15/04/2024

Σχέσεις μεταξύ κατά σημείο σύγκλισης και σύγκλισης κατά μέτρο όπως και σχέση μεταξύ σύγκλισης κατά σημείο και L^p-σύγκλισης.

ΟΡΙΣΜΟΣ (σύγκλιση κατά μέτρο)

Υποθέτουμε ότι έχουμε $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρο μέτρου και $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε η $f_n \xrightarrow{\mu} f$ δηλαδή η ακολουθία $\mu^*(\{\omega\in\Omega \mid |f_n(\omega)-f(\omega)|\geq\varepsilon\})$ συγκλίνει στο μηδέν για κάθε $\varepsilon>0$

Από τον ορισμό της σύγκλισης κατά μέτρο, ~~[illegible]~~ έστω $\varepsilon=\frac{1}{2^n}$, $n>1$.

Τότε, επαγωγικά για k_n: ακολουθία των φυσικών, δηλαδή για $k_{n+1}>k_n \dots >k_2>k_1$

ισχύει ότι $a_n=\mu^*(\underbrace{\{\omega\in\Omega \mid |f_{k_n}(\omega)-f(\omega)|<\frac{1}{2^n}\}}_{E_n})<\frac{1}{2^n}$

είναι μία ακολουθία πραγματικών αριθμών που συγκλίνει στο μηδέν.

~~[illegible]~~ Θα ονομάζουμε E_n τα σύνολα.

Έστω $E=\bigcap_{n=1}^{+\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k\right)$ παρατηρώ ότι εάν πάρω

$$\mu^*(E)\leq\mu^*(A)\leq\mu^*(B)$$

μονοτονία του εξ. μέτρου δηλ. αν $A\subseteq B$ τότε

από τον ορισμό εξωτ. μέτρου

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}E_k\right)\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\mu^*(E_k)$$

και επειδή κάθε $E_k \leq \frac{2}{n}$ τότε

$$\sum_{k}^{+\infty} \mu^*(E_k) \leq \frac{2}{2^n}$$

από αυτές τις 3 ανισότητες παίρνουμε ότι

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2}{2^n} \geq \mu^*(E) \geq 0$$

Άρα $\mu^*(E) = 0$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\omega \notin E$, υπάρχει κάποιος $k_n \geq n$, $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $|f_{k_n}(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow$ $f'_{k_n} \longrightarrow f$ <u>κατά σημείο</u>

Αν το μ είναι ~~[illegible]~~ πεπερασμένο μέτρο και η $f_n \xrightarrow{LP} f \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \to +\infty} 0$ όπου $1 \leq p \leq +\infty$

Αφού η $f_n \xrightarrow{\mu} f$, τότε υπάρχει υπακολουθία $f_{k_n} \longrightarrow f$ (κατά σημείο) ή αλλιώς (μ.σ.Β.)

Q

Έστω διαν. χώρος E, κάθε γραμμική συνάρτηση $x': E \to \mathbb{R}$ ονομάζεται γραμμικό συναρτησοειδές ή συναρτησιακό του E

Το σύνολο των γραμμικών συναρτησιακών με πεδίο ορισμού τον διαν. χώρο E με τις πράξεις $x'+y'$ και $\lambda \cdot x'$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x', y' \in E'$

$(x'+y')(x) = x'(x) + y'(x)$, $x \in E$ και το $(\lambda x')(x) = \lambda x'(x)$ είναι διανυσματικός χώρος και ονομάζεται αλγεβρικός δυϊκός χώρος του E.

Έστω $L^p(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ όπου $1 \leq p \leq +\infty$ και $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ χώρος μέτρου

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in L^p(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$, $x_n \xrightarrow{p} x$ τίθεται το ερώτημα

Για ποια $x' \in (L^p(\Omega, \mathcal{S}, \mu))'$ ισχύει ότι $x'(x_n) \to x'x$.

Αποδεικνύεται ότι (απόδειξη παραλείπεται)

ότι ο υπόχωρος του $(L^p_{L^p}(\Omega, \mathcal{S}, \mu))'$ για τον οποίο αν ισχύει $x_n \xrightarrow[L^q]{L^p} x$, τότε $x'(x_n) \to x'(x)$ είναι ο L^q, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p ως προς την ισότητα Hölder. δηλαδή

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{όπου} \quad 1 \leq p \leq +\infty \quad \text{και} \quad \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\langle x', x \rangle = \int_{\Omega} |x \cdot x'| \, d\mu \overset{\substack{\text{από αν.} \\ \text{Hölder}}}{\leq} \|x\|_p \cdot \|x'\|_q$$

Π.χ. $C(\Omega) \to [0,1]$ ~~$\int_0^1 |x(t)| \, dt = \|x\|_{+\infty}$~~

$$\max_{t \in [0,1]} \{ |x(t)| \} = \|x\|_{+\infty}$$