρων; δηλ. $(X_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ $(X_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ .... $(X_k, \mathcal{F}_k, \mu_k)$
και θέλουμε να ορίσουμε ένα μέτρο στον καρτεσ. γινομ. $(X_1 \times X_2 \dots \times X_k)$

Ποια θα είναι σ-αλγ. που θα συμπεριλάβει όλα αυτά;

Απάντηση $\sigma(\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 \times \dots \times \mathcal{F}_k)$ Θεωρούμε την, οπότε έχουμε $d(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$ όπου $x, y \in X_1$

παρατηρούμε ότι κάθε X ~~...~~ καθορίζει με ~~...~~ μονοσύνολο ~~...~~ ανοικτή μπάλα ως προς την μετρική με την οποία είναι εφοδιασμένος ο X_1. Επομένως αν γράφουμε ακτίνα $0<\varepsilon<1$ τότε $d_{X_1}(x,y)<\varepsilon$ $\Vert$ $\{x\}$

Οπότε κάθε διάνυσμα $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ανήκει αντίστοιχα στοιχείο της αντίστοιχ. σ-αλγ. Borel.

$X_1 \times X_2 \to X_1 \times A_2$ Τέτοια σύνολα ανήκουν στην οικογένεια $\mathcal{F}_k$ εάν ο X_1 είναι με την ~~...~~ διακριτή μετρική ή εάν δεν είναι δηλαδή $A_1 \times A_2$, $A_1 \in \mathcal{F}_1$, $A_2 \in \mathcal{F}_2$ δεν ανήκουν στην κλάση των μέτρων που θεωρούμε για την παραγωγή ή ολων διάστα- των χώρων.

Έστω μετρήσιμος χώρος $(\Omega, \mathcal{F})$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε το $\mu \vee \nu$ για οποιαδήποτε μέτρα όπου $\mu, \nu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε μ και ν να παίρνουν και αρνητικές τιμές. Δηλαδή τα ν να τα χρησιμοποιούμε για την αφαίρεση κάποιου εμβαδού.
Επομένως ο χώρος των μέτρων

countably additive $Ca(\Omega, \mathcal{F}) = \{\mu : \Omega \to \mathbb{R}\}$ όπου μ: μέτρο στην $\mathcal{F}$
$(\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ όπου

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι ξένα μεταξύ τους υποσυνόλα της $\mathcal{F}$.

Τώρα με την $\mu + \nu$, $\lambda \cdot \mu$ η οικογένεια αυτή των συναρτήσεων γίνεται διανυσματικός χώρος. Άρα το $fa(\Omega, \mathcal{F})$ είναι υπόχωρος του $Ca(\Omega, \mathcal{F})$.

Έστω $\mu_1 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$,
$\mu_2 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$

inf

Εάν θεωρήσουμε το $\mu_1 \vee \mu_2 = \max\{\mu_1, \mu_2\}$

$\max\{f_1, f_2\}(A) = ?$ $\min\{f_1, f_2\}(A) = \min\{f_1(A), f_2(A)\}$

Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος
$\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$
$(\mu_1 \vee \mu_2)(A) = \sup\{\mu_1(A) + \mu_2(B \setminus A), B \subseteq A, B \in \mathcal{F}\}$
$(\mu_1 \wedge \mu_2)(A) = \inf\{\mu_1(A) + \mu_2(B \setminus A), B \subseteq A, B \in \mathcal{F}\}$

Τα $\mu_1 \vee \mu_2 = \mu_2 \vee \mu_1$, $\mu_1 \wedge \mu_2 = \mu_2 \wedge \mu_1$ ισχύουν.

Έστω (Ω, F) μετρ. χώροι
Υπάρχει όντι χείο το οποίο ανήκει στο $f(\Omega, \beta)$ τέτοιο ώστε $(c(\Omega, F))^c$;

Ναι υπάρχει! Εάν θεωρήσουμε το $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$

~~Θεωρήσαμε ως~~

Ορίζουμε με $e_n = X_{\{n\}} = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$

$\sum_{j=1}^{k} e_j = f_k$ Έστω $f = \lim_{n\to+\infty} f_n$

Έστω (Ω, F)
$\mu : F \to \mathbb{R}_+$ (εξωτερικό μέτρο)
εάν ισχύουν

$\boxed{i}$ $\mu(\phi) = 0$
$\boxed{ii}$ $A, B \in F$ και $A \subseteq B$: $\mu(A) \leq \mu(B)$
$\boxed{iii}$ $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

εάν το μέτρο Lebegue $\lambda([a,b)) = b-a$
τότε το εξ. μ. $\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda A_n \,\middle|\, A_n \subseteq \bigcup (a_n, b_n)\right\}$
έτσι το $\lambda^*(A) = \inf\left\{\sum (b_n - a_n) \,\middle|\, A \subseteq \bigcup (a_n, b_n)\right\}$