03/04/2024

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$: χώρος πιθ.

Η ακολουθία $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τ.μ. $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-μετρ. τότε θεωρούμε ότι η $X_n \xrightarrow{d} X$ (κατά κατανομή) αν οι $F_{X_n}(x) \longrightarrow F_X(x)$ για κάθε x το σημείο συνέχειας των F_{X_n}, F_X, $n \in \mathbb{N}$

Το F_Y (όπου Y κάποια απ' τις X_n) είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για την τυχ. μετ. Y.

$$F_Y(x) = \mu(\{\underbrace{\omega \in \Omega \mid Y(\omega)}_{} \leq x\})$$

$$\mu\left(Y^{-1}((-\infty, x])\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

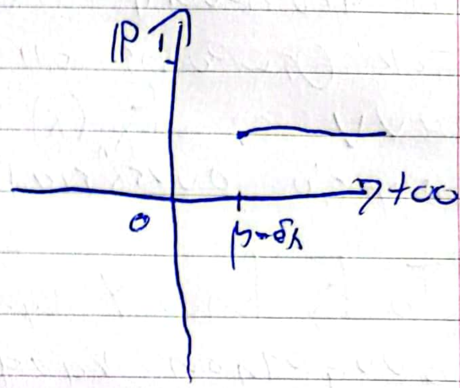
Το καινούριο μέτρο επειδή στον ορισμό θα λέει ποια είναι η Y ονομάζεται και μέτρο κατανομής της Y.

- F_Y : αύξουσα
- F_Y : δεξιά συνεχής $\left(\lim_{x_n \to x} F_Y(x_n) = F_Y(x)\right)$
- $\lim_{n\to-\infty} F_Y(x) = 0$
- $\lim_{n\to+\infty} F_Y(x) = 1$

και το σύνολο των x στην ευθ. πραγμ. αριθμ. που ισχύουν δεξιά και αριστερά συνεχείς ονομ. σημείο συνέχειας της $F_Y(x)$.

Εάν (X_n): ακολ. ανεξ. τυχ. μετ. και $E(X_n)=\mu$ μ πραγ. αριθ.
τότε $E(X_n)=\mu$ τότε

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{d} \mu$$



Η συνκ. κατά πιθ. $X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$

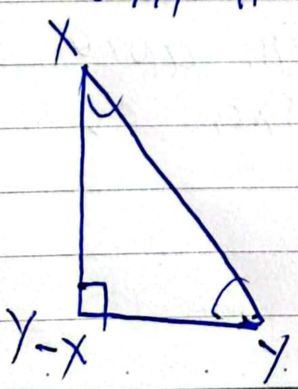
Στην σύγκλιση κατά μέτρο πιθ. χρησιμοποιούμε μια μετρική απόσταση στις τυχ. μετ.

$$d(X,Y) = \int_\Omega \frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\, dP$$

Εάν Εμετρ. χώρος τότε (E, d), $\|X\| = d(X, 0)$
(απόδειξη στον Ματζενούτη)

Γιατί σε χώρο $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με $p \neq 2$
$\|X\|_p = \left(\int_\Omega |X|^p\, dP\right)^{1/p}$ δεν είναι χώρος Χίλμπερτ.

Γιατί $\|X-Y\|_p^p \neq \|X\|_p^p + \|Y\|_p^p$



$Y = X + (Y-X)$

$ca(\Omega, \mathcal{F})$ ο χώρος των αριθμήσιμα προσθετικών προσημασμένων μέτρων στον $(\Omega, \mathcal{F})$

Έστω $\nu, \mu \in ca(\Omega, \mathcal{F})$ και $\nu(A)=0$ αν το $\mu(A)=0$, $A \in \mathcal{F}$ $\nu \ll \mu$ και το ν ονομάζεται απολύτως συνεχές ως προς το μ.
Αν $\mu(A)=0$ στην περίπτωση όπου $\mu(A)=0$ $A \in \mathcal{F}$ τότε $\mu \ll \nu$ τότε το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το ν.
Αν $\nu \ll \mu$, $\mu \ll \nu$, τότε τα ν, μ ονομάζονται ισοδύναμα και ο συμβ. είναι $\mu \sim \nu$ ή $(\nu \sim \mu)$

$25-25 = 20-20 \Leftrightarrow 5(5-5) = 4(5-5) \Rightarrow 5=4$