20/03/2024

Ολοκλήρωση ως προς ένα μέτρο

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου ή $(\Omega, \Sigma_\mu, \mu)$ όπου Σ_μ: η σ-άλγεβρα των μετρήσιμων συνόλων για την οποία από το Θ. Καραθεοδωρή $\mu^*(A) = \mu(A)$

ΟΡΙΣΜΟΣ | Απλή συνάρτηση ονομάζεται κάθε συνάρτηση της μορφής $f: \Sigma_\mu \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(\omega) = \sum_{i=1}^{k} a_i I_{A_i}(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και τα

$a_i \in \mathbb{R}$, $i=1,\dots,k$ ενώ $A_i \in \Sigma_\mu$ για κάθε $i=1,\dots,k$
Τότε ως ολοκλήρωμα της f ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό $\sum_{i=1}^{k} a_i \mu^*(A_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \mu(A_i) =$

$$= \int_\Omega f \, d\mu$$

ΟΡΙΣΜΟΣ | Μια άνω συνάρτηση, είναι κάθε $f: \Omega \to \mathbb{R}$ που είναι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας απλών συναρτήσεων την οποία συμβολίζουμε. Μια τέτοια ακολουθία την οποία συμβολίζουμε με $\varphi_n: \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και κάθε τέτοια $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσα κατά σημείο όπου

$\varphi_{n+1}(\omega) \geq \varphi_n(\omega)$, για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Συμβολισμός: $\varphi_n \uparrow f$.
Κατά σημείο όριο: $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\omega) = f(\omega)$

ΟΡΙΣΜΟΣ| Αν υπάρχει το $\lim_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \varphi_n \, d\mu < +\infty$ τότε ονομάζεται ολοκλήρωμα της f ως προς το μ και συμβολίζεται με $\int_\Omega f\, d\mu$.

~~Γενικότερα κάθε μια f ονομάζεται ολοκλη αν είναι~~

ΟΡΙΣΜΟΣ| Μια $f:\Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται ολοκληρώσιμη αν το $\int_\Omega f\,d\mu < +\infty$ είναι καλά ορισμένος πεπερασμένος αριθμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1| Έστω P μια διαμέριση του $[0,1]$ που αποτελείται από τα σημεία $P=\{t_0=0 < t_1 < t_2 \dots < t_k = 1\}$ και έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=a_i$, $i\in[t_{k-1},t_k)$ και $f(x)=a_k$ αν $x=1=t_k$

~~Η f είναι καλά ορισμένη~~ αν

$\mathcal{E}_\lambda$, όπου λ μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$

$$\int_{[0,1]} f\,d\lambda = \sum_{i=1}^{k} a_i (t_i - t_{i-1})$$

Έστω P_n διαμέριση του $[0,1]$ που για κάθε $n\in\mathbb{N}$ ορίζεται ως εξής:

$$A_n = \{t_0 = 0 < \dots \le t_{i-1} = \frac{i-1}{2^n} < t_i = \frac{i}{2^n} < \dots < t_n = n2^n\}$$

αντιστοιχισμός

κάθε A_n είναι μία διαμέριση που έχει $n+1$ σημεία.

Έστω $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε την εξής ακολουθία απλών συναρτήσεων $\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \cdot \mathbb{1}_{A_n^i} + f(x_n)\cdot X_n =$

$= n2^n, n \in \mathbb{N} \to \varphi_n(x) = \sum_{1}^{n2^n} f(t_{i-1}) \mathbb{1}_{A_n^i}(x) + f(x_n) \mathbb{1}_{\{x_n\}}(x)$ $n2^n$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\, d\lambda(x) = \sum_{i=1}^{n2^n} f(t_{i-1})\lambda(A_n^i) + f(x_n)\cdot \cancel{\lambda(\{x_n\})}^{0}$$

$\varphi_{n+1}(x) \ge \varphi_n(x), x \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}$ $\qquad \varphi_n \uparrow f$

Είναι κάθε περατική συνάρτηση f άνω συνάρτηση;

Όχι διότι η $\varphi_n \uparrow f$ δεν είναι προφανής.

~~λόγω ... αν η f είναι~~

$$\underset{\Uparrow}{\lim_{n\to+\infty}} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x)\, d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x)\, dx$$

$\boxed{\varphi_n \uparrow f}$