08/04/2024

$(\Omega, \mathcal{F})$: μετρήσιμος χώρος και μ, ν: σ-πεπερασμένα μέτρα στον $(\Omega, \mathcal{F})$. σ-πεπερασμένο ονομάζεται ένα μέτρο $m: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ αν υπάρχει διαμέριση $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τ.ω. $A_n \in \mathcal{F}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$.

Ένα μέτρο μ ονομάζεται απόλυτα συνεχές ως προς το ν συμβ: $(\mu \ll \nu)$ αν $\forall A \in \mathcal{F}$ τ.ω. $\nu(A) = 0$ ισχύει $\mu(A) = 0$. Όταν το $\nu \ll \mu$ και $\mu \ll \nu$, τότε τα μ, ν ονομάζονται ισοδύναμα συμβολισμός: $(\mu \sim \nu)$
$(\mu \sim \nu)$ είναι μία σχέση ισοδυναμίας με την συνολοθεωρητική έννοια, δλδ είναι ανακλαστική $(\mu \sim \mu)$, είναι επίσης συμμετρική διότι αν $(\mu \sim \nu)$ τότε ισχύει η σχέση $(\nu \sim \mu)$, και είναι και μεταβατική, διότι αν $(\mu \sim \nu)$ και $(\nu \sim \lambda)$ τότε ισχύει $(\mu \sim \lambda)$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Radon–Nikodym)
Αν $\nu \ll \mu$ και μ, ν είναι σ-πεπερασμένα μέτρα στον $(\Omega, \mathcal{F})$ τότε υπάρχει μια συνάρτηση μ-ολοκληρώσιμη $f: \Omega \to \mathbb{R}$ τ.ω.

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu \quad \left(\text{συμβ: } f = \frac{d\nu}{d\mu}\right)$$

και ονομάζεται παράγωγος κατά R-N του ν ως προς το μ.
Εάν έχουμε δύο f, g που ικανοποιούν αυτήν την σχέση τότε διαφέρουν σε σύνολα μέτρου 0.

Έστω τυχ. μετ. $X: \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$-μετρήσιμη.
Τότε αυτή η X επάγει ένα μέτρο πιθανότητας ν_X όπου $\nu_X(A) = \nu(X^{-1}(A))$.
Για τα επαγόμενα μέτρα ισχύει ότι
$\nu_X(A) = \int_A f \, d\lambda \Leftarrow (\nu_X \ll \lambda)$

Αυτή η f είναι η σ.π.π. της τυχ. μετ. X.

ΤΥΠΟΙ

Σύγκλιση ακολουθιών τυχ. μετ.

Μια ακολουθία πραγμ. αριθμών a_n, $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει σε κάποιον πραγμ. αριθμό a αν είναι βασική [ή Cauchy] δηλ. αν
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_m - a_n| < \varepsilon \ \forall m, n \geq n_0(\varepsilon)$
όπου $m, n \in \mathbb{N}$.
Επομένως για να μελετήσουμε την σύγκλιση ακολουθιών χωροσυναρτήσεων και οι ακολ. τυχ. μετ. είναι $X: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$.
Αν E: υπόχωρος του $\mathbb{R}^{\mathcal{F}}$ εφοδιασμένος με μία νόρμα $\|\cdot\|$ τότε θεωρούμε τον $(E, \|\cdot\|)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ / Μια ακολουθία $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όπου $X_n \in E$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ονομάζεται βασική ή ακολουθία Cauchy ως προς την νόρμα με την οποία έχουμε εφοδιάσει τον E αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω.
$\|X_m - X_n\| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0(\varepsilon)$

βασική $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Εάν κάθε ακολουθία Cauchy στον E με μια νόρμα $\|\cdot\|$ (εφοδιασμένος) συγκλίνει στον E δηλ. $\exists\, x \in E$ τ.ω. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\|x_n - x\| < \varepsilon\ \forall\ n \geq n_0(\varepsilon)$. Τότε αυτός ο χώρος εφοδιασμένος με τα παραπάνω ονομάζεται χώρος Μπάναχ (Banach)

Έστω $E = \mathbb{R}^m$. Τότε αποδεικνύεται ότι για κάθε ζεύγος από νόρμες $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ στον E ισχύει ότι:
$k_1\|x\|_1 \leq k_2\|x\|_2 \leq k_2\|x\|_1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$ και κάποιους $k_1, k_2 > 0$ (ή αλλιώς όπως συνήθως λέγεται οι $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$ είναι ισοδύναμες)
$\|x_n - x\| < \varepsilon,\ n \geq n_0(\varepsilon)$ για κάθε $\varepsilon > 0 \Leftrightarrow$
$|x_n(i) - x(i)| < \varepsilon(i),\ n \geq n_0\ \varepsilon(i),\ i = 1, \ldots, m$
Αυτό δεν ισχύει στο χώρο άπειρης διάστασης.

Έστω L^p, $\|\cdot\|_p$ $1 \leq p \leq +\infty$ εάν αλλάξω την νόρμα εστώ και αν είναι καλά ορισμένη δεν έπεται ότι είναι χώρος Banach.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου που είναι σ-πεπερασμένος. Τότε ο $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ είναι χώρος Banach ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_p$.
Όπου ορίζεται $\|x\|_p = \left(\int_\Omega |x|^p d\mu\right)^{1/p}$ αν $1 \leq p < +\infty$

και $\|x\|_\infty = \inf\{M > 0 : |x| \leq M,\ \mu\text{-σ.β.}\}$.

Ισχύει η ανισότητα του Hölder:

$$\int_\Omega |X \cdot Y| \, d\mu \leq \|X\|_p \cdot \|Y\|_q \quad \text{όπου } p,q : \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

και αν $p=1$ $q=+\infty$.

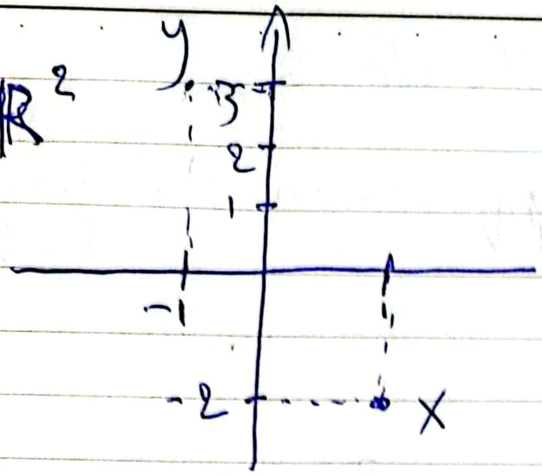
παρατηρώ ότι εάν πάρω στον L^p, $p>1$
και $\|Y\|_q = \mathbb{1}_\Omega$ τότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\underbrace{\int_\Omega |X| \, d\mu}_{L^1}$$

Όπως εάν εφοδιάσω τον L^p με την L^1 νόρμα
δεν είναι χώρος Banach ως προς την L^1 νόρμα
παρόλο που το ολοκλήρωμα που ορίζει την νόρμα
είναι καλά ορισμένο. Αλλά στην ~~του~~ διακριτή
δεν ισχύει αυτό που ξέρουν στην πεπερασμένη

Στον $\mathbb{R}$ αν πάρουμε δύο πραγματικούς τον α και
τον β $\alpha \leq \beta$. Άρα στον ~~[illegible]~~ διαν. χώρο
των πραγμ. αρ. είναι ολικά διατεταγμένοι.
Εάν δεν έχουμε διάταξη αυτό δεν ισχύει.

$\mathbb{R}^2$



Άρα όχι οι Ευκλείδιοι χώροι είναι ολικά διατεταγμένοι $n>1$.

Ονομάζονται μερικά διατεταγμένοι χώροι.

Αν πάμε στις άπειρες διαστάσεις L^p
$X(\omega) \geq Y(\omega)$ $\forall$ μ-σ.β.

Οπότε η κατά συντεταγμένη διάταξη δεν είναι ολική. Είναι μερική.
Όπως ορίζουμε στους πραγμ. μεγ.-ελάχ. ίσα κλπ.
Έτσι και εδώ ορίζουμε X^+, X^- $|X|$ κλπ.