02/10/2023 (Σ)

1| Χρονική αξία του χρήματος και ασφ. συμβόλαια

2| Ασφαλίσεις ζωής - ράντες ζωής

3| Αποθέματα - Ασφάλιστρα

4| Αρχές - παραλλαγές υπολ. ασφαλίστρων

(Ω, F, P)

$$S^t = K^t + A^t - L^t$$

S: πλεόνασμα
K: κεφάλαια
A: Ασφάλιστρα
L: Αποζημιώσεις

Για έναν μία χρονική στιγμή t

Θάνατος
συντάξεις
ασθένειες

κλάδοι ασφαλίσεων ζωής.

$t \in [0, T]$ $\quad t \in \mathbb{N}$

$\kappa + \kappa i$ τόκος

i: επιτόκιο

$\kappa \qquad \kappa(1+i)$

$0 \qquad 1 \qquad 2 \quad \cdots \quad n \qquad n+1$

χρεί χρήμα

$0 \qquad 1+i = 1^{*}$

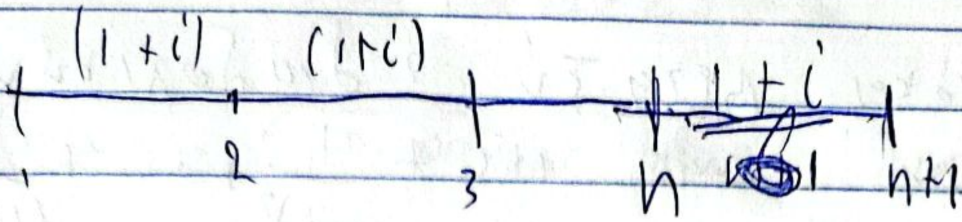
$1^{*} = \frac{1}{1+i}$: παρούσα αξία της νομισματικής μονάδας για χρόνο μεταξύ 0 και 1

$\frac{1}{(1+i)^n}$ = παρούσα αξία

παρούσα αξία: Το κεφάλαιο που έχω στην άκρη για να πληρώσω σε εκείνον που έχω την υποχρέωση να μου κάνει μια ενέργεια εκείνη την χρονική στιγμή

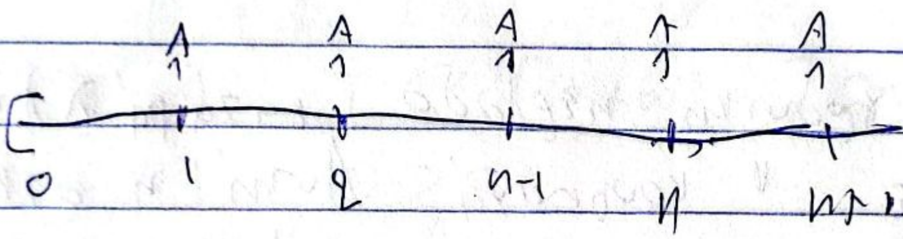
ο αντίστοιχος τόκος: Αν το i παραμένει ίδιο τότε ο τόκος είναι.

Σαρώθηκε με το CamScanner



και η αντίστοιχη παρούσα αξία θα είναι $\frac{1}{(1+i)^n}$

Αυτών η διαδοχική πληρωμή



Μοναδιαία ράντα επιτοκίου i n-χρονικών περιόδων, ληξιπρόθεσμη γιατί κάθε φορά πληρώνει 1 για 1 kg προϊόντος

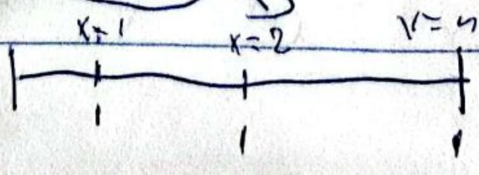
(A, A, A, ..., A)

→ βάσει n και όχι πια t μέθοδο

$D = (1+i)^n \cdot A$

σταθερό χρηματικό ποσό A σε όλες τις χρονικές περιόδους

$D = A\,\partial(n,i) \Leftrightarrow$



Ο τόκος μεταξύ 2 διαδοχικών περιόδων είναι $1+i + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n}$

Συνολική αξία ράντας:

$$\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^x} = \partial(n,i) = P_v(1,1,1,\dots,1,0)$$

Κάθε χρονική περίοδο καταβάλλω 1€ σε v κουμπαρά. Αυτή η οικονομική πράξη ονομάζεται ράντα. Η αξία αυτή της ράντας είναι η παρούσα αξία όλων των όρων μαζί που ανέρχονται σε 1.

Ράντα : $PV(v_1, v_2, \dots v_n | 0)$

$$Pv(V_n, 0) = PV(V_1, 0) + PV(2, 0) + \dots + PV(V_n, 0) = \frac{V_n}{(1+i)^n}$$

$$ΠΑΑ(\partial(n,i)) = \frac{(1+i)}{i}\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right)$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

03/10/2023 (6)

Χρόνοι είσπραξης Ασφάλιστρων

$Y, y(\omega) \in \mathbb{N}$ $(\Omega, F, \mathbb{P})$

$\mathbb{P}(Y(\omega) = y) = P_Y(y), y \in \mathbb{N}$

Χρόνος καταστροφής απογραφισμένου T

(T, Σ, p) $T \simeq [0, +\infty)$, $T \simeq [0, \theta]$
ή $[0, \theta]$, $\theta > 0$

$p(T(t) \leq x) = F_T(x)$
$(x_0, x_0 + h)$

$$P(T \geq x+h \mid T > x) = \frac{F_T(x+h) - F_T(x)}{\bar{F}_T(x)}$$

$$h_T(x) = \frac{F_T'(x)}{\bar{F}_T(x)}$$ hazard rate
(ρυθμός αποτυχίας κινδύνου)

$T \sim exp(\lambda)$ $F_T(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $x \geq 0$
$\bar{F}_T(x) = e^{-\lambda x} = P(T > x) = 1 - F_T(x)$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$\lambda_T(x) = \frac{f_T(x)}{1-F_T(x)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} \cdot (-\lambda), \quad x \geq 0$$

$I\ (0,1)$

$$\frac{1}{1+I} = V(I) \qquad V'(I) = \left| -\frac{1}{(1+I)^2} \right| = \frac{1}{(1+I)^2}$$

Η συναρτ. πυκν. πιθ. της V θα είναι $F_V(v) = F_I(i)$

$$v = \frac{1}{1+i} \Leftrightarrow 1 = v + vi \Leftrightarrow i = \frac{v-1}{v}$$

03/10/2023 (Φ)

Έστω 100

$100 + 100(i+1) \rightarrow$ τόκοι

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> | Έστω ότι τοκίζουμε για $t=30$ ημέρες το ποσό $K=125$ € με ετήσιο επιτόκιο 3,5%

~~N = K·t~~ Έστω N: χρόνοι τοκισμού. $N = K \cdot t = 3750$

Δ: σταθερός διαιρέτης $\Delta = \frac{360}{i}$

$$\Delta = \frac{360}{0{,}035} = 10285{,}71$$

Τόκος I $\quad I = \frac{N}{\Delta} = \frac{3750}{10285{,}71} = 0{,}364$

Άρα στις 30 ημέρες θα εισπράξουν

$$K + I = 125 + 0{,}364 = 125{,}364$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

κεφάλαιο k ανατοκίζεται για 5 έτη με i επιτόκιο $= 3\%$ και $K_5 = 300$

$$K_5 = K \cdot (1+i)^5 = 300 \Rightarrow$$

$$k = \frac{300}{(1{,}03)^5} = 258{,}78$$

ράντα ληξιπρόθεσμη αξία

$$a(n,i) = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

παρούσα

~~παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης~~

$$= \frac{1}{1+i} \cdot \left(\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{1 - \frac{1}{1+i}} \right) = \frac{1}{i} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right)$$

παρούσα αξία προκαταβλητέων αξιών

$$A(n,i) = 1 + \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{1 - \frac{1}{1+i}}$$

10/10/2023 (θ)

$T_x \quad {}_xq_t = \frac{P(T_x \geq x+t \mid t > x)}{P(T_x > x)}$

$T_x \in [0, +\infty) \quad \frac{S_{T_x}(x+t) - S_{T_x}(x)}{S_{T_x}(x)} = \circledast$

$P(T_x > x) = S_{T_x}(x) = 1 - F_{T_x}(x)$

$P(T_x \leq x) = F(T_x \leq x)$

$\lim_{t \to 0^+} {}_xq_t = \lim \frac{\quad}{S_{T_x}(x)}$

$\circledast \Rightarrow \lim_{t \to 0^+} x T_x = \frac{F_T(x)}{S_T(x)}$

$\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = h_T(x) = \lambda$

$\frac{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{S_T(x)\,(1 - F_T(x))} = h_T(x)$

$\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-(1-e^{-\lambda x})} = \frac{\lambda \cancel{e^{-\lambda x}}}{\cancel{e^{-\lambda x}}} = \lambda$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Ράντες

$V(i) = \frac{1}{1+i}$ $[E(i)]$

1-1 καιdε

$Y = g(X)$ $\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ (g^{-1},\ (g^{-1})')$

$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\,(g^{-1}(y))'$

$f_V(v) = F\ I\ \frac{(v-1)}{v} \cdot \frac{1}{v^2}$

$X \sim$ Pareto (x_m, a) $\quad F_X(x) = \begin{cases} \frac{a x_m^{a+1}}{x^{a+1}}, & x \geq x_m \\ 0, & x < x_m \end{cases}$

$$\int_{x_m}^{+\infty} \frac{a x_m^{a+1}}{x^{a}}\, dx$$

$$\int^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{z \to +\infty} \left(\int_B^{z} f(x)\,dx \right)$$

10/10/2023 (Φ)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να βρεθεί το ποσό που πρέπει να καταθέσει κάποιος στην τράπεζα, ώστε σε 25 έτη να εισπράξει 50.000 € ένα χρόνο μετά την τελευταία κατάθεση.

$i_{επισ.} = 5\%$

ΛΥΣΗ # Έχουμε 25 καταθέσεις και είσπραξη το συσσωρευμένο ποσό έναν χρόνο μετά την τελευταία κατάθεση. Άρα έχουμε προκαταβλητέα ράντα 25 περιόδων.
Η συσσωρευμένη αξία είναι ίση με την συσσωρευμένη αξία της αντίστοιχης ληξιπρόθεσμης ράντας.

Η συσ. αξία όταν το k=1 $S_{\overline{25|}} = 47,7271$

Για την προκαταβλητέα ράντα (k=1) είναι $\underline{S_{\overline{25|}0,01}} \cdot (1+i) = S_{\overline{25|}} \cdot 1,05 = 5,01135$

$\Rightarrow R = \frac{50000}{\ldots} = 99724$

50)

ΑΣΚΗΣΗ 1 Καταθέτει κάποιος 600 € στο τέλος κάθε 3μήνου απ' την γέννηση του παιδιού του μέχρι να γίνει 18 έτη. Συνέχεια το παιδί εισπράττει ένα σταθερό ποσό στην αρχή κάθε 3μήνου για 4 έτη. Να βρεθεί το ποσό που θα εισπράξει το παιδί. Ο ανατοκισμός θεωρείται 3μηνιαίος με 3μηνιαίο επιτόκιο 2%

ΛΥΣΗ #

Αρχικά έχουμε ληξιπρόθεσμη ράντα 36 περιόδων με όρο 600 €. Ύστερα έχουμε προκαταβλητέα ράντα 8 όρων. Η τελική αξία της ληξιπρόθεσμης είναι ίση με την αρχική αξία της προκαταβλητέας.

$R_1 = 600$

$n_1 = 36 \rightarrow$ περίοδοι πρώτης ράντας.

$n_2 = 8 \rightarrow$ περίοδοι δεύτερης ράντας

$i_1 = i_2 = 0{,}02$

Αρχή ισοδυναμίας

$$\underbrace{R_1 \cdot S_{n_1 \rceil i}}_{\text{συσ. αξία τη λήξ.}} = R_2 \cdot (1+i) \cdot \underbrace{a_{n_2 \rceil i}}_{\text{παρ. αξία ράντας}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow R_2 = 4.875,14$

ΑΣΚΗΣΗ 1 Ο παππούς κάνει δώρο στο εγγόνι. Ρωτάει τους γονείς αν θέλουν να τους καταθέσει άμεσα 10.000 € ή να δίνει 400 € στην αρχή κάθε εξαμήνου για 20 έτη. Ποιο ποσό θα πρέπει να καταθέσει στην τράπεζα στην δεύτερη περίπτωση;

$i_{εξαμ} = 3\%$

ΛΥΣΗ

Θέλουμε λοιπόν την αρχική αξία προκαταβλητέας ράντας 40 περιόδων και όρου 400 €

Αρχική αξία μοναδιαίας ράντας είναι $(1+i)\cdot a_{\overline{n}|i} = 23,80821$

$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-v^n}{i}$ όπου $v = \frac{1}{1+i}$

$R\,(1+i)\,a_{\overline{n}|i} = 400 \cdot 23,80821 = 9.523,29$

Ο παππούς θα καταθέσει 9.523,29 €

12/10/2023 (Θ)

(X) T

$$\frac{P(T \geq x+t \mid T>x)}{P(T>x)} =$$

$$ {}_{t}q_{x} = \frac{S_T(x+t) - S_T(x)}{S_T(x)}, \text{ όπου } S_T(x) = 1-F_T(x), \text{ και } F_T(y) = P(T \leq y)$$

$$\lim_{t \to 0^+} {}_{t}q_{x}^{(t)} = h_T(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} = \frac{f_T(x)}{S_T(x)}$$

$$h_T(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda$$

$T \sim Exp(\lambda)$ $x \geq 0$

$$f_T(x) = \frac{a x_m^{a+1}}{x^{a+1}}, \quad x > x_m, \quad x_m > 0, \; x > 0, \; a > 0$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$0 \quad\quad 1 \quad\quad i \quad E(i)$

$$V = \frac{1}{1+i} \Leftrightarrow V + Vi = 1 \Leftrightarrow$$

$$i = \frac{1-V}{V}$$

$$f_V(v) = f_I\left(\frac{1-v}{v}\right) \cdot \left|\frac{d}{dv}\left(\frac{1-v}{v}\right)\right|$$

Αρχ κεφ. $\div \; \frac{1+i-1}{\cancel{1}} = i$

$$\frac{k(t+1, t^{n}) - k(t)}{k(t)}$$

Ένταση ανατοκισμού δ_t

T/n

$0 \quad\quad T$

συν. κεφ: $1\left(1+i \cdot \frac{T}{n}\right)^n$

$\hookrightarrow e^{iT}$

$t+T$

Ένταση ανατοκισμού συνεχούς χρόνου

$$\delta_t(i) = e^{it}$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$\left(1 + i\frac{T}{n}\right)^n \simeq 1 + i\frac{T}{n} \ldots$$

$$e^{i\frac{T}{n}}$$

$$1 + i\underset{\overset{\shortparallel}{t}}{\frac{T}{n}}) \to 1 + it$$

$L_0 \in \mathbb{N}$

k : διάρκεια ζωής ασθενούς

$$\sum_{j=1}^{k} 1_A, \quad j = 1, \ldots, L_0 \qquad 0 < p < 1$$

$\hookrightarrow f(x)$

$$P_{L_0} = \binom{N \to L_0}{K} p^K (1-p)^{N-K \to k_0}$$

k - ωστεί θάνατος

$L_0, L_0 - 1, \ldots, L_0 - K \to$

$$\frac{L_0 (L_0 - 1) \cdots (L_0 - k)}{k!} \quad k!$$

$k! \overset{\shortparallel}{=} k(k\,k+1)$

$$E(A|N \mid T \leq x) = N \cdot F_i(x)$$

$$V(N \mid T \leq x) = N \cdot F_i(x)\,(1 - F_i(x))$$

$$A_j \sim A_i \quad j = 1, \ldots, L_0$$

17/10/2023 (Θ)

Αρχές Υπολογισμού Ασφάλιστρου

$\Pi : L_+^0(\Omega, F, P) \to \mathbb{R}_+$
$X \longmapsto \Pi(X)$
$\mathcal{D}\, F_X \longmapsto \mathbb{R}_+$

$F_X = F_Y \Rightarrow$
$\Pi(X) = \Pi(Y)$ αναλ.
ως προς τις
κατανομές (law-inv)

Ισχύει ότι:

(1) $\Pi(X) = E(X)$ βασικό ασφάλιστρο
$1 > \theta > 0$: περιθώριο ασφάλειας
$\Pi_\theta(X) = (1+\theta)E(X)$

(2) $\Pi(X + c1) = \Pi(X) + c$ σχεδόν βεβ. (Ω, F, P)
$1(\omega) = 1$, (P-σβ) $\omega \in \Omega$ $\mathbb{R}_+$, BP
$E(X + c1) = E(X) + c$
$P(TX > y) = F_{TX}(y)$

$\lambda(a, b) = b - a$

(3) X, Y ανεξάρτητες τυχ. μετ. τότε:
ιδιότητα προσθετικότητας $\Pi(X+Y) = \Pi(X) + \Pi(Y)$
$\Pi_V(X) = E(X) + V(X)$ Διακύμανση
$\Pi_\sigma(X) = E(X) + \sigma(X)$ Τυπική απόκλιση

Σαρώθηκε με το CamScanner

Αν x, y: ανεξάρτητες τότε είναι ασυσχέτιστες, δηλ.

$V(x+y) = E[(x - E(x))(y - E(y))] =$

$= E(xy) - E(x)E(y) \quad cov(x,y) = V(x) + V(y)$

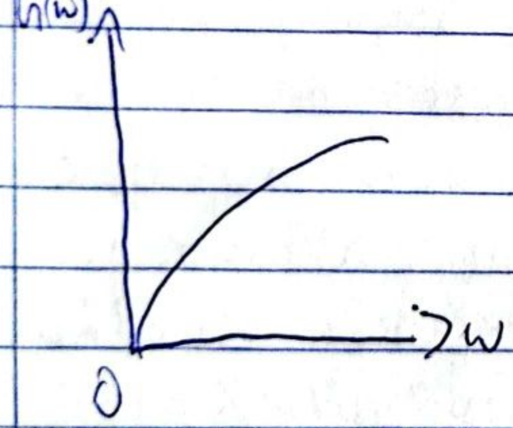
$П\sigma(X) = E(X) + \sigma(X) \ \ldots \ \sigma(X+Y) \neq \sigma(X) + \sigma(Y)$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

$u: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση w χρησιμότητας

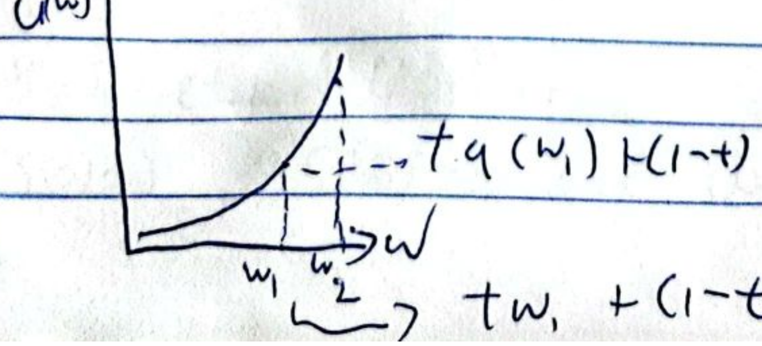
$w \mapsto u(w)$

<u>κινδυνοφόβος</u> (του αρέσει να πλουτίζει)



$u'(w) \geq 0$

κινδυνόφιλος (του αρέσει να πλουτίζει, όχι τόσο πολύ γρήγορα)



$t w_1 + (1-t) w_2 \quad 1 < t < 0$

$u(w) = -a e^{-aw} + a$

$u(0) = 0$

$u''(w) = -a^3 e^{-aw}$

Αποφυγή κινδύνου

$$\pi(u)(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = a$$

Θέτω $v(w) = u'(w)$

17/10/2023 (Φ)

ΑΣΚΗΣΗ | Έστω $S(x) = \dfrac{20.000 - 100x - x^2}{20000}$

x: ηλικία

(i) Μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση επιβίωσης;

(ii) Ποια η πιθανότητα άτομο να επιβιώσει μέχρι την ηλικία των 20;

(iii) Ποια η πιθανότητα άτομο ηλικίας 20 ετών να αποβιώσει σε ηλικία μεταξύ 30 και 40 ετών;

ΛΥΣΗ

i) Για να μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση επιβίωσης θα πρέπει S(x) να είναι συνεχής και φθίνουσα ως προς x για κάθε τιμή του x από το 0 έως το ω ($\omega < 0$) και επίσης $S(0) = 1$ και αφού $S(\omega) = 0$

Για την δοσμένη $S(x)$: $\dfrac{d\,S(x)}{dx} = -2x - 100 \left(\dfrac{1}{20000}\right) =$

$= -\left[2x + 100\left(\dfrac{1}{20000}\right)\right] < 0$

η S_x είναι φθίνουσα

$S(0) = 1$, $S(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega = 100$

ii) T: διάρκεια ζωής

$S_T(x) = P(T > x)$

Επειδή ψάχνουμε το $S_T(20) = 0{,}88$

iii) $P[30 \le T \le 40 \mid T > 20] = \dfrac{P[30 \le T \le 40]}{P[T > 20]} =$

$= \dfrac{S_T(30) - S_T(40)}{S_T(20)} \simeq 0{,}097$

Δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας διάρκειας ζωής

Συνάρτηση πιθανότητας απομένουσας ζωής:
(την τυχ. μετ. T_x) $\Rightarrow T_x = T - X \mid T > X$

$$\left.\begin{aligned} f_{T_x}(t) &= \frac{d}{dt} F_{T_x}(t) \\ F_{T_x}(t) &= \frac{F_T(x+t) - F_T(x)}{\underbrace{1 - F_T(x)}_{S_T(x)}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_{T_x}(t) = \frac{d}{dt}\frac{F_T(x+t) - F_T(x)}{S_T(x)} = \frac{f_T(x+t)}{S_T(x)}, \ \forall\ 0 \le t \le \omega - x$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

Λόγω της $S_{T_x}(t) = \frac{S_T(x+t)}{S_T(x)}$ παίρνουμε

$$f_{T_x}(t) = \frac{f_T(x+t)}{S_T(x)} = \frac{f_T(x+t)}{S_T(x+t)} \cdot S_{T_x}(t)$$

και από την μ_x ένταση θνησιμότητας

$$\mu_x = \frac{f_T(x)}{S_T(x)}$$

Καταλήγουμε $f_{T_x}(t) = {}_tP_x \cdot \mu_{x+t}$

όπου ${}_tP_x$ (πιθανότητα επιβίωσης) $= S_T(t) = P(T_x > t)$
δηλ η πιθανότητα άτομο ηλικίας x να θα επιζήσει επιβιώσει, τουλάχιστον t χρόνια.

$$\mu_{T_x}(t) = \lim_{dt \to 0} \frac{P(t \le T_x \le t+dt \mid T_x > t)}{dt} =$$

$$= \frac{f_{T_x}(t)}{S_{T_x}(t)} = \frac{{}_tP_x \cdot \mu_{x+t}}{{}_tP_x} = \mu_{x+t}$$

και $h_t(x+t) = \lim_{dt \to 0} \frac{P(x+t \le T \le t+dt \mid T > x+t)}{dt}$

$= \mu_{x+t}$, $t > 0$

ή ισοδύναμα $\mu_{T_x}(t) = \mu_T(x+t) = \mu_{x+t}$

Συνοψίζοντας η τυχ. μετ. T_x έχει:

Συν. επιβίωσης : $S_{T_x}(t) = {}_tP_x$

Συν κατανομής : $F_{T_x}(t) = {}_tq_x$

Συν κινδύνου : $\mu_{T_x}(t) = \mu_{x+t}$

Συν πυκνότητας : $f_{T_x}(t) = {}_tP_x \, \mu_{x+t}$

20/10/2023 (Θ)

Θετική Ομογένεια: $\Pi(\lambda X) = \lambda \Pi(X)$, $\lambda > 0$

$\Pi_X(\theta) = (E(X))(1+\theta)$, $\Pi_V(X) = E(X) + \sigma(X)$

V

$V(X+Y) = E((X-E(X))^2(Y-(E(Y))^2 =$

$= E((X^2 - 2E(X)X + E^2(X)(Y - 2E(Y)Y + E(Y)^2)$

$= E(X^2Y^2 - 2X^2Y E(Y) + Y^2 + E(Y^2)X^2 -$

$- 2XY E(X)E(Y) - 2XE(X)E(Y^2) +$

$+ E^2(X)(X^2 - E(X)Y + (E(X))^2 =$

$= E(X^2Y^2) - E^2(X+Y) = E((X+Y)^2) - E^2(X+Y)$

$E(XY) - E(X)E(Y) = Cov(X,Y) = 0$

<u>Αρχή Αποτίμησης Ασφαλίστρου</u>

Π_u (κινδυνόφιλος) $\uparrow$ $\cap$

δηλ. $u'(w) > 0$, $u''(w) < 0$, $w > 0$

Ανισότητα Jensen

Αν $\varphi(X)$ $\cup$, $\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X))$

(Ω, F, P) $\boxed{\omega \in A}$

$P(A)$ | $F_X(x) = P_X X^{-1}(-\infty, x]$

$-\psi(E(X)) \geq E(-\psi(X)) \Leftrightarrow E(\psi(X)) \leq \psi(E(X))$

$\psi^{\to \text{κινδυνόφοβη}} (w - G) = E(\psi(w - X))$ (1)

$\psi_0 (w_0 - E(x)) = E(\cancel{\ldots})$
$= E(\psi_0 (w_0 + H - x))$ (2)

$\psi(w) = -a e^{-aw}$

$-a e^{-a(w-G)} = \int -a e^{-a(w-t)} f_X(t)\, dt$

$X(w) = x + d_x$

$e^{a(t)} = \int_0^X e^{at} f_X(t)\, dt$

$a e^{aG} = a e^{ax} \int f_X(x)\, dx$

$-a e^{-a(w-G)} = E(-a e^{-a(w-X)}$

$e^{aG} = \int_0^{+\infty} e^{aX} f_X(x)\, dx =$

$= M_X(a)$

Άρα $aG = \log M_{X}(a)$

$\psi(w) = -a e^{-aw}$

$\Leftrightarrow G = \frac{1}{a} \log M_X(a) = \Pi_{\psi_a}(X)$

$E(e^{aX}) \geq 1 + a E(X) \geq a E(X)$

$, a > 1 , \log a > 0$

$e^{aw} = \varphi(w)$: κυρτή

$e^{aE(X)} \leq E(e^{a \cdot X})$

$a E(X) \leq \log E(e^{a \cdot X}) = \Pi_{\psi_a}(X)$ με $\psi(w) = -a e^{-aw}$

Σαρώθηκε με το CamScanner

23/10/2023 (Θ)

ΠΡΟΤΑΣΗ

α) Η εκθετική αρχή ασφαλίστρου Π_a ικανοποιεί την ιδιότητα
$$\Pi_a(X+c_1) = \Pi_a(X) + c, \; c \in \mathbb{R}$$
β) Η Π_a δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της θετικής ομογένειας δηλ.
$$\Pi_a(\lambda X) \neq \lambda \Pi_a(X), \; \forall \lambda > 0$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

α) $\Pi_a(X+c_1) = \frac{1}{a} \log E(e^{a(X+c_1)}) =$

$= (1/a) \log E(e^{ac_1} e^{aX}) =$

$= (1/a) \log(e^{ac_1}) + (1/a) \log E(e^{aX}) = (1/\cancel{a}) \cdot ac + \Pi_a(X)$

$= \Pi_a(X) + c$

β) $\Pi_a(\lambda X) = (1/a) \log E(e^{a(\lambda x)}) = (1/a) E(e^{(ax)\lambda})$

$= (1/a) \log E(e^{a\lambda x} = (1/a) \log e^{\lambda} E(e^{ax}) =$

$= (1/a) \log \lambda + \log E(e^{a\lambda}) \neq \lambda((1/a) \log E(e^{aX}))$

δ) $\Pi_a(X+Y) = \Pi_a(X) + \Pi_a(Y)$ αν X, Y ανεξ. τυχ. μετ.

$$\Pi_a(X+Y) = \frac{1}{a} \log E(e^{a(X+Y)}) =$$

$= \frac{1}{a} \log E(e^{aX} \cdot e^{aY})$

Σαρώθηκε με το CamScanner

X,Y : ανεξ. τυχ. μετ. τότε και οι
g(x), g(y) είναι ανεξ. τυχ. μετ.

$u(w-\pi) = E(u(w-X))$
$u(w) = E(u(w(1)+H(1-X)))$

$(I_x) \int -a e^{-aw-aH+aX} f_X(x)\,dx = -a e^{-aw}$

$\Rightarrow 1 = \int_{\mathbb{R}} -e^{aH} e^{aX} f_X(x)\,dx \Rightarrow \log(e^{aH}) =$
$= \log E(e^{aX})$

$(x, x+\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$
$\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ $x \to L(x)$

$L(0) = 1000 \to$ πληθυσμός
$x \in 1, \ldots, 150$ ηλικία

$$\frac{\ell(x+1) - L(x)}{L(x)} = dx \quad \text{ρυθμός θανάτων}$$

$$\frac{150 - 15(x+1) - (150-15x)}{150-15x} = \frac{15}{150-15x}$$

$L(x+1) - L(x) = 75$
$L(x) = \sqrt{w-x}$ $[0, w]$

$$\log L(x) = \frac{1}{2}\log(w-x) =$$
$$= a\, z(x) + \varepsilon$$
$$R^2 > 75\%$$

$L(x) \quad x = 1, \ldots, w$

$$P(D_x = k) = \binom{w}{k} p^k(x)\,(1-p(x))^{w}$$

$\hookrightarrow$ πλήθος θανάτων το έτος x

$$p(x) = F_T(x) = P(T \leq x)$$

Μίξη της $T \sim \boxed{F}$ με την διωνυμική στην οποία το $n = w$

$\downarrow$ $exp(\lambda)$, $G(a)$, $Pareto(a, x_m)$

$$\mathbb{E}(D_x) = E(D_x = k \mid T \leq x)$$
$$= \sum_{k=0}^{w} P(D_x = k) \cdot k = k\binom{w}{k} p^k(x)(1-p(x))^{w}$$

24/10/2023 (Θ)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (p_t)^k (q)^{n-k} = (p_t + q),\quad q = 1-p$$

$p = F(x)$

$q = 1 - p = 1 - F(x)$

$$Y = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$$

$p = \hat{F}(x)$ $\quad np$

$1 \cdot F(x) \mid X \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$

$F_x = F \quad \varepsilon \geq 0$

f_x, F_x : διαφορίσιμες.

$p(1-p) = F(x)(1 - F(x)) = k(x)$

$$k'(x) = F'(x)(1 - F(x)) + F(x)((1 - F(x)))'$$
$$= f(x)(1 - F(x)) + F(x)(-f(x))$$

$k'(x) = f(x) \Leftrightarrow k_x = e^{f(x)}$

$$k(x) = \int_0^x \frac{f(t)\,dt}{\lambda e^{-\lambda t}} \Rightarrow k(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt =$$

$= 1 - e^{-\lambda x} \rightarrow F(x)$

$\underset{0 \qquad\qquad 1}{[\text{———}]}$ $\frac{A}{1+i} = v$ $A \in \mathbb{R}_{+}$ $(A>0)$

$1 \sim I$

$i \in (0,1)$ $A \sim A'$

$\frac{1}{1+i} = v$

$Y = g(X)$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g^{-1}(y) = x$

$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}}{dy}(y) \right|$ Ευαφής(ε΄1)1-1

$g(i) = v = \frac{1}{1+i} \Leftrightarrow i = g^{-1}(v) = \frac{1-v}{v}$ $\left| (g^{(-1)})'(v) = -\frac{1}{v^2} \right.$

$f_{(i)} = f_v\left(\frac{1-v}{v}\right)$

$\underset{0 \quad 1 \quad 2 \quad n}{\vdash\!\!+\!\!-\!\!+\!\!-\!\!+}$

$v + v^2 + \dots v^n = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n}$

ERLANG N, $N+1$ $N = 1, \dots n$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim G(\lambda, n)$

24/10/2023 (Φ)

Από την σχέση $f_{T_x}(t) = {}_tP_x \cdot \mu_{x+t} \Rightarrow$

$$\mu_{x+t} = \frac{f_{T_x}(t)}{{}_tP_x} = \frac{\frac{d}{dt}(1-{}_tP_x)}{{}_tP_x}$$

$$\Rightarrow \mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln({}_tP_x)$$

Επίσης $\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt}\ln({}_tP_x) \overset{{}_tP_x = L_{x+t}/L_x}{=}$

$$= -\frac{d}{dt}\ln(L_{x+t})$$

$\Rightarrow \frac{dL_{x+t}}{dt} = -L_{x+t} \cdot \mu_{x+t}$ μεταξύ $t=0$ και $t=1$

$$\Longrightarrow L_x = \int_0^1 L_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt$$

πιθανότητα θνησιμότητας

και $q_x = \int_0^1 {}_tP_x \cdot \mu_{x+t}\,dt$

πιθ. επιβίωσης για 1 έτος

Θνησιμότητα

• Αρχική ομάδα ατόμων (ζωντανούς) L_x που ελαττώνεται από την επίδραση της έντασης θνησιμότητας μ.
• L_{x+t}: Αριθμός ατόμων την χρονική στιγμή t.
• Πραγματικός ετήσιος ρυθμός θνησιμότητας σε ηλικία x
• $q_x = \dfrac{L_x - L_{x+1}}{L_x}$, πιθ. αποβίωσης στο επ. έτος.

Ο ρυθμός μεταβολής της L_{x+t} δίνεται από την σχέση $\dfrac{dL_{x+t}}{dt} = -L_{x+t}\,\mu_{x+t}$

• Η ολική ελάττωση στην αρχική ομάδα ατόμων L_x εντός ενός έτους

$$\int_0^1 L_{x+t}\,\mu_{x+t}\,dt = -\int_0^1 dL_{x+t} = -\left[L_{x+t}\right]_0^1 =$$

$$= -L_{x+1} + L_x = d_x$$

ΑΣΚΗΣΗ | Για την συνάρτηση επιβίωσης $S_t(t) = 1 - t/\omega$, να βρεθούν $F_T(t)$, $f_t(t)$, μ_t $S_t(t) \to$ συνάρτηση επιβ.

f_t: συν. πυκν. πιθ. — μ_t: ένταση θνησιμότητας, τη διαρκ. ζωής

${}_yF_{T_x}(t) \to$ συν. καταν. ${}_tP_x$ (πιθ. επιβ. τουλάχιστον. t) ${}_tq_x$ (πιθανότητα αποβίωσης)

και $\mu_{x+t} \to$ ένταση θνησιμότητας για $x+t$ έτη

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{aligned} S_T(t) &= 1 - \frac{t}{\omega} \\ S_T(t) &= 1 - F_T(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_T(t) = \frac{t}{\omega}$$

$$F_T'(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = 1/\omega$$

$$\mu_t = \frac{F_t'(t)}{S_T(t)} = \frac{1/\omega}{1 - t/\omega} = \frac{1}{\omega - t}$$

$$S_{T_x}(t) = \frac{S_T(x+t)}{S_T(x)} = \frac{1 - \frac{x+t}{\omega}}{1 - \frac{x}{\omega}} = \frac{\omega - x - t}{\omega - x}$$

S_{T_x}: απομένουσα διαρκ. ζωής

$$F_{T_x}(t) = 1 - S_{T_x}(t) = \frac{t}{\omega - x}$$

30/10/2023 (Θ)

$L(x)$ όπου x: διάρκεια ζωής του (Χ)

$L(X)$: η διάρκεια ζωής του (Χ) μετά την ηλικία x, $x \in \mathbb{N}$

$X, X+\varepsilon, \varepsilon > 0, X+\varepsilon+1, X+\varepsilon/2, \dots, X \in \mathbb{R}_+$

$L(x): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$\boxed{L(x) = B^x + A}$ (Gompertz) $f(x)$

↳ σταθερές μεταβλητές $A, B > 0$

$$\omega_0 = 44 \quad \int_1^{\omega_0} x\, L(x) f(x)\, dx = \int_1^{\omega_0} x\,(A + B^x) f(x)\, dx$$

$$= \int_1^{\omega_0} Ax\, f(x)\, dx + \int_1^{\omega_0} x\, \boxed{\underset{= e^{x \log B}}{B^x}}\, f(x)\, dx = \dots$$

$L(n) = L^n$ σταθερό όπου $0 < L < 1$

$L^{n+1} < L^n$

Το n, $n+1$ έτη έχουν πιθανότητα p

$A = 0$ το $L(n) = B^n$, p^n

$$\sum_{k=1}^{W_0} k \cdot B^k \cdot \rho^k$$

$$\sum_{k=1}^{W} \rho^k B^k t^k$$

31/10/2023 (Θ)

x = η ηλικία του ατόμου (x): τα έτη ηλικίας του (x)

$F_x(x) = P_x = P$

$e(x)$ = τα έτη ασφάλισης του (x) από κάποιο ασφάλιστρο ~~L(x)=A+B(x)~~

$L(x) = A + B(x)$: τα έτη ασφάλισης του ατόμου (x)

Ασφάλιστρο διάρκειας n ετών (*)

(x)	c_1	c_2	c_n
$e(x)$	1	, 2	, n

$T_x = n$

Ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο για το ασφαλιστήριο συμβόλαιο ονομάζεται

$$P_V(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{k=1}^{n=L(x+n)-L(x)} c_k V^k, \text{ όπου } V = \frac{1}{1+i}$$

$L(x+1) - L(x) = d_x \quad L(x) = \sqrt{W_0 - x}$

Πλεονασμα $U(k) = F(k) - A(k)$

$U(k_0) < 0$

$$l = \frac{U(k_0)}{U(k)} = E(k_0)\left(1 - \frac{A(k_0)}{F(k_0)}\right)$$

31/10/2023 (Φ)

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> Δεδομένου ότι

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{85-t} + \frac{3}{105-t}, \quad 0 \le t < 85$$

να υπολογισθεί το ${}_{20}P_x$

<u>ΛΥΣΗ</u> το άτομο ηλικίας x να επιβιώσει τουλάχιστον 20 ίτα κα

Γνωρίζουμε ότι

$${}_tP_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s}\,ds}$$

$$\int_0^{20} \mu_{x+t}\,dt = \Big[-\ln(85-t) - 3\ln(105-t)\Big]_0^{20}$$

$$= -\ln\left[\left(\frac{65}{85}\right)\cdot\left(\frac{85}{105}\right)^3\right]$$

οπότε ${}_{20}P_x = \frac{65}{85}\left(\frac{85}{105}\right)^3 = 0,4057$

ΑΣΚΗΣΗ | Δεδομένου ότι

$$ {}_tP_x = \left(\frac{1+x}{1+x+t}\right)^3 \quad \forall\, t \geq 0 $$

υπολογίστε την προσδοκώμενη ζωή ατόμου ηλικίας $x = 41$

ΛΥΣΗ

Ξέρουμε ότι $\mathring{e}_x = E(T_x) =$

μέση τιμή διάρκεια ζωής στην ηλικία x

$$ = \mathring{e}_{41} = E[T_{41}] = \int_0^{\infty} {}_tP_{41}\, dt = $$

$$ = \int_0^{+\infty} \left(\frac{42}{42+t}\right)^3 dt \Rightarrow \mathring{e}_{41} = \left[42^3 \, \frac{(42+t)^{-2}}{-2} \right]_0^{+\infty} $$

$= 21$

Αναμένουμε ότι το άτομο 41 ετών θα επιβιώσει ακόμα 21 έτη.

ΑΣΚΗΣΗ | Εαν $d_x = 2x+1$

πλήθος θανάτων στην ηλικία x

για $x = 0, 1, \dots, 99 \longrightarrow L(99) = 0$

Νδο $L_0 = 10{,}000$,

το $L_x = 10000 - x^2$, $t q_0 = \dfrac{t^2}{10{,}000}$

Λύση

$$L_0 = \sum_{x=0}^{w=99} d_x = \sum_{x=0}^{99} (2x+1) = 2\sum_{x=0}^{99} x + \sum_{0}^{99} 1 =$$

$$= 99 \cdot 100 + 100$$

$$= 10{,}000$$

$$L_x = \sum_{y=x}^{99} d_y = \sum_{y=x}^{99} (2y+1) = 2\sum_{x}^{99} y + \sum_{y=x}^{99} 1 =$$

$$= 99 \cdot 100 - ((x-1)\cdot x) + (100 - x) =$$

$$= 10.000 - x^2$$

$$t q_0 = \frac{L_0 - L_t}{L_0} = \frac{10.000 - 10000 + t^2}{10.000} =$$

$$= \frac{t^2}{10.000}$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

ΑΣΚΗΣΗ | Θεωρούμε ότι δύο ανεξάρτητες, ως προς την θνησιμότητα ζωές, όπου ο ένας είναι καπνιστής και ο άλλος όχι. Δεδομένου ότι

(i) μ_x η ένταση θνησιμότητας για τον μη-καπνιστή, $0 \leq x < \omega$.

ii) $c \cdot \mu_x$ η ισχύς θνησιμότητας για τον καπνιστή, για $0 \leq x \leq \omega$ όπου c μια σταθερά, $c > 1$

Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι η προσδοκώμενη ζωή του καπνιστή είναι μεγαλύτερη απ' του μη καπνιστή.

ΛΥΣΗ

Έστω $\mathring{e}_x = T_x = T(x)$ η προσδοκώμενη ζωή για μη-καπνιστή και $\mathring{e}^s_x = T^s_x = T^s(x)$ η προσδοκώμενη ζωή του καπνιστή.

Γνωρίζουμε ότι $P(T^s_x > t) = {}_tP^s_x =$

$$= e^{-\int_0^t c\mu_{x+u}du} = e^{-c\int_0^t \mu_{x+u}du} = \left[e^{-\int_0^t \mu_{x+u}du}\right]^c$$

$$= \left[{}_tP_x\right]^c = \left[P(T_x > t)\right]^c$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$P(T_x^s > T_x) = \int_0^{\omega-x} P(T_x^s > t) \cdot f_{T_x}(t)\,dt$$

Αλλά $f_{T_x}(t) = -\frac{d}{dt}({}_tP_x)$ και έστω

${}_tP_x = w(t)$.

Οπότε $P(T_x^s > T_x) = -\int_0^{\omega-x} [w(t)]^c \cdot w'(t)\,dt$

$$= \left.\frac{[w(t)]^{c+1}}{c+1}\right|_0^{\omega-x} = \frac{1}{c+1}$$

06/11/2023 (Θ)

07/11/2023 (Θ)

$D(x) = e(x) v^x$, $v = \frac{1}{1+i}$

(x), $r \geq 0$ $X \sim G_{\tau e}(\lambda)$

$$\mathbb{E}(D_x(v)) = \int_0^{w_0} L(x) v^x f_x(x) dx =$$

$$\int_0^{w_0} e(x) v^x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{w_0} B^x v^x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_0^{w_0} e^{x(\ln B + \log v - \lambda)} dx =$$

Έστω $L(x) = B^x$, $B > 0$

Συνάρτηση διάρκειας ζωής του Gompertz

$e(x) = A + B^x$, $A = 0$

$e(x+1) = e(x+2)$

$$= \lambda \int_0^{w_0} e^{x(\ln B + \log v - \lambda)} \quad (\mathrm{I})$$

$\underbrace{B^x}$, $B > 0$

Στο ολοκλήρωμα (1) θέτω
$\theta = (\log B + \log v - ?)$
και το ολοκλήρωμα είναι
ίσο με

$$\int_0^{\omega_0} e^{-\theta x}\, dx \overset{y=\theta x}{=\!=} \int_0^{\omega_0/\theta} e^{-y} \frac{1}{\theta}\, dy$$

$$= \frac{-1}{\theta}\int_0^{\omega_0/\theta} (-e^{-y})'\, dy = \frac{1}{\theta}\int_{\omega_0/\theta} (e^{-y})\, dy$$

$$= \frac{1}{\theta}\left(e^{-0} - e^{-\omega_0/\theta}\right) =$$

$$= \frac{1}{\theta}\left(1 - e^{-\omega_0/\theta}\right)$$

$D(x) = e(x)\, v^x \qquad v = \frac{1}{1+i}$

$I(i) \quad i \sim U(0,1) \quad f_I(y) = \frac{1}{1-0}$

$i \in (0,1)$

Άρα υποθέτωνται ότι η $L(x) = B^x$, $B > 0$
τότε $x \geq 0$ $\quad B^0 = 1$, $B > 0$
$x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} e^{B\log x} = e^{B(-\infty)} =$$

$$E(P(I)) = \int_0^1 B^x \frac{1}{(1+i)^x} f_Z''(i)\, di$$

$$= \int_0^1 e^{x(\log B - \log(1+i))}\, di \quad (2)$$

$$(2) = B^x \int_0^1 \frac{1}{(1+i)^x}\, di = B^x \int_0^1 \frac{1^x}{(1+i)^x}\, di$$

$$y = (v) = \frac{1}{1+i} \qquad vi + i = 1 \Leftrightarrow i = \frac{1}{v+1}$$

$$\int_0^1 v^x \left(-\frac{1}{(1+v)^2}\right) dv$$

$$\frac{1}{(1+i)^x} = e^{-x\log(1+i)} \qquad \Theta = \log(1+i)$$

Αρχή της ισοδυναμίας

$t_i > 0 \; (C_{t_1}, C_{t_2}, \ldots, C_{t_n})$

$t_j, k_j \in [0, T]$

$k_i > 0 \; (D_{k_1}, D_{k_2}, \ldots, D_{k_n})$

$$\frac{C_1}{(1+i_1)^{t_1}} + \ldots + \frac{C_{t_n}}{1+i_1}$$

07/11/2023 (Φ)

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> Έστω $\mu_t(t) = t$ (Νόμος Weibull)
Να βρεθούν τα $S_T(t)$, $f_t(t)$, $E(T)$

<u>ΛΥΣΗ</u>

$$S_T = e^{-\int_0^t \mu_u du} = e^{-\int_0^t u\, du} = e^{-\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^t} =$$

$$= e^{-t^2/2}$$

Η συνάρτηση πυκν. διάρκειας ζωής T για $\mu_t = t$

$$f_t(t) = \mu_t \cdot S_T(t) = t \cdot e^{-t^2/2}$$

Ο αναμενόμενος μελλοντικός χρόνος (αναμενόμενη διάρκεια ζωής):

$$E(T) = \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt$$

παρατηρούμε ότι η $f_T(t)$ είναι άρτια αφού $f_t(-t) = (-t)^2 e^{-(-t^2/2)} =$

$= t^2 e^{-t^2/2} = f_T(t)$ και επίσης, ξέρουμε απ' την κανονική κατανομή ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}$$

Άρα θα έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi} \Rightarrow$$

$$2\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}\, dt = 2\pi \Rightarrow$$

$$\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \Rightarrow$$

$$\int_{0}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}\, dt = \sqrt{2\pi}$$

ΑΣΚΗΣΗ | Να γραφεί το ${}_nq_x$ συναρτήσει των $q_x, q_{x+1}, \dots, q_{x+n}$

$${}_nq_x = 1 - {}_nP_x = 1 - (P_x \cdot P_{x+1} \cdots P_{x+n-1})$$
$$= 1 - \prod_{k=0}^{n-1} P_{x+k} \Rightarrow {}_nq_x = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} (1 - q_{x+k})$$

${}_nP_x$: πιθ. άτομο ηλικίας x να ζήσει n χρόνια ακόμα

ΑΣΚΗΣΗ Έστω $d_x = 2^x$ για $x = 0, \dots, 99$
Ν.δ.ο. συνολικός πληθυσμός είναι
$L_0 = 2^{100} - 1$ και ότι γενικά
$L_x = 2^{100} - 2^x$

ΛΥΣΗ #

$$L_0 = \sum_{x=0}^{99} d_x = \sum_{0}^{99} 2^x = 2^{100}$$

$$L_x = \sum_{y=x}^{99} d_y = 2^y = 2^{100} - 2^x$$

ΑΣΚΗΣΗ Εάν $\mu'_x = 2\mu_x \ \forall x$
Ν.δ.ο. ${}_tP'_x = {}_tP_x^2 \ \forall x, \forall t$

ΛΥΣΗ #

$${}_tP'_x = S_{T'_x}(t) = e^{-\int_x^{x+t} \mu'_s \, ds} =$$

$$= e^{-\int_x^{x+t} 2\mu_s ds} = \left(e^{-\int_x^{x+t} \mu_s ds}\right)^2 = {}_tP_x^2$$

ΑΣΚΗΣΗ Εάν $\mu_t = k + 0{,}002 \cdot t$ και
${}_{20}P_{10} = e^{-0{,}82}$
Ν.δ.ο. $k = 0{,}001$

ΛΥΣΗ #

$${}_{20}P_{10} = e^{-\int_{10}^{30} (k + 0{,}002t) \, dt} =$$

$$e^{-0,82} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\int_{10}^{30} k + (0,002t)\, dt = -0,82 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 0,001$$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> Εάν ~~...~~ η συνάρτηση επιβίωσης $S_T(T) = \left(\frac{w-t}{w}\right)$ Να βρεθεί $E(T_x)$

<u>ΛΥΣΗ</u> #

$$S_{T_x}(t) = \frac{S_T(x+t)}{S_T(x)} = \frac{(w-x-t)^a}{(w-x)^a} = {}_tP_x$$

$$\text{Οπότε } E(T_x) = \int_0^{w-x} {}_tP_x\, dt =$$

$$= \int_0^{w-x} \frac{(w-x-t)^a}{(w-x)^a}\, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(T_x) = -\frac{1}{(a+1)(w-x)^a} \cdot \left[(w-x-t)^{a+1}\right]_0^{w-x}$$

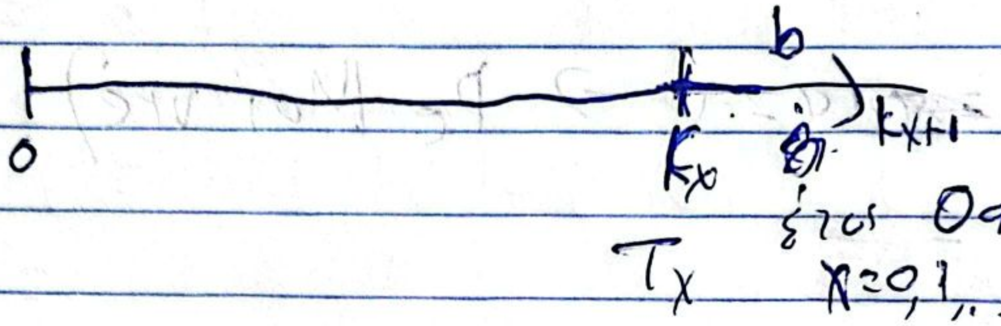
Σαρώθηκε με το CamScanner

$$= \frac{(w-x)^{a+1}}{(a+1)(w-x)^{a}} \Rightarrow E(T) = \frac{w-x}{a+1}$$

(για $a=1 \rightarrow$ De Moivre)

09/11/2023 (Θ)

1) Πρόσκαιρη ασφάλιση θανάτου
(term insurance)



Y: η παρούσα αξία T_x του b αναγμένη στην χρονική περίοδο 0 με επιτόκιο i. Δηλ. ο συντελεστής προεξόφλησης είναι $v = \frac{1}{1+i}$

$Y = v^{K_x+1} \cdot b$

$y = v^{k} b \ , k=0,1,\dots,n$

K_x ακολουθεί διωνυμική κατανομή με παράμετρο p αν $p = {}_{k+1}P_k$

$E(bV^{K_x+1}) = bE(V^{K_x+1}) =$

$k \sim Bin$

$= b \cdot \sum_{k=0}^{n} k V^k p^{-k} \binom{n}{k}$

(x)

$k = e(x)$

$f(t) = (1+vpt)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (vpt)^k \cdot \underbrace{1^{n-k}}_{=1}$

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(v\varphi t)^{k-1} \quad \text{και} \quad \to 1$$

αντικαθιστούμε $t=1$

$$Z = b v^{T_x}$$

T_x: η ακριβής στιγμή του θανάτου (x) και οι τιμές της T_x ανήκουν στο $(x, x+h)$

$$E(Z) = \int_x^{x+h} b\, v^t f_{T_x}(t)\, dt \quad \text{και}$$

έστω $T_x \sim U(x, x+h)$

Άρα $E(Z) = \int_x^{x+h} b\, v^t \frac{1}{h}\, dt =$

$$= \frac{b}{h} \int_x^{x+h} v^t\, dt = I(x)$$

$T_x \sim exp(\lambda)$ $f_{T_x}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ στο $[x, x+h]$

$$I(x) = \int_x^{x+h} v^t\, dt = \int_x^{x+h} e^{\overbrace{t \log v}^{\theta}}\, dt = \int_x^{x+h} e^{\theta t}\, dt =$$

$$= \int_x^{x+n} \frac{e^{\theta t}}{\theta} dt = \frac{e^{\theta(x+n)} - e^{\theta x}}{\theta}$$

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{e^{2\theta(x+n)} \quad e^{2\theta x}}{2\theta}$$

2) whole life insurance - Ισόβια Ασφ. ζωής

$0 \quad b \quad K_{x+1}$

$K_x = 1, 2, \ldots, n$

$$Y = bV^{K_{x+1}}, \ bV^{n+1}$$

$$A_x = E(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} bV^{n+1} P_n = \sum_{n=0} bV^{n+1} \rho^n =$$

$P_n = P^n \quad n \in \mathbb{N}$

$$\to bv \sum_0^{\infty} v^n \rho^n \to \frac{1}{1-\rho v} \ (*)$$

Εφόσον $0 < V = \frac{1}{1+i} < 1$

$\rho_v = \frac{\rho}{1+i} < 1 \quad$ έστω (λ)

$$(*) = \frac{b \cdot V}{1 - \rho V}$$

$(A_n)_{n \in N}$ $A_n = b V q_n A_{n+1} V b =$

$= V b \, A_{n+1} (\underbrace{q_n + \rho_n}_{1})$

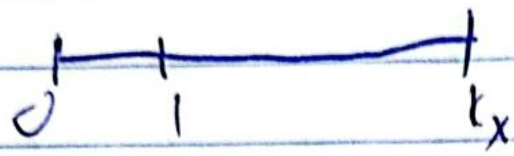
$A_{n+1} = V \cdot b A_n \quad n \in N$

$A_n = A_0 (b V)^n \quad n \in N$

13/11/2023 (4)

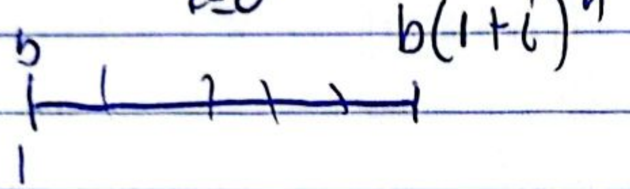
14/11/2023 (Θ)

Προκαταβλητέα ράντα θνησ



$v = \frac{1}{1+i}$

$$T = v \sum_{k=0}^{w_0} {}_kP_x \quad t_x : \tau.\text{μ.} \quad 0, \ldots, \overset{\infty}{\overset{\shortparallel}{w_0}} + 1$$



$, i' \neq i$

σελ 291 ολική απώλεια : L

$E(T) = v \; E(\sum v^k {}_kP_x) =$

$= v \sum v^k P_x$

$E(T) = v \quad v \frac{1 - (vp)^{w_0}}{1 - vp} =$

$= \sum v^k ({}_kP_x) = p^k$

$v \int_0^{+\infty} v^k F_{T_x}(t) \, dt = g(x)$

$T_x \sim T$ για καθε $[0, w_0]$

$P(T_x \leq t) = F_{T_x}(t)$

14/11/2023 (Φ)

Ασφάλιση επιβίωσης η-ετών!

Ενιαίο καθαρό Ασφάλιστρο (ΕΚΑ)

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{L_{x+n} \cdot U^{x+n}}{L_x \cdot U^x} \quad \frac{\text{θέτουμε}}{L_x U^v = D_x} \quad \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Ράντες ζωής

Παρούσα Αξία ΠΑ συνήθους ράντας ζωής

- Αντιπροθεσμης

$$a_x = \sum_{t=1}^{\omega-x-1} A_{x:\overset{1}{\overline{t|}}} = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{\omega-1}}{D_x} =$$

$$\frac{\text{θέτουμε}}{D_{x+1} + \dots + D_{\omega-1} = N_{x+1}} \quad \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

- προκαταβλητέας

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

Πρόσκαιρη ράντα ζωής

- ληξιπρόθεσμη

$$a_{x:\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} A_{x:\overset{1}{\overline{t}|}} = \sum_{t=1}^{n} \frac{D_{x+t}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

- προκαταβλητέα

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

Ισόβια αναβαλλόμενη ράντα ζωής m-ετών

- ληξιπρόθεσμης

$$m|a_x = {}_mP_x\, U^m\, a_{x+m} = a_x - a_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+m+1}}{D_x}$$

- Προκαταβλητέας

$$m|\ddot{a}_{x:\bullet} = {}_mP_x\, U^m\, \ddot{a}_{x+m}$$

Πρόσκαιρη αναβαλλόμενη n-ετών/m-ετών

- Ληξιπρόθεσμης

$$_{m|}a_{x:\overline{n}|} = a_{x:\overline{m+n}|} - a_{x:\overline{m}|} = \frac{N_{x+m+n}}{D_x} =$$

$$= A_{x:\overline{m}|}^{\;\;1} \cdot a_{x+m:\overline{n}|}$$

- προκαταβλητέας

$$_{m|}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{m}|}^{\;\;1} \cdot \ddot{a}_{x+m:\overline{n}|}$$

Γενικός τρόπος υπολογισμού των εκφράσεων του ΕΚΑ στις ράντες ζωής (ληξιπρόθεσμες ή προκαταβλητέες)

$$\frac{N_y - N_{y+n}}{D_x}$$

Όπου y: Η ηλικία στην οποία γίνεται η καταβολή του πρώτου όρου της ράντας.

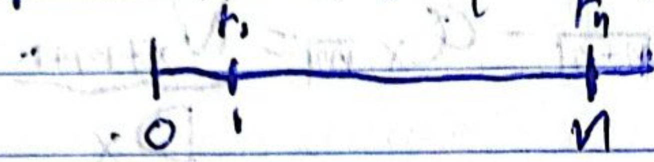
n: το πλήθος όλων των πληρωμών

x: Η ηλικία στην οποία ζητείται η αξία όλων των πληρωμών της ράντας

16/11/2023 (Θ)

Διάφορα είδη ραντών πεπερασμένου χρόνου

1) Ράντα ληξιπρόθεσμη και αύξουσα.



$v(i) = \frac{1}{1+i}$ και

$r_{k+1} > r_k \quad k=1,\dots,n-1$

$$Y = \sum_{k=1}^{n} v^k r_k \cdot I_{\{K_x \geq k\}}(X)$$

$$E(Y) = \sum_{k=1} v^k r_k \cdot {}_kP_x \quad (1)$$

$r_k = 1+k, \quad k=1,\dots$

$$(1)\; E(Y) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\frac{1+k}{(1+i)^k}}_{\simeq 1} \cdot {}_kp_x \quad (2)$$

Στην (2) το κλάσμα $\frac{1+k}{(1+i)^k} \simeq \frac{1+k}{1+ki} \simeq 1$

το οποίο σημαίνει ότι η ασφαλιστική εταιρεία είναι ικανή να αντιμετωπίσει την περίπτωση ενός υψηλού επιτοκίου.

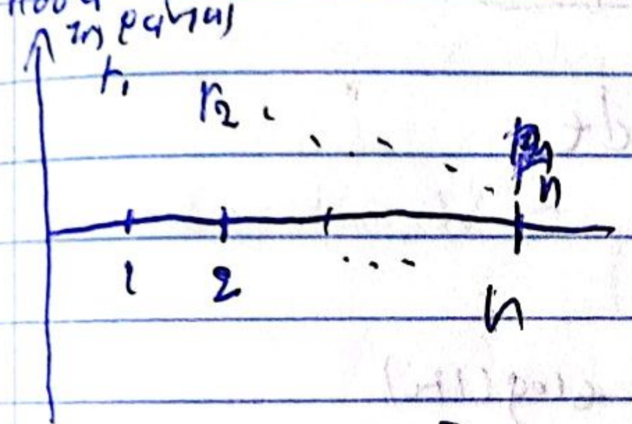
$1 + ki \simeq 1$

$\Updownarrow$

$\frac{1}{k}$

$$Y = \sum_{k=1}^{n} v^k r_k I_{\{k_x \geq k\}} \quad r_{k+1} < r_k$$
$$k = 1, \dots, n-1$$

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} v^k r_k \, ({}_x P_k)$$



Το κεφάλαιο (=) επιβάρυνσης δεν είναι αρκετό για να πληρώνεται ο δικαιούχος με ικανοποιητικό τρόπο.

<u>Ειδική περίπτωση</u> $r_k = n-k \ (k=1,\dots,n-1)$

$$Y = \sum_{k=m}^{n} v^k r_k I_{\{m \leq k_x \leq m+n\}} \quad r_{k+1} > r_k$$
$$r_{k+1} < r_k$$

$k = m \quad m+1, \ m+(n-1)$

$$E(Y) = \sum_{k=n}^{n} v^k r_{k} \, {}_{m+n}P_{m+x}(x)$$

ϕ

Αν η ραντα μεταβάλλεται μοναδιαία ληξιπρόθεσμη αύξουσα έχει ως όρους τους εξής

$r_k = m - k$, $k = 1, \dots, n-1$

Για συνεχή χρόνο

$$\int_0^{\omega_0 (+\infty)} v^t r(t)\, f_{T_x}(t)\, dt$$

$$v^t = \frac{1}{(1+i)^t} = e^{t \log(1+i)}$$

όπου $r(t)$ γν. φθίνουσα

$r(t) = t+1$

για γν. φθ. $r(t) = (t-1)$

$$\int_{a = \varphi^{-1}(\varphi(a))}^{B = \varphi^{-1}(\varphi(B))} \underline{f(\varphi(x))\, \varphi'(x)}' \, dx =$$

$f'(\varphi(x))'$

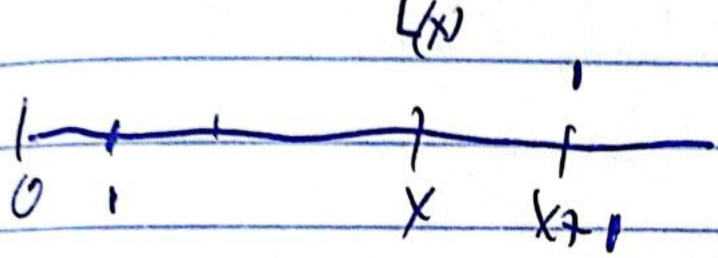
$$= f(\varphi(x)) \Big|_a^B$$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$D(x) = L(x)\, v^{x}$ $\quad x \in [0, T]$

$x \in \mathbb{N}$

$x \in \{1, \dots, \omega_0\}$



$v^{x} L(x) \qquad v^{x} = \frac{1}{(1+i)^{x}}$

παρούσα αξία των παραπάνω είναι

$$\int_0^{\omega_0} D(x)\, dx$$

20/11/2023/(Θ)

21 / 11 / 2023 (Θ)

21/11/2023 (Φ)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Ζητείται η ράντα ζωής $5| \ddot{a}_{30:\overline{12}|}$ όταν ηλικία 38 ετών.

Ο 1ος όρος της ράντας καταβάλλεται στην ηλικία 35

Το πλήθος των όρων της ράντας είναι 12

Η ηλικία στην οποία ζητείται η αξία είναι 38 ($x=38$)

Οπότε έχουμε $\frac{N_{35}-N_{47}}{D_{38}}$ ως αξία της ράντας στην ηλικία 38

Β' τρόπος: Το ίδιο προκύπτει και αν χρησιμοποιούμε χρηματοοικονομικούς όρους

$$5| \ddot{a}_{30:\overline{12}|} \cdot \frac{1}{A_{30:\overline{8}|}^{\ \ 1}} = \frac{N_{30+5}-N_{30+5+12}}{D_{30}} \cdot \frac{1}{\frac{D_{38}}{D_{30}}}$$

$$= \frac{N_{35}-N_{47}}{D_{38}}$$

Ισόβια Ασφάλιση Θανάτου

$A_x L_x = 1 \cdot d_x v + 1\, d_{x+1} \cdot v^2 + \cdots + 1\, d_{x+n-1} v^n + \cdots$

Θέτω $C_x = d_x v^{x+1}$ και $M_x = C_x + C_{x+1} + \cdots + \cdots$

Θα έχουμε: $A_x = \dfrac{d_x \cdot v + d_{x+1} v^2 + \cdots + d_{x+n-1} v^n + \cdots}{L_x}$

$= \dfrac{d_x v^{x+1} + d_{x+1} v^{x+2} + \cdots + d_{x+n-1} v^{x+n}}{D_x} =$

$= \dfrac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1} + \cdots}{D_x} = \dfrac{M_x}{D_x}$

Πρόσκαιρη Ασφάλιση Θανάτου

$A^1_{x:\overline{n|}} \cdot L_x = 1 \cdot d_x v + 1 \cdot d_{x+1} v^2 + \cdots + 1 \cdot d_{x+n-1} v^n$

$A^1_{x:\overline{n|}} = \dfrac{1 \cdot d_x v + 1 \cdot d_{x+1} v^2 + \cdots + 1 \cdot d_{x+n-1} v^n}{L_x}$

$A^1_{x:\overline{n|}} = \dfrac{d_x v^{x+1} + d_{x+1} v^{x+2} + \cdots + d_{x+n-1} v^{x+n}}{L_x \cdot v^x}$

$$A^{1}_{x:\overline{n|}} = \frac{C_x + C_{x+1} + \cdots + C_{x+n-1}}{D_x} =$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

• $\boxed{\text{Μικτή Ασφάλιση}}$

ΕΙΑ → $A_{x:\overline{n|}} = A^{1}_{x:\overline{n|}} + A_{x:\overline{n|}}^{\ \ 1} =$

$$= \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n}}{D_x} =$$

$$= \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ

Η οικονομική αρχή μπορεί να γραφεί: $P\ddot{a} = A \Rightarrow P = \frac{A}{\ddot{a}}$

όπου P: καθαρό ετήσιο ασφάλιστρο

$\ddot{a}$: παρούσα αξία της κατάλληλης προκαταβλητέας ράντας ζωής

A: ΕΚΑ της θεωρούμενης μορφής ασφάλισης

ΟΡΙΣΜΕΝΑ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ

(με χρήση συναρτήσεων θνησιμότητας)

- ισόβια ασφάλιση θανάτου:

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x} = \frac{M_x}{N_x}$$

- πρόσκαιρη ασφάλιση θανάτου n-ετών:

$$P^1_{x:\overline{n|}} = \frac{A^1_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

- Μικτή ασφάλιση (n-ετών):

$$P_{x:\overline{n|}} = \frac{A_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

- Ασφάλιση μελλοντικού κεφαλαίου (n-ετων):

$$P_{x:\overset{1}{\overline{n|}}} = \frac{A_{x:\overset{1}{\overline{n|}}}}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}$$

- Πρόσκαιρη ασφάλιση θανάτου και πρόσκαιρη πληρωμή t ασφαλίστρων (t<n):

$$_tP^1_{x:\overline{n|}} = \frac{A^1_{x:\overline{n|}}}{\ddot{a}_{x:\overline{t|}}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}}$$

28/11/2023 (Φ)

Υπενθύμιση:

Συναρτήσεις Θνησιμότητας

$D_x = L_x \cdot v^x$

$N_x = D_x + D_{x+1} + \cdots + D_{w-1}$

ΑΣΚΗΣΗ Να βρεθεί το ΕΚΑ το οποίο πρέπει να καταβάλλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ο κύριος Ηλίας ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε στην ηλικία των 65 ετών και εφόσον βρίσκεται εν ζωή να λάβει το ποσό των 500.000 €. Το επιτόκιο είναι 4% και η εταιρία αντλεί δεδομένα απ'τον πίνακα θνησιμότητας όπου $L_{30} = 9.189$, $L_{65} = 539$

ΛΥΣΗ #

Είναι ασφάλιση επιβίωσης η-ετών

Άρα ψάχνω το $A_{x:\overline{n|}} = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}$

Έχουμε ότι $D_{30} = L_{30} \cdot v^{30} =$

$= 539 \cdot \left(\dfrac{1}{1+0{,}04}\right)^{30} = 29803$

$$D_{30+35} = D_{65} = L_{65} \cdot \left(\frac{1}{1+0{,}04}\right)^{65} = 6.895$$

$$A_{30:\overline{35}|}^{\;1} = \frac{D_{65}}{D_{30}} = 0{,}2313525$$

Οπότε για να λάβει στην ηλικία των 65 ετών 500.000€ πρέπει να καταβάλλει στην ασφαλιστική

$EKA = (0{,}23) \cdot 500.000 = 115676{,}2$

04/12/2023 (Θ)

SOS

Ασκησεις

1) Έστω ότι η διάρκεια ζωής X είναι τυχ. μετ. και $X \sim Exp(\lambda)$

Θεωρόντας επιτόκιο να προσδιοριστεί η μέση τιμή του συντελεστή μεταπροσής

$$D(X) = X \cdot v^X \quad \left(v = \frac{1}{1+i}\right)$$

Αν το ανώτατο όριο ηλικείας του (x) είναι ω_0

Απάντηση

$$E(D(X)) = \int_0^{\omega_0} x v^x f_X(x)\, dx$$

$$\underset{X \sim Exp(\lambda)}{\overset{\text{Αφού}}{=}} \int_0^{\omega_0} x v^x \lambda e^{-\lambda x}\, dx =$$

$$= \int_0^{\omega_0} x e^{x \log v} \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx =$$

Θέτω $\log v - \lambda = \Theta$

$$= \lambda \int_0^{\omega_0} x e^{x(\log - \lambda)}\, dx =$$

$$= \lambda \int_0^{w_0} x e^{\theta x} \, dx = \lambda \int_0^{w_0} x \left(\frac{e^{\theta x}}{\theta}\right)' dx \overset{\theta \neq 0}{=}$$

$$= \lambda \left[x \frac{e^{\theta x}}{\theta} \right]_0^{w_0} - \lambda \int_0^{w_0} \frac{e^{\theta x}}{\theta} (x)' \, dx$$

$$= \lambda \left(\frac{w_0 e^{\theta w_0}}{\theta} \right) - \frac{\lambda}{\theta^2} \left(w_0 e^{\theta w_0} \right) =$$

$$= \frac{\lambda}{\theta} e^{\theta w_0} \left(1 - \frac{1}{\theta} \right) = g(w_0)$$

Παρατηρούμε $g'(w_0) \geq 0$

Να ερμηνεύσετε το ότι η g είναι γν. αύξουσα.

<u>Απάντηση:</u> Ο συντελεστής μετατροπής είναι η παρούσα αξία ανηγμένη στο 0 που καταβάλλεται τη χρονική περίοδο X. Στην προκειμένη περίπτωση $X \sim Exp(\lambda)$

Άρα το ότι η $g(\omega_0)$ είναι γνησίως αύξουσα σημαίνει ότι η παρούσα αξία της αντίστοιχης συνεχούς ράντας με ανώτατο όριο το ω_0 αυξάνεται γνήσια ως προς το όριο ηλικίας

(Παραλλαγή με ομοιόμορφη αντί για εκθ.)

$X \sim U([0,\omega_0]) \quad f_X(x) = \frac{1}{\omega_0}$

$$E(D(x)) = \int_0^{\omega_0} x v^x \cdot \frac{1}{\omega_0} dx =$$

$$= \frac{1}{\omega_0} \cdot \int_0^{\omega_0} x \cdot e^{x \log v} dx \xrightarrow[\log v = \theta]{\text{θέτω}}$$

$$= \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\omega_0} x \left(\frac{e^{\theta x}}{\theta}\right)' dx =$$

$$= \frac{1}{\omega_0} \cdot \left[x \frac{e^{\theta x}}{\theta}\right]_0^{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\omega_0} \frac{e^{\theta x}}{\theta} \cdot \overset{1}{\overset{\shortparallel}{(x)'}} dx$$

$$= \frac{1}{w_0} \cdot w_0 \frac{e^{\theta w_0}}{\theta} - \frac{1}{w_0} \int_0^{w_0} \frac{e^{\theta x}}{\theta} dx \quad (1)$$

όπου $\int_0^{w_0} \frac{e^{\theta x}}{\theta} dx = I_1$

$$I_1 = \int_0^{w_0} \frac{e^{\theta x}}{\theta} dx = \int_0^{w_0} \frac{1}{\theta} \left(\frac{e^{\theta x}}{\theta} \right)' dx =$$

$$= \frac{1}{\theta^2} \left(e^{\theta w_0} - 1 \right)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{w_0} w_0 \frac{e^{\theta w_0}}{\theta} - \frac{1}{w_0} \cdot \frac{1}{\theta^2} \left(e^{\theta w_0} - 1 \right) =$$

$$= g(w_0) = \frac{\theta w_0 e^{\theta w_0} - (e^{\theta w_0} - 1)}{\theta^2 w_0}$$

$g'(w_0) =$

$$= \frac{\theta^2 w_0 \left[\theta w_0 e^{\theta w_0} - e^{\theta w_0} - 1 \right)' - \theta^2 (w_0 e^{\theta w_0} - e^{\theta w_0} - 1)}{(\theta^2 w_0)^2}$$

Θέτω $\theta w_0 = y$

Σαρώθηκε με το CamScanner

$$h(y) = y e^{y}$$

$$h'(y) = e^{y} + y e^{y} = \dots$$

Για Pareto κατανομή :

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x_m}{\cancel{x}^{\alpha}} & , x \geq x_m \\ 0 & , x \in [0, x_m) \end{cases}$$

$$x \in [x_m, w_0)$$

$$E(D(x)) = \int_{x_m}^{w_0 x} \cancel{x^{w_0}} \frac{x_m}{x^{a}} \, dx$$

05/12/2023 (Θ)

Ανατοκισμός $\quad 0 \quad t \quad T \quad$ Επιτόκιο r

$e^{rt}\int_0^s e^{rt} f_T(t)\,dt \qquad T \sim Exp(\lambda)$

$$\int_0^s e^{rt}\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \lambda\int_0^s e^{(r-\lambda)t}\,dt$$

Για $r=\lambda$: $\lambda\int_0^s 1\,dt = \lambda s$

Για $r\neq\lambda$: $\lambda\int_0^s\left(\frac{e^{(r-\lambda)t}}{r-\lambda}\right)' dt =$

$$=\lambda\left(\frac{e^{(r-\lambda)s}}{r-\lambda}-\frac{1}{r-\lambda}\right)$$

$e^{rt}\approx 1+rt \qquad e^{-rt}=\frac{1}{e^{rt}}$

$e^{x}=\sum_0^\infty \frac{1}{n!}x^n$

e^{rt} $\quad 0 \quad t \qquad\qquad 1-it=e^{-rt}$

$i=\frac{1-e^{-rt}}{t}$

$m \quad k \qquad e^{rt(k-m)}$ συσσώρευση

$e^{-rt(k-m)}$ προεξόφληση

$e^{-rt(k-m)} f_T(t)\,dt$ βρίσκω συσσ. αξία

$$\sum_1^n 1\cdot\frac{1-v^k}{(1+i)^k} = 1\cdot\frac{1-v^{(n-1)}}{1-v} \qquad v=\frac{1}{1+i}$$

$$=\frac{1-v^{(n-1)}}{i}(1+i) = e^{-rm} \to -rm = \log(\lambda\,\ddot{a}_{\overline{n}|i})$$

05/12/2023 (Φ)

ΑΣΚΗΣΗ Να βρεθεί το ΕΚΑ το οποίο πρέπει να καταβάλει σε μια ασφαλιστική εταιρία ο κύριος Ηλίας ηλικίας 30 ετών, έτσι ώστε απ' την υπογραφή της σύμβασης και εφόσον βρίσκεται εν ζωή να λαμβάνει το ποσό των 3.000 €

α) Στο τέλος κάθε έτους

β) Στην αρχή του κάθε έτους.

δίνονται $i=4\%$ $N_{30}=677106$ $D_{30}=29803$

Συναρτήσεις Θνησιμότητας	$N_{31}=647303$
$D_x = L_x \cdot v^x$	$D_{31}=28629$

$N_x = D_x + D_{x+1} + \dots + D_{w-1}$

α) Ο κ. Ηλίας για να λαμβάνει 1 € στο τέλος κάθε έτους, θα πρέπει να καταβάλλει στην Ασφ. εταιρεία

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \longrightarrow a_{30} = \frac{N_{31}}{D_{30}} = \frac{647.303}{29803} = 21,719$$

(ληξιπρ. ράντα)

Άρα για να λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους 3.000 θα πρέπει να καταβάλει στην Ασφ. ΕΚΑ $= 3.000 \cdot 21,71939 = 65158,17$€

Β] Ο κ. Ηλίας για να λαμβάνει 1€ στην αρχή κάθε έτους θα πρέπει να καταβάλει στην Ασφ. εταιρεία (προκαταβ ράντα)

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} = \ddot{a}_{30} = \frac{N_{30}}{D_{30}} = \frac{677106}{29803} = 22,71939$$

Άρα ο κ. Ηλίας για να λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους 3.000 θα καταβάλει στην Ασφ ετ.

ΕΚΑ $= 3.000 \cdot 22,71939 = 68158,17$€

ΑΣΚΗΣΗ] Να βρεθεί το ΕΚΑ Γιάννη ηλικίας 30 ετών έτσι ώστε απ' την υπογραφή της σύμβασης και εφόσον βρίσκεται εν ζωή να λαμβάνει επί 20 έτη 3.000€

α] Στο τέλος του κάθε έτους

$i = 4\%$, $D_{30} = 29.803$ $N_{31} = 647.303$ $N_{51} = 241384$

Ο κ. Γιάννης να λαμβάνει 1€ στο τέλος κάθε έτους απ' την υπογραφή της σύμβασης και μετά

$$\ddot{a}_{30:\overline{20|}} = \frac{N_{30+0} - N_{30+20+0}}{D_{30}} = \frac{N_{31} - N_{51}}{D_{30}}$$

$= 13,4523$

Για να λαμβάνει 3000€ επί 20 έτη πρέπει πρώτα να καταβάλει ΕΚΑ $= 3000 \cdot 13,4523$ $= 40.356,9$

12/12/2023 (Φ)

ΑΣΚΗΣΗ) Μια πρόσκαιρη ~~[illegible]~~ ασφάλεια θανάτου n-ετών για το άτομο X παρέχει κεφάλαιο θανάτου K- ~~[illegible]~~ στην επιστροφή ασφαλίστρων συσσωρευμένα με επιτόκιο i στο τέλος του έτους θανάτου. Η ασφάλιση χρηματοδοτείται από ετήσεια ασφάλιστρα. Αν το τεχνικό επιτόκιο της ασφάλισης είναι i, τότε

α) Βρείτε την σχέση για την απώλεια L του ασφαλιστή

β) Var(L) =

γ) Var(L) = i . αν E(L) = 0

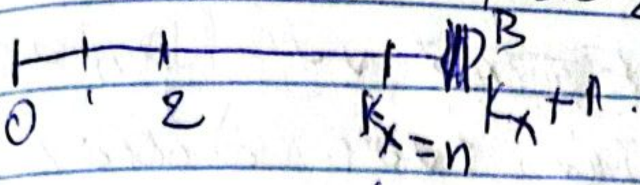
ΛΥΣΗ

α) Έστω P το ασφάλιστρο (ετήσιο)

Π.Α των παροχών

Y = υ

09/01/2024 (Θ)



Πως αποτιμά αυτό το συμβόλαιο η ασφ. εταιρία, σύντομα

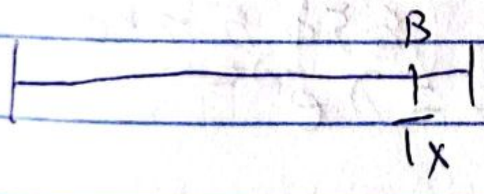
Απάντηση

Η αποτίμηση γίνεται μέσω της συνδεδεμένης παρούσας αξίας της τυχ. μετ. $B\cdot(1+i)^{-(K_x+1)} = Y$

$K_x = 1, \dots, n, n+1, \dots$

$E(Y) = B\cdot E\left((1+i)^{-(n+1)} \mid K_x = n\right)\cdot P_n$

όπου P_n: πιθανότητα να ζήσει μέχρι και την χρον. περίοδο n



Η τυχ. μετ. που δίνει την αποτίμηση αυτού του ασφ. συμβ. είναι: $Z = B e^{-r\cdot T_x}$

$E(Z) = B\cdot \int_0^{\infty(\omega_0)} e^{-rT_x(t)} f_{T_x}(t)\,dt =$

$= B\cdot \int_0^{\omega_0} e^{-rt} f_{T_x}(t)\,dt$

Η πιθανότητα ~~[illegible]~~ να ζήση ο ασθ. μεταξύ ενός διαστ. $T_x \in (t, t+h)$ όπου $h > 0$ ακολουθεί μια κατανομή της οποίας η σ.π.π. είναι $f_{T_x}(t)$.

Εαν $w_0 = +\infty$ τότε όλο το ολοκλήρωμα είναι η ροπογεννήτρια $M_{T_x}(-r)$

Άρα $E(Z) = B \cdot M_{T_x}(-r)$

Εάν θέλουμε να βρούμε $Var(Z)$ βρίσκουμε την $2^{η}$ ροπή διότι $Var(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2$

$2^{η}$ ροπή: $M_{T_x}(-2r)$

Όπως είπαμε μες το εξάμηνο η $T_X \sim Exp(\lambda)$ $f_{T_x}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$

09/01/2024 (Φ)

ΑΣΚΗΣΗ: Ένα καταναλωτικό δάνειο 4 ετών ύψους 1000 € εκδόθηκε στον (25 - ετών άνθρωπος) να ξεπληρωθεί με ισόποσες δόσεις στο τέλος κάθε χρόνου. Ταυτόχρονα μία τετραετής πρόσκαιρη ασφάλιση θανάτου έχει σαν κεφάλαιο θανάτου την αποπληρωμή του δανείου στο τέλος του έτους του θανάτου. Βρείτε την ολική φθορά του ασφαλιστή, υποθέτοντας ότι η ασφάλιση πληρώθηκε με ένα ΕΚΑ G και υπολογίστε το G σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας

$i = 6\%$

$\ddot{a}_{25:\overline{4}|} = 3{,}667$ και $_4q_{25} = 0{,}005$

ΛΥΣΗ:

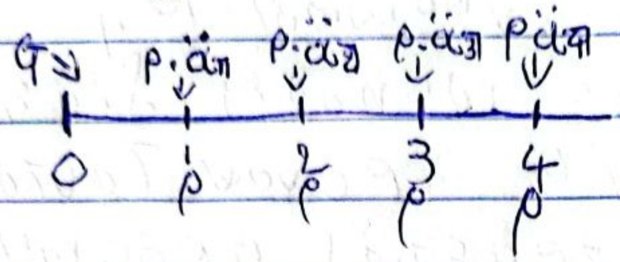
Η δόση του δανείου είναι:

$\rho \cdot a_{\overline{4}|} = 1000 \Rightarrow \rho = 288.6$

όπου ρ: χρεολύσιο

Η παρούσα αξία του κεφαλαίου θανάτου είναι

$$Z_1 = \begin{cases} v^{K_x+1}\cdot P \cdot \ddot{a}_{\overline{4-K_x}|}, & \text{εάν } K_x = 0,1,\dots,3 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Η ζημιά του ασφαλιστή θα είναι $L = Z_1 - ΕΚΑ \Rightarrow$

$L = Z_1 - G \Rightarrow E(L) = E(Z_1) - G$

αλλά

$$E(Z_1) = \sum_{k=0}^{3} v^{k+1}\cdot P \cdot \frac{1-v^{4-k}}{a}\cdot {}_{k|}q_{25}$$

$$= \frac{P}{a}\cdot\left[A^{1}_{25:\overline{4}|} - v^5\cdot \sum_{k=0}^{3} {}_{k|}q_{25}\right]$$

$$= \frac{P}{a}\cdot\left(A^{1}_{25:\overline{4}|} - v^5\cdot {}_4q_{25}\right)$$

Από την αρχή της ισοδυναμίας:

$$A^{1}_{25:\overline{4}|} = A_{25:\overline{4}|} - v^4\, {}_4P_{25} =$$

$$1 - d\cdot \ddot{a}_{25:\overline{4}|} - v^4\, {}_4P_{25}$$

προκαταβλητέος τόκος

ΑΣΚΗΣΗ

Ν.δ.ο. $\int_0^\infty b_t v^t \cdot {}_tP_x \cdot \mu_{x+t}\, dt =$

$$= b_0 + \int_0^\infty (b_t' \cdot \cancel{v^t} - \delta b_t) \cdot v^t \cdot {}_tP_x\, dt$$

όπου $b_t' = \frac{d}{dt} b_t$

Μεταβλητό κεφάλαιο: b_t

Ράντα δόσεις: $b_t' - \delta b_t$

ΛΥΣΗ

$$\int_0^\infty b_t v^t \underbrace{{}_tP_x \mu_{x+t}} dt =$$

$$= -\int_0^\infty b_t \cdot v^t \cdot ({}_tP_x)' dt =$$

$$= -\left[b_t \cdot v^t \cdot {}_tP_x\right]_0^\infty + \int_0^\infty (b_t \cdot v^t)' \, {}_tP_x\, dt =$$

$$= b_0 + \int_0^\infty (b_t' \cdot e^{-\delta t} - \delta \cdot e^{-\delta t} \cdot b_t)\, {}_tP_x\, dt$$

$$= b_0 + \int_0^{+\infty} (b_t' - \delta \cdot b_t) v^t \, {}_tP_x\, dt$$