13/03/2024

ΟΡΙΣΜΟΣ|
Έστω Ω μη κενό σύνολο. Τότε η $\mu: 2^{\Omega} \to \mathbb{R}_+$ ονομάζεται εξωτερικό μέτρο στο Ω αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες.

i| $\mu(\emptyset)=0$

ii| Αν $A \subseteq B$, τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$

iii| $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ αν $A_n \subseteq \Omega$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$

ΟΡΙΣΜΟΣ| Έστω $\mathcal{R}$ μια κλάση υποσυνόλων του Ω. Τότε η $\mathcal{R}$ ονομάζεται υποδακτύλιος του Ω αν $\emptyset \in R$, $A \cap B \in R$, $A, B \in R$ και $A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{m} C_k$, όπου $A, B \in R$ και $C_k \in R$ και είναι ξένα μεταξύ τους.
Παράδειγμα υποδακτυλίου είναι $(\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Έστω $A \subseteq \Omega$. Το A ονομάζεται μ-μετρήσιμο αν $\mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^c)$ για κάθε $S \subseteq \Omega$

ΠΡΟΤΑΣΗ|
Η κλάση $\Sigma_\mu = \{A \subseteq \Omega \mid A$ είναι μ-μετρήσιμο$\}$ είναι μια σ-άλγεβρα του Ω.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ| Έχουμε στον νου τον ορισμό του μετρ. συνόλου
$\mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S \cap A^c)$ $\alpha, \subseteq \in \Sigma_\mu$
Εάν έχουμε κάποιο $A \in \Sigma_\mu$ τότε το $A^c \in \Sigma_\mu$
διότι $\mu(S \cap \underbrace{A}_{(A^c)^c})$

Τότε εάν και η ιδιότητα της σ-άλγεβρας

© NEXT Co. GREECE

προκύπτει με επαγωγή απ' τον ορισμό του μετρ. συνόλου

Το μ^* είναι ορισμένο σ' ένα δακτύλιο
$\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ και το μ^* ορίζεται ως εξής:
$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \mid A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in R$ για κάθε $n \in \mathbb{N}\}$

Το μ^* είναι μ^*: εξωτερικό μέτρο στο Ω $(\inf \emptyset = +\infty)$
Όμως: μ^* είναι μέτρο στην Σ_μ (αυτό είναι βασικό αποτέλεσμα της Θ. μέτρου)
Η απόδειξη προκύπτει απ' τον ορισμό του μετρ. συνόλων.
Εάν τα $S \subseteq \Omega$ αλλά που το $S \in \Sigma_\mu$ αφού Σ_μ είναι σ-αλγ. τότε το μ^* είναι μέτρο στο Σ_μ.

$$\mu^*\big|_{\Sigma_\mu} = \mu$$

Ποιον ρόλο παίζει εδώ η έννοια του δακτυλίου;
Ο δακτύλιος έχει να κάνει με το Ω

Είναι κάθε δακτύλιος μια σ-αλγ;
Ποια η σχέση μεταξύ υποδακτυλίων και αλγεβρών;

Αλγ. υποσυνόλων του Ω.
Αν $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
Εάν $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
Εάν $C_1, \dots, C_k$ ξένα μεταξύ τους υποσύνολα της $\mathcal{F}$
τότε η $\cup C_k \in \mathcal{F}$.
Όπου $\mathcal{F} \subseteq R \rightarrow$ παράγει υποδακτύλιο.

Ολοκλήρωση

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος μέτρου και $f: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ απλή συνάρτηση δηλ. έχει την εξής μοναδική έκφραση

$$f(\omega) = \sum_{j=1}^{k} a_j \, \mathbb{I}_{A_i}(\omega),$$ όπου

$a_j \in \mathbb{R}_+$, $A_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, k$ και $\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in A \\ 0, \omega \notin A \end{cases}$

Τότε $\int_{\Omega} f \, dp = \sum_{j=1}^{k} a_j \, p(A_j)$.

Επίσης το σύνολο των απλών συναρτήσεων με πράξεις $+, (\cdot)$ και τις πράξεις $\vee, \wedge$ είναι διανυσματικός σύνδεσμος

ΠΡΟΤΑΣΗ 1 Κάθε θετική μετρήσιμη συνάρτηση $f: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ είναι το κατά σημείο* όριο μιας ακολουθίας $f_n: \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ που είναι απλές (για κάθε $n \in \mathbb{N}$)
* $f_n(\omega) \longrightarrow f(\omega)$, $\omega \in \Omega$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την εξής διαμέριση ~~του~~ του $[0, +\infty)$

$$\left[0, \frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{n-1}{2^n}, \ldots, \frac{n}{2^n}\right)$$

δηλαδή χωρίζουμε το $+\infty$ σε 2^n+1 σημεία με αρχή το 0 και τέλος το $\frac{n}{2^n}$

και θεωρούμε ότι το κάθε.

$$A_n^i = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{\ }, \frac{i}{\ }\right]\right) \quad i = 1, \ldots, n \quad + f^{-1}([n, +\infty))$$

όλα αυτά τα $A_n^i \in \mathcal{F}$ διότι έχουμε υποθέσει ότι η f είναι μ-μετρήσιμη και διαπιστώνουμε ότι $f_n(\omega) = \sum_{i=1}^{2^n} \frac{i-1}{\ } \cdot \mathbb{I}_{A_n^i}(\omega) + n\mathbb{I}_{f^{-1}([\frac{n}{2^n}, +\infty))}(\omega)$

Αυτή η ακολουθία συναρτήσεων είναι αύξουσα. $f(\omega) \uparrow$ σε κάθε σημείο όριο την f

Αν πάρω $0 \leq f_n(\omega) - f(\omega) < \frac{1}{2^n}$

δηλαδή $\int_0 f_n \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)}{\ } \mu(A_n^i) + \frac{n}{\ } \mu(A_{n+1}$

Σαρώθηκε με το CamScanner