Προχειρες
Σημειωσεις Στοχαστικων Διαδικασιων
Μεταπτυχιακο Προγραμμα Σπουδων
Τμημα Στατιστικης και Αναλογιστικων - Χρηματοοικονομικων Μαθηματικων

Νικολαος Χαλιδιας

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Συνδυαστική

Ας μελετήσουμε το πείραμα της ρίψης ενός δίκαιου νομίσματος δυο φορές. Τα πιθανά αποτελέσματα είναι τα εξής

$$\{K, K\},\ \{K, \Gamma\},\ \{\Gamma, K\},\ \{\Gamma, \Gamma\}$$

Διαισθητικά τουλάχιστον καταλαβαίνουμε ότι όλα τα παραπάνω πιθανά αποτελέσματα είναι «ισοπίθανα». Με το σκεπτικό αυτό μπορεί να ορισθεί μια απεικόνιση η οποία να μετρά το πόσο πιθανό είναι ένα ενδεχόμενο σε ένα πείραμα. Για τον λόγο αυτό έχουμε τον επόμενο ορισμό της πιθανότητας κατά Laplace.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1 (Ορισμός πιθανότητας κατά Laplace) *Αν ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος είναι πεπερασμένος και όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα του είναι ισοπίθανα τότε η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A δίνεται από*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\textit{πλήθος των στοιχείων του } A}{\textit{πλήθος των στοιχείων του } \Omega}$$

Ξαναγυρνώντας στο παράδειγμα της ρίψης ενός δίκαιου νομίσματος δυο φορές μπορούμε να μετρήσουμε την πιθανότητα (κατά Laplace) του ενδεχομένου να φέρουμε γράμματα και στις δυο ρίψεις. Σε αυτή την περίπτωση το $A = \{\Gamma, \Gamma\}$ και ο δειγματικός χώρος είναι ο

$$\Omega = \{K, K\},\ \{K, \Gamma\},\ \{\Gamma, K\},\ \{\Gamma, \Gamma\}$$

'ρα έχουμε ότι

$$P(\{\Gamma, \Gamma\}) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{4}$$

Παρόμοια, η πιθανότητα να φέρουμε γράμματα στην πρώτη ρίψη είναι

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

όπου $B = \{\Gamma, \Gamma\} \cup \{\Gamma, K\}$.

Διαπιστώνουμε δηλαδή ότι για να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της πιθανότητας θα πρέπει να είμαστε σε θέση να απαριθμούμε σωστά όλα τα πιθανά στοιχειώδη ενδεχόμενα του πειράματος, δηλαδή τον δειγματικό χώρο. Για τον λόγο αυτό θα δώσουμε στην ενότητα αυτή βασικά στοιχεία απαρίθμησης.

1.1 Απαρίθμηση

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 (Βασική αρχή της Απαρίθμησης) *Έστω ότι έχουμε δυο πειράματα και τα πιθανά αποτελέσματα του πρώτου πειράματος είναι m το πλήθος ενώ τα πιθανά αποτελέσματα του δεύτερου πειράματος είναι n το πλήθος. Τότε υπάρχουν nm το πλήθος πιθανά αποτελέσματα και των δυο πειραμάτων μαζί.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Καταγράφουμε σε ζευγάρια τα πιθανά αποτελέσματα και των δυο πειραμάτων. Στην πρώτη θέση του κάθε ζευγαριού τοποθετούμε το αποτέλεσμα του πρώτου πειράματος ενώ στην δεύτερη θέση του ζευγαριού το αποτέλεσμα του δεύτερου πειράματος. Έτσι έχουμε

$$\begin{array}{cccc}(1,1) & (1,2) & \cdots & (1,n)\\ (2,1) & (2,2) & \cdots & (2,n)\\ \vdots & & & \\ (m,1) & (m,2) & \cdots & (m,n)\end{array}$$

Στην πρώτη σειρά έχουμε τοποθετήσει τα ζευγάρια όπου στο πρώτο πείραμα έχουμε το πρώτο αποτέλεσμα και στο δεύτερο πείραμα όλα τα πιθανά αποτελέσματα. Στην δεύτερη σειρά έχουμε τοποθετήσει τα ζευγάρια τα οποία στο πρώτο πείραμα έχουμε το δεύτερο αποτέλεσμα και στο δεύτερο πείραμα όλα τα πιθανά αποτελέσματα. Καταγράφουμε με αυτό τον τρόπο μεθοδικά όλα τα πιθανά ζευγάρια λαμβάνοντας έτσι το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και το επόμενο θεώρημα απαρίθμησης το οποίο είναι γενικότερο από το προηγούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 *Έστω ότι υπάρχουν r το πλήθος πειράματα και το κάθε πείραμα έχει $n_1, \cdots, n_r$ πιθανά αποτελέσματα. Τότε το συνολικό πλήθος των αποτελεσμάτων είναι $n_1 \cdot n_2 \cdots n_r$.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4 *Με την χρήση του θεωρήματος απαρίθμησης μπορούμε να υπολογίσουμε πόσες συναρτήσεις υπάρχουν οι οποίες είναι ορισμένες σε n σημεία και λαμβάνουν 2 το πολύ τιμές, τις μηδέν και 1.*
Στην περίπτωση αυτή είναι σαν να έχουμε n το πλήθος πειράματα με δυο πιθανά αποτελέσματα σε κάθε πείραμα. Έτσι, το πλήθος συναρτήσεων είναι

$$\underbrace{2\cdots 2}_{n\ \text{φορές}} = 2^n$$

1.2 Διατάξεις και Μεταθέσεις

Έστω ότι έχουμε τα τρία γράμματα a, b, c. Πόσες διαφορετικές μεταθέσεις μπορούμε να κάνουμε με τα τρία αυτά γράμματα;
Στην πρώτη θέση μπορούμε να τοποθετήσουμε οποιοδήποτε από τα 3 γράμματα. Στην δεύτερη θέση μπορούμε να τοποθετήσουμε οποιοδήποτε από τα δυο εναπομείναντα γράμματα και τέλος στην τρίτη θέση θα τοποθετήσουμε το τελευταίο γράμμα. Αρα υπάρχουν $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ διαφορετικές μεταθέσεις γραμμάτων.
Διάταξη n αντικειμένων ανά k ονομάζεται κάθε διατεταγμένη k-αδα που αποτελείται από k διαφορετικά μεταξύ τους αντικείμενα. Αν $k = n$ τότε αντί για διάταξη χρησιμοποιούμε τον όρο **μετάθεση**.
Για παράδειγμα, αν θέλουμε να σχηματίσουμε όλα τα ζευγάρια γραμμάτων από τα γράμματα (a, b, c) τότε θα έχουμε

$$(a, b),\ (a, c),\ (b, a),\ (b, c),\ (c, a),\ (c, b)$$

Δηλαδή, θεωρούμε το ζευγάρι (a, b) διαφορετικό από το (b, a).
'ρα έχουμε το εξής πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5 *Ο αριθμός των διατάξεων n αντικειμένων ανά k δίνεται από τον τύπο*

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}, \quad 1 \leq k \leq n$$

θέτοντας $0! = 1$.

1.3 Συνδυασμοί

Συνδυασμός n αντικειμένων ανά k λέγεται κάθε μη διατεταγμένη συλλογή αποτελούμενη από k διαφορετικά μεταξύ τους στοιχεία.
Στην περίπτωση αυτή δηλαδή τα ζευγάρια (a, b) και (b, a) για παράδειγμα θεωρούνται ίδια. Ισχύει η επόμενη πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6 *Το πλήθος των συνδυασμών των n αντικειμένων ανά k δίνεται από τον τύπο*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 1 \leq k \leq n$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7 *Έστω ότι θέλουμε να ορίσουμε μια επιτροπή αποτελούμενη από 5 άτομα. Για τον σκοπό αυτό υπάρχουν 7 γυναίκες και 8 άνδρες υποψήφιοι. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να ορισθεί η επιτροπή αυτή;*
Στην περίπτωση αυτή δεν μας ενδιαφέρει η σειρά, δηλαδή η επιτροπή μπορεί να έχει 2 γυναίκες και 3 άνδρες χωρίς να μας ενδιαφέρει ποιες γυναίκες και ποιοι άνδρες ακριβώς θα συμμετέχουν. Αρα το πλήθος των διαφορετικών επιτροπών είναι

$$\binom{15}{5} = 3003$$

διότι το πλήθος των «αντικειμένων» είναι $n = 7 + 8 = 15$ *και το πλήθος των ατόμων στην επιτροπή είναι* $k = 5$.

Περισσότερα για θέματα συνδυαστικής μπορεί να βρει κανείς στο βιβλίο [33].

Κεφάλαιο 2

Πειράματα τύχης, δειγματικός χώρος

2.1 Δειγματικός Χώρος

Έστω ένα πείραμα τύχης (π.χ. ρίψιμο ζαριών, στρίψιμο νομίσματος κτλ) για το οποίο γνωρίζουμε όλα τα πιθανά αποτελέσματα. Το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων ονομάζεται **δειγματικός χώρος** και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω.
Ας δούμε το στρίψιμο ενός νομίσματος. Όπως γνωρίζουμε έχει δυο πιθανά αποτελέσματα, κορώνα ή γράμματα και το σύνολο των αποτελεσμάτων το συμβολίζουμε με

$$\Omega = \{K, \Gamma\}$$

Στο ρίξιμο ενός ζαριού, ο δειγματικός χώρος όπως γνωρίζουμε είναι ο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Επίσης, ένα άλλο πείραμα τύχης είναι να μετρήσει κανείς το χρόνο ζωής ενός λαμπτήρα. Ο δειγματικός χώρος σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\Omega = \{t : 0 \leq t < \infty\}$$

Ο δειγματικός χώρος επομένως δεν είναι πάντα ένα διακριτό σύνολο, αλλά μπορεί να είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ή κάτι άλλο.
Έστω Ω δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και έστω E, F δυο οποιαδήποτε υποσύνολα του. Μπορούμε να ορίσουμε δυο ακόμη υποσύνολα, τα $E \cup F$ και $E \cap F$ τα οποία είναι η ένωση και η τομή αντίστοιχα των υποσυνόλων.
Για την ένωση, ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες,

$$\begin{aligned} &(\text{Αντιμεταθετική}) & E \cup F &= F \cup E, \\ &(\text{Προσεταιριστική}) & (E \cup F) \cup G &= E \cup (F \cup G), \\ &(\text{Επιμεριστική}) & (E \cup F) \cap G &= (E \cap G) \cup (F \cap G) \end{aligned}$$

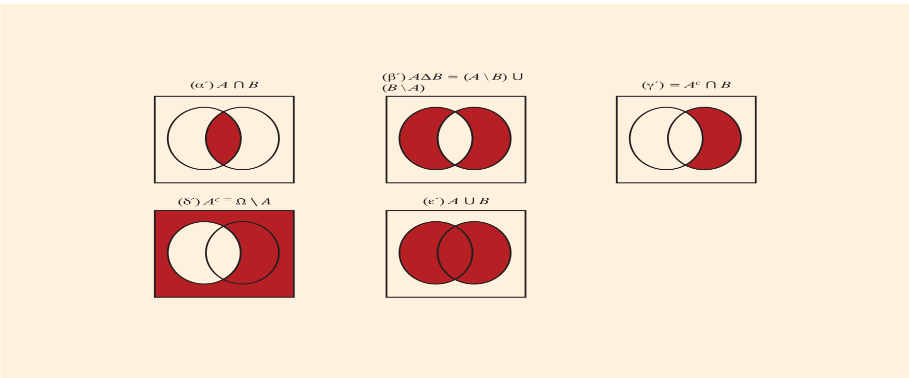
Οι ίδιες ιδιότητες ικανοποιούνται και από την τομή. Επίσης, ο νόμος De Morgan,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c, \quad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c$$

Αν υποθέσουμε ότι όλα τα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου είναι το ίδιο πιθανά, τότε μπορούμε να ορίσουμε την πιθανότητα ενός υποσυνόλου E ως εξής,

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)}, \quad E \subseteq \Omega,$$

όπου $N(E), N(\Omega)$ είναι το πλήθος των στοιχείων του E και του Ω αντίστοιχα. Αυτό ισχύει βέβαια, στην περίπτωση που τα E, Ω είναι διακριτά σύνολα και μπορούμε να μετρήσουμε το πλήθος τους. Σε άλλη περίπτωση, η πιθανότητα θα ορισθεί διαφορετικά. Για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου ο δειγματικός χώρος είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$ πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος να μετρούμε τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Υπάρχουν αρκετά προβλήματα σε αυτή την διαδικασία και δεν είναι καθόλου απλή όπως η προηγούμενη. Δεν μπορούμε να αντιστοιχήσουμε σε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ κάποιον αριθμό, με λογικό τρόπο, χωρίς να δημιουργούνται άλλες τεχνικές δυσκολίες. Σε αυτό το επίπεδο, η Θεωρία Μέτρου, είναι αυτή ακριβώς που χρειάζεται για να ξεπεραστούν οι δυσκολίες αυτές και για να κατασκευασθεί, αξιωματικά, η Θεωρία Πιθανοτήτων με ενιαίο τρόπο για όλες τις περιπτώσεις.



Σχήμα 2.1: Διαγράμματα Venn

Για τους παραπάνω λόγους θα προχωρήσουμε στην αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

2.2 σ-'λγεβρα και Πιθανότητα

Ορισμος 8 *Έστω Ω ένα οποιοδήποτε σύνολο (δειγματικός χώρος) και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του. Θα λέμε ότι η $\mathcal{F}$ είναι* **σ-άλγεβρα** *στο Ω αν*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) Αν $A \in \mathcal{F}$, *τότε* $A^c \in \mathcal{F}$,

(iii) Αν $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ *τότε* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Τα στοιχεία μιας σ-άλγεβρας ονομάζονται **ενδεχόμενα** *και το ζευγάρι $(\Omega, \mathcal{F})$ ονομάζεται* **μετρήσιμος χώρος**.

Ασκηση 9 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος. Δείξτε ότι αν $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ τότε και $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.*

Λυση. Από τον νόμο του de Morgan έχουμε ότι

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i^c) = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c$$

και άρα με την δεύτερη και τρίτη ιδιότητα τελειώνουμε την απόδειξη. □

Ορισμος 10 *Έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω, όχι κατά ανάγκη σ-άλγεβρα. Τότε με $\sigma(\mathcal{A})$ συμβολίζουμε την μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{A}$. Η $\sigma(\mathcal{A})$ ονομάζεται η σ-άλγεβρα που παράγεται από την $\mathcal{A}$.*

Προφανώς, αν η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα τότε $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A})$. Ειδικότερα, έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμος 11 *Όταν $\Omega = \mathbb{R}$ και το $\mathcal{A}$ είναι η οικογένεια όλων των ανοικτών διαστημάτων, τότε ονομάζουμε την $\sigma(\mathcal{A})$ την σ-άλγεβρα των συνόλων Borel και την συμβολίζουμε με $\mathcal{B}$. Τα σύνολα που ανήκουν στην $\mathcal{B}$ ονομάζονται* **σύνολα Borel**.

Ορίζουμε τώρα την έννοια της πιθανότητας πάνω σε μια σ-άλγεβρα. Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος.

Ορισμος 12 *Έστω μια απεικόνιση $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ με τις παρακάτω ιδιότητες,*

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) *για κάθε ακολουθία $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ ανά δύο ξένα, έχουμε*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Αυτή η απεικόνιση ονομάζεται **μέτρο πιθανότητας** *και η τριάδα $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ονομάζεται* **χώρος πιθανότητας**.

Λημμα 13 *Αν $A_1, A_2, \cdots$ είναι μια αύξουσα (φθίνουσα) ακολουθία ενδεχομένων, τότε*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} P(A_k),$$
$$\left(P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} P(A_k)\right).$$

Αποδειξη. Θέτουμε $B_k = A_{k+1} \setminus A_k$ και $B_0 = A_1$ τα οποία είναι ανά δύο ξένα. Επίσης έχουμε

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

και

$$\bigcup_{k=0}^{n} B_k = A_{n+1}.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(B_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} P(B_k) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_{n+1}). \end{aligned}$$

Για την περίπτωση της φθίνουσας ακολουθίας συνόλων έχουμε, διαπιστώνοντας ότι A_k^c είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων,

$$\begin{aligned} P\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_k\right) &= 1 - P(\cup_{n=1}^{\infty} A_k^c) = 1 - \lim_{k\to\infty} P(A_k^c) \\ &= \lim_{k\to\infty}(1 - P(A_k^c)) = \lim_{k\to\infty} P(A_k) \end{aligned}$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 14 *Αποδείξτε ότι*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Επίσης, αν $P(A_n) = 0$ *τότε*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

Τέλος, αν $P(A_n) = 1$ *τότε*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

ΛΥΣΗ. Θέτουμε $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Τότε

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(B_n) \text{ αφού } B_n \text{ αύξουσα} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_{n+1}). \end{aligned}$$

Τα άλλα δύο αφήνονται σαν άσκηση. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 15 *Έστω* $(\Omega, \mathcal{F})$ *μετρήσιμος χώρος. Ορίζουμε το άνω και το κάτω όριο μιας ακολουθίας συνόλων* $A_1, A_2, \dots \subseteq \Omega$ *ως εξής,*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k,$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα για τα παραπάνω όρια.

ΠΡΟΤΑΣΗ 16 *Έστω* $A_1, A_2, \dots \subseteq \mathcal{F}$ *όπου* $\mathcal{F}$ *σ-άλγεβρα. Ισχύει ότι*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Το πρώτο λήμμα των Borel-Cantelli είναι το επόμενο.

Λημμα 17 (Λημμα των Borel-Cantelli) *Αν*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

τότε

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

Αποδειξη. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Αρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) &\leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty. \end{aligned}$$

Αυτό συμβαίνει διότι η ακολουθία $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$ συγκλίνει στο S, άρα

$$\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = S - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \to 0$$

καθώς $n \to \infty$. □

2.3 Ανεξαρτησία Ενδεχομένων

Θα εξετάσουμε την έννοια της ανεξαρτησίας δυο και περισσοτέρων ενδεχομένων καθώς και σχετικά θέματα. Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας.

Ορισμος 18 *Έστω $P(B) > 0$. Τότε $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ονομάζεται* ***δεσμευμένη πιθανότητα*** *του A δεδομένου του B.*

Ασκηση 19 *Αποδείξτε ότι $P(A|\Omega) = P(A)$. Αν $B \subseteq A$ και $P(B) > 0$, τότε $P(A|B) = 1$. Αν $A \cap B = \emptyset$ και $P(B) > 0$, τότε $P(A|B) = 0$. Αν $A \cap B = \emptyset$ και $P(C) > 0$ τότε $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$. Αποδείξτε ότι η απεικόνιση $A \to P(A|B)$ είναι μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{F})$ (θα χρειαστεί η επιμεριστική ιδιότητα).*

Ασκηση 20 *Έστω $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Αποδείξτε ότι*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots \\ & \quad P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}). \end{aligned}$$

Θα δώσουμε καταρχάς μερικά χρήσιμα αποτελέσματα και ορισμούς.

Ορισμος 21 *Λέμε ότι τα ενδεχόμενα $H_1, H_2, \cdots$ παριστούν μια* **διαμέριση** *του Ω αν είναι ανά δύο ξένα και $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} H_n$.*

Θεωρημα 22 (Ολικης Πιθανοτητας) *Έστω $H_1, H_2, \cdots$ μια διαμέριση του Ω τ.ω. $P(H_n) \neq 0$ για κάθε n. Τότε για κάθε ενδεχόμενο A, έχουμε*

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|H_n)P(H_n).$$

Αποδειξη. Εφόσον τα H_i είναι ανά δύο ξένα το ίδιο συμβαίνει και με τα $A \cap H_1, A \cap H_2, \cdots$. Αρα έχουμε,

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\right) \\ &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap H_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap H_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A|H_n)P(H_n). \end{aligned}$$

□

Παραδειγμα 23 *Ας υποθέσουμε ότι αύριο θα βρέξει ή θα χιονίσει, αλλά όχι και τα δυο. Έστω ότι γνωρίζουμε την πιθανότητα να βρέξει και είναι $2/5$ ενώ η πιθανότητα να χιονίσει είναι 3/5. Υποθέτουμε επιπλέον ότι αν βρέξει η πιθανότητα να αναβληθεί μια πτήση είναι 1/5 ενώ αν χιονίσει είναι 3/5. Ποια είναι η πιθανότητα να αναβληθεί μια πτήση;*
Συμβολίζουμε με A το ενδεχόμενο να αναβληθεί μια πτήση και με B το ενδεχόμενο να βρέξει. Εδώ το συμπληρωματικό του B, δηλαδή το B^c είναι το ενδεχόμενο να χιονίσει μιας και έχουμε υποθέσει ότι θα συμβεί ένα από τα δυο. Τότε, τα ενδεχόμενα B, B^c παριστούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου. Για τον λόγο αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας ούτως ώστε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου A. Έχουμε ότι

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{11}{25}$$

Θεωρημα 24 (Τύπος του Bayes) *Έστω $H_1, H_2, \cdots$ μια διαμέριση του Ω τ.ω. $P(H_n) \neq 0$ και έστω $P(A) > 0$. Τότε,*

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(A|H_n)P(H_n)}.$$

Αποδειξη. Εφόσον

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)}$$

τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα ολικής πιθανότητας στον παρονομαστή του παραπάνω κλάσματος προκύπτει το ζητούμενο. □

Παραδειγμα 25 *Έστω ότι ένας άνθρωπος έχει πιθανότητα 1 στα 10^5 να νοσήσει από μια συγκεκριμένη πάθηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα τεστ το οποίο στην περίπτωση που κάποιος έχει νοσήσει το τεστ είναι θετικό με πιθανότητα 9/10. Αν κάποιος δεν έχει νοσήσει από την πάθηση αυτή, η πιθανότητα το τεστ να είναι θετικό είναι 1/20. Υποθέτουμε ότι το τεστ κάποιου είναι θετικό. Ποια είναι η πιθανότητα να έχει νοσήσει;*
Ας συμβολίσουμε με A το ενδεχόμενο να έχει νοσήσει και με B το ενδεχόμενο το τεστ να είναι θετικό. Ψάχνουμε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(A|B)$. Επειδή γνωρίζουμε τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(B|A)$ και $P(B|A^c)$ θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Bayes για να υπολογίσουμε την ζητούμενη πιθανότητα. Έχουμε

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^c)P(A^c)} = 0.0002$$

Παραδειγμα 26 *Ένα δίκαιο ζάρι ρίπτεται δυο φορές. Ο δειγματικός χώρος είναι*

$$\Omega = \{(i,j) : i,j = 1,2,\cdots,6\}$$

Έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω και έστω το ενδεχόμενο B το οποίο είναι το ενδεχόμενο στο οποίο η πρώτη ρίψη είναι αριθμός μικρότερος ή ίσος του 3 και έστω το ενδεχόμενο C το άθροισμα των δυο ρίψεων να είναι ίσο με 6. Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες των ενδεχομένων B και C και τις δεσμευμένες πιθανότητες $P(C|B)$ και $P(B|C)$.
Εφόσον το ζάρι είναι δίκαιο τότε

$$P(\{i,j\}) = \frac{1}{36}, \quad i,j = 1,2,\cdots,6$$

Τα σύνολα B και C είναι ως εξής

$$\begin{aligned} B &= \{(i,j) : i = 1,2,3 \text{ και } j = 1,2,\cdots,6\} \\ C &= \{(i,j) : i + j = 6 \text{ και } i,j = 1,2,\cdots,6\} \end{aligned}$$

Το ενδεχόμενο B περιέχει $3 \times 6 = 18$ ισοπίθανα ζευγάρια ενώ το C περιέχει 5 ισοπίθανα ζευγάρια, το οποίο σημαίνει

$$P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}, \quad P(C) = \frac{5}{36}$$

Η τομή των δυο ενδεχομένων είναι

$$B \cap C = \{(1,5),\ (2,4),\ (3,3)\}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} P(C|B) &= \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{6} \\ P(B|C) &= \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Παραδειγμα 27 *Ένα δίκαιο νόμισμα ρίπτεται $2n$ φορές. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου να φέρουμε ακριβώς n φορές κορώνα.*
Ο δειγματικός χώρος αποτελείται από 2^{2n} ισοπίθανα στοιχεία ενώ υπάρχουν $\binom{2n}{n}$ τρόποι για να φέρουμε n φορές κορώνα. Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

Χρησιμοποιώντας την φόρμουλα του Stirling βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$

□

Παρακάτω δίνουμε τους ορισμούς για την ανεξαρτησία δύο και περισσότερων ενδεχομένων.

Ορισμος 28 *Τα ενδεχόμενα A, B ονομάζονται* **ανεξάρτητα** *αν*

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \cdots, A_n$ είναι ανεξάρτητα αν για κάθε $k \leq n$ και για κάθε επιλογή k ενδεχομένων, η πιθανότητα της τομής τους είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων τους. Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, \cdots$ (άπειρα το πλήθος) λέγονται ανεξάρτητα αν οποιοδήποτε υποσύνολο τους πεπερασμένου πλήθους είναι ανεξάρτητα.

Παρατηρηση 29 *Έστω n ενδεχόμενα $A_1, \cdots, A_n$ τ.ω.*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)$$

Τότε μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι τα ενδεχόμενα αυτά είναι ανεξάρτητα. Πράγματι, έστω $n-1$ οποιαδήποτε ενδεχόμενα από τα παραπάνω n, δηλαδή τα $A_{l_1},\cdots,A_{l_{n-1}}$. Τότε

$$\begin{aligned}
P(A_{l_1}\cap\cdots\cap A_{l_{n-1}}) &= P(A_{l_1}\cap\cdots\cap A_{l_{n-1}}\cap\Omega)\\
&= P(A_{l_1}\cap\cdots\cap A_{l_{n-1}}\cap(A_{l_n}\cup A_{l_n}^c))\\
&= P(A_{l_1}\cap\cdots\cap A_{l_{n-1}}\cap A_{l_n})+P(A_{l_1}\cap\cdots\cap A_{l_{n-1}}\cap A_{l_n}^c)\\
&= P(A_{l_1})\cdots P(A_{l_n})+P(A_{l_1})\cdots P(A_{l_n}^c)\\
&= P(A_{l_1})\cdots P(A_{l_{n-1}})
\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι την ίδια σχέση ικανοποιούν και οποιαδήποτε $n-2$ ενδεχόμενα, $n-3$ ενδεχόμενα κ.τ.λ. Αρα τελικά n ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα **ανν**

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)$$

□

Το επόμενο θεώρημα είναι το δεύτερο λήμμα των Borel-Cantelli.

ΘΕΩΡΗΜΑ 30 (ΔΕΥΤΕΡΟ ΛΗΜΜΑ ΤΩΝ Borel-Cantelli) *Έστω ότι τα ενδεχόμενα A_n είναι ανεξάρτητα. Τότε έχουμε*

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty\Rightarrow P\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right)=1.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
P\left(\limsup_{n\to\infty}A_n\right) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}P\left(\bigcup_{k=n}^{m}A_k\right).
\end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=n}^{m}A_k\right)^c &= P\left(\bigcap_{k=n}^{m}A_k^c\right)=P(A_n^c)\cdots P(A_m^c)\\
&\le e^{-\sum_{k=n}^{m}P(A_k)},
\end{aligned}$$

αφού $1-x\le e^{-x}$.
'ρα $P\left(\bigcup_{k=n}^{m}A_k\right)^c\to 0$ όταν $m\to\infty$. Οπότε, $P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)=1$ και τότε

$$P(\limsup_{n\to\infty}A_n)=1$$

□

Παρατηρούμε ότι αν τα ενδεχόμενα A_n είναι ανεξάρτητα, τότε η πιθανότητα

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$$

έχει μόνο δύο πιθανές τιμές, τις 0 και 1.

Ασκηση 31 *Δείξτε ότι για κάθε ενδεχόμενα A, B τα επόμενα είναι ισοδύναμα,*

(i) *A και B είναι ανεξάρτητα,*

(ii) *A^c και B είναι ανεξάρτητα,*

(iii) *A^c και B^c είναι ανεξάρτητα.*

Λυση. Θα δείξουμε ότι τα δύο πρώτα είναι ισοδύναμα. Έστω A, B ανεξάρτητα και επομένως $P(A\cap B) = P(A)P(B)$. Θέλω να δείξω το ίδιο για τα A^c, B. Παρατηρώ ότι $A^c\cap B = B\setminus(A\cap B)$, οπότε $P(A^c\cap B) = P(B\setminus(A\cap B)) = P(B)-P(A\cap B) = P(B)-P(A)P(B) = (1-P(A))P(B) = P(A^c)P(B)$. Αντίστροφα, έστω ότι A^c, B είναι ανεξάρτητα, δηλαδή $P(A^c\cap B) = P(A^c)P(B)$. Θα δείξω το ίδιο για τα A, B. Έχουμε ότι $P(A^c\cap B) = P(B) - P(A\cap B) = P(A^c)P(B) = (1 - P(A))P(B)$ άρα $P(A\cap B) = P(A)P(B)$. □

Ασκηση 32 *Έστω Ω ένα σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$ με $P(A)P(B) \neq 0$ ανεξάρτητα. Δείξτε ότι δεν είναι ξένα μεταξύ τους. Υπάρχει περίπτωση τα A, B να είναι ανεξάρτητα και ξένα μεταξύ τους;*
Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ισοπίθανα και έστω $A = \{1, 2\}$. Δώστε όλα τα $B \subseteq \Omega$ τ.ω. A, B ανεξάρτητα.

Λυση. Είναι προφανές ότι δεν είναι ξένα μεταξύ τους διότι τότε θα είχαν $P(A\cap B) = 0$. Για να είναι και ξένα και ανεξάρτητα θα ισχύει είτε $P(A) = 0$, είτε $P(B) = 0$. Τα σύνολα αυτά είναι $\emptyset, \Omega, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}$. □

Ασκηση 33 *Έστω Ω ένα σύνολο με n ισοπίθανα στοιχεία και έστω $A, B \subseteq \Omega$ ανεξάρτητα. Αποδείξτε ότι αν το A έχει i στοιχεία τότε το B πρέπει να έχει*

$$j = k\frac{n}{MK\Delta(i, n)}, \quad k \in \{0, 1, \cdots, MK\Delta(i, n)\}$$

Δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του B είναι πολλαπλάσιο του ακέραιου $\frac{n}{MK\Delta(i,n)}$. Με $MK\Delta(i, n)$ εννοούμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των (i, n).

Λυση. Έστω m το πλήθος των στοιχείων της τομής $A\cap B$. Τότε από ανεξαρτησία έχουμε ότι $\frac{i}{n}\frac{j}{n} = \frac{m}{n}$ όπου i, j είναι το πλήθος των στοιχείων των A, B αντίστοιχα. 'ρα, $ij = mn$. Διαιρούμε με τον ΜΚΔ(i, n) και έχουμε $j = k\frac{n}{MK\Delta(i,n)}$ όπου $k \in \{0, 1, \cdots, MK\Delta(i, n)\}$. Πράγματι, αφού $j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ έπεται ότι $k = \frac{m}{i}MK\Delta(i, n) \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Εφόσον $j \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ έπεται ότι $k \in \{0, 1, \cdots, MK\Delta(i, n)\}$.

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 34 *Έστω το πείραμα του στριψίματος ενός δίκαιου ζαριού. Ο δειγματικός χώρος είναι ο* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *Θεωρούμε τον χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *όπου* $\mathcal{F}$ *είναι η μέγιστη δυνατή σ-άλγεβρα (η οποία περιέχει όλα τα δυνατά υποσύνολα του* Ω*) και* P *το μέτρο πιθανότητας τ.ω.* $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$. *Έστω το ενδεχόμενο* $A = \{1, 2\}$. *Πως μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα ανεξάρτητα ενδεχόμενα* B *ως προς το* A; *Εφόσον το* A *έχει δυο στοιχεία τότε το* B *θα έχει* $j = 0, 3, 6$ *στοιχεία σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση. Πράγματι, αφού* $MK\Delta(2, 6) = 2$ *έπεται ότι* $j = k \cdot 3$ *όπου* $k \in \{0, 1, 2\}$. *Επιπλέον, στην περίπτωση που* $j = 3$ *τότε, αν* m *είναι το πλήθος των στοιχείων του* $A \cap B$, *έπεται ότι* $m = \frac{ij}{n} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1$, *δηλαδή υποχρεωτικά τα δύο ενδεχόμενα θα έχουν ένα και μόνο ένα κοινό στοιχείο.* $\square$

Κεφάλαιο 3

Τυχαίες Μεταβλητές

3.1 Τυχαίες Μεταβλητές και σ-άλγεβρες

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας.

Ορισμος 35 *Μια απεικόνιση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται τυχαία μεταβλητή (ή $\mathcal{F}$-μετρήσιμη) αν $\{\omega \in \Omega : a < X(\omega)\} \in \mathcal{F}$, για κάθε $a \in \mathbb{R}$.*

Συχνά, αντί για $\{\omega \in \Omega : a < X(\omega)\}$ θα γράφουμε σε συνεπτυγμένη μορφή $\{X > a\}$.
Παρατηρήστε, ότι μια απεικόνιση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μπορεί να μην είναι τυχαία μεταβλητή σε έναν άλλο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{P})$ με $\mathcal{G}$ σ-άλγεβρα.

Ασκηση 36 *Αποδείξτε ότι $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή **ανν** το σύνολο $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \{X \in B\}$ ανήκει στο $\mathcal{F}$ για κάθε σύνολο Borel $B \subseteq \mathbb{R}$. Επίσης, αν X είναι μια σταθερή συνάρτηση τότε είναι τυχαία μεταβλητή για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$.*

Αποδειξη. Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B} : \{X \in A\} \in \mathcal{F}\}$ είναι σ-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$, όπου $\mathcal{B}$ είναι η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, το οποίο εκ κατασκευής είναι τέτοιο ώστε $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$. Πράγματι, $\mathbb{R} \in \mathcal{C}$ αφού $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \mathbb{R}\} = \Omega \in \mathcal{F}$. Επίσης, αν $A \in \mathcal{C}$ θα πρέπει να αποδείξουμε ότι και $A^c \in \mathcal{C}$ ή αλλιώς θα πρέπει να αποδείξουμε ότι $\{X \in A^c\} \in \mathcal{F}$ δεδομένου ότι $\{X \in A\} \in \mathcal{F}$. Παρατηρώντας όμως ότι $\{X \in A^c\} = \{X \in A\}^c$ είναι προφανές ότι ισχύει αφού η $\mathcal{F}$ είναι σ-άλγεβρα στο Ω. Τέλος, θα πρέπει να αποδείξουμε ότι αν $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{C}$ τότε και $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$. Παρατηρώντας ότι $\{X \in \cup_{i=1}^{\infty} A_i\} = \cup_{i=1}^{\infty} \{X \in A_i\}$ έπεται ότι $\{X \in \cup_{i=1}^{\infty} A_i\} \in \mathcal{F}$.
Αφού η X είναι τυχαία μεταβλητή τότε $\{X \in (a, b)\} \in \mathcal{F}$ με $a < b$ (διότι $\{X > a\} \in \mathcal{F}, \{X > b\} \in \mathcal{F}$ άρα και $\{X > a\} \setminus \{X > b\} = \{a < X < b\} \in \mathcal{F}$. Επομένως τα ανοιχτά διαστήματα ανήκουν στο $\mathcal{C}$ και επειδή η $\mathcal{B}$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ανοιχτά διαστήματα έπεται ότι $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ και επομένως για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει ότι $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$. Το αντίστροφο είναι προφανές.
Έστω $X(\omega) = c \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι η X είναι τ.μ. στην $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$ η οποία είναι η μικρότερη δυνατή σ-άλγεβρα στο Ω. Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι

$\{X > a\} \in \mathcal{F}$ για οποιαδήποτε επιλογή του $a \in \mathbb{R}$. Πράγματι, διαλέγοντας $a < c$ έπεται ότι $\{X > a\} = \Omega \in \mathcal{F}$. Διαλέγοντας $a \geq c$ έχουμε ότι $\{X > a\} = \emptyset \in \mathcal{F}$. Αρα σύμφωνα με τον ορισμό η X είναι τ.μ. στην $\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset\}$. Προφανώς, θα είναι τ.μ. και σε οποιαδήποτε άλλη σ-άλγεβρα διότι αυτή θα περιέχει σίγουρα τα σύνολα $\Omega, \emptyset$. □

Ασκηση 37 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ και έστω $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ μια άλλη σ-άλγεβρα. Αποδείξτε ότι η X είναι επίσης τυχαία μεταβλητή στην $\mathcal{G}$.*

Ορισμος 38 *Ορίζουμε την δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου $A \in \Omega$ ως εξής,*

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \omega \in A \\ 0, & \text{αν } \omega \notin A \end{cases}$$

Θεωρημα 39 *Έστω X_n ακολουθία τ.μ. Τότε και οι $\sup X_n$, $\inf X_n$, $\limsup X_n$, $\liminf X_n$ είναι τ.μ. Αν $X_n \to X$ σημειακά τότε και X τ.μ. Επίσης η δείκτρια συνάρτηση $\mathbb{I}_A(\omega)$ είναι τ.μ.* **ανν** *$A \in \mathcal{F}$. Τέλος, αν X, Y είναι τ.μ. τότε και οι $X \pm Y, XY, X \vee Y, X \wedge Y, X/Y$ είναι επίσης τ.μ.*

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό της σ-άλγεβρας που παράγεται από μια οικογένεια τ.μ.

Ορισμος 40 *Έστω $X_1, X_2, \cdots$ τ.μ. Με $\sigma(X_1, X_2, \cdots)$ ορίζουμε την μικρότερη σ-άλγεβρα τ.ω. η X_i να είναι τ.μ. για κάθε i.*

Παρατηρηση 41 *Έστω $X_1, X_2, \cdots, X_n$ τ.μ. και έστω η οικογένεια συνόλων*

$$\mathcal{G} = \{(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in B\}$$

για κάθε B σύνολο Borel του $\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύεται ότι η $\mathcal{G}$ είναι σ-άλγεβρα και ότι $\mathcal{G} = \sigma(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. Επίσης, εξ ορισμού είναι ίση με την $\sigma(\cup_{i=1}^n \{X_i \in B_i\})$ με B_i οποιοδήποτε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (δείτε Ασκηση 36). Ειδικότερα, για μια τυχαία μεταβλητή X έχουμε $\sigma(X) = (\{X \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Πράγματι, από άσκηση 36, η X θα είναι $\sigma(X)$-μετρήσιμη αν περιέχει όλα τα ενδεχόμενα $\{X \in B\}$ με $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Επιπλέον, αν αποδείξουμε ότι η $\mathcal{G} = (\{X \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ είναι σ-άλγεβρα τότε αναγκαστικά θα έχουμε $\sigma(X) = \mathcal{G}$ αφού η $\sigma(X)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα στην οποία η X είναι μετρήσιμη. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{G}$ είναι σ-άλγεβρα. Προφανώς το $\Omega \in \mathcal{G}$ διότι το $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ οπότε το ενδεχόμενο $\{X \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{G}$. Αν $A \in \mathcal{G}$ τότε υπάρχει $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τ.ω. $A = \{X \in B\}$ οπότε $A^c = \{X \in B\}^c = \{X \in B^c\}$ και αφού $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τότε και $A^c \in \mathcal{G}$. Τέλος, αν $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{G}$ τότε υπάρχουν $B_1, B_2, \cdots \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τ.ω. $A_i = \{X \in B_i\}$. Επομένως, $\cup_{i=1}^\infty A_i = \cup_{i=1}^\infty \{X \in B_i\} = \{X \in \cup_{i=1}^\infty B_i\}$ και αφού $\cup_{i=1}^\infty B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ τότε και $\cup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{G}$. □

3.2 Ανεξαρτησία Τυχαίων Μεταβλητών

Θα λέμε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση Borel αν η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ ενός οποιοδήποτε συνόλου Borel είναι επίσης σύνολο Borel.

Ορισμός 42 *Δυο τ.μ. X, Y λέγονται ανεξάρτητες αν για κάθε A, B Borel σύνολα τα ενδεχόμενα, $\{X \in A\}$ και $\{Y \in B\}$ είναι ανεξάρτητα. Λέμε ότι οι τ.μ. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν για οποιαδήποτε σύνολα Borel $B_1, B_2, \cdots, B_n$ τα ενδεχόμενα $\{X_1 \in B_1\}, \cdots, \{X_n \in B_n\}$ είναι ανεξάρτητα. Τέλος, για μια οποιαδήποτε οικογένεια τ.μ. λέμε ότι είναι ανεξάρτητες αν ένα οποιαδήποτε πεπερασμένο υποσύνολο τους είναι ανεξάρτητες τ.μ. Δυο σ-άλγεβρες $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ λέγονται ανεξάρτητες αν οποιαδήποτε δυο ενδεχόμενα $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$ είναι ανεξάρτητα. Παρόμοια όπως για τις τ.μ. για n το πλήθος σ-άλγεβρες καθώς και για οποιαδήποτε οικογένεια σ-αλγεβρών. Θα λέμε επίσης ότι μια τ.μ. X και μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ είναι ανεξάρτητες αν οι $\sigma(X), \mathcal{F}$ είναι ανεξάρτητες.*

Εν ολίγοις, δυο τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες **ανν** οι σ-άλγεβρες που παράγουν είναι ανεξάρτητες.

Ορισμός 43 *Μια οικογένεια συνόλων $\mathcal{I}$ θα λέγεται π-σύστημα αν είναι κλειστό στις πεπερασμένες τομές, δηλαδή αν $I, J \in \mathcal{I}$ τότε και $I \cap J \in \mathcal{I}$.*

Παρατηρηση 44 *Αν X είναι μια τ.μ τότε*

$$\sigma(X) = (\{X \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

όπως είδαμε προηγούμενα. Θα χαρακτηρίσουμε όμως την ίδια σ-άλγεβρα χρησιμοποιώντας την έννοια των π-συστημάτων. Έστω $\mathcal{I} = (\{X \leq x\}, x \in \mathbb{R})$. Μπορεί να δείξει κάποιος ότι η $\mathcal{I}$ είναι π-σύστημα. Επιπλέον, η $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \sigma(X)$ διότι τα σύνολα $(-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Επίσης, η X είναι $\sigma(\mathcal{I})$-μετρήσιμη αφού περιέχει όλες τις κατάλληλες αντίστροφες εικόνες της X άρα είναι ίση με την $\sigma(X)$ αφού αυτή είναι η μικρότερη για την οποία η X είναι μετρήσιμη. Το ίδιο μπορεί να δείξει κανείς για την $\sigma(X_1, \cdots, X_n)$ με $X_1, \cdots, X_n$ τ.μ. ή αλλιώς αν

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= (\omega \in \Omega : (X_1, \cdots, X_n) \in ((-\infty, x_1], \cdots, (-\infty, x_n]) \\ &= \left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right)\end{aligned}$$

τότε $\sigma(\mathcal{I}) = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$.

Θα δώσουμε παρακάτω ένα λήμμα το οποίο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για τον χαρακτηρισμό της ανεξαρτησίας τ.μ.

Λημμα 45 *Έστω $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ δύο π-συστήματα υποσύνολα της $\mathcal{F}$. Τότε οι $\sigma(\mathcal{I}), \sigma(\mathcal{J})$ είναι ανεξάρτητες* **ανν** *τα $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ είναι ανεξάρτητα.*

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα μπορούμε να διατυπώσουμε τον επόμενο ισοδύναμο ορισμό ανεξαρτησίας δυο τ.μ.

Ορισμος 46 *Οι τ.μ. X, Y είναι ανεξάρτητες* **ανν**

$$P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(\{X \leq x\})P(\{Y \leq y\})$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Παρομοίως για n το πλήθος τ.μ.

Παρατηρηση 47 *Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε $X_1, \cdots, X_n$, X_{n+1} ανεξάρτητες τ.μ. Θα αποδείξουμε ότι οι $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n), \sigma(X_{n+1})$ είναι ανεξάρτητες. Πράγματι, σύμφωνα με τα προηγούμενα η $\sigma(X_1, \cdots, X_n) = \sigma(\mathcal{I})$ με*

$$\mathcal{I} = (\omega \in \Omega : (X_1, \cdots, X_n) \in ((-\infty, x_1], \cdots, (-\infty, x_n]))$$

και $\sigma(X_{n+1}) = \sigma(\mathcal{J})$ με $\mathcal{J} = (\{X_{n+1} \leq x\}, x \in \mathbb{R})$. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα, οι $\mathcal{F}_n, \sigma(X_{n+1})$ είναι ανεξάρτητες **ανν** *τα ενδεχόμενα*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}, \{X_{n+1} \leq x_{n+1}\}$$

είναι ανεξάρτητα, το οποίο βέβαια συμβαίνει. □

Χρήσιμο επίσης είναι το παρακάτω λήμμα.

Λημμα 48 *Αν X, Y δυο τ.μ. τότε η X είναι $\sigma(Y)$-μετρήσιμη* **ανν** *υπάρχει συνάρτηση Borel τ.ω. $X = g(Y)$. Παρόμοια, αν $X_1, \cdots, X_n, X_{n+1}$ τ.μ. τότε η X_{n+1} είναι $\sigma(X_1, \cdots, X_n)$-μετρήσιμη* **ανν** *υπάρχει συνάρτηση Borel τ.ω. $X_{n+1} = g(X_1, \cdots, X_n)$.*

Αν f όπως παραπάνω τότε $\sigma(f(X)) \subseteq \sigma(X)$. Επιπλέον, αν η f έχει αντίστροφο και είναι συνάρτηση *Borel* τότε $\sigma(f(X)) = \sigma(X)$.

Παρατηρηση 49 *Έστω η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Τότε μια τ.μ. X είναι $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη* **ανν** *είναι σταθερή. Έστω X μια τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ και ας υποθέσουμε ότι οι $\sigma(X), \mathcal{G}$ είναι ανεξάρτητες. Τότε δεν μπορεί να είναι και $\mathcal{G}$-μετρήσιμη. Επίσης, αν είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη δεν μπορεί να είναι και ανεξάρτητη. Συμβαίνουν και τα δυο ταυτόχρονα μόνο όταν η X είναι σταθερή. Όμως δεν σημαίνει ότι αν η X δεν είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη θα είναι αναγκαστικά ανεξάρτητη και το αντίθετο. Τέλος, να επισημάνουμε ότι κάθε $\mathcal{F}$-μετρήσιμη X είναι και G-μετρήσιμη όπου $\mathcal{F} \subseteq G$, ενώ αν οι $\sigma(X), \mathcal{F}$ είναι ανεξάρτητες τότε και $\sigma(X), G$ ανεξάρτητες με $G \subseteq \mathcal{F}$.*

Παραδειγμα 50 (Ανεξαρτησία Ρίψεων Νομίσματος) *Αν δεχτούμε σαν πείραμα το στρίψιμο ενός νομίσματος, τότε ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{K, \Gamma\}$. Σε αυτόν τον δειγματικό χώρο μπορούμε να προσθέσουμε μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ (η οποία εξαρτάται από τον δειγματικό χώρο) και έπειτα ένα μέτρο πιθανότητας στο $(\Omega, \mathcal{F})$. Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια τ.μ. σε αυτό το πείραμα, η οποία π.χ. να παίρνει την τιμή 1 όταν έρθει Κορώνα και την τιμή -1 όταν έρθει Γράμματα. Αυτή η τ.μ. με την σειρά της ορίζει την παραγόμενη σ-άλγεβρα (η οποία εξαρτάται από τον δειγματικό χώρο). Αν όμως έχουμε και δεύτερο και τρίτο στρίψιμο νομίσματος (και προσθέσουμε και άλλες τ.μ. που αναφέρονται στο δεύτερο και τρίτο στρίψιμο) ο δειγματικός χώρος αλλάζει. Επομένως αλλάζει η σ-άλγεβρα με την οποία θα εφοδιάσουμε τον δειγματικό χώρο και έπειτα το μέτρο πιθανότητας. Τέλος, θα αλλάξει και η σ-άλγεβρα των τ.μ. αφού έχει αλλάξει ο δειγματικός χώρος. Στην περίπτωση που περιγράψαμε παραπάνω η σ-άλγεβρα που παράγει η τ.μ. X είναι $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega, K, \Gamma\}$. Αν έχουμε δυο τ.μ. με τον ίδιο ορισμό όπως πριν αλλά η X_1 να αναφέρεται στο πρώτο στρίψιμο νομίσματος και η δεύτερη, η X_2, στο δεύτερο στρίψιμο νομίσματος, τότε ο δειγματικός χώρος γίνεται $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$. Θα περιγράψουμε τώρα τις $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \sigma(X_1, X_2)$.*

$$\begin{aligned}
\sigma(X_1) = \quad & \{\emptyset, \Omega, (KK, K\Gamma), (\Gamma\Gamma, \Gamma K)\}, \\
\sigma(X_2) = \quad & \{\emptyset, \Omega, (KK, \Gamma K), (K\Gamma, \Gamma\Gamma)\}, \\
\sigma(X_1, X_2) = \quad & \{\emptyset, \Omega, (KK, K\Gamma), (\Gamma\Gamma, \Gamma K), (KK, \Gamma K), (K\Gamma, \Gamma\Gamma), \\
& (KK, \Gamma\Gamma), (KK, K\Gamma, \Gamma K), (KK, K\Gamma, \Gamma\Gamma), \\
& (\Gamma\Gamma, \Gamma K, KK), (\Gamma\Gamma, \Gamma K, K\Gamma), KK, K\Gamma, \Gamma\Gamma, \Gamma K\}.
\end{aligned}$$

Οι $\sigma(X_1), \sigma(X_2)$ είναι σ-άλγεβρες και είναι οι μικρότερες δυνατές έτσι ώστε η X_1 να είναι $\sigma(X_1)$-μετρήσιμη και αντίστοιχα για την X_2. Το ότι η $\sigma(X_1)$ έχει αυτή την ιδιότητα είναι προφανές, διότι καταρχάς περιέχει όλες τις αντίστροφες εικόνες της X_1 και δεύτερο δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε τίποτε από την $\sigma(X_1)$ και να παραμείνει σ-άλγεβρα.
Αν ονομάσουμε $\omega_1 = KK, \omega_2 = K\Gamma, \omega_3 = \Gamma K, \omega_4 = \Gamma\Gamma$ τότε η $\sigma(X_1)$ αποτελείται από υποσύνολα του Ω όπως π.χ. το (ω_1, ω_2). Είναι φανερό πως κανείς κατασκευάζει την $\sigma(X_1)$ από τον ορισμό. Για να κατασκευάσει κανείς την $\sigma(X_1, X_2)$ αυτό που πρέπει να κάνει καταρχάς είναι να βάλει τα στοιχεία και των δυο $\sigma(X_1), \sigma(X_2)$ και έπειτα όλες τις ενώσεις, τομές και συμπληρώματα για να γίνει σ-άλγεβρα. Παρατηρήστε επίσης, ότι η X_1 είναι $\sigma(X_1)$-μετρήσιμη αλλά όχι $\sigma(X_2)$ μετρήσιμη και αντίστροφα και αποδείξτε ότι και οι δυο είναι $\sigma(X_1, X_2)$-μετρήσιμες. Αποδείξτε το με τους ορισμούς. Επίσης, αποδείξτε ότι οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες χρησιμοποιώντας τον ορισμό, στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \sigma(X_1, X_2), P)$ για κατάλληλο μέτρο πιθανότητας (όπου $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$). $\square$

3.3 Κατανομή και συνάρτηση κατανομής τυχαίας μεταβλητής

Λημμα 51 *Έστω X τυχαία μεταβλητή. Ισχύει ότι η απεικόνιση*

$$P_X : B \to P(\{X \in B\})$$

είναι μέτρο πιθανότητας στην σ-άλγεβρα των Borel συνόλων του $\mathbb{R}$.

Αποδειξη. Θα αποδείξουμε ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες της πιθανότητας. Προφανώς, $P_X(\mathbb{R}) = 1$. Έστω τώρα $A_1, A_2, \cdots$ ανά δυο ξένα Borel σύνολα. Τότε και $\{X \in A_1\}, \{X \in A_2\}, \cdots$ είναι επίσης ανά δυο ξένα, οπότε έχουμε,

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P\left(\{X \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\}\right) \\ &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\{X \in A_i\}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P_X(A_i). \end{aligned}$$

$\square$

Ορισμος 52 *Το μέτρο πιθανότητας P_X που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή X το ονομάζουμε* **κατανομή**. *Η συνάρτηση $F_X(x) = P_X((-\infty, x])$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται* **συνάρτηση κατανομής** *μιας τυχαίας μεταβλητής X.*

Λημμα 53 *Η F_X είναι μη φθίνουσα, και ισχύει ότι*

$$\lim_{y \to +\infty} F_X(y) = 1$$

και ότι

$$\lim_{y \to -\infty} F_X(y) = 0$$

Ισχύει επίσης ότι είναι δεξιά συνεχής και ότι είναι συνεχής στο y **ανν** *$P_X(\{y\}) = 0$.*

Αποδειξη. Έστω $y_1 \leq y_2$. Έχουμε,

$$F_X(y_1) = P(\{X \leq y_1\}) \leq P(\{X \leq y_2\}) = F_X(y_2).$$

Έστω μια ακολουθία $y_n \to \infty$. Τότε $F_X(y_n) = P(\{X \leq y_n\}) = P(A_n)$ με $A_n = \{X \leq y_n\}$. Η ακολουθία των ενδεχομένων A_n είναι αύξουσα, άρα $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\Omega) = 1$.
Έστω μια ακολουθία $y_n \to -\infty$. Τότε $F_X(y_n) = P(\{X \leq y_n\}) = P(A_n)$ με $A_n = \{X \leq y_n\}$. Η ακολουθία A_n είναι φθίνουσα, άρα $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\emptyset) = 0$.

Έστω μια ακολουθία $y_n \to y$ από δεξιά. Η ακολουθία των ενδεχομένων $A_n = \{X \leq y_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $P(\{X \leq y\}) = P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$ ή αλλιώς ότι $\{X \leq y\} = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Έστω $\omega \in \{X \leq y\}$ τότε και $\omega \in \{X \leq y_n\}$ άρα $\omega \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n$. Από την άλλη μεριά, έστω $\omega \in \cap_{n=1}^{\infty} A_n$ τότε και $\omega \in A_n$ για κάθε n οπότε $\omega \in \{X \leq y\}$.
Για να αποδείξουμε και το τελευταίο μέρος του λήμματος αρκεί να αποδείξουμε ότι η F_X είναι αριστερά συνεχής **ανν** $P_X(\{y\}) = 0$. Έστω μια ακολουθία $y_n \to y$ από αριστερά, οπότε $F_X(y_n) = P(\{X \leq y_n\}) \to P(\{X < y\}) = F_X(y) - P_X(\{y\})$. Αρα έχουμε το ζητούμενο. Παρατηρήστε ότι $\cup_{n=1}^{\infty}\{X \leq y_n\} = \{X < y\}$. □

Κεφάλαιο 4

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

ΟΡΙΣΜΟΣ 54 *Μια τυχαία μεταβλητή X ονομάζεται διακριτή όταν υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $C \subseteq \mathbb{R}$ τ.ω. $P_X(C) = 1$.*

Αφού το πεδίο τιμών μιας διακριτής τ.μ. είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο τότε θα έχει την μορφή $\{x_1, x_2, \cdots\}$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε την τυχαία μεταβλητή στην μορφή

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{I}_{A_i}(\omega)$$

όπου $A_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}$ και $\mathbb{I}_A$ η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 55 *Η **συνάρτηση πυκνότητας** μιας διακριτής τ.μ. X είναι η $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ τ.ω.*

$$p_X(x) = P(X = x)$$

όπου $P(X = x)$ είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$.

Στην συνέχεια θα περιγράψουμε μερικούς τύπους τυχαίων μεταβλητών που συναντάμε συχνά.

- Θα λέμε ότι η X ακολουθεί την **κατανομή Bernoulli** με παράμετρο p όταν το πεδίο τιμών της είναι το $\{0, 1\}$ και η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f(k) = P(X = k) = p^k (1-p)^{1-k}, \quad k = 0, 1$$

- Θα λέμε ότι η X ακολουθεί την **διωνυμική κατανομή** με παραμέτρους n, p όταν το πεδίο τιμών της είναι το $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$ και η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f(k) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

- Θα λέμε ότι η X ακολουθεί την **γεωμετρική κατανομή** με παράμετρο $p \in (0, 1)$ όταν το πεδίο τιμών της είναι το $\{1, 2, \cdots, \}$ και η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f(k) = P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

- Θα λέμε ότι η X ακολουθεί την **κατανομή Pascal** (ή αλλιώς **αρνητική διωνυμική κατανομή**) με παραμέτρους r και $p \in (0,1)$ όταν το πεδίο τιμών της είναι το $\{r, r+1, r+2, \cdots, \}$ και η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f(k) = P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, \cdots$$

- Θα λέμε ότι η X ακολουθεί την **κατανομή Poisson** με παράμετρο $\lambda > 0$ όταν το πεδίο ορισμού της είναι το $\{0, 1, 2, \cdots, \}$ και η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f(k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

ΛΗΜΜΑ 56 *Έστω μια διακριτή τ.μ. X με συνάρτηση πυκνότητας p_X και έστω μια συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε η τ.μ. $Y = g(X)$ έχει συνάρτηση πυκνότητας την p_Y τ.ω.*

$$p_Y(y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} p_X(x)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πράγματι, ισχύει ότι

$$\begin{aligned} p_Y(y) = P(Y = y) &= P(g(X) = y) \\ &= P(X \in g^{-1}(y)) \\ &= \sum_{x \in g^{-1}(y)} p_X(x) \end{aligned}$$

□

4.1 Μέση Τιμή

Στην συνέχεια θα ορίσουμε την έννοια της μέσης τιμής μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής (δείτε και παρατήρηση 98 παρακάτω).

ΟΡΙΣΜΟΣ 57 *Αν $X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή τότε η μέση τιμής της συμβολίζεται με $\mathbb{E}(X)$ και ορίζεται ως εξής*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x P(X = x)$$

αρκεί το άθροισμα να συγκλίνει απολύτως. Το x λαμβάνει όλες τις τιμές του πεδίου ορισμού της X.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 58 (**Μέση Τιμή Δείκτριας Συνάρτησης**) *Έστω η τυχαία μεταβλητή $X(\omega) = \mathbb{I}_A(\omega)$ όπου $A \in \mathcal{F}$. Θα υπολογίσουμε την μέση τιμή της σύμφωνα με* *τον παραπάνω ορισμό μιας και πρόκειται για διακριτή τ.μ. Οι πιθανές τιμές της είναι οι* $\{0,1\}$ *επομένως*

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = 1 \cdot P(\mathbb{I}_A = 1) + 0 \cdot P(\mathbb{I}_A = 0) = P(A)$$

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 59 *Αν* $X : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *είναι τέτοια ώστε* $P(X = +\infty) > 0$ *τότε*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x xP(X = x) + \infty \cdot P(X = +\infty) = +\infty$$

Αυτό θα το δικαιολογήσουμε παρακάτω όταν δώσουμε έναν γενικότερο ορισμό μέσης τιμής. □

Στην επόμενη πρόταση, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα, θα υπολογίσουμε την μέση τιμή μιας συνάρτησης διακριτής τυχαίας μεταβλητής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 60 *Έστω* X *μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Τότε*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x)P(X = x)$$

αρκεί το άθροισμα να συγκλίνει απολύτως. Εδώ το x *λαμβάνει τιμές σε όλο το πεδίο τιμών της* X*.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτοντας $Y = g(X)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_y yP(Y = y) \\ &= \sum_y y \sum_{x \in g^{-1}(y)} P(X = x) \\ &= \sum_x g(x)P(X = x) \end{aligned}$$

□

Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε δυο χρήσιμες ιδιότητες της μέσης τιμής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 61 *Έστω* X *μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και* $a, b \in \mathbb{R}$*. Αν* $P(X \geq 0) = 1$ *και* $\mathbb{E}(X) = 0$ *τότε* $P(X = 0) = 1$*. Επίσης,* $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$*.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον ισχύει ότι $\mathbb{E}(X) = 0$ τότε

$$\sum_x xP(X = x) = 0$$

Αφού η X παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές έπεται ότι το πεδίο τιμών της αποτελείται από μονάχα ένα στοιχείο, το μηδέν, και άρα $P(X = 0) = 1$.

Για το δεύτερο μέρος του θεωρήματος, θεωρούμε την $Y = g(X)$ όπου $g(x) = ax+b$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(aX+b) \\
&= \sum_x (ax+b)P(X=x) \\
&= a\sum_x xP(X=x) + b\sum_x P(X=x) \\
&= a\mathbb{E}(X) + b
\end{aligned}$$

□

Παραδειγμα 62 *Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Θα υπολογίσουμε την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y που είναι τέτοια ώστε $Y = e^X$. Έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \mathbb{E}(e^X) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^k P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e)^k}{k!} \\
&= e^{\lambda(e-1)}
\end{aligned}$$

□

Ορισμος 63 *Η διακύμανση μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής X συμβολίζεται με* $\mathrm{Var}(X)$ *και ορίζεται ως εξής*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

Παραδειγμα 64 *Έστω ότι η X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p. Τότε η μέση τιμή της είναι*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \\
&= \frac{p}{(1-p)^2} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Η διακύμανση μπορεί να υπολογισθεί παρομοίως και έχουμε ότι

$$\mathrm{Var}(X) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^2 p(1-p)^{k-1} - \frac{1}{p^2}$$

Όμως

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1} &= (1-p)\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \\ &= \frac{2(1-p)}{p^3} + \frac{1}{p^2}\end{aligned}$$

Τελικά

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 65 *Έστω N διακριτή τυχαία μεταβλητή με πεδίο τιμών το $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Αποδείξτε ότι*

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N > k)$$

ΛΥΣΗ. Από τον ορισμό της μέσης τιμής έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(N = k)$$

Το δεξί μέλος μπορούμε να το γράψουμε ως εξής

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} kP(N=k) &= P(N=1) + 2P(N=2) + 3P(N=3) + \cdots \\ &= P(N=1) + P(N=2) + P(N=3) + \cdots \\ &\quad +P(N=2) + P(N=3) + \cdots \\ &\quad +P(N=3) + \cdots \\ &= +\cdots \\ &= P(N>0) + P(N>1) + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N>k)\end{aligned}$$

□

Ορισμος 66 (Από κοινού συνάρτηση πυκνότητας) *Αν X, Y είναι δυο διακριτές τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, τότε η* **από κοινού συνάρτηση πυκνότητας** *$p_{X,Y}$ των X και Y είναι η συνάρτηση δυο μεταβλητών $p_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ η οποία ορίζεται ως εξής*

$$p_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$$

Παρατηρηση 67 *Έστω X, Y δυο διακριτές τυχαίες μεταβλητές και $g(x,y)$ συνάρτηση δυο μεταβλητών. Αν $Z = g(X,Y)$ τότε*

$$P(Z = z) = P(g(x,y) = z) = \sum_{(x,y) \in g^{-1}(z)} P(X = x, Y = y)$$

□

Θεωρημα 68 *Έστω X, Y δυο διακριτές τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας $p_{X,Y}$ και $g(x,y)$ συνάρτηση δυο μεταβλητών. Τότε*

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y)$$

Αποδειξη. Θέτουμε $Z = g(X,Y)$ οπότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X,Y)) &= \mathbb{E}(Z) \\
&= \sum_z z P(Z = z) \\
&= \sum_z z \sum_{(x,y) \in g^{-1}(z)} P(X = x, Y = y) \\
&= \sum_x \sum_y g(x,y) p_{X,Y}(x,y)
\end{aligned}$$

□

Το θεώρημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη της γραμμικότητας της μέσης τιμής.

Προταση 69 (Γραμμικότητα Μέσης Τιμής) *Αν X, Y είναι δυο διακριτές τυχαίες μεταβλητές στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και $a, b \in \mathbb{R}$ τότε*

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$

Αποδειξη. Πράγματι, θέτοντας $Z = aX + bY$ και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(aX+bY)=\mathbb{E}(Z) &= \sum_x\sum_y (ax+by)P(X=x,Y=y) \\
&= a\sum_x\sum_y xP(X=x,Y=Y) \\
&\quad +b\sum_x\sum_y yP(X=x,Y=y) \\
&= a\sum_x xP(X=x)+b\sum_y yP(Y=y) \\
&= a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

□

Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα σημαντικό θεώρημα που αφορά ιδιότητες της μέσης τιμής. Θα λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή ξ είναι μη αρνητική (θετική) αν $P(\xi \geq 0) = 1$ ($P(\xi > 0) = 1$). Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν (άπειρα μάλιστα) $\omega \in \Omega$ τέτοια ώστε $\xi(\omega) < 0$. Όμως θα ισχύει $P(\xi < 0) = 0$. Παρόμοια, θα λέμε ότι $x \geq \xi$ για δυο τυχαίες μεταβλητές όταν $P(x \geq \xi) = 1$ ή αλλιώς όταν η $z = x - \xi$ είναι μη αρνητική.

ΘΕΩΡΗΜΑ 70 *Έστω ξ μια μη αρνητική διακριτή τυχαία μεταβλητή. Τότε $\mathbb{E}(\xi) \geq 0$. Παρόμοια, έστω $x \geq \xi$ όπου x και ξ δυο διακριτές τυχαίες μεταβλητές. Τότε $\mathbb{E}(x) \geq \mathbb{E}(\xi)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού ξ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή έχει ως πεδίο τιμών το $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \}$ για κάποιους πραγματικούς αριθμούς ξ_i. Ορισμένοι από τους ξ_i θα είναι μη αρνητικοί και οι υπόλοιποι θα είναι αρνητικοί αριθμοί. Συμβολίζουμε με ξ_i^+ τους μη αρνητικούς και με ξ_i^- τους αρνητικούς.
Επομένως

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i P(\xi = \xi_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^+ P(\xi = \xi_i^+) + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^- P(\xi = \xi_i^-)
\end{aligned}$$

Επειδή $P(\xi < 0) = 0$ έπεται ότι $P(\xi = \xi_i^-) = 0$ άρα

$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^+ P(\xi = \xi_i^+) \geq 0$$

Έστω τώρα $x \geq \xi$ όπου x και ξ δυο διακριτές τυχαίες μεταβλητές με πεδίο τιμών τα $\{x_1, x_2, \cdots, \}$ και $\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \}$ αντίστοιχα.

Θεωρούμε την $z = x - y$. Η z είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και γράφεται ως εξής

$$z(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x_i - \xi_j)\mathbb{I}_{\{A_i \cap B_j\}}$$

με

$$A_i = \{\omega \in \Omega : x = x_i\} \quad \text{και} \quad B_j = \{\omega \in \Omega : \xi = \xi_j\}$$

Όμως η z είναι μια μη αρνητική διακριτή τυχαία μεταβλητή άρα χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα προκύπτει ότι $\mathbb{E}(z) \geq 0$. Εφόσον, λόγω της γραμμικότητας της μέσης τιμής, ισχύει ότι $\mathbb{E}(z) = \mathbb{E}(x - \xi) = \mathbb{E}(x) - \mathbb{E}(\xi)$ έπεται το ζητούμενο. □

4.2 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Ορισμος 71 *Αν η X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και $P(B) > 0$ τότε η **δεσμευμένη μέση τιμή** της X δεδομένου του ενδεχομένου B συμβολίζεται με $\mathbb{E}(X|B)$ και ορίζεται ως εξής*

$$\mathbb{E}(X|B) = \sum_x xP(X = x|B)$$

αρκεί να συγκλίνει απολύτως το άπειρο άθροισμα.

Χρησιμοποιώντας την έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής μπορούμε να γράψουμε την μέση τιμή της διακριτής τυχαίας μεταβλητής συναρτήσει μιας διαμέρισης του Ω.

Θεωρημα 72 *Αν η X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και $B_1, B_2, \cdots$ μια διαμέριση του Ω (δηλαδή $\cup_i B_i = \Omega$ και $B_i \cap B_j = \emptyset$ για κάθε i, j) τ.ω. $P(B_i) > 0$ για κάθε i, τότε*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i \mathbb{E}(X|B_i)P(B_i)$$

αρκεί το άθροισμα να συγκλίνει απολύτως.

Αποδειξη. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\sum_i \mathbb{E}(X|B_i)P(B_i) &= \sum_i\sum_x xP(\{X = x\} \cap B_i) \\
&= \sum_x xP(\{X = x\} \cap (\cup_i B_i)) \\
&= \sum_x xP(X = x) \\
&= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

□

4.3 Ανεξαρτησία Διακριτών Τυχαίων Μεταβλητών

Όπως έχουμε αναφέρει, γενικά, δυο τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες ανν οι σ-άλγεβρες που παράγουν είναι ανεξάρτητες. Στον ορισμό 46 είχαμε ορίσει με ισοδύναμο τρόπο την έννοια της ανεξαρτησίας δυο τυχαίων μεταβλητών. Ο επόμενος ορισμός είναι επίσης ισοδύναμος όταν μιλάμε για διακριτές τυχαίες μεταβλητές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 73 (Ανεξαρτησία Διακριτών Τυχαίων Μεταβλητών) *Δυο διακριτές τυχαίες μεταβλητές X, Y θα λέγονται ανεξάρτητες αν τα ενδεχόμενα $\{X = x\}$ και $\{Y = y\}$ είναι ανεξάρτητα ή αλλιώς αν*

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Πράγματι ο προηγούμενος ορισμός είναι ισοδύναμος διότι αν οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες τότε και οι σ-άλγεβρες που παράγουν είναι επίσης ανεξάρτητες. Τα ενδεχόμενα όμως $\{X = x\}$ και $\{Y = y\}$ ανήκουν στις σ-άλγεβρες $\sigma(X)$ και $\sigma(Y)$ αντίστοιχα. Επομένως πρόκειται για ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Αντίστροφα τώρα, αν $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ θα αποδείξουμε ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες σύμφωνα με τον ορισμό 46. Από την σχέση $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$ αθροίζοντας έχουμε ότι

$$\sum_{z \leq x} P(X = z, Y = y) = \sum_{z \leq x} P(X = z) \cdot P(Y = y)$$

το οποίο μας δίνει την σχέση

$$P(X \leq x, Y = y) = P(X \leq x) \cdot P(Y = y)$$

Παρόμοια, καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση, δηλαδή

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 74 *Οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες* **ανν** *υπάρχουν συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας τους ικανοποιεί την σχέση*

$$p_{X,Y}(x, y) = f(x)g(y) \quad \text{για } x, y \in \mathbb{R}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν είναι ανεξάρτητες προφανώς ισχύει με $f(x) = p_X(x)$ και $g(y) = p_Y(y)$. Αντίστροφα, αν υπάρχουν συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε

$$p_{X,Y}(x, y) = f(x)g(y) \quad \text{για } x, y \in \mathbb{R}$$

θα αποδείξουμε ότι είναι ανεξάρτητες. Πράγματι, αφού

$$p_X(x) = \sum_y p_{X,Y}(x, y) \quad \text{και} \quad p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x, y)$$

έπεται ότι

$$p_X(x) = f(x)\sum_y g(y) \quad \text{και} \quad p_Y(y) = g(y)\sum_x f(x)$$

Επιπλέον,

$$1 = \sum_{x,y} p_{X,Y}(x,y) = \left(\sum_x f(x)\right)\cdot\left(\sum_y g(y)\right)$$

'ρα

$$p_{X,Y}(x,y) = f(x)g(y) = \frac{p_X(x)}{\sum_y g(y)}\cdot\frac{p_Y(y)}{\sum_x f(x)} = p_X(x)\cdot p_Y(y)$$

□

Παραδειγμα 75 *Έστω ότι οι X, Y είναι τυχαίες μεταβλητές με πεδίο τιμών το $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Έστω ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας είναι η*

$$p_{X,Y}(i,j) = \frac{1}{i!j!}\lambda^i\mu^j e^{-(\lambda+\mu)}$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας γράφεται στην μορφή

$$p_{X,Y}(i,j) = \underbrace{\left(\frac{1}{i!}\lambda^i\right)}_{f(i)}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{j!}\mu^j e^{-(\lambda+\mu)}\right)}_{g(j)}$$

Δηλαδή είναι το γινόμενο δυο συναρτήσεων, $f(i)$ και $g(j)$. Επομένως οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες. Σημειώστε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι μοναδικές, μπορούμε να βρούμε και άλλες με αυτή την ιδιότητα. □

Παραδειγμα 76 (Εύρεση Μέσης Τιμής μέσω Δέσμευσης) *Ένα νόμισμα ρίπτεται επανειλημμένα. Η πιθανότητα να έρθει Κορώνα είναι $p > 0$ και επομένως η πιθανότητα να έρθει γράμματα είναι $1-p$. Θα υπολογίσουμε την μέση τιμή του πλήθους των πρώτων ρίψεων με το ίδιο αποτέλεσμα.*
Συμβολίζουμε με $H = \{$ η πρώτη ρίψη είναι Κορώνα $\}$ και με H^c το συμπληρωματικό του. Έστω X η τυχαία μεταβλητή η οποία μετρά το πλήθος των πρώτων ρίψεων με το ίδιο αποτέλεσμα. Δηλαδή, η X παίρνει την τιμή 1 αν το αποτέλεσμα της δεύτερης ρίψης διαφέρει από το αποτέλεσμα της πρώτης, παίρνει την τιμή 2 αν οι δυο πρώτες ρίψεις έχουν το ίδιο αποτέλεσμα και η τρίτη διαφορετικό, παίρνει την τιμή 3 αν οι τρεις πρώτες ρίψεις έχουν το ίδιο αποτέλεσμα και η τέταρτη διαφορετικό κ.τ.λ. Προφανώς πρόκειται για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με πεδίο τιμών το $\mathbb{N}$. Κατασκευάζουμε μια ακολουθία διακριτών τυχαίων μεταβλητών, $Y_1, Y_2, \cdots$, τέτοια ώστε όταν στην n-οστή ρίψη έρθει Κορώνα τότε $Y_n = 1$ αλλιώς $Y_n = 0$. Θα κατασκευάσουμε κατάλληλο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω σχέση

$$P(X = k|H) = p^{k-1}(1-p), \quad k = 1, 2, \cdots \tag{4.1}$$

Θεωρούμε τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ *στον χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *όπου* Ω *είναι ο δειγματικός χώρος των n ρίψεων,* $\mathcal{F}$ *είναι η* $\sigma(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ *και το μέτρο* P *τ.ω.*

$$\begin{aligned} & P(Y_{l_1} = i_1, Y_{l_2} = i_2, \cdots, Y_{l_k} = i_k) \\ = \quad & p^{i_1}(1-p)^{1-i_1} \cdot p^{i_2}(1-p)^{1-i_2} \cdots p^{i_k}(1-p)^{1-i_k} \end{aligned}$$

όπου $i_l \in \{1, 0\}$ *για* $l = 1, 2, \cdots, k$ *για κάθε* $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *και για κάθε* $l_j \in \{1, 2, \cdots, n\}$*. Με την κατασκευή αυτή οι* $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ *γίνονται ανεξάρτητες στον χώρο* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Θα μπορούσαμε να εφοδιάσουμε τον χώρο πιθανότητας με οποιαδήποτε σ-άλγεβρα υπερσύνολο της* $\sigma(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ *αλλά όχι με υποσύνολο της διότι η* $\sigma(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ *είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα στην οποία οι* $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ *είναι τυχαίες μεταβλητές.*
Ισχύει ότι

$$P(X = k|H) = \frac{P(Y_1 = 1, Y_2 = 1, \cdots, Y_k = 1, Y_{k+1} = 0)}{P(Y_1 = 1)}$$

και αφού

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 1, \cdots, Y_k = 1, Y_{k+1} = 0) = p^k(1-p)$$

έπεται αμέσως η 4.1. Παρομοίως αποδεικνύεται ότι

$$P(X = k|H^c) = (1-p)^{k-1}p$$

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την $\mathbb{E}(X)$*. Στην προκειμένη περίπτωση είναι σαφώς ευκολότερο να την υπολογίσουμε μέσω δέσμευσης εφαρμόζοντας το θεώρημα 72. Σημειώστε ότι τα* H, H^c *παριστούν μια διαμέριση του δειγματικού χώρου* Ω*. Αρχικά θα υπολογίσουμε τις* $\mathbb{E}(X|H)$ *και* $\mathbb{E}(X|H^c)$*. Έχουμε λοιπόν ότι*

$$\mathbb{E}(X|H) = \sum_{k=0}^{\infty} kp^{k-1}(1-p) = \frac{1}{1-p}$$

και

$$\mathbb{E}(X|H^c) = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = \frac{1}{p}$$

Τελικά

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(X|H)P(H) + \mathbb{E}(X|H^c)P(H^c) \\ &= \frac{1}{1-p}p + \frac{1}{p}(1-p) \\ &= \frac{1}{p(1-p)} - 2 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που το νόμισμα είναι δίκαιο η μέση τιμή είναι ίση με 2. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 77 *Αν X και Y είναι ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες οι μέσες τιμές είναι καλά ορισμένες, τότε*

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 68 στην συνάρτηση $g(x,y) = xy$. Θα έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x,y} xyP(X=x, Y=y) \\
&= \sum_{x,y} xyP(X=x)P(Y=y) \\
&= \sum_{x} xP(X=x) \sum_{y} yP(Y=y) \\
&= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 78 *Οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες* **ανν**

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y))$$

για όλες τις συναρτήσεις $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες οι μέσες τιμές $\mathbb{E}(g(X))$ και $\mathbb{E}(h(Y))$ είναι καλά ορισμένες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι είναι ανεξάρτητες και έστω δυο συναρτήσεις $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε οι μέσες τιμές $\mathbb{E}(g(X))$ και $\mathbb{E}(h(Y))$ είναι καλά ορισμένες. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(X)h(Y)) &= \sum_{x,y} g(x)h(y)P(X=x, Y=y) \\
&= \sum_{x,y} g(x)h(y)P(X=x)P(Y=y) \\
&= \sum_{x} g(x)P(X=x) \sum_{y} h(y)P(Y=y) \\
&= \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y))
\end{aligned}$$

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι για όλες τις συναρτήσεις $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για τις οποίες οι μέσες τιμές $\mathbb{E}(g(X))$ και $\mathbb{E}(h(Y))$ είναι καλά ορισμένες ισχύει η σχέση

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y))$$

Έστω οι συναρτήσεις

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } x = a \\ 0, & \text{όταν } x \neq a \end{cases} \qquad h(y) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } y = b \\ 0, & \text{όταν } y \neq b \end{cases}$$

για κάποια $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x)P(X = x) = P(X = a)$ και $\mathbb{E}(h(Y)) = \sum_y h(y)P(Y = y) = P(Y = b)$, επομένως είναι καλά ορισμένες οι μέσες τιμές. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y))$$

ικανοποιείται. Θα υπολογίσουμε τώρα την μέση τιμή $\mathbb{E}(g(X)h(Y))$.

$$\sum_{x,y} g(x)h(y)P(X = x, Y = y) = P(X = a, Y = b)$$

Τελικά, θα ισχύει ότι

$$P(X = a, Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b)$$

Επειδή τα $a, b \in \mathbb{R}$ είναι τυχαία επιλεγμένα η παραπάνω σχέση ικανοποιείται για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ το οποίο σημαίνει ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες. □

4.4 Πιθανογεννήτριες

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις λεγόμενες πιθανογεννήτριες συναρτήσεις. Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Θεωρούμε την ακολουθία αριθμών $p_0, p_1, p_2, \cdots$, τέτοια ώστε

$$p_k = P(X = k), \quad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

Ορισμος 79 *Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται να είναι η συνάρτηση*

$$G_X(s) = p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \cdots$$

για όλα τα $s \in \mathbb{R}$ για τα οποία το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει απολύτως.

Παρατηρούμε ότι $G_X(0) = p_0$ και $G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Επιπλέον, για τα $s \in \mathbb{R}$ για τα οποία το άθροισμα συγκλίνει απολύτως προκύπτει ότι

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι για, τουλάχιστον, τα $|s| \leq 1$ το παραπάνω άθροισμα συγκλίνει απολύτως.

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και προκύπτει ουσιαστικά από την μοναδικότητα της ανάλυσης σε σειρά Taylor γύρω από το μηδέν μιας συνάρτησης (δείτε [29]). Το ερώτημα στο οποίο απαντά είναι το εξής: έστω ότι οι X και Y τυχαίες μεταβλητές έχουν τις ίδιες πιθανογεννήτριες συναρτήσεις. Μπορούμε να πούμε ότι ακολουθούν και την ίδια κατανομή;

ΘΕΩΡΗΜΑ 80 (Μοναδικότητα Πιθανογεννήτριας) *Έστω ότι οι X και Y έχουν πιθανογεννήτριες συναρτήσεις G_X και G_Y αντίστοιχα. Τότε*

$$G_X(s) = G_Y(s) \quad \text{για όλα τα } s$$

ανν

$$P(X = k) = P(Y = k) \quad \text{για } k = 0, 1, 2, \cdots$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 81 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με πιθανογεννήτρια συνάρτηση $G_X(s)$. Τότε*

$$G_X^{(r)}(1) = \mathbb{E}(X(X-1)\cdots(X-r+1))$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$$

όπου $p_k = P(X = k)$. Η σειρά αυτή συγκλίνει απολύτως, τουλάχιστον για τα $|s| \leq 1$, οπότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Abel (δες [29]) αν χρειαστεί, μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $G_X(s)$ παραγωγίζοντας την σειρά όρο προς όρο. Δηλαδή

$$G_X'(s) = p_1 + 2p_2 s + \cdots$$

άρα

$$G_X'(1) = p_1 + 2p_2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) = \mathbb{E}(X)$$

Για την δεύτερη παράγωγο έχουμε

$$G_X''(s) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)P(X = k) = \mathbb{E}(X(X-1))$$

Παρόμοια για την r παράγωγο. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 82 *Αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες με πεδίο τιμών το $\mathbb{N} \cup \{0\}$ τότε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματός τους είναι*

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον

$$G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) \quad \text{και } G_Y(s) = \mathbb{E}(s^Y)$$

έχουμε ότι

$$G_{X+Y}(s) = \mathbb{E}(s^{X+Y}) = \mathbb{E}(s^X s^Y) = \mathbb{E}(s^X)\mathbb{E}(s^Y)$$

Χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των X και Y για να πάρουμε την ισότητα $\mathbb{E}(s^X s^Y) = \mathbb{E}(s^X)\mathbb{E}(s^Y)$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 83 *Έστω N και $X_1, X_2, \cdots,$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με πεδίο τιμών $\{0,1,2,\cdots,\}$. Αν οι $X_1, X_2, \cdots,$ είναι ισόνομες (ακολουθούν δηλαδή την ίδια κατανομή και επομένως έχουν την ίδια μέση τιμή και την ίδια πιθανογεννήτρια $G_X(s)$) και $\mathbb{E}(N)\cdot\mathbb{E}(X) < \infty$ τότε το άθροισμα*

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$$

έχει ως πιθανογεννήτρια την συνάρτηση

$$G_S(s) = G_N(G_X(s))$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
G_S(s) &= \mathbb{E}\left(s^{X_1+X_2+\cdots+X_N}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(s^{X_1+X_2+\cdots+X_N}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{I}_{\{N=k\}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(s^{X_1+X_2+\cdots+X_k}\mathbb{I}_{\{N=k\}}\right) \qquad \text{(απόλυτη σύγκλιση)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(s^{X_1+X_2+\cdots+X_k}\right)\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{N=k\}}) \qquad \text{(ανεξαρτησία)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\left(s^{X_1+X_2+\cdots+X_k}\right)P(N=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}(s_1^X)\mathbb{E}(s_2^X)\cdots\mathbb{E}(s_k^X)P(N=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(G_X(s))^k P(N=k) \\
&= G_N(G_X(s))
\end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 84 *Αν το S είναι όπως παραπάνω, μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή του χρησιμοποιώντας την μορφή της πιθανογεννήτριας συνάρτησης που μόλις υπολογίσαμε. Έχουμε ότι*

$$\mathbb{E}(S) = G_N^{'}(G_X(1))G_X^{'}(1) = G_N^{'}(1)\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή του S χωρίς να υποθέσουμε ότι οι $X_1, X_2, \cdots,$ είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές αλλά απλά ότι παίρνουν μη αρνητικές τιμές. Πράγ-

ματι, εφόσον $\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X) < \infty$ *έχουμε*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} kP(N=k)\mathbb{E}(X) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{E}(X)P(N=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{E}(X_1)+\cdots+\mathbb{E}(X_k))P(N=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_1+\cdots+X_k)\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{N=k\}}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}((X_1+X_2+\cdots+X_k)\mathbb{I}_{\{N=k\}}) \\
&= \mathbb{E}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(X_1+X_2+\cdots+X_k)\mathbb{I}_{\{N=k\}}}_{=S} \\
&= \mathbb{E}(S)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την εναλλαγή αθροίσματος και μέσης τιμής για θετικά αθροίσματα κάτι το οποίο θα αποδείξουμε αργότερα (δείτε 106). □

Παραδειγμα 85 (Υπολογισμός Μέσης Τιμής και Διακύμανσης) *Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση για να υπολογίσουμε την μέση τιμή και διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής. Εύκολα βλέπουμε ότι, εφαρμόζοντας το θεώρημα 81,*

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$$

και

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \mathbb{E}(X(X-1)+X) \\
&= \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) \\
&= G''_X(1) + G'_X(1)
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$$

□

Παραδειγμα 86 (Κατανομή Bernoulli) *Θα υπολογίσουμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Bernoulli. Μια* *τέτοια τυχαία μεταβλητή παίρνει την τιμή μηδέν με πιθανότητα p και την τιμή 1 με πιθανότητα $q = 1 - p$. Αρα έχουμε*

$$G_X(s) = p + qs$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την μέση τιμή και διακύμανση μιας τέτοιας τυχαίας μεταβλητής. Υπολογίζουμε την παράγωγο ως προς s της πιθανογεννήτριας και ύστερα θέτουμε $s = 1$ για να πάρουμε την $G'_X(1) = q$. Η δεύτερη παράγωγος της πιθανογεννήτριας είναι η μηδενική συνάρτηση, επομένως η διακύμανση είναι

$$\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = q - q^2 = q(1-q) = pq$$

□

Παραδειγμα 87 (Διωνυμική Κατανομή) *Θα υπολογίσουμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή. Έχουμε ότι*

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} s^k = (q + ps)^n$$

Η μέση τιμή μιας τέτοιας τυχαίας μεταβλητής είναι

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = np$$

Η διακύμανση είναι

$$\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = npq$$

□

Παραδειγμα 88 (Κατανομή Poisson) *Θα υπολογίσουμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson. Έχουμε ότι*

$$G_x(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda} s^k = e^{\lambda(s-1)}$$

Η μέση τιμή θα είναι

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$$

και η διακύμανση θα είναι

$$\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda$$

□

Παραδειγμα 89 (Αρνητική Διωνυμική Κατανομή) *Θα υπολογίσουμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή. Έχουμε ότι*

$$G_X(s) = \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n} s^k = \left(\frac{ps}{1-qs}\right)^n, \qquad \text{για } |s| < \frac{1}{q}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει την επόμενη σχέση. Για $y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$(1+x)^y = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{y}{r} x^r, \qquad \text{για } |x| < 1$$

όπου $\binom{y}{r} = \frac{y(y-1)\cdots(y-r+1)}{r!}$

Θα υπολογίσουμε την μέση τιμή χρησιμοποιώντας την πιθανογεννήτρια συνάρτηση που υπολογίσαμε. Έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{n}{p}$$

Παρομοίως, για να υπολογίσουμε την διακύμανση έχουμε

$$\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \frac{nq}{p^2}$$

□

Παραδειγμα 90 (Γεωμετρική Κατανομή) *Έστω ότι η X ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή παραμέτρου p. Τότε $P(X = k) = pq^{k-1}$ όπου $q = 1 - p$. Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της X είναι*

$$G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} s^k = ps \sum_{k=0}^{\infty} (qs)^k = \frac{ps}{1-qs}, \qquad \text{για } |s| < \frac{1}{q}$$

Θα υπολογίσουμε την μέση τιμή και την διακύμανση μιας τέτοιας τυχαίας μεταβλητής. Έχουμε

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{1}{p}$$

και

$$\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \frac{q}{p^2}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 91 *Από τον ορισμό της πιθανογεννήτριας συνάρτησης (ως άπειρο άθροισμα) διαπιστώνουμε ότι αν η X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με πεδίο τιμών $\{0, 1, 2, \cdots ,\}$ και έχει ως πιθανογεννήτρια την $G_X(s)$ τότε*

$$p_n = P(X = n) = \left(\frac{1}{n!}\right) G_X^{(n)}(0)$$

Αν λοιπόν γνωρίζουμε με κάποιον τρόπο την πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής, τότε παραγωγίζοντας μπορούμε να έχουμε και τις πιθανότητες $P(X = n)$ για $n = 0, 1, 2, \cdots ,$.
Για παράδειγμα, έστω ότι μια τυχαία μεταβλητή έχει πιθανογεννήτρια συνάρτηση την $G_X(s) = \frac{s}{5}(2 + 3s^2)$. Κάνοντας τους υπολογισμούς διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned}
G_X(0) &= 0 = P(X = 0) \\
G_X^{'}(0) &= \frac{2}{5} = P(X = 1) \\
\frac{1}{2}G_X^{''}(0) &= 0 = P(X = 2) \\
\frac{1}{3!}G_X^{'''}(0) &= \frac{3}{5} = P(X = 3) \\
\frac{1}{r!}G_X^{(r)}(0) &= 0 = P(X = r) \quad \text{για } r \geq 4
\end{aligned}$$

Επομένως η X είναι τέτοια ώστε

$$X = \begin{cases} 1, & \text{με πιθανότητα } \frac{2}{5} \\ 3, & \text{με πιθανότητα } \frac{3}{5} \end{cases}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 92 *Έστω ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Poisson με παραμέτρους λ και μ αντίστοιχα. Έστω η τυχαία μεταβλητή $Z = X+Y$. Χρησιμοποιώντας τις πιθανογεννήτριες συναρτήσεις θα υπολογίσουμε την κατανομή της Z. Έχουμε ότι*

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s) = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$$

Δηλαδή η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Z είναι η πιθανογεννήτρια μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson παραμέτρου $\lambda + \mu$. Λόγω του θεωρήματος 80 έχουμε ότι η Z ακολουθεί την κατανομή Poisson παραμέτρου $\lambda + \mu$.

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 93 *Έστω $X_1, X_2, \cdots , X_n$ ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές με πεδίο τιμών το $\{0, 1, 2, \cdots ,\}$ οι οποίες ακολουθούν την γεωμετρική κατανομή παραμέτρου p. Θα μελετήσουμε την τυχαία μεταβλητή Z η οποία είναι τέτοια ώστε*

$$Z = X_1 + \cdots + X_n$$

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Z είναι

$$\begin{aligned} G_Z(s) &= \mathbb{E}(s^{X_1+\cdots+X_n}) \\ &= \mathbb{E}(s^{X_1}) \cdot \mathbb{E}(s^{X_2}) \cdots \mathbb{E}(s^{X_n}) \quad \textit{(ανεξαρτησία)} \\ &= (G_X(s))^n \\ &= \left(\frac{ps}{1-qs}\right)^n \end{aligned}$$

Επομένως, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της Z είναι αυτή της αρνητικής διωνυμικής κατανομής. Λόγω μοναδικότητας, βγάζουμε το συμπέρασμα ότι η Z ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή.
Αντίστροφα, αν μια τυχαία μεταβλητή Z ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή και ως εκ τούτου έχει ως πιθανογεννήτρια την συνάρτηση $G_Z(s) = \left(\frac{ps}{1-qs}\right)^n$ τότε μπορούμε να πούμε ότι είναι το άθροισμα κάποιων $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την γεωμετρική κατανομή παραμέτρου p. Έχοντας υπολογίσει την μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή παραμέτρου p μπορούμε να υπολογίσουμε και την μέση τιμή της Z. Θα έχουμε

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{p}$$

το οποίο συμπίπτει (προφανώς) με το αποτέλεσμα που έχουμε ήδη υπολογίσει χρησιμοποιώντας την πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή. Παρομοίως μπορούμε να υπολογίσουμε και την διακύμανση. Λόγω ανεξαρτησίας είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι

$$\mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = \frac{nq}{p^2}$$

αφού $\mathrm{Var}(X_k) = \frac{q}{p^2}$ για κάθε $k = 1, 2, \cdots, n$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 94 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με πεδίο τιμών το $\mathbb{N}$ και τέτοια ώστε*

$$P(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$$

όπου για $s > 1$ ορίζουμε την $\zeta(s)$ ως εξής

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

το οποίο είναι πεπερασμένο για $s > 1$. Το άπειρο άθροισμα $\sum \frac{1}{k^s}$ το έχουμε μελετήσει στον Απειροστικό Λογισμό τόσο όσον αφορά την σύγκλιση ή απόκλιση αλλά και το όριο αυτό καθαυτό σε μερικές περιπτώσεις (δες [29]).

Έστω $1 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k < \cdots$ *οι πρώτοι αριθμοί και έστω* A_k *το ενδεχόμενο* $\{\omega \in \Omega : X(\omega)$ *διαιρείται από τον* $p_k\}$.
Τότε

$$\begin{aligned} P(A_k) &= \sum_{n:\ \text{διαιρούνται από τον } p_k} \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} \\ &= \sum_{n:n=p_k l} \frac{n^{-s}}{\zeta(s)} \\ &= p_k^{-s} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{-s}}{\zeta(s)} \\ &= p_k^{-s} \end{aligned}$$

Παρόμοια, μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$P(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_l}) = p_{k_1}^{-s} \cdots p_{k_l}^{-s}$$

για οποιουσδήποτε $k_1, \cdots, k_l$. *Αυτό σημαίνει ότι τα ενδεχόμενα* $A_1, A_2, \cdots$, *είναι ανεξάρτητα. Οπότε και τα ενδεχόμενα* $A_1^c, A_2^c, \cdots$, *είναι επίσης ανεξάρτητα και επιπλέον ο αριθμός*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - p_k^{-s})$$

παριστά την πιθανότητα η X *να μην διαιρείται από κανέναν πρώτο αριθμό. Αυτό σημαίνει ότι η* $X = 1$ *το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα* $\frac{1}{\zeta(s)}$ *αφού* $P(X = n) = \frac{n^{-s}}{\zeta(s)}$.
Συνεπώς ισχύει ότι

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - p_k^{-s}) = \frac{1}{\zeta(s)}$$

μια σχέση που συνδέει τους πρώτους αριθμούς με το άθροισμα $\zeta(s)$*!* □

Σε επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις λεγόμενες χαρακτηριστικές συναρτήσεις τυχαίων μεταβλητών (όχι κατά ανάγκη διακριτών). Οι συναρτήσεις αυτές έχουν την ίδια φιλοσοφία με τις πιθανογεννήτριες συναρτήσεις αλλά σίγουρα είναι αποτελεσματικότερες σε πιο περίπλοκα προβλήματα.

Κεφάλαιο 5

Μέση Τιμή

Σε προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε ορίσει την μέση τιμή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής. Με βάση αυτό τον ορισμό θα ορίσουμε σταδιακά την μέση τιμή μιας οποιαδήποτε τυχαίας μεταβλητής.
Θα ξεκινήσουμε από τον ορισμό της μέσης τιμής μιας θετικής τυχαίας μεταβλητής. Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της απλής τυχαίας μεταβλητής η οποία είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή αλλά με πεπερασμένο πεδίο τιμών, $\{x_1, \cdots, x_n\}$ όπου $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ για παράδειγμα.

Ορισμος 95 *Έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ θετική τυχαία μεταβλητή. Η μέση τιμή της ορίζεται ως εξής,*

$$\mathbb{E}(X) = \sup\{\mathbb{E}(Y) : Y \text{ απλή τ.μ. με } 0 \leq Y \leq X\}$$

αν το supremum είναι πεπερασμένος αριθμός.

Στον ορισμό αυτό δηλαδή θεωρούμε όλες τις απλές τυχαίες μεταβλητές Y τ.ω. $0 \leq Y \leq X$, υπολογίζουμε τις μέσες τιμές τους $\mathbb{E}(Y)$ σύμφωνα με τον ορισμό 57 και στην συνέχεια λαμβάνουμε το supremum όλων αυτών των μέσων τιμών, αρκεί αυτό να είναι πεπερασμένος αριθμός. Το supremum αυτό το ορίζουμε να είναι η μέση τιμή της X. Αν το supremum είναι το άπειρο τότε λέμε ότι η X δεν έχει μέση τιμή ή ότι είναι ίση με το άπειρο.
Η μέση τιμή μιας οποιαδήποτε τ.μ. ορίζεται ως εξής.

Ορισμος 96 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή. Η μέση τιμή της είναι*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)$$

όπου $X^+(\omega) = \max(X(\omega), 0)$, $X^-(\omega) = -\min(X(\omega), 0)$ αρκεί να ορίζονται οι μέσες τιμές $\mathbb{E}(X^+)$ και $\mathbb{E}(X^-)$ σύμφωνα με τον ορισμό 95. Συμβολίζεται και με $\int X dP$.

Παρατηρηση 97 (Θεωρία Μέτρου και Ολοκλήρωσης) *Σημειώστε ότι το ολοκλήρωμα στην θεωρία μέτρου ορίζεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο όπως παραπάνω, με την διαφορά ότι δεν αναφέρεται ειδικά σε μέτρο πιθανότητας αλλά σε οποιοδήποτε μέτρο.*

Στην επόμενη παρατήρηση θα αποδείξουμε ότι ο ορισμός 96 είναι μια φυσική γενίκευση του ορισμού 57.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 98 (Ισοδυναμία Ορισμών Μέσης Τιμής) *Στον ορισμό 95 ορίσαμε την μέση τιμή μιας θετικής τυχαίας μεταβλητής η οποία δεν είναι διακριτή. Αυτός ο ορισμός είναι λογικός ή είναι αυθαίρετος; Δηλαδή, προκύπτει το εξής ερώτημα: αν η X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή τότε ο ορισμός 95 είναι ισοδύναμος με τον ορισμό 57; Παρακάτω θα αποδείξουμε ότι οι δυο ορισμοί είναι ισοδύναμοι για διακριτές τυχαίες μεταβλητές, συνεπώς ο ορισμός 95 αποτελεί μια φυσιολογική γενίκευση του ορισμού 57 καθότι δίνει αποτέλεσμα και για μη διακριτές τυχαίες μεταβλητές.*
Έστω X μια θετική διακριτή τυχαία μεταβλητή με πεδίο τιμών το

$$\{x_1, x_2, \cdots,\}$$

και $B_i = \{X = x_i\}$. Θεωρούμε ότι οι αριθμοί $x_1, x_2, \cdots,$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί. Αν στο πεδίο τιμών υπάρχει ένας αρνητικός αριθμός, έστω ξ, τότε θα ισχύει $P(X = \xi) = 0$. Συμβολίζουμε με

$$A = \sup\{\mathbb{E}(Y) : Y \text{ απλή τυχαία μεταβλητή τ.ω. } 0 \leq Y \leq X\} \leq \infty$$

Με $\mathbb{E}(\cdot)$ θα εννοούμε (προς το παρόν) την μέση τιμή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής σύμφωνα με τον ορισμό 57.
Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι

$$\sup\{\mathbb{E}(Y) : Y \text{ απλή τυχαία μεταβλητή τ.ω. } 0 \leq Y \leq X\} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$$

Υπάρχει μια ακολουθία απλών τυχαίων μεταβλητών Y_n με $0 \leq Y_n \leq X$ τ.ω.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n) = A$$

και μάλιστα

$$\mathbb{E}(Y_n) \leq A$$

Έστω Y ένας οποιοδήποτε όρος της παραπάνω ακολουθίας. Τότε, αν $A_i = \{Y = y_i\}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{i=1}^{m} y_i P(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty} y_i P(A_i \cap B_j) \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{\infty} x_j P(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} x_j P(A_i \cap B_j) \qquad \textit{(αναδιάταξη όρων)} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(B_j) \\
&= \mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

Σημειώστε ότι σε μια σειρά θετικών όρων μπορούμε να αναδιατάξουμε τους όρους της χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα (είτε πεπερασμένος αριθμός είτε άπειρος), σε αντίθεση από ότι συμβαίνει σε μια οποιαδήποτε άλλη σειρά. Πράγματι, αν σε μια αποκλίνουσα σειρά θετικών όρων αναδιατάξουμε τους όρους έτσι ώστε να προκύψει συγκλίνουσα σειρά τότε αυτή η νέα σειρά θα συγκλίνει απολύτως και επομένως οποιαδήποτε αναδιάταξη της θα συγκλίνει στο ίδιο όριο. Αυτό βέβαια είναι άτοπο. Παρομοίως, αν η αρχική σειρά είναι συγκλίνουσα τότε θα συγκλίνει και απολύτως επομένως οποιαδήποτε αναδιάταξή της θα συγκλίνει στο ίδιο όριο.
'ρα

$$A \leq \mathbb{E}(X)$$

Δηλαδή η μέση τιμή σύμφωνα με τον ορισμό 95 είναι μικρότερη ή ίση της μέσης τιμής υπολογισμένη με τον ορισμό 57.
Ας θεωρήσουμε τώρα την ακολουθία απλών τυχαίων μεταβλητών

$$Z_n = X \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{B_i}, \quad B_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}$$

Προφανώς

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

και

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Z_n) = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)}_{\mathbb{E}(X)} \leq A$$

αφού η Z_n είναι μια ακολουθία απλών τυχαίων μεταβλητών τ.ω. $0 \leq Z_n \leq X$. Αρα

$$\sup\{\mathbb{E}(Y) : Y \text{ απλή τυχαία μεταβλητή τ.ω. } 0 \leq Y \leq X\} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$$

Τέλος, ας δούμε την γενική περίπτωση μιας X διακριτής τυχαίας μεταβλητής, όχι κατά ανάγκη θετικής με πεδίο τιμών το $\{x_1, x_2, \cdots,\}$. Η X μπορεί να γραφεί στην μορφή $X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega)$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} A_+ &= \sup\{\mathbb{E}(Y) : Y \text{ απλή τυχαία μεταβλητή τ.ω. } 0 \leq Y \leq X^+\} \\ A_- &= \sup\{\mathbb{E}(Y) : Y \text{ απλή τυχαία μεταβλητή τ.ω. } 0 \leq Y \leq X^-\} \end{aligned}$$

Επίσης, υποθέτουμε ότι το πεδίο τιμών της $X^+(\omega)$ είναι το $\{x_1^+, x_2^+, \cdots,\}$ και το πεδίο τιμών της $X^-(\omega)$ είναι το $\{x_1^-, x_2^-, \cdots,\}$.
Σύμφωνα με τα προηγούμενα ισχύει

$$\begin{aligned} A_+ &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j^+ P(X^+ = x_j^+) \leq \infty \\ A_- &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j^- P(X^- = x_j^-) \leq \infty \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε στην συνέχεια ότι αν η μέση τιμή υπάρχει σύμφωνα με τον ένα ορισμό τότε θα υπάρχει και με τον άλλο ορισμό και οι μέσες τιμές θα είναι ίσες.
Έστω λοιπόν ότι $A_+, A_- < \infty$. Τότε σύμφωνα με τον ορισμό 96 θα έχουμε ότι η μέση τιμή είναι $\mathbb{E}(X) = A_+ - A_-$. Επειδή $A_+, A_- < \infty$ τότε και

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} x_j^+ P(X^+ = x_j^+) &< \infty \\ \sum_{j=1}^{\infty} x_j^- P(X^- = x_j^-) &< \infty \end{aligned}$$

επομένως με αναδιάταξη όρων προκύπτει ότι

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j^+ P(X^+ = x_j^+) + \sum_{j=1}^{\infty} x_j^- P(X^- = x_j^-) < \infty$$

άρα η μέση τιμή ορίζεται καλώς σύμφωνα με τον ορισμό 57. Επιπλέον, οι μέσες τιμές συμπίπτουν διότι, πάλι με αναδιάταξη όρων προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j^+ P(X^+ = x_j^+) - \sum_{j=1}^{\infty} x_j^- P(X^- = x_j^-) \\ &= A_+ - A_- \end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν η μέση τιμή ορίζεται καλώς σύμφωνα με τον ορισμό 57 τότε αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| P(X = x_j) < \infty$$

και άρα

$$\begin{aligned} A_+ &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j^+ P(X^+ = x_j^+) < \infty \\ A_- &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j^- P(X^- = x_j^-) < \infty \end{aligned}$$

Επομένως η μέση τιμή ορίζεται καλώς σύμφωνα με τον ορισμό 96. Επειδή λοιπόν η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j)$ συγκλίνει απολύτως επιτρέπεται να αναδιατάξουμε τους όρους της χωρίς να αλλάξει το άθροισμα, επομένως

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} x_j P(X = x_j) &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j^+ P(X^+ = x_j^+) - \sum_{j=1}^{\infty} x_j^- P(X^- = x_j^-) \\ &= A_+ - A_- \end{aligned}$$

'ρα οι δυο ορισμοί δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.
Στην περίπτωση που κάποιος από τους δυο ορισμούς δεν δίνει πεπερασμένο αποτέλεσμα για κάποια τυχαία μεταβλητή, τότε το ίδιο θα συμβαίνει και με τον άλλο ορισμό, διότι αν ο ένας δίνει πεπερασμένο αποτέλεσμα τότε δίνει και ο άλλος όπως αποδείξαμε πριν. □

Όπως αναφέραμε σε προηγούμενη παρατήρηση, ο ορισμός του ολοκληρώματος στην θεωρία μέτρου είναι εντελώς ανάλογος με τον ορισμό της μέσης τιμής στην θεωρία πιθανοτήτων και μάλιστα γενικότερος μιας και αναφέρεται σε οποιοδήποτε μέτρο (και όχι μόνο σε μέτρα πιθανότητας). Προκύπτει όμως το ίδιο ερώτημα όσον αφορά συναρτήσεις με διακριτό πεδίο τιμών. Η αιτιολόγηση ότι το ολοκλήρωμα μιας τέτοιας συνάρτησης είναι το αντίστοιχο άθροισμα είναι ακριβώς η ίδια με αυτή που παρουσιάσαμε στην περίπτωση της μέσης τιμής.
Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με την προσέγγιση τυχαίων μεταβλητών από ακολουθία απλών τυχαίων μεταβλητών. Για τον λόγο αυτό παραθέτουμε την έννοια της σύγκλισης σχεδόν βέβαια.

ΟΡΙΣΜΟΣ 99 *Λέμε ότι μια ακολουθία τ.μ. X_n συγκλίνει* **σχεδόν βέβαια** *σε μια τ.μ. X αν*

$$N = \{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} \text{ έχει } P(N) = 0.$$

Στην επόμενη πρόταση θα αποδείξουμε ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά την προσέγγιση θετικών τυχαίων μεταβλητών από ακολουθία απλών τυχαίων μεταβλητών. Με τον τρόπο αυτό θα αποδείξουμε τις περισσότερες ιδιότητες της μέσης τιμής με οριακές διαδικασίες, δηλαδή τις αποδεικνύουμε για τις απλές τυχαίες μεταβλητές και στην συνέχεια περνώντας στο όριο καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι την ίδια ιδιότητα ικανοποιεί και η τυχαία μεταβλητή η οποία είναι το όριο της ακολουθίας απλών τυχαίων μεταβλητών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 100 *Για κάθε θετική τ.μ. X υπάρχει μια ακολουθία (X_n) θετικών και απλών τ.μ. η οποία συγκλίνει από κάτω στην X σχεδόν βέβαια.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω X μια θετική τυχαία μεταβλητή. Ορίζουμε την παρακάτω ακολουθία θετικών τυχαίων μεταβλητών

$$X_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{I}_{A_k^n}(\omega) + n\mathbb{I}_{\{X(\omega)\geq n\}}(\omega) \tag{5.1}$$

όπου

$$A_k^n = \left\{ \omega \in \Omega : X(\omega) \in \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right] \right\}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι σταθεροποιώντας το $\omega \in \Omega$ ισχύει $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ καθώς $n \to \infty$. Αυτό σημαίνει ότι η X_n συγκλίνει σχεδόν βέβαια στην X. □

ΛΗΜΜΑ 101 *Έστω X θετική τυχαία μεταβλητή και y θετική και απλή τυχαία μεταβλητή με $y \leq X$. Αν x_n ακολουθία απλών και θετικών τυχαίων μεταβλητών τ.ω.*

$$x_n \uparrow X \qquad \textit{σχεδόν βέβαια}$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(x_n) \geq \mathbb{E}(y)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε το σύνολο

$$A_n = \{\omega \in \Omega : x_n \geq y - \varepsilon\}$$

Προφανώς η ακολουθία ενδεχομένων A_n είναι αύξουσα και τέτοια ώστε $A_n \uparrow \Omega$. Επίσης

$$x_n = x_n\mathbb{I}_{A_n} + x_n\mathbb{I}_{A_n^c} \geq x_n\mathbb{I}_{A_n} \geq (y-\varepsilon)\mathbb{I}_{A_n}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 70 καθώς και την γραμμικότητα της μέσης τιμής για διακριτές τυχαίες μεταβλητές προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(x_n) &\geq \mathbb{E}(y-\varepsilon)\mathbb{I}_{A_n} \\ &= \mathbb{E}(y\mathbb{I}_{A_n}) - \varepsilon P(A_n) \end{aligned}$$

Αν $y_1, y_2, \cdots, y_k$ είναι οι τιμές της y τότε

$$\mathbb{E}(y\mathbb{I}_{A_n}) = \sum_{i=1}^{k} y_k P(y = y_k, A_n)$$

'ρα

$$\mathbb{E}(x_n) \ \geq \ \sum_{i=1}^{k} y_k P(y = y_k, A_n) - \varepsilon$$

Λαμβάνοντας το όριο καθώς το $n \to \infty$ στην παραπάνω ανισότητα και διαπιστώνοντας ότι $P(y = y_k, A_n) \to P(y = y_k)$ καθώς $n \to \infty$ προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(x_n) \geq \mathbb{E}(y) - \varepsilon$$

Εφόσον το $\varepsilon > 0$ είναι τυχαία επιλεγμένο προκύπτει τελικά ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(x_n) \geq \mathbb{E}(y)$$

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ **102** *Στο επόμενο πόρισμα θα αποδείξουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα, ότι κάθε ακολουθία x_n απλών και θετικών τυχαίων μεταβλητών που συγκλίνει από κάτω στην X (θετική τυχαία μεταβλητή) είναι τέτοια ώστε $\lim \mathbb{E}(x_n) = \mathbb{E}(X)$. Αυτό σημαίνει ότι και η ακολουθία 5.1 είναι τέτοια ώστε $\lim \mathbb{E}(x_n) = \mathbb{E}(X)$. Το συμπέρασμα αυτό θα μας βοηθήσει αργότερα να αποδείξουμε την ισοδυναμία του ορισμού 96 με τον ορισμό της μέσης τιμής για απόλυτα συνεχείς τυχαίες μεταβλητές που θα δούμε παρακάτω.* □

ΠΟΡΙΣΜΑ **103** *Έστω X θετική τυχαία μεταβλητή και x_n ακολουθία απλών και θετικών τυχαίων μεταβλητών τ.ω. $x_n \uparrow X$. Τότε $\lim \mathbb{E}(x_n) = \mathbb{E}(X)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας θυμηθούμε τον ορισμό της μέσης τιμής μιας θετικής τυχαίας μεταβλητής. Είναι

$$\mathbb{E}(X) = \sup\{\mathbb{E}(Y) : Y \text{ απλή τ.μ. με } 0 \leq Y \leq X\}$$

Δηλαδή, υπάρχει ακολουθία Y_n απλών και θετικών τυχαίων μεταβλητών με $0 \leq Y_n \leq X$ έτσι ώστε $\lim \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(X)$. Εφόσον η ακολουθία x_n είναι τέτοια ώστε $0 \leq x_n \leq X$ έπεται ότι $\lim \mathbb{E}(x_n) = a \leq \mathbb{E}(X)$.
Εφαρμόζοντας το λήμμα 101 για τον κάθε όρο της ακολουθίας Y_n προκύπτει ότι

$$a = \lim \mathbb{E}(x_n) \geq \mathbb{E}(Y_n)$$

και αμέσως έπεται ότι

$$\mathbb{E}(X) = \lim \mathbb{E}(Y_n) \leq \lim \mathbb{E}(x_n) = a \leq \mathbb{E}(X)$$

Δηλαδή

$$\lim \mathbb{E}(x_n) = \mathbb{E}(X)$$

$\square$

Στα επόμενα θα δώσουμε σημαντικές ιδιότητες και αποτελέσματα για την μέση τιμή.

Ορισμος 104 *Θα συμβολίζουμε με $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ την οικογένεια των τ.μ. τ.ω. $\mathbb{E}(X^+) < \infty$ και $\mathbb{E}(X^-) < \infty$.*

Θεωρημα 105 *1) Αν $X, Y \in L_1$ τότε $\mathbb{E}(X + cY) = \mathbb{E}(X) + c\mathbb{E}(Y)$. Αν $X \geq 0$ τότε και $\mathbb{E}(X) \geq 0$. Αν $0 \leq X \leq Y$ και $Y \in L_1$ τότε και $X \in L_1$ και $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.*
2) $X \in L_1$ **ανν** *$|X| \in L_1$ και ισχύει $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.*
3) Αν $X = Y$ σχεδόν βέβαια (σβ.) τότε και $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ ($X = Y$ σβ. αν $P(X = Y) = 1$).
4) (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης) Αν η αύξουσα ακολουθία των θετικών τ.μ. (X_n) συγκλίνει σβ. στην X τότε $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$.
5) (Λήμμα Fatou) Αν οι τ.μ. X_n είναι τ.ω. $X_n \geq Y$ σβ. ($Y \in L_1$) έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n).$$

6) (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue) Αν η οικογένεια τ.μ. X_n συγκλίνει σβ. στην X και αν $|X_n| \leq Y$ σβ. με $Y \in L_1$ τότε $X_n, X \in L_1$ και $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.

Θεωρημα 106 *Έστω X_n μια ακολουθία τ.μ.*
1) Αν X_n είναι θετικές, τότε

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n)$$

2) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$, τότε και $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ συγκλίνει σβ. και ισχύει η ισότητα του 1).

Αν $X^p \in L_1$ θα λέμε ότι $X \in L_p$.

Θεωρημα 107 *1) Αν $X, Y \in L_2$ έχουμε ότι $XY \in L_1$ και την ανισότητα Cauchy-Schwarz,*

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}.$$

2) Έχουμε ότι $L_2 \subseteq L_1$ και αν $X \in L_2$ τότε $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$.
3) Αν $X, Y \in L_2$ τότε και $X + cY \in L_2$.

Θεωρημα 108 (Ανισότητα Chebyshev) *Ισχύει ότι*

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

Αποδειξη. Εύκολα βλέπουμε ότι $a^2 \mathbb{I}_{\{|X| \geq a\}} \leq X^2$ οπότε

$$\mathbb{E}(a^2 \mathbb{I}_{\{|X| \geq a\}}) \leq \mathbb{E}(X^2)$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

Θεωρημα 109 *Έστω μια απόλυτα συνεχής τ.μ. X με πυκνότητα f. Αν $\mathbb{E}(h(X)) < \infty$ ή αν h θετική, τότε*

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int h(x) f(x) dx$$

5.1 Fubini

Έστω $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ δύο χώροι πιθανότητας. Θέτουμε $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

Ορισμος 110 *Έστω $\mathcal{F}$ η μικρότερη σ-άλγεβρα των υποσυνόλων του Ω που περιέχει τα σύνολα της μορφής $A_1 \times A_2$ για κάθε $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$. Ονομάζουμε την $\mathcal{F}$ σ-άλγεβρα γινόμενο των $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$.*

Θεωρημα 111 *Έστω $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ δύο χώροι πιθανότητας. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα μέτρο πιθανότητας P στον $(\Omega, \mathcal{F})$ με $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ και $\mathcal{F}$ την σ-άλγεβρα γινόμενο των $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ τ.ω. $P(A \times B) = P_1(A) P_2(B)$ με $A \in \Omega_1, B \in \Omega_2$.*

Θεωρημα 112 (Fubini) *Έστω $f \in L^1(\Omega)$. Τότε ισχύει το εξής,*

$$\int_\Omega f dP = \int_{\Omega_1} (\int_{\Omega_2} f dP_2) dP_1 = \int_{\Omega_2} (\int_{\Omega_1} f dP_1) dP_2.$$

5.2 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας. Θα ορίσουμε πρώτα την απλούστερη δεσμευμένη μέση τιμή δεδομένου ενός ενδεχομένου.

Ορισμος 113 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή και B ένα ενδεχόμενο τ.ω. $P(B) \neq 0$. Η δεσμευμένη μέση τιμή του X δεδομένου του B ορίζεται ως εξής,*

$$\mathbb{E}(X|B) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{I}_B X)}{P(B)}.$$

Τώρα, ορίζουμε την δεσμευμένη μέση τιμή δεδομένου μιας διακριτής τ.μ.

Ορισμος 114 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή και έστω Y μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές $y_1, y_2, \ldots$. Η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(X|Y)$ του X δεδομένου Y ορίζεται να είναι μια τυχαία μεταβλητή τ.ω. για κάθε $i = 1, 2, \ldots$ να έχουμε,*

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \mathbb{E}(X|\{Y = y_i\}), \ \forall \omega \in \{Y = y_i\}.$$

Παρατηρήστε ότι σε αυτή την περίπτωση, η δεσμευμένη μέση τιμή, είναι μια τ.μ.

Ασκηση 115 *Έστω Y μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και X μια τ.μ. Δείξτε ότι*

$$\sigma(\mathbb{E}(X|Y)) \subseteq \sigma(Y).$$

Δείξτε επίσης ότι $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$, όπου Y διακριτή τυχαία μεταβλητή και X μια τυχαία μεταβλητή.

Ασκηση 116 *Έστω Y μια διακριτή τυχαία μεταβλητή. Για κάθε $B \in \sigma(Y)$ δείξτε ότι*

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_B \mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_B X).$$

Ορισμος 117 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Μια μη αρνητική απεικόνιση $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ λέγεται μέτρο αν*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

όταν $A_1, A_2, \ldots$ είναι μια αριθμήσιμη οικογένεια ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων του $\mathcal{F}$.

Η διαφορά, επομένως, με το μέτρο πιθανότητας είναι ότι μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες της μονάδος. Επίσης θα λέγεται πεπερασμένο μέτρο αν δεν παίρνει την τιμή ∞.

Ορισμος 118 *Έστω P, Q δύο πεπερασμένα μέτρα. Λέμε ότι το Q είναι απόλυτα συνεχές ως προς το P αν $P(A) = 0$ για $A \in \mathcal{F}$ να συνεπάγεται ότι και $Q(A) = 0$. Το συμβολίζουμε με $Q << P$.*

Θεωρημα 119 *Έστω P μέτρο πιθανότητας ορισμένο στον μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ και έστω Q ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{F})$. Αν $Q << P$ τότε υπάρχει μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή X τ.ω. $Q(A) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A X)$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$. Επιπλέον, η X είναι μοναδική σχεδόν βέβαια.*

Θεωρημα 120 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω ότι υπάρχει το $\mathbb{E}(X)$. Έστω μια σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$ υποσύνολο της $\mathcal{F}$. Τότε υπάρχει μοναδική τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ δηλαδή είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη, με την ιδιότητα*

$$\mathbb{E}(X\mathbb{I}_C) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{I}_C)$$

για κάθε $C \in \mathcal{G}$, η οποία ονομάζεται δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου της $\mathcal{G}$.

Για την απόδειξη του παραπάνω χρειάζεται το θεώρημα των Radon-Nikodym. Η βασική ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιεί η δεσμευμένη μέση τιμή είναι

$$\mathbb{E}(X\mathbb{I}_C) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{I}_C)$$

για κάθε $C \in \mathcal{G}$. Ανάμεσα στις υποψήφιες τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν την παραπάνω ιδιότητα είναι η ίδια η X. Όμως, πρέπει να είναι και $\mathcal{G}$-μετρήσιμη το οποίο δεν ισχύει πάντοτε. Αν όμως είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη τότε $X = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$. Ας θυμηθούμε ότι κάθε σταθερή συνάρτηση είναι τ.μ. σε οποιαδήποτε σ-άλγεβρα, οπότε αυτό σημαίνει ότι $\mathbb{E}(c|\mathcal{G}) = c$ αφού το παραπάνω θεώρημα μας πληροφορεί ότι η δεσμευμένη μέση τιμή είναι μοναδική.

ΟΡΙΣΜΟΣ 121 *Αν η σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$ παράγεται από μια τ.μ. Y, δηλαδή $\mathcal{G} = \sigma(Y)$, τότε λέμε ότι η $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ είναι η δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου της Y και συμβολίζεται με $\mathbb{E}(X|Y)$. Επομένως η $\mathbb{E}(X|Y)$ είναι $\sigma(Y)$-μετρήσιμη.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 122 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας, $\mathcal{G}$ μια σ-άλγεβρα υποσύνολο της $\mathcal{F}$ και $B \in \mathcal{F}$. Υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή $P(B|\mathcal{G})$ $\mathcal{G}$-μετρήσιμη η οποία ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα του B δεδομένου του $\mathcal{G}$, τ.ω.*

$$P(C \cap B) = \mathbb{E}(P(B|\mathcal{G})\mathbb{I}_C) \text{ για κάθε } C \in \mathcal{G}.$$

Επίσης ισχύει ότι $P(B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|\mathcal{G})$.

Στα επόμενα δίδονται ιδιότητες για την δεσμευμένη μέση τιμή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 123 *Αν $Y_1 \leq Y_2$ τότε και $\mathbb{E}(Y_1|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y_2|\mathcal{G})$. Επίσης ισχύει ότι $|\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|Y||\mathcal{G})$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 124 *Αν $a, b \in \mathbb{R}$ τότε $\mathbb{E}(aY_1 + bY_2|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(Y_1|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y_2|\mathcal{G})$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 125 *Αν $Y_n \geq 0$ και $Y_n \uparrow Y$ τότε $\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}) \uparrow \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$. Αν $Y_n \geq 0$ τότε*

$$\mathbb{E}(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n|\mathcal{G}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 126 *Αν $|Y_n| \leq Z$ με $\mathbb{E}(Z) < \infty$ και $Y_n \to Y$ σβ. τότε $\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}) \to \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$. Αν $Y_n \geq Z$ με $\mathbb{E}(Z) > -\infty$, τότε*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} Y_n|\mathcal{G}).$$

ΑΣΚΗΣΗ 127 *Δείξτε ότι για X, Y τυχαίες μεταβλητές έχουμε*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$$

Έστω X, Y, Z τυχαίες μεταβλητές με $\sigma(Y) \subseteq \sigma(Z)$. Δείξτε ότι $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)|Y) = \mathbb{E}(X|Y)$. Έστω X, Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Δείξτε ότι $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$.

Ασκηση 128 *Έστω X, Y, Z τυχαίες μεταβλητές. Αν $\sigma(Z) \subseteq \sigma(Y)$ και η Z είναι φραγμένη (ή αν $\mathbb{E}|ZX| < \infty$) τότε δείξτε ότι $\mathbb{E}(ZX|Y) = Z\mathbb{E}(X|Y)$.*

Ορισμος 129 *Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές και έστω $f_{X,Y}(x, y)$ η από κοινού πυκνότητα. Ορίζουμε την δεσμευμένη πυκνότητα του X δεδομένου του Y ως εξής,*

$$h(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Ασκηση 130 *Δείξτε ότι*

$$\mathbb{E}(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} xh(x|Y)dx.$$

Ασκηση 131 *Έστω X, Y από κοινού συνεχείς και ανεξάρτητες. Δείξτε ότι $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$ χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση.*

Παρατηρηση 132 (Μέση τιμή και πιθανότητα μέσω δέσμευσης) *Στην άσκηση 127 αποδεικνύεται ότι*

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X|Y)\right)$$

Χρησιμοποιώντας και την άσκηση 130 έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(X) = \begin{cases} \sum_y \mathbb{E}(X|Y = y) \cdot P(Y = y), & \text{όταν } Y \text{ είναι διακριτή τ.μ.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X|Y = y) f_Y(y)dy, & \text{όταν } Y \text{ είναι απόλυτα συνεχής τ.μ.} \end{cases}$$

Πολύ συχνά είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε την μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής X μέσω της δεσμευμένης μέσης τιμής δεδομένου μιας άλλης τυχαίας μεταβλητής Y.
Με το ίδιο σκεπτικό μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου A μέσω δέσμευσης. Παρατηρήστε ότι

$$P(A) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\mathbb{I}_A|Y))$$

Επίσης

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A|Y = y) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{I}_{A\cap\{Y=y\}})}{P\{Y = y\}} = \frac{P(A \cap \{Y = y\})}{P\{Y = y\}} = P(A|Y = y)$$

όταν η Y είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή. Αρα

$$P(A) = \begin{cases} \sum_y P(A|Y = y)P(Y = y), & \text{όταν } Y \text{ είναι διακριτή τ.μ.} \\ \int_{-\infty}^{\infty} P(A|Y = y) f_Y(y)dy, & \text{όταν } Y \text{ είναι απόλυτα συνεχής τ.μ.} \end{cases}$$

Σημειώστε ότι στην περίπτωση που η Y είναι απόλυτα συνεχής τότε με $P(A|Y = y)$ δεν εννοούμε την ποσότητα $\frac{P(A\cap\{Y=y\})}{P(\{Y=y\})}$ διότι η πιθανότητα $P(\{Y = y\}) = 0$. Περισσότερα σε αυτή την περίπτωση μπορεί να δει κανείς στο [57].

Ορισμος 133 *Έστω δυο τυχαίες μεταβλητές X, Y. Η δεσμευμένη διακύμανση τους ορίζεται ως εξής*

$$\mathrm{Var}(X|Y) = \mathbb{E}(X^2|Y) - (\mathbb{E}(X|Y))^2$$

Θεωρημα 134 (Θεώρημα ολικής διακύμανσης) *Έστω δυο τυχαίες μεταβλητές X, Y. Ισχύει η παρακάτω ισότητα*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|Y)) + \mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|Y))$$

Αποδειξη. Από τη μια πλευρά έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(\mathrm{Var}(X|Y)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}((\mathbb{E}(X|Y))^2)$$

και

$$\mathrm{Var}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}((\mathbb{E}(X|Y)^2) - (\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)))^2$$

Προσθέτοντας τους δυο αυτούς όρους προκύπτει το ζητούμενο σημειώνοντας ότι

$$(\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)))^2 = (\mathbb{E}(X))^2$$

□

Θεωρημα 135 (Ανισότητα Jensen) *Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή και έστω $X, \phi(X)$ ολοκληρώσιμες τ.μ. Για κάθε σ-άλγεβρα $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ έχουμε,*

$$\phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{G}).$$

5.3 Οριακά Θεωρήματα

Προταση 136 *Έστω X μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη μέση τιμή. Τότε,*

$$P(\{X \geq C\}) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{C},$$

για κάθε $C > 0$.

Ασκηση 137 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη μέση τιμή και διακύμανση. Τότε,*

$$P(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq C\}) \leq V(X)/C^2,$$

για κάθε $C > 0$.

Ορισμος 138 *Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n λέγεται ότι συγκλίνει κατά πιθανότητα στο X αν για κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|X_n - X| < \varepsilon\}) = 1.$$

Ορισμος 139 *Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n λέγεται ότι συγκλίνει με πιθανότητα 1 ή σχεδόν βέβαια σε μια τυχαία μεταβλητή X αν*

$$P(\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\}) = 1.$$

Ορισμος 140 *Λέμε ότι μια ακολουθία τ.μ. X_n συγκλίνει στον L_p στην τ.μ. X αν $|X_n|, |X|$ ανήκουν στον L_p και*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

Ασκηση 141 *Δείξτε ότι $X_n \to X$ κατά πιθανότητα* **ανν**

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right) = 0.$$

Ασκηση 142 *Δείξτε ότι αν $X_n \to X$ στον L_p ή σχεδόν βέβαια τότε και $X_n \to X$ κατά πιθανότητα.*

Ασκηση 143 *Έστω $X_n \to X$ κατά πιθανότητα. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία n_k τ.ω.*

$$\lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X \text{ σχεδόν βέβαια.}$$

Ασκηση 144 *Έστω ότι $X_n \to X$ κατά πιθανότητα και έστω $|X_n| \leq Y$ με $Y \in L_p$. Τότε και η $|X|$ είναι στον L_p και $X_n \to X$ στον L_p.*

Ασκηση 145 *Έστω f συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν $X_n \to X$ σχεδόν βέβαια (κατά πιθανότητα) τότε και $f(X_n) \to f(X)$ σχεδόν βέβαια (κατά πιθανότητα).*

Ορισμος 146 *Έστω m_n και m μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η m_n συγκλίνει ασθενώς στο m αν $\int f(x)dm_n \to \int f(x)dm$ για κάθε πραγματική, συνεχής και φραγμένη συνάρτηση στον $\mathbb{R}$.*

Ορισμος 147 *Έστω X_n μια τ.μ. στον $\mathbb{R}$. Λέμε ότι η X_n συγκλίνει κατά κατανομή στην X αν η ακολουθία κατανομών P_{X_n} συγκλίνει ασθενώς στην κατανομή P_X.*

Ασκηση 148 *Έστω X_n, X τ.μ. Τότε η X_n συγκλίνει κατά κατανομή στην X* **ανν**

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X)),$$

για κάθε συνεχή και φραγμένη συνάρτηση στον $\mathbb{R}$.

Σημειώστε ότι η σύγκλιση κατά κατανομή δεν απαιτεί τις τ.μ. μεταβλητές να βρίσκονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας.

Ασκηση 149 *Έστω X_n, X ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Αν η $X_n \to X$ κατά πιθανότητα τότε και $X_n \to X$ κατά κατανομή.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 150 *Έστω X_n, X τ.μ. Αν $X_n \to X$ κατά κατανομή τότε και*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

για κάθε x στο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που αποτελείται από τα σημεία συνέχειας της F. Αντίστροφα, αν $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ για κάθε x σε ένα πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ τότε $X_n \to X$ κατά κατανομή.

ΑΣΚΗΣΗ 151 *Έστω μια ακολουθία απόλυτα συνεχών τ.μ. X_n, X με πυκνότητες f_n, f. Αν η ακολουθία πυκνοτήτων f_n συγκλίνει σημειακά στην f, τότε και $X_n \to X$ κατά κατανομή.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 152 (Helly's selection theorem) *Έστω m_n μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}$ και έστω*

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n m_n([-a,a]^c) = 0. \tag{5.2}$$

Τότε υπάρχει υπακολουθία n_k τ.ω. η m_{n_k} να συγκλίνει ασθενώς.

ΘΕΩΡΗΜΑ 153 *Έστω X_n μια ακολουθία τ.μ. Τότε $X_n \to X$ κατά κατανομή* ανν

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X))$$

για όλες τις φραγμένες, Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις g.

ΑΣΚΗΣΗ 154 *Έστω X_n, Y_n δύο ακολουθίες τ.μ. με $X_n \to X$ κατά κατανομή και $|X_n - Y_n| \to 0$ κατά πιθανότητα. Δείξτε ότι $Y_n \to X$ κατά κατανομή.*

Κεφάλαιο 6

Απόλυτα Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

ΟΡΙΣΜΟΣ 155 *Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται* **απόλυτα συνεχής** *με πυκνότητα $f_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ αν*

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in (a, b)\}) = P_X((a, b]) = \int_a^b f_X(x)dx$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 156 *Έστω X μια απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα f_X. Δείξτε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

Δώστε ένα τύπο για την $F_X(y)$ συναρτήσει της f_X. Επίσης, δείξτε ότι η F_X είναι συνεχής. Δείξτε ότι $P_X(\{y\}) = 0$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ. Από τον ορισμό έχουμε

$$\int_{-n}^{n} f_X(x)dx = P_X((-n, n])$$

Αρα

$$P_X(\mathbb{R}) = \lim_{n\to\infty} P_X((-n, n]) = 1$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} F_X(y) = P_X((-\infty, y]) &= \lim_{n\to\infty} P_X((-n, y]) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{y} f_X(s)ds = \int_{-\infty}^{y} f_X(s)ds. \end{aligned}$$

Η $F_X(y)$ είναι προφανώς συνεχής ως ολοκλήρωμα. Γράφουμε το y ως εξής

$$y = \bigcap_{n=1}^{\infty} (y - \frac{1}{n}, y]$$

Αρα,

$$\begin{aligned} P_X(\{y\}) &= P_X(\bigcap_{n=1}^{\infty}(y-\frac{1}{n},y]) \\ &= \lim_{n\to\infty} P_X((y-\frac{1}{n},y]) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(F_X(y)-F_X(y-\frac{1}{n})\right)=0, \end{aligned}$$

λόγω συνέχειας της F_X. □

Άσκηση 157 *Αν η συνάρτηση κατανομής F_X μιας τυχαίας μεταβλητής είναι διαφορίσιμη με συνεχή παράγωγο τότε δείξτε ότι η X είναι απόλυτα συνεχής με πυκνότητα $f_X(x)=F_X^{'}(x)$.*

Λύση. Αφού $F_X(x)$ είναι αύξουσα, τότε η $f_X=F_X^{'}(x)$ είναι θετική.
Έχουμε,

$$P_X((a,b]) = F_X(b)-F_X(a) = \int_a^b F_X^{'}(s)ds = \int_a^b f_X(s)ds.$$

'ρα η πυκνότητα είναι η παράγωγος (όταν υπάρχει) της συνάρτησης κατανομής της τ.μ. □

Άσκηση 158 *Έστω μια τυχαία μεταβλητή X. Θα λέμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ με $m,\sigma\in\mathbb{R}$ αν είναι απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα,*

$$f_X(x)=\frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

Δείξτε ότι η f_X είναι πυκνότητα.

Άσκηση 159 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0,1)$. Υπολογίστε την πυκνότητα της $Y=e^X$.*

Λύση. Η συνάρτηση κατανομής της Y είναι,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\{Y\le y\}) = P(\{e^X\le y\}) \\ &= P(\{X\le \ln y\}) = \int_0^{\ln y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \int_0^{\ln y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Όμως η $F_Y(y)$ είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγος της είναι η πυκνότητα της Y. Η παράγωγος της είναι

$$F_Y^{'}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi y^2 y^{\ln y}}}.$$

Δώστε με λεπτομέρεια το τέλος της απόδειξης. □

6.1 Από κοινού κατανομές

Ορισμος 160 *Τα σύνολα Borel του* $\mathbb{R}^2$ *είναι τα σύνολα που ανήκουν στην σ-άλγεβρα που παράγεται από τα ορθογώνια* $(a,b) \times (c,d)$.

Λημμα 161 *Έστω* X, Y *τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *Ισχύει ότι* $\{(X,Y) \in B\} \in \mathcal{F}$ *για κάθε σύνολο Borel* $B \subseteq \mathbb{R}^2$.

Αποδειξη. Έστω το $\mathcal{G} = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 : \{(X,Y) \in A\} \in \mathcal{F}$ (δείξτε ότι είναι σ-άλγεβρα). Στην $\mathcal{G}$ ανήκουν όλα τα ορθογώνια της μορφής $(a,b) \times (c,d)$ διότι $\{X \in (a,b)\} \in \mathcal{F}$ και $\{Y \in (c,d)\} \in \mathcal{F}$ άρα και η τομή τους. Επειδή η $\mathcal{B}$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα ορθογώνια αυτής της μορφής τότε $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$. □

Ορισμος 162 *Η από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών* X, Y *είναι ένα μέτρο πιθανότητας* $P_{X,Y}$ *στο* $\mathbb{R}^2$ *τ.ω.* $P_{X,Y}(B) = P(\{(X,Y) \in B\})$ *για κάθε σύνολο Borel του* $\mathbb{R}^2$.

Ασκηση 163 *Έστω* X, Y *τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Δείξτε ότι οι κατανομές* P_X, P_Y *δίνονται από την από κοινού κατανομή ως εξής,*

$$\begin{aligned} P_X(B) &= P_{X,Y}(B \times \mathbb{R}), \\ P_Y(B) &= P_{X,Y}(\mathbb{R} \times B), \end{aligned}$$

για κάθε Borel σύνολο του $\mathbb{R}$. *Όταν οι* P_X, P_Y *εκφράζονται με αυτό τον τρόπο ονομάζονται περιθώριες κατανομές.*

Αποδειξη. Για κάθε σύνολο Borel $B \in \mathbb{R}$ έχουμε,

$$\begin{aligned} P_X(B) &= P(\{X \in B\}) = P(\{X \in B\} \cap \{Y \in \mathbb{R}\}) \\ &= P(\{(X,Y) \in B \times \mathbb{R}\}) = P_{X,Y}(B \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Παρόμοια για την $P_Y(B)$. □

Ορισμος 164 *Οι τυχαίες μεταβλητές* X, Y *λέγονται* **από κοινού συνεχείς** *αν υπάρχει μια συνάρτηση* $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$, *η οποία λέγεται από κοινού πυκνότητα, τ.ω.*

$$P_{X,Y}((a,b] \times (c,d]) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

Ασκηση 165 *Έστω* X, Y *ότι είναι από κοινού συνεχείς τ.μ. Δείξτε ότι οι* X, Y *είναι επίσης απόλυτα συνεχείς με πυκνότητα,*

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy, \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx. \end{aligned}$$

Οι πυκνότητες f_X, f_Y *εκφρασμένες με αυτό τον τρόπο ονομάζονται περιθώριες πυκνότητες.*

Στην περίπτωση που οι X, Y είναι απόλυτα συνεχείς τ.μ. και γνωρίζουμε την από κοινού πυκνότητα μπορούμε να αποφασίσουμε αν είναι ανεξάρτητες με το παρακάτω αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 166 *Αν X, Y είναι από κοινού συνεχείς τυχαίες μεταβλητές τότε είναι ανεξάρτητες* **ανν** *για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

Αν γνωρίζουμε την από κοινού πυκνότητα δυο τ.μ. τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα του αθροίσματός τους με το παρακάτω αποτέλεσμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 167 *Έστω X, Y δύο τ.μ. με από κοινού πυκνότητα $f_{X,Y}$. Τότε η πυκνότητα του αθροίσματός τους είναι*

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z - x) dx.$$

Κεφάλαιο 7

Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις

ΘΕΩΡΗΜΑ 168 *Έστω X μια τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}$ και με κατανομή P_X. Έστω $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Borel. Ισχύει ότι*

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int h(x) dP_X.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρχικά θεωρούμε ότι η h είναι δείκτρια συνάρτηση. Έστω B Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $h(x) = \mathbb{I}_B(x)$. Έχουμε,

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_B(X)) = P(X^{-1}(B)) = P_X(B) = \int \mathbb{I}_B(x) dP_X.$$

Έπειτα θεωρούμε ότι είναι απλή, δηλαδή $h(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{I}_{A_i}(x)$ με A_i Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω και την γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε το ζητούμενο.
Έστω τώρα ότι η h είναι θετική. Τότε, υπάρχει ακολουθία θετικών απλών συναρτήσεων h_n που συγκλίνουν στην h. Οπότε έχουμε,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(h(X)) &= \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} h_n(X)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(h_n(X)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int h_n(x) dP_X \\
&= \int h(x) dP_X.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε δύο φορές το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.
Όταν, η h δεν είναι κατά ανάγκη θετική, τότε γράφουμε $h = h^+ - h^-$ και έχουμε το ζητούμενο. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 169 *Έστω m ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Ο μετασχηματισμός Fourier του m συμβολίζεται με $\hat{m}$ και είναι μια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία δίνεται ως εξής,*

$$\hat{m}(u) = \int e^{iux} dm.$$

ΛΗΜΜΑ 170 *Έστω m ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Τότε η $\hat{m}$ είναι φραγμένη, συνεχής συνάρτηση με $\hat{m}(0) = 1$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα δείξουμε μόνο ότι είναι συνεχής. Έστω $u_n \to u$, θα δείξουμε ότι $\hat{m}(u_n) \to \hat{m}(u)$. Αφού $e^{iu_n x} \to e^{iux}$ και η e^{iux} είναι φραγμένη συνάρτηση, τότε το ζητούμενο προκύπτει από την εφαρμογή του θεωρήματος της κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 171 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή. Τότε η $\phi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που ορίζεται ως εξής,*

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX)),$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ονομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση του X.

Σημειώστε ότι $\mathbb{E}(e^{itX}) = \int e^{itx} dP_X$. Αρα η χαρακτηριστική συνάρτηση της X είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κατανομής της X.

ΑΣΚΗΣΗ 172 *Δείξτε ότι για κάθε τυχαία μεταβλητή X, έχουμε*

$$\begin{aligned} a) &\quad \phi_X(0) = 1, \\ b) &\quad |\phi_X(t)| \le 1 \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}, \\ c) &\quad \phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)} \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 173 *Έστω X, Y δύο τυχαίες μεταβλητές τ.ω. $Y = aX + b$, με $a, b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\phi_Y(t) = e^{itb}\phi_{aX}(t)$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 174 *Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή τ.ω.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_X(t)| dt < \infty$$

τότε η X έχει μια απόλυτα συνεχής κατανομή με πυκνότητα,

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_X(t) dt.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 175 *Η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής X υπολογίζεται από την χαρακτηριστική της συνάρτηση. Η συνάρτηση κατανομής F_X δίνεται ως εξής,*

$$F_X(y) - F_X(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \phi_X(t) dt,$$

για κάθε x, y όπου η F_X είναι συνεχής.

ΑΣΚΗΣΗ 176 *Αποδείξτε το παραπάνω θεώρημα στην περίπτωση που η X είναι απόλυτα συνεχής τ.μ.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 177 *Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα f_X, τότε $\phi_X(t) \neq 1$ για κάθε $t \neq 0$. Αν X είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $\mathbb{R}$ και $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_X(u)$ είναι n-φορές παραγωγίσιμη και*

$$\mathbb{E}(X^n e^{iuX}) = \frac{1}{i^n}\phi_X^{(n)}(u).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αρχικά θα δείξουμε ότι αν $\phi_X(2\pi) = 1$ τότε και $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$. Αφού $\phi_X(2\pi) = 1$ τότε $\mathbb{E}(\cos(2\pi X)) = 1$ ή αλλιώς $\mathbb{E}(1 - \cos(2\pi X)) = 0$, και επειδή $1 - \cos(2\pi X) \geq 0$ τότε έχουμε ότι $P(1 - \cos(2\pi X) = 0) = 1$ το οποίο σημαίνει ότι $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$. Θα δείξουμε τώρα ότι αν $\phi_X(a) = 1$ τότε και $P(\frac{a}{2\pi}X \in \mathbb{Z}) = 1$. Θέτουμε $Y = \frac{a}{2\pi}X$. Τότε $\phi_Y(t) = \phi_X(\frac{a}{2\pi}t)$ (γιατί;). Οπότε $\phi_Y(2\pi) = \phi_X(a) = 1$, άρα $P(Y \in \mathbb{Z}) = 1$. Για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι $P(\frac{t}{2\pi}X \in \mathbb{Z}) < 1$. Πράγματι,

$$P(\frac{t}{2\pi}X = k \in \mathbb{Z}) = \int_{\frac{2\pi k}{t}}^{\frac{2\pi k}{t}} f_X(x)dx = 0,$$

και

$$P(\frac{t}{2\pi}X \in \mathbb{Z}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(\frac{t}{2\pi}X = k) = 0.$$

Θα δείξουμε τώρα το δεύτερο μέρος του θεωρήματος για την περίπτωση $n = 1$. Θα υπολογίσουμε την παράγωγο της $\phi_X(u) = \int e^{iux}dP_X$. Έχουμε,

$$\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0}\frac{\phi_X(u+h) - \phi_X(u)}{h} \\
= \quad & \lim_{h\to 0}\int \frac{e^{i(u+h)x} - e^{iux}}{h}dP_X \\
= \quad & \int (e^{iux})' dP_X \text{ γιατί;} \\
= \quad & i\int x e^{iux} dP_X \\
= \quad & i\mathbb{E}(Xe^{iuX}).
\end{aligned}$$

$\square$

ΑΣΚΗΣΗ 178 *Έστω N μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ. Να υπολογίσετε την χαρακτηριστική της συνάρτηση και στη συνέχεια την μέση τιμή και την διακύμανση.*

Αποδειξη. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της N θα είναι

$$\begin{aligned}\Psi_N(t) &= \mathbb{E}(e^{itN}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn}\mathbb{P}(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{itn} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} \\ &= e^{\lambda(e^{it}-1)}\end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε την μέση τιμή θα έχουμε

$$\mathbb{E}(N) = \frac{\Psi_N'(0)}{i} = \lambda$$

Επίσης

$$\mathbb{E}(N^2) = \frac{\Psi_N''(0)}{i^2} = \lambda^2 + \lambda$$

Επομένως

$$\mathrm{Var}(N) = \lambda$$

□

Ασκηση 179 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους m, σ^2. Να υπολογίσετε την χαρακτηριστική της συνάρτηση δεδομένου ότι*

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-\frac{it\sigma}{2})^2}du = 1$$

Αποδειξη. Η χαρακτηριστική θα είναι

$$\begin{aligned}\Psi_X(t) &= \mathbb{E}(e^{itX}) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx\end{aligned}$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $u = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$. Καταλήγουμε στο ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση της X είναι η

$$\Psi_X(t) = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

□

Ασκηση 180 *Αν X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$.*

Θεωρημα 181 *Αν δύο μέτρα πιθανότητας έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό Fourier τότε είναι ίσα.*

7.1 Ο Νόμος των μεγάλων αριθμών

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 182 *Έστω $X_1, ..., X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες (έχουν την ίδια κατανομή) με πεπερασμένη μέση τιμή και έστω $S_n = X_1 + ... + X_n$. Θέτουμε $a = \mathbb{E}(X_i)$ το οποίο είναι το ίδιο για κάθε i. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} P(\{|\frac{S_n}{n} - a| < \varepsilon\}) = 1,$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών του Kolmogorov.

ΘΕΩΡΗΜΑ 183 *Έστω $X_1, ..., X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και έστω $S_n = X_1 + ... + X_n$. Τότε η μέση τιμή $\mathbb{E}(X_i) = a$ υπάρχει* **ανν***,*

$$P(\{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = a\}) = 1.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 184 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα) *Έστω X_n μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με*

$$\mathbb{E}(X_k) = a$$

και

$$Var(X_k) = s^2$$

με $0 < s^2 < \infty$. Έστω

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

και έστω

$$Y_n = \frac{S_n - na}{s\sqrt{n}}$$

Τότε η Y_n συγκλίνει κατά κατανομή στην Y, η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ϕ_j η χαρακτηριστική συνάρτηση της $X_j - a$, όπου όμως δεν εξαρτάται από το j (γιατί;) άρα την συμβολίζουμε με ϕ. Αφού οι X_j είναι ανεξάρτητες έχουμε

$$\phi_{Y_n}(u) = \phi_{\frac{1}{s\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}(X_j - a)}(u) = ... = \left(\phi(\frac{u}{s\sqrt{n}})\right)^n.$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη (γιατί;) οπότε

$$\begin{aligned} \phi^{'}(u) &= i\mathbb{E}\left((X_j - a)e^{iu(X_j-a)}\right), \\ \phi^{''}(u) &= -\mathbb{E}\left((X_j - a)^2 e^{iu(X_j-a)}\right). \end{aligned}$$

Οπότε $\phi^{'}(0) = 0$ και $\phi^{''}(0) = -s^2$. Επίσης έχουμε,

$$\phi(u) = 1 + 0 - \frac{s^2u^2}{2} + u^2h(u),$$

με $h(u) \to 0$ καθώς $u \to 0$ (γιατί;).
Επίσης μπορούμε να δείξουμε (δείξτε το) ότι,

$$\phi_{Y_n}(u) = e^{n\ln(1-\frac{u^2}{2n}+\frac{u^2}{s^2n}h(\frac{u}{s\sqrt{n}}))}.$$

Οριακά έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{Y_n}(u) = e^{-u^2/2}.$$

Οπότε έχουμε (γιατί;) ότι η Y_n συγκλίνει κατά κατανομή σε μια Z με χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_Z(u) = e^{-u^2/2}$, οπότε η Z ακολουθεί την κανονική κατανομή (γιατί;) Αρα έχουμε το ζητούμενο (γιατί;) □

7.2 Λυμένες Ασκήσεις

Ασκηση 185 *Να υπολογισθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τ.μ. X τ.ω. $P(\{X = 1\}) = P(\{X = -1\}) = \frac{1}{2}$.*

Λυση. Πρέπει να υπολογίσουμε την μέση τιμή $\mathbb{E}(e^{itX})$. Η τ.μ. e^{itX} είναι διακριτή τ.μ. με τιμές e^{it} και e^{-it} με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Αρα,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \frac{1}{2}e^{it} + \frac{1}{2}e^{-it} = \cos t.$$

□

Ασκηση 186 *Να υπολογισθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τ.χ. X τ.ω. $P(\{X = 1\}) = p$ και $P(\{X = 0\}) = q$ με $p + q = 1$.*

Λυση. $\phi_X(t) = pe^{it} + q$. □

Ασκηση 187 *Να υπολογισθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τ.μ. X τ.ω. $P(\{X = k\} = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \cdots$.*

Λυση. Η τ.μ. e^{itX} είναι διακριτή με τιμές e^{itk} με πιθανότητα 2^{-k}. Αρα,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} e^{itk} = \cdots = \frac{e^{it}}{2 - e^{it}}.$$

□

Ασκηση 188 *Να υπολογισθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τ.μ. X η οποία ακολουθεί την Poisson κατανομή.*

Λυση. Η X παίρνει τιμές με πιθανότητα $P(\{X = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Οπότε,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{ikt} = \cdots = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

□

Ασκηση 189 *Να υπολογισθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τ.μ. X η οποία ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[-1, 1]$.*

Λυση. Η X με ομοιόμορφη κατανομή στο $[-1, 1]$ έχει πυκνότητα $f_X(x) = 1/2$ όταν $x \in [-1, 1]$ και 0 αλλιώς. Οπότε,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx = \frac{\sin t}{t}, \quad t \neq 0.$$

Για $t = 0$ $\phi_X(t) = 1$. □

Ασκηση 190 *Να υπολογισθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση της X με πυκνότητα $f_X(x) = 1 - |x|$ όταν $|x| \leq 1$ και 0 αλλιώς.*

Λυση. $\phi_X(t) = \cdots = \frac{2-2\cos t}{t^2}$, $t \neq 0$. Για $t = 0$ $\phi_X(t) = 1$. □

Ασκηση 191 *Να υπολογισθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τ.μ. X η οποία ακολουθεί την εκθετική κατανομή.*

Λυση. Η $f_X(x) = 0$ όταν $x < 0$ και $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ όταν $x \geq 0$. Αρα, $\phi_X(t) = \cdots = \frac{i\lambda}{t+i\lambda}$. □

Ασκηση 192 *Να υπολογισθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τ.μ. X η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1.*

Λυση. Η πυκνότητα είναι $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$. Αρα,

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2 + itx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2} dx = \cdots = e^{-\frac{1}{2}t^2}.
\end{aligned}$$

□

Ασκηση 193 *Να υπολογισθεί μια έκφραση της διακύμανσης της X σε σχέση με την χαρακτηριστική της συνάρτηση στο 0.*

Λυση. $V(X) = -\phi''_X(0) + (\phi'_X(0))^2$. □

Ασκηση 194 *Να υπολογισθούν τα $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X^2)$ όταν η X ακολουθεί την Poisson κατανομή.*

Λυση. Η χαρακτηριστική της X είναι $\phi_X(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$ άρα $\mathbb{E}(X) = \cdots = \lambda, \mathbb{E}(X^2) = \cdots = \lambda(\lambda+1)$. □

Ασκηση 195 *Όπως προηγούμενα όταν η X ακολουθεί την κανονική κατανομή.*

Λυση. $\mathbb{E}(X) = m, \mathbb{E}(X^2) = \sigma^2 + m^2$. □

Ασκηση 196 *Έστω X, Y τ.μ. τ.ω. $Y = aX + b$ με $a, b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\phi_Y(t) = e^{itb}\phi_X(at)$.*

Λυση. $\phi_Y(t) = \mathbb{E}(e^{it(aX+b)}) = e^{itb}\phi_X(at)$. □

Ασκηση 197 *Έστω X μια τ.μ. τ.ω. $P(\{X \in \mathbb{Z}\}) = 1$. Δείξτε ότι η $\phi_X(t)$ είναι περιοδική με περίοδο 2π, δηλαδή $\phi_X(t + 2\pi) = \phi_X(t)$.*

Λυση. Έστω $p_k = P(\{X = k\})$. Τότε

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k = 1$$

άρα $\phi_X(t + 2\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i(t+2\pi)k} p_k = \cdots = \phi_X(t)$. □

Ασκηση 198 *Έστω X τ.μ. και $a \neq 0$. Αν $\phi_X(t)$ είναι περιοδική με περίοδο a τότε $P(\{\frac{a}{2\pi}X \in \mathbb{Z}\}) = 1$.*

Λυση. Θέτουμε $Y = \frac{a}{2\pi}X$. Έχουμε ότι $\phi_X(0) = 1$ και $\phi_X(t + a) = \phi_X(t)$ οπότε $\phi_X(a) = \phi_X(0) = 1$. Επίσης, $\phi_Y(2\pi) = \phi_X(a) = 1$ άρα $P(\{Y \in \mathbb{Z}\}) = 1$. □

Ασκηση 199 *Έστω X μια τ.μ. τ.ω. $P(\{X \in \mathbb{Z}\}) = 1$. Δείξτε ότι*

$$P(\{X = n\}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-itn}\phi_X(t)dt.$$

Λυση. Θέτουμε $p_k = P(\{X = k\})$. Τότε $\phi_X(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{itk} p_k$. Πολλαπλασιάζουμε τον κάθε όρο με e^{-itn} και ολοκληρώνουμε στο $[0, 2\pi]$. $\int_0^{2\pi} e^{-itn}e^{itk}dt = 0$, για $k \neq 0$ και $2\pi p_n$ όταν $k = n$. Αρα $\int_0^{2\pi} e^{-itn}\phi_X(t)dt = 2\pi p_n$. □

Ασκηση 200 *Ποια είναι η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. με χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_X(t) = 1/2e^{-it} + 1/3 + 1/6e^{2it}$;*

Λυση. Η χαρακτηριστική είναι περιοδική με περίοδο 2π άρα $P(\{X \in \mathbb{Z}\}) = 1$. Θα υπολογίσουμε τα $p_n = P(\{X = n\})$. Έχουμε $P(\{X = 1\}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it}\phi_X(t)dt = 1/2$. Όμοια $p_0 = 1/3, p_2 = 1/6$ και $p_n = 0$ για τα υπόλοιπα n. □

Ασκηση 201 *Να υπολογισθεί η κατανομή μιας τ.μ. X με χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_X(t) = \cos(t/2)$.*

Λυση. Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο 2π, οπότε η $Y = 2X$ έχει τιμές στο $\mathbb{Z}$ και $\phi_Y(t) = \cos(t)$. Αρα, $P(\{X = 1/2\}) = 1/2, P(\{X = -1/2\}) = 1/2$ και 0 για τα υπόλοιπα. □

Ασκηση 202 *Να υπολογισθεί η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. X με χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_X(t) = \frac{2}{3e^{it}-1}$.*

Λυση. Η χαρακτηριστική είναι περιοδική με περίοδο 2π άρα

$$P(\{X \in \mathbb{Z}\}) = 1$$

Όμως,

$$\phi_X(t) = \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} e^{-itn}$$

. Οπότε $P(\{X = n\}) = 0$ για $n = 0, 1, 2, \cdots$ και με $2 \cdot 3^n$ για $n = -1, -2, \cdots$ □

Ασκηση 203 *Να υπολογισθεί η κατανομή μιας τ.μ. X με χαρακτηριστική συνάρτηση $e^{-|t|}$.*

Λυση. Έχουμε ότι $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_X(t)|dt < \infty$. Αρα

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\phi_X(t)dt = \cdots = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Δηλαδή η X ακολουθεί την κατανομή Cauchy. □

Ασκηση 204 *Να υπολογισθεί η κατανομή μιας τ.μ. X με χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_X(t) = e^{-t^2/2}$.*

Λυση. Η X ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1.

Ασκηση 205 *Να υπολογισθεί η κατανομή της X με χαρακτηριστική συνάρτηση $\phi_X(t) = \frac{1}{1+t^2}$.*

Λυση. $f_X(x) = 1/2e^{-|x|}$.

Ασκηση 206 *Να υπολογισθεί η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας τ.μ. X η οποία ακολουθεί την διωνυμική κατανομή.*

Λυση. Έστω $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Bernoulli με παράμετρο p, δηλαδή $P(\{X_k = 1\}) = p$ και $P(\{X_k = 0\}) = q = 1 - p$ για κάθε $k = 1, \cdots, n$. Τότε η $X = X_1 + \cdots + X_n$ ακολουθεί την διωνυμική κατανομή $B(n, p)$. Όμως $\phi_{X_k}(t) = pe^{it} + q$ τότε $\phi_X(t) = \phi_{X_1} \cdots \phi_{X_n} = (pe^{it} + q)^n$. □

Ασκηση 207 *Έστω X, Y ανεξάρτητες τ.μ. οι οποίες ακολουθούν την Poisson κατανομή. Δείξτε ότι η $X + Y$ επίσης ακολουθεί την κατανομή Poisson. Αν λ, μ είναι οι παράμετροι των X, Y αντίστοιχα, ποια είναι η παράμετρος της $X + Y$;*

Λυση. Αφού είναι ανεξάρτητες τότε έχουμε

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t) = \cdots = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)}$$

Λόγω μοναδικότητας έχουμε ότι το άθροισμα ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda + \mu$. □

Ασκηση 208 *Έστω X, Y ανεξάρτητες τ.μ. οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή. Δείξτε ότι η $X + Y$ ακολουθεί την κανονική κατανομή. Αν η X έχει παραμέτρους m, σ^2 και η Y $\hat{m}, \hat{\sigma^2}$ ποιοι είναι οι παράμετροι της $X + Y$;*

Λυση. Παρόμοια με πριν έχουμε

$$\phi_{X+Y}(t) = \cdots = e^{-1/2(\sigma^2+\hat{\sigma}^2)t^2+i(m+\hat{m})t}$$

άρα το άθροισμα ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους $m + \hat{m}, \sigma^2 + \hat{\sigma}^2$.

Ασκηση 209 *Υπολογίστε την διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κανονική κατανομή καθώς και την διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή.*

Λυση. Θα υπολογίσουμε την διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Έχουμε,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Από την άλλη μεριά έχουμε ότι $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$. 'ρα, $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.
Θα υπολογίσουμε τώρα την διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κανονική κατανομή με πυκνότητα,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}},$$

με $a \in \mathbb{R}$ και $b > 0$ δοσμένοι αριθμοί. Μπορούμε να δείξουμε ότι $\mathbb{E}(X) = a$. Θα υπολογίσουμε το $V(X) = \mathbb{E}((X - a)^2)$.

Έχουμε

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 f_X(x)dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}}dx \\ &= \frac{b^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2}dy \\ &= b^2. \end{aligned}$$

□

Ασκηση 210 *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Υπολογίστε την $\mathbb{E}(X|\{X \geq t\})$.*

Λυση. Έστω μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Θα υπολογίσουμε την δεσμευμένη μέση τιμή για $t \geq 0$. Έχουμε,

$$P(\{X \geq t\}) = \int_t^{\infty} f_X(s)ds = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda s}ds = e^{-\lambda t}.$$

Επίσης,

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{X\geq t\}}X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{\{s\geq t\}} s f_X(s)ds = te^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}.$$

Οπότε, $\mathbb{E}(X|\{X \geq t\}) = t + \frac{1}{\lambda}$. □

Ασκηση 211 *Έστω X, Y από κοινού συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού πυκνότητα*

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & \text{αν } x, y \geq 0, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Υπολογίστε την δεσμευμένη μέση τιμή της $X + Y$ δεδομένου ότι $X < Y$.

Λυση. Υπολογίζουμε την πιθανότητα,

$$P(\{X < Y\}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_x^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx = \frac{1}{2}.$$

Έπειτα υπολογίζουμε,

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{X<Y\}}(X+Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_x^{\infty}(x+y)f_{X,Y}(x,y)dydx = 1.$$

'ρα,

$$\mathbb{E}(X+Y|\{X<Y\}) = 2.$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 212 *Βρείτε ένα παράδειγμα μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής για την οποία δεν ορίζεται η μέση τιμή. Ποια είναι η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson;*

ΛΥΣΗ. Έστω μια τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τιμές $2, 2^2, \cdots$ με πιθανότητα $P(\{X = 2^i\}) = \frac{1}{2^i}$ (Είναι καλά ορισμένη;) Υπολογίζουμε την μέση τιμή,

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^i P(\{X = 2^i\}) = \infty.$$

'ρα δεν ορίζεται η μέση τιμή.
Θα υπολογίσουμε την μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\{X = k\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} \\
&= \lambda.
\end{aligned}$$

□

ΑΣΚΗΣΗ 213 *Βρείτε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή για την οποία η μέση τιμή ορίζεται αλλά όχι η διακύμανση. Υπολογίστε την διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson.*

ΛΥΣΗ. Έστω μια τυχαία μεταβλητή η οποία παίρνει τιμές $\frac{3^k}{2^k}$ με πιθανότητα $P(\{X = \frac{3^k}{2^k}\}) = \frac{1}{2^k}$ για $k = 1, 2, \cdots$.
Η μέση τιμή είναι,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2^k 2^k} = 4.$$

Η διακύμανση είναι,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3^k}{2^k}\right)^2 \frac{1}{2^k} = \infty.$$

Θα υπολογίσουμε την διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Poisson.
Έχουμε,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}[k(k-1)+k]\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= \lambda^2+\lambda.\end{aligned}$$

Επομένως, $V(X) = \lambda$. □

Ασκηση 214 *Έστω $\Omega = \{-2,-1,0,1,2\}$. Να βρεθεί η μικρότερη σ-άλγεβρα στην οποία η κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι τυχαία μεταβλητή,*

(i) $X(\omega) = \omega^2$,

(ii) $X(\omega) = \omega + 1$,

(iii) $X(\omega) = |\omega|$,

(iv) $X(\omega) = 2\omega$.

Λυση. Θα δούμε την πρώτη μόνο. Από τον ορισμό θα πρέπει $A = \{\omega : a < X(\omega)\} \in \mathcal{F}$. Αν $a < 0$ τότε $A = \Omega$, αν $a < 1$ τότε $A = \{-2,-1,1,2\}$, αν $a < 2$ τότε $A = \{-2,2\}$ και τέλος αν $a \geq 2$ τότε $A = \emptyset$. Αρα η $\mathcal{F}$ θα περιέχει τουλάχιστον τα σύνολα $\emptyset, \Omega, \{-2,-1,1,2\}, \{-2,2\}$. Επομένως, θα προσθέσουμε τα κατάλληλα σύνολα για να γίνει σ-άλγεβρα. Το $\{0\}$ είναι το συμπλήρωμα του πρώτου συνόλου και το $\{-1,0,1\}$ είναι το συμπλήρωμα του δεύτερου συνόλου. Το $\{-2,0,2\}$ είναι η ένωση του $\{-2,2\} \cup \{0\}$ και το $\{-1,1\}$ είναι το συμπλήρωμά του. Αρα, αυτά είναι τα στοιχεία που θα προσθέσουμε. □

Ασκηση 215 *Έστω $\Omega = [0,1]$ και $\mathcal{F}$ η σ-άλγεβρα των Borel υποσυνόλων B του Ω. Έστω οι συναρτήσεις $X(t) = t, Y(t) = |t - 1/2|$. Είναι τυχαίες μεταβλητές στον παραπάνω μετρήσιμο χώρο;*

Λυση. Θα δούμε την πρώτη μόνο. Θα εξετάσουμε τα σύνολα $A = \{t \in [0,1] : a < X(t) = t\}$ για όλες τις τιμές του a. Αν $a \leq 0$ τότε $A = (0,1]$, αν $a \in (0,1)$ τότε $A = (a,1]$, αν $a \geq 1$ τότε $A = \emptyset$. Σε όλες τις περιπτώσεις τα σύνολα είναι σύνολα Borel οπότε η συνάρτηση είναι τ.μ. □

Ασκηση 216 *Βρείτε ένα παράδειγμα δυο διαφορετικών τυχαίων μεταβλητών X, Y με την ίδια κατανομή, δηλαδή $P_X = P_Y$.*

Λυση. Για παράδειγμα, η ίδια συνάρτηση αλλά ορισμένη σε διαφορετικό χώρο Ω θεωρείτε διαφορετική τ.μ. Αν $X(\omega) = Y(\omega) = c \in \mathbb{R}$, τότε αρκεί να τις ορίσουμε σε διαφορετικό χώρο και θα έχουμε διαφορετικές τ.μ. αλλά με την ίδια κατανομή. $\square$

Ασκηση 217 *Να υπολογισθεί η συνάρτηση κατανομής των παρακάτω τυχαίων μεταβλητών*
1) $X(\omega) = c$ *για κάθε* ω,
2) $X(\omega) = 1$ *για* $\omega \in A$ *και* $X(\omega) = 2$ *αλλιώς, όπου* $P(A) = 1/3$.

Λυση. Αν $x < c$ τότε $P(\{X \leq x\}) = 0$, ενώ αν $x \geq c$ τότε $P(\{X \leq x\}) = 1$. Παρόμοια και η άλλη. $\square$

Ασκηση 218 *Δείξτε ότι η δείκτρια συνάρτηση* $\mathbb{I}_A$ *ενός ενδεχομένου* A *ακολουθεί την διωνυμική κατανομή* $B(n,p)$ *με* $n = 1$ *και* $p = P(A)$.

Λυση. Η $P(\{\mathbb{I}_A \leq x\}) = P(A^c) = 1 - p$ όταν $x < 1$ και p όταν $x \geq 1$. $\square$

Ασκηση 219 *Έστω* X *μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή* $N(0,1)$. *Δείξτε ότι η* $Y = a + bX$ *ακολουθεί την κανονική κατανομή* $N(a, b^2)$.

Λυση. Έστω B ένα σύνολο Borel του $\mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned} P(\{a + bX \in B\}) &= \int_{(B-a)/b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_B \frac{1}{\sqrt{2\pi}b^2} e^{-\frac{(y-a)^2}{2b^2}} dy. \end{aligned}$$

Ασκηση 220 *Έστω* X *μια απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο* $[0,1]$, *δηλαδή* $f_X = 1$ *για κάθε* $x \in [0,1]$ *και* $f_X(x) = 0$ *αλλιώς. Να βρεθεί μια συνάρτηση* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *τ.ω. η* $Y = g(X)$ *να ακολουθεί την κανονική κατανομή* $N(0,1)$.

Λυση. Έστω μια g αύξουσα. Τότε

$$P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = \int_0^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx = g^{-1}(y)$$

Επομένως η g θα είναι η αντίστροφη της πυκνότητας της κανονικής κατανομής. $\square$

Ασκηση 221 *Έστω* X *μια απλή τυχαία μεταβλητή με* n *διαφορετικές τιμές* $x_1, x_2, \cdots, x_n$. *Η διακύμανση ορίζεται ως εξής,*

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P(\{X = x_i\}),$$

όπου $\mu = \mathbb{E}(X)$. *Δείξτε ότι για κάθε απλή τυχαία μεταβλητή* X, *ισχύει,*

$$V(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Υπολογίστε την διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κατανομή Bernoulli. Δείξτε ότι αν $V(X) = 0$ τότε και $P(\{X = a\}) = 1$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $V(bX + a) = b^2V(X)$ με $a, b \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ αν X, Y είναι ανεξάρτητες. Τέλος, υπολογίστε την διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την διωνυμική κατανομή.

Λυση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2 + \mathbb{E}(X)^2 - 2X\mathbb{E}(X)) \\ &= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X)^2. \end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την διακύμανση για μια τ.μ. που ακολουθεί την κατανομή Bernoulli. Έχουμε ότι $V(X) = (0 - p)^2(1 - p) + (1 - p)^2p = p(1 - p)$.
Αν $V(X) = 0$ τότε αναγκαστικά $P((\{(X - \mathbb{E}(X))^2\}) = 0) = 1$ και αυτό σημαίνει ότι $P(\{X = \mathbb{E}(X)\}) = 1$.
Θα υπολογίσουμε το $V(X + a) = \mathbb{E}(X + a - \mathbb{E}(X + a))^2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$. Τώρα θα υπολογίσουμε το $V(bX) = \mathbb{E}(bX - \mathbb{E}(bX))^2 = \mathbb{E}(bX - b\mathbb{E}(X))^2 = b^2V(X)$.
Έστω X, Y ανεξάρτητες. Τότε $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Αρα,

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= \mathbb{E}((X + Y)^2) - \mathbb{E}(X + Y)^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) \\ &\quad -\mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y^2) \\ &= V(X) + V(Y). \end{aligned}$$

Ασκηση 222 *Να υπολογισθεί η μέση τιμή των παρακάτω τυχαίων μεταβλητών,*

(i) *Η X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[a, b]$ με πυκνότητα $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ όταν $x \in [a, b]$ και 0 αλλιώς.*

(ii) *Η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με πυκνότητα,*

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{αλλιώς} \end{cases} \tag{7.1}$$

(iii) *Η X ακολουθεί την κατανομή Cauchy με πυκνότητα, $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.*

(iv) *Η X ακολουθεί την κανονική κατανομή με πυκνότητα,*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2b^2}},$$

με $a \in \mathbb{R}$ και $b > 0$ δοσμένοι αριθμοί.

ΛΥΣΗ. (i) Έχουμε ότι $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = ... = 1/2(a+b)$.
(ii) $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$.
(iii) Πρέπει να συγκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx = 2\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{x\to\infty} \ln(1+x^2) = \infty$$

'ρα δεν ορίζεται η μέση τιμή.
(iv) Χρησιμοποιούμε ως δεδομένο ότι $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{\pi}$. □

ΑΣΚΗΣΗ **223** *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή Poisson. Να υπολογισθεί η δεσμευμένη μέση τιμή της X δεδομένου ότι η X είναι άρτιος αριθμός.*

ΛΥΣΗ. Υπολογίζουμε

$$P(\{X \text{ είναι άρτιος }\}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\{X = 2K\}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\cosh\lambda$$

Οπότε, $\mathbb{E}(X|\{X \text{ άρτιος }\}) = \cdots = \frac{\lambda\sinh\lambda}{\cosh\lambda}$. □

ΑΣΚΗΣΗ **224** *Υπολογίστε την δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(X|Y)$ αν η από κοινού πυκνότητα είναι $f_{X,Y}(x,y) = K(x+y)$ για $0 \le x, y \le 1$ και 0 αλλιώς, για κατάλληλο $K \in \mathbb{R}$.*

ΛΥΣΗ. Υπολογίζουμε την πυκνότητα της Y,

$$f_Y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = K\int_0^1 (x+y) dx = K(1/2+y)$$

Έπειτα υπολογίζουμε,

$$h(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x+y}{y+1/2}$$

για $0 \le x, y \le 1$ και 0 αλλιώς. Αρα,

$$\mathbb{E}(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x h(x|y) dx = \cdots = \frac{2+3Y}{3+3Y}$$

□

- Θα λέμε ότι η X ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[a,b]$ όταν η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{όταν } a \le x \le b \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η μέση τιμή και η διασπορά μιας τέτοιας τ.μ. είναι $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$, $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

- Θα λέμε ότι η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο θ όταν η συνάρτηση πυκνότητας είναι

$$f(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x} & \text{όταν } 0 \leq x < \infty \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η μέση τιμή και η διασπορά μιας τέτοιας τ.μ. είναι $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta}$, $V(X) = \frac{1}{\theta^2}$.

- Θα λέμε ότι η X ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους μ, σ^2 όταν η συνάρτηση πυκνότητας είναι

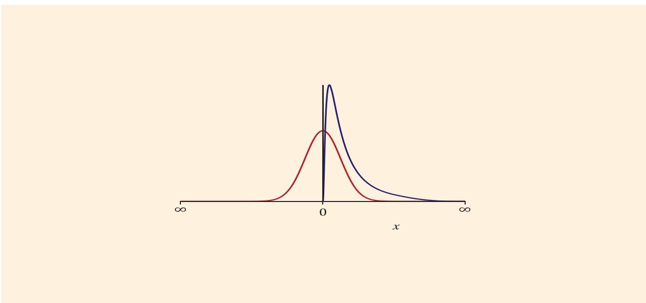
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η μέση τιμή και η διασπορά μιας τέτοιας τ.μ. είναι $\mathbb{E}(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$.

- Θα λέμε ότι η X ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους μ, σ^2 αν η $Y = \ln X$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με τις ίδιες παραμέτρους. Προκύπτει ότι η συνάρτηση πυκνότητας της X είναι

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0.$$

Η μέση τιμή και διασπορά μιας τέτοιας τ.μ. είναι $\mathbb{E}(X) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$, $V(X) = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$.



Σχήμα 7.1: Τα γραφήματα της συνάρτησης πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την κανονική κατανομή (με κόκκινο χρώμα) και την λογαριθμοκανονική κατανομή (με μπλε χρώμα). Εδώ υποθέσαμε $\mu = 0$ και $\sigma = 1$.

Κεφάλαιο 8

Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου

8.1 Εισαγωγή

Ας φανταστούμε δυο ανθρώπους, τον A και τον B, οι οποίοι παίζουν ένα τυχερό παιχνίδι. Στρίβουν ένα νόμισμα διαδοχικά και ο παίκτης A κερδίζει ένα Ευρώ κάθε φορά που έρχεται κορώνα ενώ χάνει ένα Ευρώ όταν έρχεται γράμματα. Ο παίκτης A ξεκινά με 30 Ευρώ και αποφασίζει να τελειώσει το παιχνίδι είτε όταν τα χάσει όλα είτε όταν γίνουν 100 Ευρώ ενώ αντίθετα ο παίκτης B θα σταματήσει το παιχνίδι όποτε το σταματήσει ο A. Ποια είναι η πιθανότητα για τον παίκτη A να τελειώσει το παιχνίδι έχοντας 100 Ευρώ;
Το πρόβλημα αυτό (αλλά και άλλα πιο περίπλοκα προβλήματα) ανάγεται στην μελέτη των λεγόμενων Μαρκοβιανών αλυσίδων. Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες έχουν πολλές εφαρμογές μεταξύ άλλων και στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά, δείτε για παράδειγμα το [84]. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τις Μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου.

Ορισμος 225 *Μια ακολουθία $X_0, X_1, X_2, \cdots$ τ.μ. με τιμές στο $\mathbb{R}$ ονομάζεται* ***στοχαστική διαδικασία****. Για δεδομένο $\omega \in \Omega$, η ακολουθία $X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots$, ονομάζεται τροχιά της στοχαστικής διαδικασίας.*

Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα κατασκευής μιας στοχαστικής διαδικασίας όπου θα περιγράψουμε τις βασικές ιδιότητες μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας.
Ας υποθέσουμε ότι ένας περιπατητής (πραγματοποιώντας ένα πείραμα) μετακινείται από την μια γωνία στην άλλη ενός οικοδομικού τετραγώνου στρίβοντας ένα νόμισμα. Αν έρθει κορώνα μετακινείται μια γωνία δεξιόστροφα αλλιώς μια γωνία αριστερόστροφα. Ονομάζουμε τις γωνίες του οικοδομικού τετραγώνου v_1, v_2, v_3, v_4 δεξιόστροφα και ας υποθέσουμε ότι ξεκινάει από την γωνία v_1. Έστω η στοχαστική διαδικασία $X_0, \cdots, X_n, \cdots$ η οποία στο k-βήμα δίνει τον αριθμό της γωνίας στην οποία βρίσκεται ο περιπατητής και επομένως $X_k \in \{1, 2, 3, 4\}$ με $X_0 = 1$.
Αφού το νόμισμα είναι δίκαιο τότε η $P(X_1 = 2) = P(X_1 = 4) = 1/2$ δεδομένου ότι

$P(X_0 = 1) = 1$. Μπορούμε να πούμε και το εξής,

$$P(X_{n+1} = 1|X_n = 2) = P(X_{n+1} = 3|X_n = 2) = 1/2.$$

Αυτό όμως είναι το ίδιο με το παρακάτω,

$$P(X_{n+1} = 1|X_0 = 1, X_1 = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = 2) = 1/2,$$
$$P(X_{n+1} = 3|X_0 = 1, X_1 = i_1, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = 2) = 1/2$$

διότι δεν έχει καμία σημασία στο πως βρέθηκε στην γωνία v_2 αλλά σημασία έχει το αποτέλεσμα του στριψίματος του νομίσματος δεδομένου ότι έχει βρεθεί στην γωνία v_2.

Το ότι η δεσμευμένη πιθανότητα δεν εξαρτάται από όλη την ιστορία του περιπατητή αλλά μόνο από το τελευταίο βήμα ονομάζεται Μαρκοβιανή ιδιότητα. Επίσης, παρατηρούμε ότι η πιθανότητα δεν εξαρτάται από το βήμα (ή αλλιώς την χρονική στιγμή) στο οποίο βρισκόμαστε (δηλαδή το n). Αυτή η ιδιότητα είναι γνωστή ως **χρονική ομοιογένεια**.

8.2 Βασικοί ορισμοί και δυο σημαντικά θεωρήματα

ΟΡΙΣΜΟΣ 226 *Έστω ένας πίνακας P με στοιχεία τα*

$$p(i,j) = P(X_{n+1} = j|X_n = i)$$

(ο οποίος ονομάζεται πίνακας μετάβασης της X_n). Θα λέμε ότι η X_n είναι μια ***διακριτού χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα*** *με πίνακα μετάβασης $p(i,j)$ αν για κάθε*

$$j, i, i_{n-1}, \cdots, i_0 \in \{s_0, s_2, \cdots, \}$$

με $\{s_0, s_1, \cdots, \}$ το πεδίο τιμών, έχουμε

$$P(X_{n+1} = j|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = j|X_n = i) = p(i,j)$$

Από τον ορισμό καταλαβαίνουμε πως σε μια διακριτή Μαρκοβιανή αλυσίδα δεν έχει σημασία η τιμή της X_k για $k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$ για να προβλέψουμε την τιμή X_{n+1} αλλά μόνο η τιμή της X_n. Ας δώσουμε παρακάτω ένα ακόμη παράδειγμα (**τυχαίος περίπατος με δυο απορροφητικά εμπόδια**). Έστω ένα παιχνίδι τύχης (π.χ. ρουλέτα) και έστω ότι ο παίκτης κερδίζει 1 ευρώ με πιθανότητα $p = 0.4$ και χάνει 1 ευρώ με πιθανότητα $p = 0.6$. Ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης θα σταματήσει το παιχνίδι αν κερδίσει συνολικά N-ευρώ ή όταν τα χάσει όλα ξεκινώντας με M-ευρώ. Έστω η στοχαστική διαδικασία X_n η οποία δίνει το ποσό του παίκτη έπειτα από n παιχνίδια. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία αυτή είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$P(X_{n+1} = i+1|X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_0 = M) = 0.4$$

και επομένως ο παίκτης θα αυξήσει το κέρδος του κατά ένα ευρώ με πιθανότητα 0.4 ανεξάρτητα από το τι έχει γίνει μέχρι τότε.
Αν $N = 5$ τότε ο πίνακας μετάβασης είναι ο επόμενος πίνακας,

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1.0	0	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0	0
2	0	0.6	0	0.4	0	0
3	0	0	0.6	0	0.4	0
4	0	0	0	0.6	0	0.4
5	0	0	0	0	0	1.0

Τι ακριβώς βλέπουμε στον παραπάνω πίνακα μετάβασης; Δεν μας ενδιαφέρει το ποσό με το οποίο ξεκινά ο παίκτης παρά μόνο ότι θα σταματήσει το παιχνίδι όταν τα χρήματά του γίνουν 5 ευρώ ή τα χάσει όλα. Ο πίνακας μετάβασης περιγράφει όλες τις πιθανότητες για το $n+1$-παιχνίδι δεδομένου του n-παιχνιδιού. Προφανώς, αφού ο παίκτης δεν έχει σταματήσει τότε τα χρήματα του θα είναι μεταξύ του μηδέν και του πέντε. Το στοιχείο στην θέση (i, j) είναι ίσο με την πιθανότητα $p(i, j) = P(X_{n+1} = j|X_n = i)$. Οπότε, το στοιχείο στην θέση $(0, 0)$ είναι η πιθανότητα στο n-παιχνίδι να έχει μηδέν ευρώ και στο $n + 1$-παιχνίδι να έχει πάλι μηδέν ευρώ. Αυτή η πιθανότητα είναι προφανώς 1.0 διότι έχει ήδη σταματήσει. Επίσης, η πιθανότητα ο παίκτης στο n-παιχνίδι να έχει μηδέν ευρώ και στο $n+1$ να έχει $1, 2, 3, 4, 5$ είναι μηδέν αφού θα έχει σταματήσει. Η τελευταία γραμμή του πίνακα έχει παρόμοια εξήγηση, διότι για παράδειγμα αν στο n-παιχνίδι έχει 5 ευρώ τότε θα σταματήσει και άρα δεν υπάρχει πιθανότητα στο $n + 1$-παιχνίδι να έχει $1, 2, 3, 4$ ευρώ. Θα έχει σίγουρα πέντε. Συνεχίζοντας, αν στο n-παιχνίδι έχει ένα ευρώ ποια είναι η πιθανότητα στο $n + 1$-παιχνίδι να έχει μηδέν ευρώ; Ψάχνουμε δηλαδή την πιθανότητα $p(1, 0)$ η οποία βέβαια όπως φαίνεται από τον πίνακα είναι ίση με 0.6.
Παρατηρήστε ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι πάντοτε μονάδα και αυτό διότι σε κάθε γραμμή καταγράφουμε όλες τις πιθανότητες για όλες τις πιθανές καταστάσεις, επομένως στην δεύτερη γραμμή υποθέτουμε ότι ο παίκτης έχει ένα ευρώ στο n-παιχνίδι και καταγράφουμε με την σειρά τις πιθανότητες στο $n + 1$-παιχνίδι να έχει $0, 1, 2, 3, 4, 5$ ευρώ.

Ορισμος 227 *Έστω P ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ (όπου n ενδεχομένως να είναι άπειρο). Θα ονομάζεται* **στοχαστικός** *αν $P(i, j) \geq 0$ για κάθε $i, j = 1, 2, \cdots, n$ και αν $\sum_{j=1}^{n} P(i, j) = 1$ για κάθε $i = 1, 2, \cdots, n$*

Ασκηση 228 *Αποδείξτε ότι αν P είναι ένας στοχαστικός πίνακας τότε και ο P^n είναι στοχαστικός για κάθε n. Γενικότερα, αν A και B είναι στοχαστικοί πίνακες τότε και ο $A \cdot B$ είναι στοχαστικός.*

Λυση. Έστω $x = [1\ 1\ 1 \cdots]^T$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι κάθε πίνακας P με $P_{ij} \geq 0$ είναι στοχαστικός **αν και μόνο αν** $Px = x$. Αφού ο P είναι στοχαστικός τότε ισχύει ότι

$$Px = x$$

'ρα

$$P^n x = P^{n-1} P x = P^{n-1} x = \cdots = x$$

Παρόμοια, αν A και B είναι στοχαστικοί πίνακες τότε

$$(AB)x = A(BX) = Ax = x$$

□

Παρατηρηση 229 *Όπως είδαμε στην προηγούμενη απόδειξη ένας πίνακας P είναι στοχαστικός* **ανν** *$Px = x$ όπου $x = [1, 1, 1, \cdots,]$. Αυτό όμως σημαίνει ότι κάθε στοχαστικός πίνακας έχει ως ιδιοτιμή την 1 και ιδιοδιάνυσμα το $[1, 1, 1, \cdots,]$. Αν λοιπόν υπολογίσουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα, έστω $\delta_P(k)$, τότε αυτό θα διαιρείται ακριβώς από το $k - 1$. Με αυτό τον τρόπο είναι ευκολότερο να υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές ενός στοχαστικού πίνακα. Σημειώστε ότι το 1 μπορεί να είναι πολλαπλότητας πάνω από ένα επομένως καλό είναι να συνεχίσουμε τις διαιρέσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου με το $k - 1$ ως ότου δεν διαιρείται πλέον από το $k - 1$.*

Συχνά μια Μαρκοβιανή αλυσίδα αποτυπώνεται σχηματικά αντί να γράφουμε τον στοχαστικό πίνακα. Ως παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα δύο καταστάσεων, τις E και A, και πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Την ίδια Μαρκοβιανή αλυσίδα μπορούμε να την αποτυπώσουμε με το σχήμα 8.1.
Γενικότερα, μπορούμε να θεωρούμε Μαρκοβιανές αλυσίδες για τις οποίες δεν γνωρίζουμε ακριβώς την αρχική κατάσταση αλλά γνωρίζουμε την πιθανότητα να ξεκινήσει από μια δοσμένη κατάσταση. Αν η αλυσίδα παίρνει τιμές στο $S = \{s_1, s_2, \cdots, \}$ τότε θεωρούμε γνωστή την $P(X_0 = s_j) = m_j^{(0)}$ όπου $j \in \{1, 2 \cdots, \}$. Επομένως ορίζουμε την αρχική κατανομή $m^{(0)}$ το οποίο είναι ένα διάνυσμα και το κάθε στοιχείο είναι η πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την αντίστοιχη κατάσταση.
Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n με τιμές σε ένα διακριτό σύνολο S, με $X_0 = i_0 \in S$ με πιθανότητα v_{i_0} και πίνακα μετάβασης $P = (p(i, j))$. Με αυτά ως δεδομένα μπορούμε να υπολογίσουμε οποιαδήποτε πιθανότητα χρειαστεί.
Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε την πιθανότητα

$$P(X_3 = i_3, X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$

η οποία είναι η πιθανότητα η ακολουθία τ.μ. X_n να ακολουθήσει μια συγκεκριμένη διαδρομή. Η παραπάνω πιθανότητα γράφεται ως εξής,

$$\begin{aligned}
&P(X_3 = i_3, X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \\
&P(X_3 = i_3 | X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \times \\
&P(X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0)
\end{aligned}$$

Η πρώτη πιθανότητα στο δεξί μέλος, είναι ίση με $P(X_3 = i_3 | X_2 = i_2) = p(i_2, i_3)$ χρησιμοποιώντας την Μαρκοβιανή ιδιότητα της ακολουθίας. Η δεύτερη πιθανότητα στο δεξί μέλος, παρομοίως, θα είναι ίση με $v_{i_0} p(i_1, i_2) p(i_0, i_1)$. Τελικά, θα έχουμε ότι

$$P(X_3 = i_3, X_2 = i_2, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = v_{i_0} p(i_0, i_1) p(i_1, i_2) p(i_2, i_3).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 230 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n με χώρο καταστάσεων το $S = \{ s_1, s_2, \cdots, \}$, με αρχική κατανομή $m^{(0)}$ και πίνακα μετάβασης P. Τότε έχουμε ότι*

$$m^{(n)} = m^{(0)} P^n$$

Με $m^{(n)}$ συμβολίζουμε το εξής διάνυσμα

$$m^{(n)} = (P(X_n = s_1), \cdots, P(X_n = s_k), \cdots)$$

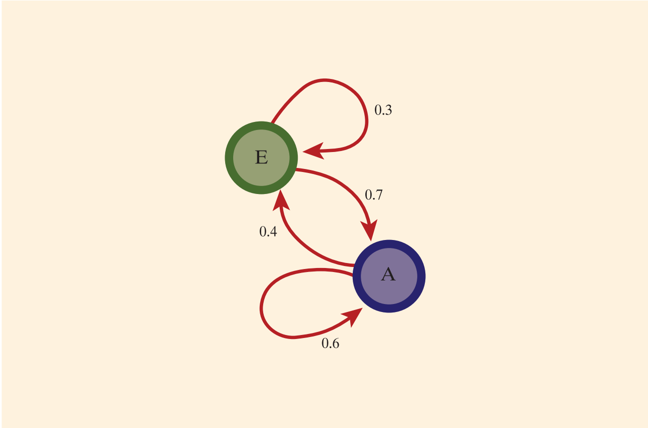
και με P^n την n-οστή δύναμη του πίνακα μετάβασης.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή. Ξεκινάμε με την περίπτωση $n = 1$. Έχουμε,

$$\begin{aligned}
m_j^{(1)} &= P(X_1 = s_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P(X_0 = s_i) P(X_1 = s_j | X_0 = s_i) \quad (\text{Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} m_i^{(0)} P_{i,j} \\
&= (m^{(0)} P)_j.
\end{aligned}$$

όπου $k = \infty$ αν ο χώρος καταστάσεων είναι άπειρος. Αρα $m^{(1)} = m^{(0)} P$.
Θεωρούμε ότι ισχύει για $n = l$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n = l + 1$. Έχουμε,

$$\begin{aligned}
m_j^{(l+1)} &= P(X_{l+1} = s_j) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P(X_l = s_i) P(X_{l+1} = s_j | X_l = s_i) \quad (\text{Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} m_i^{(l)} P_{i,j} = (m^l P)_j.
\end{aligned}$$



Σχήμα 8.1: Σχεδιάγραμμα Μαρκοβιανής αλυσίδας δυο καταστάσεων.

’ρα $m^{l+1} = m^l P = m^{(0)} P^{l+1}$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 231 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{s_1, s_2, \cdots ,\}$, με αρχική κατανομή $m^{(0)}$ και πίνακα μετάβασης P. Τότε έχουμε ότι*

$$P(X_{m+n} = s_j | X_m = s_i) = P^n_{i,j}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή. Προφανώς ισχύει για $n = 1$ διότι η X_n είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n = l$ και θα αποδείξουμε ότι ικανοποιείται για $n = l + 1$. Έχουμε,

$$\begin{aligned}
& P(X_{m+l+1} = s_j | X_m = s_i) \\
= & \sum_{q=1}^{k} P(X_{m+l+1} = s_j, X_{m+l} = s_q | X_m = s_i) \\
= & \sum_{q=1}^{k} \frac{P(X_{m+l+1} = s_j, X_{m+l} = s_q, X_m = s_i)}{P(X_m = s_i)} \\
= & \sum_{q=1}^{k} \frac{P(X_{m+l+1} = s_j, X_{m+l} = s_q, X_m = s_i)}{P(X_{m+l} = s_q, X_m = s_i)} \cdot \frac{P(X_{m+l} = s_q, X_m = s_i)}{P(X_m = s_i)} \\
= & \sum_{q=1}^{k} P^l_{i,q} P_{q,j} = P^{l+1}_{i,j}.
\end{aligned}$$

όπου $k = \infty$ αν ο χώρος καταστάσεων είναι άπειρος. Σημειώστε ότι

$$P(X_{m+l+1} = s_j | X_{m+l} = s_q, X_m = s_i) = P(X_{m+l+1} = s_j | X_{m+l} = s_q)$$

λόγω Μαρκοβιανής ιδιότητας και ότι

$$P(X_{m+l} = s_q | X_m = s_i) = P^l_{i,q}$$

από την υπόθεση της επαγωγής. □

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να δώσουμε έναν ισοδύναμο ορισμό της Μαρκοβιανής αλυσίδας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 232 *Θα λέμε ότι η X_n είναι μια* ***διακριτού χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα*** *με πίνακα μετάβασης $p(i,j)$ αν για κάθε $j, i, i_{k-1}, \cdots, i_0 \in \{s_0, s_2, \cdots, \}$ με $\{s_0, s_1, \cdots, \}$ το πεδίο τιμών, ισχύει το εξής*

$$P\left(X_{n+1} = j | X_k = i, X_{k-1} = i_{k-1}, \cdots, X_0 = i_0\right) = P(X_{n+1} = j | X_k = i)$$

για κάθε $k \leq n$.

ΛΗΜΜΑ 233 *Οι ορισμοί 232 και 226 είναι ισοδύναμοι.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι προφανές ότι αν ισχύει ο ορισμός 232 τότε ισχύει και ο 226. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει ο ορισμός 232 όταν ισχύει ο ορισμός 226.
Πράγματι, αν ισχύει ο ορισμός 226 τότε είναι προφανές ότι ισχύει και ο 232 για $k = n$. Θα υποθέσουμε ότι ισχύει για κάποιο k και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k-1$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
& P(X_{n+1} = j | X_{k-1} = i_{k_1}, \cdots, X_0 = i_0) \\
= & \frac{P(X_{n+1} = j, X_{k-1} = i_{k_1}, \cdots, X_0 = i_0)}{P(X_{k-1} = i_{k_1}, \cdots, X_0 = i_0)} \\
= & \sum_{i \in S} \frac{P(X_{n+1} = j, X_k = i, X_{k-1} = i_{k_1} \cdots, X_0 = i_0)}{P(X_k = i, X_{k-1} = i_{k_1}, \cdots, X_0 = i_0)} \\
& \times \frac{P(X_k = i, X_{k-1} = i_{k_1}, \cdots, X_0 = i_0)}{P(X_{k-1} = i_{k_1}, \cdots, X_0 = i_0)} \\
= & \sum_{i \in S} P(X_{n+1} = j | X_k = i, \cdots, X_0 = i_0) \cdot P(X_k = i | X_{k-1} = i_{k_1}, \cdots, X_0 = i_0) \\
= & \sum_{i \in S} P_{ij}^{n+1-k} \cdot P_{i_{k_1}, i} \\
= & P_{i_{k_1}, j}^{n+2-k}
\end{aligned}$$

Όμως από το θεώρημα 231 έχουμε ότι $P_{i_{k_1}, j}^{n+2-k} = P(X_{n+1} = j | X_{k-1} = i_{k_1})$ άρα προκύπτει το ζητούμενο. □

Διαπιστώνουμε ότι για να υπολογίσουμε τις παραπάνω ποσότητες θα πρέπει να υπολογίσουμε την n-οστή δύναμη του πίνακα A. Παρακάτω θα δώσουμε συνοπτικά την μεθοδολογία για τον υπολογισμό αυτό στην περίπτωση που ο πίνακας είναι πεπερασμένος.

8.3 Υπολογισμός νιοστής δύναμης και εκθετικού πίνακα

Έστω $A_{k\times k}$ ένας πίνακας πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε συμβολικά τον πίνακα A^n μπορούμε να εργαστούμε όπως παρακάτω. Βρίσκουμε ένα πολυώνυμο $p(x) = x^q + c_{q-1}x^{q-1} + \cdots + c_0$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε

$$p(A) = A^q + c_{q-1}A^{q-1} + \cdots + c_0\mathbb{I}_{k\times k} = 0_{k\times k}$$

Διαιρώντας θεωρητικά το x^n, για $n \geq q$, με $p(x)$ έχουμε

$$x^n = \pi(x)p(x) + v(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

όπου $v(x)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ $q-1$. Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $\Delta(x) = x^n - \pi(x)p(x)v(x)$ έχει όλους του τους συντελεστές ίσους με το μηδέν και αυτό σημαίνει ότι

$$A^n = v(A)$$

Σε αυτή τη φάση το μόνο που πρέπει να κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές του $v(x)$. Για το σκοπό αυτό οι ρίζες (και οι πολλαπλότητες τους) του $p(x)$ θα παίξουν καθοριστικό ρόλο. Αν $p_1, \cdots, p_l$ είναι οι ρίζες του με πολλαπλότητες $j_1, \cdots, j_l$ (όπου $j_1 + \cdots + j_l = q$)τότε κατασκευάζουμε το επόμενο γραμμικό σύστημα θέτοντας $f(x) = x^n$,

$$v^{(r)}(p_i) = f^{(r)}(p_i),\ r = 0, \cdots, j_i - 1,\ i = 1, \cdots, l \tag{8.1}$$

όπου $f^{(r)}$ είναι η r παράγωγος της f και $f^{(0)} = f$.

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της Αλγεβρας (κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει ακριβώς n μιγαδικές εν γένει ρίζες, όχι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους) διαπιστώνουμε ότι αφού το πολυώνυμο $v(\cdot)$ είναι $q-1$ βαθμού τότε θα έπρεπε να έχει ακριβώς $q-1$ ρίζες. Το ομογενές σύστημα 8.1 έχει προφανώς το μηδενικό διάνυσμα ως λύση. Αν υποθέσουμε ότι έχει ως λύση και ένα μη μηδενικό διάνυσμα τότε συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο $v(\cdot)$ θα έχει ρίζες με άθροισμα πολλαπλοτήτων q το οποίο δεν μπορεί να συμβεί επομένως η μοναδική λύση του ομογενούς είναι η μηδενική και αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας του συστήματος είναι αντιστρέψιμος.

Ένα πολυώνυμο με την ιδιότητα $p(A) = 0_{k\times k}$ είναι βεβαίως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Το σύστημα 8.1 όμως έχει μέγεθος όσο και το πολυώνυμο p. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα ήταν καλό να χρησιμοποιήσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο το οποίο έχει επίσης την ίδια ιδιότητα.

8.3.1 Ο υπολογισμός του ελαχίστου πολυωνύμου

Έστω ένας $k \times k$ πίνακας αριθμών A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 234 *Με P_A συμβολίζουμε όλα τα πολυώνυμα με μεγιστοβάθμιο συντελεστή τη μονάδα τα οποία είναι τέτοια ώστε $p(A) = 0_{k\times k}$.*

Είναι γνωστό ότι υπάρχει το ελάχιστο πολυώνυμο (το οποίο είναι μοναδικό) του πίνακα A το οποίο βεβαίως ανήκει P_A. Συμβολίζουμε με $m_A(x)$ και τον βαθμό του με q_{m_A} το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 235 *Με $b_A(q)$ συμβολίζουμε το διάνυσμα το οποίο περιέχει τον πίνακα A^q ανά στήλη. Με $b_A(0)$ συμβολίζουμε το διάνυσμα το οποίο περιέχει τον μοναδιαίο πίνακα στήλη-στήλη. Με $B_A(q)$ συμβολίζουμε τον πίνακα ο οποίος έχει στήλες τα διανύσματα $b_A(0), \cdots, b_A(q)$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 236 *Με $C_A(q)$ συμβολίζουμε το επόμενο σύνολο, δοσμένου κάποιου $q \in \mathbb{N}$,*

$$C_A(q) = \{c \in \mathbb{R}^q : B_A(q-1) \cdot c = -b_A(q)\}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 237 *Αν $p(x) = x^q + c_{q-1}x^{q-1} + \cdots + c_0$ και $c = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{q-1} \end{pmatrix}$ τότε*

$$p(x) \in P_A \Longleftrightarrow c \in C_A(q)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $p(x) \in P_A$. Αυτό σημαίνει ότι

$$p(A) = A^q + c_{q-1}A^{q-1} + \cdots + c_0\mathbb{I}_{k\times k} = 0_{k\times k}$$

Με άλλα λόγια

$$c_{q-1}A^{q-1} + \cdots + c_0\mathbb{I}_{k\times k} = -A^q \tag{8.2}$$

Το παραπάνω σύνολο εξισώσεων μπορεί να γραφεί στην επόμενη μορφή

$$B_A(q-1) \cdot c = -b_A(q) \tag{8.3}$$

όπου $c = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{q-1} \end{pmatrix}$. Δηλαδή τα συστήματα 8.2 και 8.3 είναι ισοδύναμα. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 238 *Συμβολίζουμε με Q_A το επόμενο σύνολο ακεραίων*

$$Q_A = \{q \in \mathbb{N} : C_A(q) \neq \emptyset\}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 239 *Έστω $m(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A βαθμού q_{m_A}. Τότε*

$$q_{m_A} = \min Q_A$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το σύνολο Q_A είναι μη κενό αφού για $q = k$ το $C_A(q)$ περιέχει τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Επομένως το $q^* = \min Q_A$ είναι καλά ορισμένο και φυσικά $q^* \in Q_A$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο με μεγιστοβάθμιο συντελεστή την μονάδα $p_{q^*}(x)$ βαθμού q^* το οποίο είναι τέτοιο ώστε $p_{q^*}(A) = 0_{k\times k}$.
Γνωρίζουμε ότι το ελάχιστο πολυώνυμο υπάρχει και είναι μοναδικό επομένως $q_{m_A} \in Q_A$ οπότε $q_{m_A} \geq q^*$. Αυτό σημαίνει ότι $q_{m_A} = q^*$ χρησιμοποιώντας την πρόταση 237. □

Δηλαδή για να υπολογίσουμε το ελάχιστο πολυώνυμο θα πρέπει να βρούμε το μικρότερο q για το οποίο το σύστημα $B_A(q-1) \cdot c = -b_A(q)$ έχει λύση.

8.3.2 Συνάρτηση πίνακα

Θα δώσουμε δυο ορισμούς της έννοιας της συνάρτησης πίνακα. Πρώτα όμως θα δώσουμε τον ορισμό του πίνακα $v(A)$ όπου $v(x)$ πολυώνυμο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 240 *Έστω ένα πολυώνυμο $v(x) = a_q x^q + \cdots + a_0$. Ο πίνακας $v(A)$ ορίζεται να είναι ο*

$$v(A) = a_q A^q + \cdots + a_0 \mathbb{I}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 241 *Έστω ο πίνακας $A_{k\times k}$ και μια συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ο πίνακας $f(A)$ ορίζεται να είναι ο $v(A)$ όπου $v(\cdot)$ είναι το πολυώνυμο το οποίο ικανοποιεί το σύστημα 8.1, δοσμένου ενός πολυωνύμου $p(x)$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε $p(A) = 0_{k\times k}$ και $p_1, \cdots, p_l$ οι ρίζες του με αντίστοιχες πολλαπλότητες $j_1, \cdots, j_l$ οφ $p(x)$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 242 *Έστω ο πίνακας $A_{k\times k}$ και μια συνάρτηση $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ο πίνακας $f(A)$ ορίζεται να είναι ο $v(A)$ όπου $v(\cdot)$ είναι η σειρά Taylor της f γύρω από μηδέν.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 243 *Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ένα πολυώνυμο $p(x)$ με ρίζες της $p_1, \cdots, p_l$ πολλαπλότητας $j_1, \cdots, j_l$ του $p(x)$. Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη στις ρίζες του $p(x)$ αν $f^{(k)}(p_i)$, για $i = 1, \cdots, l$ και $k = 0, \cdots, j_i - 1$ είναι καλά ορισμένα.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 244 *Έστω ο πίνακας $A_{k\times k}$ και $\Delta = \max_{i,j} |A_{ij}|$. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μοπορεί να αναλυθεί κατά Taylor γύρω από το μηδέν και να συγκλίνει απόλυτα για κάθε $x \in [-M, M]$ με $M > k\Delta$ τότε ο πίνακας $f(A)$ είναι καλά ορισμένος υπό την έννοια του ορισμού 242. Έστω πολυώνυμο $p(x)$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε $p(A) = 0_{k\times k}$. Τότε ο πίνακας $f(A)$ είναι καλά ορισμένος υπό την έννοια του ορισμού 241 αν η συνάρτηση f είναι καλά ορισμένη στις ρίζες του $p(x)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο πίνακας $f(A)$ μέσω της σειράς Taylor ορίζεται ως εξής

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} A^n$$

Αυτός ο πίνακας είναι καλά ορισμένος επειδή η σειρά συγκλίνει απολύτως. Πράγματι, ορίζοντας $\Delta = \max_{i,j} |A_{ij}|$ έχουμε ότι

$$|(A^n)_{ij}| \le k^{n-1} \Delta^n$$

Θα το αποδείξουμε με επαγωγή. Για $n = 1$ είναι προφανές ότι $|(A^1)_{ij}| \le k^0 \Delta$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο n, δηλαδή $|(A^n)_{ij}| \le k^{n-1}\Delta^n$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n+1$. Έχουμε ότι

$$|(A^{n+1})_{ij}| = |\sum_{l=1}^{k} (A^n)_{il} A_{lj}| \le \sum_{l=1}^{k} k^{n-1} \Delta^n A_{lj} \le k^n \Delta^{n+1}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(A^n)_{ij}\right| &\leq 1+\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(A^n)_{ij}\right| \\ &\leq 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}k^{n-1}\Delta^n\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(A^n)_{ij}$ συγκλίνει απολύτως και επομένως ο πίνακας $f(A)$ είναι καλά ορισμένος.
Από την άλλη μεριά είναι εύκολο να δούμε ότι ο πίνακας $f(A)$ μέσω του ορισμού 241 είναι καλά ορισμένος όταν και εφόσον του δεξί μέλος του συστήματος 8.1 είναι καλά ορισμένο. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 245 *Είναι εύκολο να δούμε ότι οι πίνακες $f(A), g(A), h(A)$ είναι καλά ορισμένοι για οποιονδήποτε πίνακα $A_{k\times k}$ για τις συναρτήσεις $f(x)=e^{tx}$, $g(x)=\cos(tx)$ και $h(x)=\sin(tx)$.* □

ΘΕΩΡΗΜΑ 246 *Έστω η συνάρτηση f και ο πίνακας $A_{k\times k}$. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας $f(A)$ είναι καλά ορισμένος υπό την έννοια και των δυο ορισμών 242 και 241. Τότε οι δυο πίνακες συμπίπτουν.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω q ο βαθμός του πολυωνύμου $p(x)$ το οποίο είναι τέτοιο ώστε $p(A)=0_{k\times k}$ και οι ρίζες του $p_1,\cdots,p_l$ έχουν πολλαπλότητες $j_1\cdots,j_l$. Για κάθε $m\in\mathbb{N}$ με $m\geq q$ υπάρχουν $a_0(m),\cdots,a_{q-1}(m)$ τέτοια ώστε

$$A^m=a_{q-1}(m)A^{q-1}+\cdots+a_0(m)\mathbb{I}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\begin{aligned}f^{Taylor}(A) &= A^{q-1}\underbrace{\left(\sum_{n=q}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}a_{q-1}(n)+\frac{f^{(q-1)}(0)}{(q-1)!}\right)}_{b_{q-1}} \\ &\quad +\cdots+\mathbb{I}\underbrace{\left(\sum_{n=q}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}a_0(n)+\frac{f^{(0)}(0)}{0!}\right)}_{b_0}\end{aligned}$$

Για να πάρουμε το παραπάνω κάναμε αναδιάταξη όρων το οποίο επιτρέπεται αφού η σειρά συγκλίνει απολύτως.
Θα δούμε παρακάτω ότι οι συντελεστές
$b_0,\cdots,b_{q-1}$ θα εμφανιστούν πάλι υπολογίζοντας τον πίνακα $f(A)$ με τον άλλο ορισμό. Υπολογίζοντας τον A^m για $m\geq q$ το σύστημα 8.1 θα περιέχει τις επόμενες

εξισώσεις, για $i = 1, \cdots, l$,

$$\begin{aligned}
a_{q-1}(m)p_i^{q-1} + \cdots + a_0(m) &= p_i^m \\
a_{q-1}(m)(q-1)p_i^{q-2} + \cdots + a_1(m) &= mp_i^{m-1} \\
&\vdots \\
a_{q-1}(m)(q-1)\cdots(q-j_i+1)p_i^{q-j_i} + \cdots + a_{j_i-1}(m) &= \\
m\cdot(m-1)\cdots(m-j_i+2)p_i^{m-j_i+1}
\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε αυτές τις εξισώσεις με $\frac{f^{(m)}(0)}{m!}$ και έπειτα τις αθροίζουμε από $m = q$ ως ∞. Επομένως το παραπάνω σύστημα θα περιέχει τις εξισώσεις, για $i = 1, \cdots, l$,

$$\begin{aligned}
p_i^{q-1}\sum_{m=q}^{\infty} a_{q-1}(m)\frac{f^{(m)}(0)}{m!} + \cdots + \sum_{m=q}^{\infty} a_0(m)\frac{f^{(m)}(0)}{m!} &= \sum_{m=q}^{\infty} p_i^m \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\
(q-1)p_i^{q-1}\sum_{m=q}^{\infty} a_{q-1}(m)\frac{f^{(m)}(0)}{m!} + \cdots + \sum_{m=q}^{\infty} a_1(m)\frac{f^{(m)}(0)}{m!} &= \sum_{m=q}^{\infty} mp_i^{m-1}\frac{f^{(m)}(0)}{m!} \\
&\vdots \\
(q-1)\cdots(q-j_i+1)p_i^{q-j_i}\sum_{m=q}^{\infty} a_{q-1}(m)\frac{f^{(m)}(0)}{m!} + \cdots + \\
+\sum_{m=q}^{\infty} a_{j_i-1}(m)\frac{f^{(m)}(0)}{m!} &= \\
\sum_{m=q}^{\infty} m\cdot(m-1)\cdots(m-j_i+2)p_i^{m-j_i+1}\frac{f^{(m)}(0)}{m!}
\end{aligned}$$

Προσθέτουμε τους κατάλληλους όρους κατά μέλη έτσι ώστε στο δεξί μέλος να δημιουργηθούν οι όροι $f(p_i)$, $f'(p_i)$, $\cdots$, $f^{(j_i-1)}(p_i)$. Τότε οι άγνωστοι αυτού του συστήματος θα είναι οι $b_0, \cdots, b_{q-1}$. □

Η `matlab` συνάρτηση για το παραπάνω είναι η `matfun(A,f)` και μπορεί να βρεθεί στον επόμενο σύνδεσμο. https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/132518-computing-the-minimum-polynomial-of-a-matrix. Την αντίστοιχη εργασία μπορεί κανείς να την κατεβάσει από εδώ όπου θα βρει και τις ανάλογες αναφορές για το όλο αυτό θέμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 247 *Έστω ο πίνακας $A_{k\times k}$ και έστω $a_{ij}(n)$ τα στοιχεία του A^n. Τότε ο πίνακας B με στοιχεία τους αριθμούς $a_{ij}(-1)$ είναι ο Drazin αντίστροφος του A.*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 248 *Σε όλους τους παραπάνω υπολογισμούς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε πολυώνυμο έχει την ιδιότητα $p(A) = 0$ χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα.*
Πράγματι, έστω $v(x)$ και $\hat{v}(x)$ πολυώνυμα τα οποία ικανοποιούν το σύστημα 8.1 χρησιμοποιώντας το χαρακτηριστικό για να πάρουμε το $v(x)$ και ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο $p(x)$ (με $p(A) = 0_{k\times k}$) για να πάρουμε το $\hat{v}(x)$. Το πολυώνυμο $v(x)$ είναι

βαθμού $k-1$ *και έστω ότι το πολυώνυμο* $p(x)$ *είναι βαθμού μικρότερου του* $k-1$. *Διαιρώντας το* $v(x)$ *με το* $p(x)$ *έχουμε*

$$v(x) = \pi(x)p(x) + q(x)$$

Χρησιμοποιώντας τις ρίζες του $p(x)$ *και τις πολλαπλότητες τους υπολογίζουμε3 το πολυώνυμο* $q(x)$ *και διαπιστώνουμε ότι* $q(x) = \hat{v}(x)$. *Επιπλέον,* $\hat{v}(A) = v(A) = f(A)$.

□

8.3.3 Παραδείγματα

Θα υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη ενός μη αντιστρέψιμου πίνακα και ύστερα τον Drazin αντίστροφο του. Έστω ο πίνακας

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

Θέτουμε $f(x) = x^n$ και καλούμε την συνάρτηση `matfun(C,f)` προκειμένου να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του C. Παίρνουμε το επόμενο αποτέλεσμα

$$C^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2^n+1}{5\,2^n} & \frac{2\,(2^n+1)}{5\,2^n} & \frac{2\,2^n-3}{5\,2^n} \\ \frac{2^n-1}{5\,2^n} & \frac{2\,(2^n-1)}{5\,2^n} & \frac{2\,2^n+3}{5\,2^n} \end{pmatrix}$$

Θέτοντας $n = -1$ έχουμε τον Drazin αντίστροφο του πίνακα C ο οποίος είναι ο επόμενος

$$C_D = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{8}{5} \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `isdrazin` επαληθεύουμε το αποτέλεσμα.
Έστω ο πίνακας A

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Θέτοντας $f(x) = x^n$ και $g(x) = exp(t{*}x)$ και καλώντας τις συναρτήσεις `matfun(A,f)` και `matfun(A,g)` παίρνουμε τα επόμενα αποτελέσματα

$$A^n = \begin{pmatrix} 11^{n/2}\cos\left(n\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) & \sqrt{2}\,11^{n/2}\sin\left(n\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) \\ -\frac{\sqrt{2}\,11^{n/2}\sin\left(n\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)}{2} & 11^{n/2}\cos\left(n\,\mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) \end{pmatrix}$$

και

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3\,t}\cos\left(\sqrt{2}\,t\right) & \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3\,t}\sin\left(\sqrt{2}\,t\right) \\ -\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{3\,t}\sin\left(\sqrt{2}\,t\right)}{2} & \mathrm{e}^{3\,t}\cos\left(\sqrt{2}\,t\right) \end{pmatrix}$$

Οι συναρτήσεις `isan(an,a)` και `isexpt(at,a)` επαληθεύουν αυτά τα αποτελέσματα. Για την νιοστή δύναμη γίνεται ουσιαστικά με επαγωγή ενώ για τον εκθετικό πίνακα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο e^{tA} είναι ο μοναδικός πίνακας ο οποίος ικανοποιεί την επόμενη διαφορική εξίσωση πινάκων

$$\begin{aligned} (M(t))' &= AM(t) \\ M(0) &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε ότι η παραπάνω διαφορική εξίσωση πινάκων έχει μοναδική λύση. Είναι εύκολο να δούμε ότι ο πίνακας e^{tA} ικανοποιεί την εξίσωση αυτή χρησιμοποιώντας την μορφή του μέσω της σειράς Taylor. Πράγματι, θα αποδείξουμε ότι

$$(e^{tA})' = Ae^{tA} = e^{tA}A$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} (e^{tA})' &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right)' \\ &= A\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} A \end{aligned}$$

Η παράγωγος πέρασε μέσα στο άθροισμα λόγω του ότι η σειρά συγκλίνει απολύτως. Έστω ότι υπάρχουν περισσότερες από μια λύσεις, τότε η διαφορά δυο από αυτές θα ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$\begin{aligned} (M(t))' &= AM(t) \\ M(0) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Όμως $(M(t)e^{-tA})' = M'(t)e^{-tA} - AM(t)e^{-tA} = \mathbf{0}$. Επομένως $M(t)e^{-tA} = \mathbf{C}$ όπου $\mathbf{C}$ είναι πίνακας ανεξάρτητος του t. Πολλαπλασιάζοντας με e^{tA}, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $e^Ae^B = e^{A+B}$ για πίνακες A, B που αντιμετατίθενται και αφού $M(0) = \mathbf{0}$ προκύπτει ότι $M(t) = \mathbf{0}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

8.4 Εξισώσεις Chapman – Kolmogorov

Αν συμβολίσουμε με $P_{ij}^{(n)} = P(X_{n+t} = j|X_t = i)$ με $n, t \geq 0$ τότε οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov είναι

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_{l=0}^{k} P_{il}^{(n)} P_{lj}^{(m)},$$

για μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με k το πλήθος καταστάσεις. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα από το θεώρημα 231 αφού $P_{ij}^{(n+m)} = P_{ij}^{n+m}$ δηλαδή το ij στοιχείο της $n+m$ δύναμης του πίνακα μετάβασης. Όμως,

$$P_{ij}^{n+m} = (P^n P^m)_{ij} = \sum_{l=0}^{k} P_{il}^{n} P_{lj}^{m},$$

από ιδιότητες πινάκων.

8.5 Δικατάστατη Μαρκοβιανή Αλυσίδα

Έστω X_n μια Μαρκοβιανή διαδικασία με δυο καταστάσεις, 0 και 1. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας μετάβασης P είναι

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

με $a, b \in [0, 1]$. Αυτό που βλέπουμε είναι ότι η πιθανότητα στο $n+1$ βήμα να βρεθεί στην κατάσταση 0 δεδομένου ότι στο βήμα n ήταν στην θέση 0 είναι $1-a$ και άρα η πιθανότητα να βρεθεί στην κατάσταση 1 είναι a. Αντίστοιχα και οι άλλες πιθανότητες, όπως π.χ. η πιθανότητα στο βήμα $n+1$ να είναι στην κατάσταση 1 δεδομένου ότι στο βήμα n ήταν στην ίδια κατάσταση είναι $1-b$.
Μπορούμε να γράψουμε τον παραπάνω πίνακα ως εξής, $P = I - S$ με S τον παρακάτω πίνακα,

$$\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

Δείξτε επαγωγικά ότι $S^k = (a+b)^{k-1} S, k = 1, 2, \cdots$. Θα υπολογίσουμε το P^n

χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα,

$$\begin{aligned} P^n &= (I-S)^n \\ &= I + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k S^k \\ &= I + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k (a+b)^{k-1} S \\ &= I + S\frac{(1-a-b)^n - 1}{a+b}. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε ότι

$$P^n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} + (1-a-b)^n \begin{pmatrix} \frac{a}{a+b} & -\frac{a}{a+b} \\ -\frac{b}{a+b} & \frac{b}{a+b} \end{pmatrix}$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα πάρουμε αν χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο που έχουμε περιγράψει. Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές οι οποίες είναι οι $k_1 = 1$ και $k_2 = 1 - a - b$. Παρατηρούμε ότι $k_1 = k_2$ όταν $a = b = 0$ αφού $a, b \in [0, 1]$. Θα υποθέσουμε ότι $k_1 \neq k_2$ ή αλλιώς $a + b \neq 0$. Κατασκευάζουμε ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού, το $v(k) = c_1 k + c_2$ και τέτοιο ώστε να ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ c_1(1-a-b) + c_2 &= (1-a-b)^n \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα υπολογίζουμε τους c_1 και c_2 και στην συνέχεια έχουμε ότι $A^n = c_1 A + c_2 \mathbb{I}$. Θα προκύψει τελικά ο ίδιος πίνακας όπως παραπάνω. Αν $a = b = 0$ τότε ο πίνακας μετάβασης είναι ο μοναδιαίος και επομένως η νιοστή του δύναμη είναι πάλι ο μοναδιαίος.

Αν $|1 - a - b| < 1$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$$

Στην περίπτωση όμως που $a = b = 1$ τότε

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ενώ στην περίπτωση που $a = b = 0$ τότε

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Στην πρώτη περίπτωση παρατηρούμε ότι

$$P^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και

$$P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Τι σημαίνει αυτό;
Στην δεύτερη περίπτωση παρατηρούμε ότι

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Τι σημαίνει αυτό;

8.6 Τυχαίος Περίπατος

Έστω $S = \mathbb{Z}$. Αν x_n μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με $P(x_n = 1) = p$, $P(x_n = -1) = 1 - p$ τότε κατασκευάζουμε μια νέα ακολουθία τ.μ. $s_n = x_1 + \cdots + x_n$, με $s_0 = 0$. Θα αποδείξουμε ότι η s_n είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης $P_{ij} = p$ όταν $j = i + 1$, $P_{ij} = 1 - p$ όταν $j = i - 1$ και μηδέν αλλιώς. Η s_n ονομάζεται τυχαίος περίπατος που ξεκινά από το 0. Αν $s_0 = i$ έχουμε έναν τυχαίο περίπατο που ξεκινά από το i.
Θα αποδείξουμε ότι η s_n είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα. Έχουμε,

$$\begin{aligned}
& P(s_{n+1} = i_{n+1} | s_0 = i_0, \cdots, s_n = i_n) \\
= \ & P(x_{n+1} + s_n = i_{n+1} | s_0 = i_0, \cdots, s_n = i_n) \\
= \ & P(x_{n+1} = i_{n+1} - i_n | s_0 = i_0, \cdots, s_n = i_n) \\
= \ & P(x_{n+1} = i_{n+1} - i_n) \\
= \ & P(x_{n+1} = i_{n+1} - i_n | s_n = i_n) \\
= \ & P(s_{n+1} = i_{n+1} | s_n = i_n).
\end{aligned}$$

Σημειώστε ότι το ενδεχόμενο $\{x_{n+1} = i_{n+1} - i_n\}$ είναι ανεξάρτητο του $\{s_n = i_n\}$. Επίσης, η x_{n+1} μπορεί να πάρει μόνο δυο τιμές, 1 και -1, ανεξαρτήτως με την τιμή που έχει το άθροισμα μέχρι το προηγούμενο βήμα. Αρα, $P(x_{n+1} = i_{n+1} - i_n | s_0 = i_0, \cdots, s_n = i_n) = P(x_{n+1} = i_{n+1} - i_n)$.

8.7 Επικοινωνία, επαναληπτικές και μεταβατικές καταστάσεις

Θεωρούμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με τιμές στο S και πίνακα μετάβασης P.

ΟΡΙΣΜΟΣ 249 *Θα λέμε ότι μια κατάσταση $i \in S$ είναι* **επαναληπτική** *αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα x_n θα επιστρέψει τελικά στην i δεδομένου ότι κάποια στιγμή βρίσκεται στην i, δηλαδή,*

$$P(x_n = i \text{ για κάποιο } n > k | x_k = i) = 1.$$

Αν το παραπάνω δεν ισχύει τότε λέμε ότι η κατάσταση i είναι **μεταβατική**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 250 *Λέμε ότι η κατάσταση i* **επικοινωνεί** *με την κατάσταση j εάν με θετική πιθανότητα η αλυσίδα θα επισκεφτεί την κατάσταση j ξεκινώντας από την i, δηλαδή,*

$$P(x_n = j \text{ για κάποιο } n \geq k | x_k = i) > 0.$$

Αν η i επικοινωνεί με την j τότε γράφουμε $i \to j$. Αν επιπλέον $j \to i$ γράφουμε $i \leftrightarrow j$ και λέμε ότι οι i, j επικοινωνούν.

ΠΡΟΤΑΣΗ 251 *Ισχύει ότι $i \to j$* **ανν** *$P_{ij}^k > 0$ για κάποιο $k \geq 1$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $P_{ij}^k > 0$ για κάποιο $k \geq 1$ τότε αυτό σημαίνει ότι $P(x_k = j | x_0 = i) > 0$ άρα $i \to j$ ενώ αν $i \to j$ τότε εξ ορισμού έχουμε $P_{ij}^k > 0$ για κάποιο $k \geq 1$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 252 *Έστω ότι $i \to j$ όπου $i, j \in S$ με S ένας πεπερασμένος χώρος καταστάσεων μια Μαρκοβιανής αλυσίδας με πλήθος καταστάσεων m. Τότε υπάρχει κάποιο $n \leq m - 1$ τέτοιο ώστε $P_{ij}^n > 0$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον $i \to j$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα πιθανό μονοπάτι

$$i \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_k \to j$$

με $k \geq 1$. Έστω k^* το μικρότερο από τα k τέτοια ώστε να υπάρχει μονοπάτι που να ξεκινά από την i και να καταλήγει στην j σε $k + 1$ βήματα. Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι (**το συντομότερο μονοπάτι**) τέτοιο ώστε

$$i \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{k^*} \to j$$

Σε αυτό το μονοπάτι δεν μπορεί να υπάρχουν ίδιες καταστάσεις, δηλαδή οι καταστάσεις $i, i_1 \cdots, i_{k^*}, j$ είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους αλλιώς δεν θα ήταν το συντομότερο. Αυτό όμως σημαίνει ότι το πλήθος των ενδιάμεσων καταστάσεων δεν μπορεί να ξεπερνά τον αριθμό $m-2$, ή αλλιώς $k^* \leq m-2$. Επομένως, το πλήθος των βημάτων από την κατάσταση i στην j είναι το πολύ $m - 1$. Αρα, υπάρχει $n \leq m - 1$ έτσι ώστε $P_{ij}^n > 0$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 253 *Ισχύει ότι $i \leftrightarrow i$. Αν $i \leftrightarrow j$ τότε και $j \leftrightarrow i$. Τέλος, αν $i \to j$ και $j \to k$ τότε και $i \to k$. Οι ιδιότητες αυτές αποδεικνύουν ότι η επικοινωνία είναι σχέση ισοδυναμίας.*

Αποδειξη. Τα δυο πρώτα είναι προφανή από τον ορισμό. Για την τρίτη ιδιότητα παρατηρούμε ότι αφού $i \to j$ και $j \to k$ τότε $P_{ij}^m > 0$, $P_{jk}^l > 0$ για κάποια m, l. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $P_{ik}^q > 0$ για κάποιο q. Αν διαλέξουμε $q = m + l$ τότε $P_{ik}^q = \sum_{s \in S} P_{is}^m P_{sk}^l > P_{ij}^m P_{jk}^l > 0$. □

Ορισμος 254 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n ορισμένη σε έναν αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων S. Τότε, ένα υποσύνολο $C \subseteq S$ ονομάζεται* **κλειστό** *στην περίπτωση που η αλυσίδα παίρνει τιμές στο C, και μόνο στο C, από την στιγμή που για πρώτη φορά θα πάρει κάποια τιμή του συνόλου αυτού ή αλλιώς*

$$P\left(X_k \in S \setminus C \text{ για οποιοδήποτε } k \geq n | X_n \in C\right) = 0.$$

Θα λέμε ένα υποσύνολο $C \subseteq S$ ότι είναι **αδιαχώριστο** *αν οποιεσδήποτε δυο καταστάσεις $i, j \in C$ επικοινωνούν μεταξύ τους, δηλαδή για κάθε $i, j \in C$ έχουμε $i \leftrightarrow j$. Επίσης, μια κατάσταση $j \in S$ θα ονομάζεται* **απορροφητική** *αν $P_{jj} = 1$.*

Το επόμενο θεώρημα είναι χρήσιμο στην πράξη για να αποδείξουμε ότι ένα σύνολο είναι κλειστό.

Θεωρημα 255 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n ορισμένη σε έναν αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων S. Ένα υποσύνολο $C \subseteq S$ είναι κλειστό* **ανν** *$P_{ij} = 0$ για κάθε $i \in C$ και $j \in S \setminus C$.*

Λυση. Αν είναι κλειστό τότε είναι προφανές ότι $P_{ij} = 0$ για κάθε $i \in C$, $j \in S \setminus C$. Θα αποδείξουμε το αντίστροφο. Θα αποδείξουμε δηλαδή ότι όταν $P_{ij} = 0$ για κάθε $i \in C$, $j \in S \setminus C$ (σημειώστε ότι αυτό σημαίνει $P(X_{n+1} \in S \setminus C | X_n \in C) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) τότε και

$$P(X_k \in S \setminus C | X_n \in C) = 0,$$

για κάθε $k \geq n$. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο $k \geq n+1$. Για $k = n+1$ ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $k = m$ και θα αποδείξουμε ότι ικανοποιείται για $k = m+1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
& P(X_{m+1} \in S \setminus C | X_n \in C) \\
= \ & P(X_{m+1} \in S \setminus C | X_n \in C, X_m \in C) P(X_m \in C | X_n \in C) \\
& + P(X_{m+1} \in S \setminus C | X_n \in C, X_m \in S \setminus C) P(X_m \in S \setminus C | X_n \in C) \\
= \ & P(X_{m+1} \in S \setminus C | X_m \in C) P(X_m \in C | X_n \in C) \\
& + P(X_{m+1} \in S \setminus C | X_m \in S \setminus C) P(X_m \in S \setminus C | X_n \in C).
\end{aligned}$$

Όμως, $P(X_{m+1} \in S \setminus C | X_m \in C) = 0$ αφού $P(X_{n+1} \in S \setminus C | X_n \in C) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ενώ $P(X_m \in S \setminus C | X_n \in C) = 0$ από την υπόθεση της επαγωγής. □

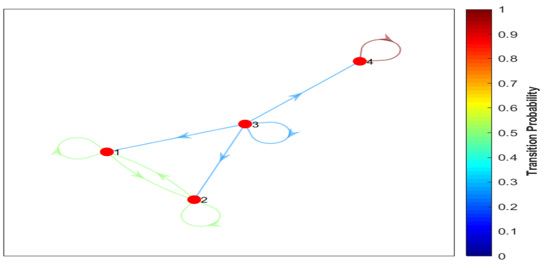
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 256 *Για παράδειγμα, έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με καταστάσεις* $0, 1, 2$ *και πίνακα μετάβασης,*

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι από την κατάσταση 0 *στην* 1 *η πιθανότητα μετάβασης είναι* $1/2$ *και άρα* $0 \to 1$. *Επίσης, από την κατάσταση* 1 *η πιθανότητα μετάβασης στην* 0 *είναι* $1/2$ *οπότε* $0 \leftrightarrow 1$. *Η πιθανότητα μετάβασης από την* 2 *στην* 1 *είναι* $1/3$ *και η πιθανότητα μετάβασης από την* 1 *στην* 2 *είναι* $1/4$ *άρα* $1 \leftrightarrow 2$. *Τελικά, προκύπτει ότι και* $0 \leftrightarrow 2$ *οπότε και η συγκεκριμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 257 *Θεωρούμε το επόμενο παράδειγμα Μαρκοβιανής αλυσίδας με καταστάσεις* 0, 1, 2, 3 *και πίνακα μετάβασης*

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Σχήμα 8.2: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος 257

Διαπιστώνουμε ότι $0 \leftrightarrow 1$ *και ότι* $2 \to 0$, $2 \to 1$, $2 \to 3$ *όμως αντίστροφα δεν γίνεται και τέλος από την κατάσταση* 3 *η πιθανότητα μετάβασης σε οποιαδήποτε άλλη είναι* 0. *Επομένως, μπορούμε να χωρίσουμε σε τρεις κλάσεις τις καταστάσεις* $\{0, 1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$. *Η κατάσταση* 3 *είναι απορροφητική και το υποσύνολο* $C = \{0, 1\}$ *είναι κλειστό.* □

ΛΗΜΜΑ 258 *Ισχύει ότι*

$$P_{ij}^n = \sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k}, \quad i, j \in S$$

όπου $f_n(i|j) = P(x_n = j, x_k \neq j, k = 1, \cdots, n-1 | x_0 = i)$.

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
P_{ij}^n &= P(x_n = j|x_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(x_n = j, x_k = j, x_l \neq j, 1 \leq l \leq k-1|x_0 = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(x_k = j, x_l \neq j, 1 \leq l \leq k-1|x_0 = i) \times \\
&\quad \times P(x_n = j|x_k = j, x_l \neq j, 1 \leq l \leq k-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P(x_n = j|x_k = j) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k}.
\end{aligned}$$

□

Θεωρημα 259 *Για $|x| < 1$ και $i, j \in S$ ορίζουμε*

$$R_{ij}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n x^n = I_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n x^n, \quad F_{ij}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|j) x^n,$$

όπου I_{ij} είναι το ij στοιχείο του μοναδιαίου πίνακα. Οι παραπάνω σειρές συγκλίνουν απολύτως και ομοιόμορφα για $|x| < 1$ και επίσης

$$\begin{aligned}
R_{ij}(x) &= F_{ij}(x) R_{jj}(x), \text{ αν } i \neq j, \\
R_{ii}(x) &= 1 + F_{ii}(x) R_{ii}(x).
\end{aligned}$$

Τέλος, ισχύει ότι

$$\lim_{x \uparrow 1} R_{jj}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n \quad \text{και} \quad \lim_{x \uparrow 1} F_{jj}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|j)$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το κριτήριο της n-οστής ρίζας στις δυναμοσειρές των απολύτων τιμών και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $P_{ij}^n \leq 1$ και $f_n(i|j) \leq 1$ έχουμε ότι οι σειρές συγκλίνουν απολύτως και ομοιόμορφα όταν $|x| < 1$.
Από το λήμμα 258 έχουμε ότι

$$P_{ij}^n = \sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k}$$

Πολλαπλασιάζουμε με x^n κατά μέλη και έχουμε για $i \neq j$

$$\begin{aligned}
R_{ij}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k} x^k x^{n-k} \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k} x^k x^{n-k} \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k}^{m} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k} x^k x^{n-k} \qquad \text{(δες σχήμα 8.3)} \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} f_k(i|j) x^k \sum_{n=k}^{m} P_{jj}^{n-k} x^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(i|j) x^k \sum_{k=0}^{\infty} P_{jj}^{k} x^{k} \\
&= F_{ij}(x) R_{jj}(x)
\end{aligned}$$

Για $i = j$ ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και έχουμε

$$R_{ii}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^n x^n = 1 + F_{ii}(x) R_{ii}(x)$$

Από το θεώρημα του Abel (Πρόταση ;; και Πόρισμα ;;) προκύπτουν εύκολα τα όρια

$$\lim_{x\uparrow 1} R_{jj}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n \quad \text{και} \quad \lim_{x\uparrow 1} F_{jj}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|j)$$

Οι ισότητες αυτές ισχύουν είτε οι σειρές $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|j)$ συγκλίνουν είτε αποκλίνουν και οι δυο στο $+\infty$. □

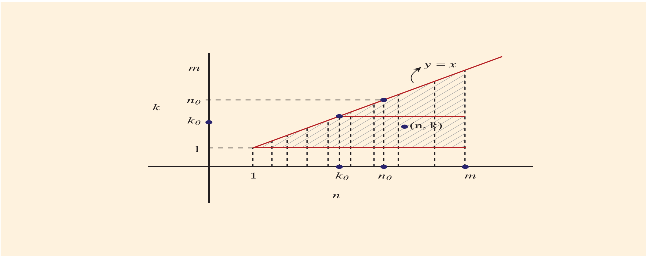
Παρατηρηση 260 *Σημειώστε ότι η $f_n(j|j)$ είναι η πιθανότητα να επισκεφθεί την κατάσταση j για πρώτη φορά στο n-βήμα δεδομένου ότι έχει ξεκινήσει από την κατάσταση j. Είναι εύκολο να δούμε ότι*

$$P(X_n \neq j, \forall n \geq 1 | X_0 = j) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|j) = 1.$$

Από αυτό έχουμε ότι η κατάσταση j είναι επαναληπτική **ανν**

$$f_{jj} := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|j) = 1$$

Σημειώστε ότι το f_{jj} είναι η πιθανότητα η αλυσίδα να επιστρέψει στην κατάσταση j κάποια στιγμή δεδομένου ότι ξεκίνησε από την j. □



Σχήμα 8.3: Αλλαγή σειράς αθροίσματος της μορφής $\sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}b_{n,k}$. Στο άθροισμα αυτό υπάρχουν όλοι οι όροι όπου τα ζευγάρια (n,k) βρίσκονται στο γραμμοσκιασμένο χωρίο. Πράγματι, για ένα τυχαίο n_0 το k θα κινείται μεταξύ $1,\cdots,n_0$, δηλαδή το σημείο (n,k) θα βρίσκεται μέσα στο γραμμοσκιασμένο χωρίο. Για να γράψουμε διαφορετικά το ίδιο άθροισμα, αφήνουμε το k αυτή τη φορά ελεύθερο να παίρνει τιμές μεταξύ $1,\cdots,m$ και το n να είναι τέτοιο ώστε το ζευγάρι να παραμένει στο χωρίο. Αν k_0 ένα τυχαίο k τότε το n θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το k_0, να κινείται δηλαδή μεταξύ $k_0,\cdots,m$. Έτσι γίνεται $\sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k}^{m} a_{n,k}b_{n,k}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 261 *Μια κατάσταση j είναι επαναληπτική* **ανν**

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n} = \infty$$

Επίσης, η j είναι μεταβατική **ανν**

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n} < \infty$$

Αν η j είναι μεταβατική τότε για κάθε $i \in S$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{n} < \infty, \quad \forall i \in S$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = 0, \quad \forall i \in S, \quad (\text{δες ;;})$$

Αν η j είναι επαναληπτική τότε για κάθε $i \in S$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^{n} = \infty$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι η j είναι επαναληπτική. Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|j) = 1$ και αυτό σημαίνει ότι $\lim_{x\uparrow 1} F_{jj}(x) = 1$. Οπότε και $R_{jj}(x) = \frac{1}{1-F_{jj}(x))} \to \infty$ καθώς $x \to 1$. Αρα, $\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n} = \infty$. Αντίστροφα, αν $\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n} = \infty$ τότε και $R_{jj}(x) \to \infty$ καθώς

$x \to 1$ και άρα $F_{jj}(x) \to 1$ καθώς $x \to 1$. Αυτό σημαίνει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|j) = 1$ και άρα η j είναι επαναληπτική.
Οποιαδήποτε κατάσταση θα είναι είτε μεταβατική είτε επαναληπτική. Αρα, αν είναι μεταβατική τότε αναγκαστικά το $\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n < \infty$ αλλιώς θα ήταν επαναληπτική (καθότι το άθροισμα αυτό ή πεπερασμένο θα είναι ή $+\infty$). Αντίστροφα, αν το άθροισμα είναι πεπερασμένο τότε αναγκαστικά η κατάσταση θα είναι μεταβατική διότι αλλιώς το άθροισμα θα ήταν ίσο με $+\infty$.
Για την τρίτη σχέση του θεωρήματος έχουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n = I_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n = I_{ij} + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} P_{ij}^n.$$

Αρα

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} P_{ij}^n &= \sum_{n=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k} \qquad (\text{λήμμα } 258)\\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{n=k}^{m} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{m} f_k(i|j) \sum_{l=0}^{m-k} P_{jj}^l \le \sum_{l=0}^{m} P_{jj}^l \le \sum_{l=0}^{\infty} P_{jj}^l < \infty,
\end{aligned}$$

διότι $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} f_k(i|j) \le 1$ και $\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} P_{jj}^l < \infty$ αφού η j είναι μεταβατική.
Έστω ότι η j είναι επαναληπτική και $i \in S$. Όμως

$$P_{ij}^n = \sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k}$$

Αν $i \to j$ τότε υπάρχει κάποιο $l \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $f_l(i|j) > 0$. Αρα

$$P_{ij}^n \ge f_l(i|j) P_{jj}^{n-l} \qquad \text{όπου } n \ge l$$

Επομένως

$$\sum_{n=l}^{\infty} P_{ij}^n \ge \sum_{n=l}^{\infty} f_l(i|j) P_{jj}^{n-l} = f_l(i|j) \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n = \infty$$

Προφανώς $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n = \infty$. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 262 *Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων (έστω m) θα έχει τουλάχιστον μια επαναληπτική κατάσταση. Πράγματι, έστω ότι δεν ισχύει, δηλαδή όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές, τότε $\lim_{n\to\infty} P_{ik}^n = 0$ για κάθε $i, k \in S$. Όμως, $1 = \sum_{k=0}^{m} P_{ik}^n$ αφού και ο P^n είναι στοχαστικός πίνακας και παίρνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ φτάνουμε σε άτοπο.* □

Σε μια αλυσίδα με άπειρο πλήθος καταστάσεων μπορεί όλες οι καταστάσεις να είναι μεταβατικές, κάτι το οποίο δεν ισχύει σε μια αλυσίδα με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων όπως είδαμε στην προηγούμενη παρατήρηση. Ένα τέτοιο παράδειγμα αλυσίδας είναι ο τυχαίος περίπατος. Στο επόμενο θεώρημα αποδεικνύουμε βασικές ιδιότητές του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 263 *Για τον τυχαίο περίπατο ισχύει ότι για $n \geq 1$*

$$P(s_n = j | s_0 = i) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ \frac{n+j-i}{2} \end{pmatrix} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}}, & \text{όταν } \frac{n-|j-i|}{2} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επίσης, για $p \in (0,1)$ έχουμε ότι $P(s_n = i | s_0 = i) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Όταν $p = \frac{1}{2}$ (συμμετρικός τυχαίος περίπατος) οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές αλλιώς όταν $p \neq \frac{1}{2}$ οι καταστάσεις είναι μεταβατικές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα το αποδείξουμε με επαγωγή στο n. Για $n = 1$ έχουμε ότι

$$P(s_1 = j | s_0 = i) = \begin{cases} p, & \text{αν } j = i+1 \\ q, & \text{αν } j = i-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επομένως ικανοποιείται για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι ικανοποιείται για κάποιο n και θα αποδείξουμε ότι ικανοποιείται και για $n+1$. Έστω ότι $\frac{n-|j-1-i|}{2} \in \mathbb{N}$. Τότε παρατηρούμε ότι και $\frac{n-|j+1-i|}{2} \in \mathbb{N}$ και αντίστροφα. Οπότε σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} & P(s_{n+1} = j | s_0 = i) \\ = \ & P(s_{n+1} = j | s_0 = i, s_n = j-1) P(s_n = j-1 | s_0 = i) \\ & + P(s_{n+1} = j | s_0 = i, s_n = j+1) P(s_n = j+1 | s_0 = i) \\ = \ & P(s_{n+1} = j | s_n = j-1) P(s_n = j-1 | s_0 = i) \\ & + P(s_{n+1} = j | s_n = j+1) P(s_n = j+1 | s_0 = i) \\ = \ & \begin{pmatrix} n+1 \\ \frac{n+1+j-i}{2} \end{pmatrix} p^{\frac{n+1+j-i}{2}} q^{\frac{n+1-j+i}{2}} \end{aligned}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει την πρώτη ταυτότητα της Πρότασης ;;. Για την περίπτωση που $\frac{n-|j+1-i|}{2} \notin \mathbb{N}$ έχουμε δυο πιθανές περιπτώσεις. Η πρώτη είναι $\frac{n-|j+1-i|}{2} < 0$ οπότε σε αυτή την περίπτωση έχουμε και $\frac{n-|j-1-i|}{2} < 0$ και η δεύτερη περίπτωση είναι $n-|j+1-i| = 2k+1$ οπότε και πάλι $n-|j-1-i| = 2k-1$ άρα επαναλαμβάνοντας τους προηγούμενους υπολογισμούς έχουμε ότι σε αυτή την περίπτωση $P(s_{n+1} = j|s_0 = i) = 0$.
Για το δεύτερο μέρος υποθέτουμε αρχικά ότι $p \neq 1/2$. Όταν $j = i$ η πιθανότητα $P(s_n = i|s_0 = i) = \frac{(2k)!}{(k!)^2}p^k(1-p)^k$ όταν $n = 2k$ και μηδέν αλλιώς. Συμβολίζουμε με $a_k = \frac{(2k)!}{(k!)^2}p^k(1-p)^k$. Θα αποδείξουμε ότι η σειρά θετικών όρων $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$ και αυτό σημαίνει αναγκαστικά ότι $a_k \to 0$ καθώς $k \to \infty$ (δες ;;). Χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου (δες ;;) και έχουμε

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \to 4p(1-p) < 1.$$

'ρα, η σειρά συγκλίνει οπότε και $a_k \to 0$.
Για την περίπτωση που $p = 1/2$ δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα από το κριτήριο του λόγου και για αυτό θα το δούμε διαφορετικά. Θα χρησιμοποιήσουμε την φόρμουλα του Stirling (δες ;;) η οποία είναι,

$$k! \backsim \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k \text{ καθώς } k \to \infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι το $k!$ συμπεριφέρεται στο όριο όπως και η ποσότητα δεξιά. Γράφουμε $a_k \backsim b_k$ και εννοούμε $a_k/b_k \to 1$ καθώς $k \to \infty$. Επομένως έχουμε ότι

$$a_k \sim \frac{\sqrt{4\pi k}}{2\pi k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}\left(\frac{e}{k}\right)^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \to 0, \text{ καθώς } k \to \infty.$$

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γινόμενο Wallis (δες ;;). Παρατηρήστε όμως ότι όταν $p = 1/2$ έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ καθότι $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} = \infty$. Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση του συμμετρικού τυχαίου περιπάτου ($p = 1/2$) όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές ενώ στην περίπτωση όπου $p \neq 1/2$ είδαμε ότι το αντίστοιχο άθροισμα είναι πεπερασμένο άρα όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές. Σημειώστε ότι το πλήθος καταστάσεων είναι άπειρο αλλιώς τουλάχιστον μια κατάσταση θα έπρεπε να είναι επαναληπτική. □

Παρατηρηση 264 *Το θεώρημα 259 έχει και πρακτική αξία εκτός από την θεωρητική. Είναι συχνά χρήσιμο στον υπολογισμό πιθανοτήτων και ιδιαίτερα των $f_n(i|i)$ (δείτε επόμενο παράδειγμα). Αν κάποιος γνωρίζει τις πιθανότητες P_{ii}^n (π.χ. υπολογίζοντας την νιοστή δύναμη του P) τότε μέσω της σχέσης $R_{ii}(x) = 1 + F_{ii}(x)R_{ii}(x)$ (αφού υπολογίσει την $R_{ii}(x) = \sum P_{ii}^n x^n$) μπορεί να υπολογίσει την $F_{ii}(x)$. Στην συνέχεια* *θα την αναπτύξει σε σειρά Taylor γύρω από το μηδέν, δηλαδή θα γραφεί στην μορφή*

$$F_{ii}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Όμως, ταυτόχρονα, εξ ορισμού

$$F_{ii}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|i) x^n$$

Λόγω μοναδικότητας του αναπτύγματος Taylor θα ισχύει αναγκαστικά ότι

$$f_n(i|i) = a_n, \quad \text{για } n = 1, 2, \cdots,$$

Παρόμοια μπορούν να υπολογισθούν οι πιθανότητες $f_n(i|j)$. *Έτσι για παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσουμε την*

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|j)$$

δηλαδή την πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την κατάσταση i *και να μεταβεί κάποια στιγμή στην* j. *Αν* $i = j$ *θα έχουμε υπολογίσει την* f_{ii} *δηλαδή την πιθανότητα να ξεκινήσει από την* i *και να επανέρθει κάποια στιγμή στην* i. *Τις πιθανότητες* f_{ij} *όταν* $i \neq j$ *μπορούμε να τις υπολογίσουμε και διαφορετικά (εν γένει ευκολότερα) μέσω του θεωρήματος 316 (εκεί τις συμβολίζουμε με* h_i^j*).* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 265 (Πιθανότητα Επιστροφής του Τυχαίου Περιπάτου) *Έστω ο τυχαίος περίπατος που ξεκινά από το μηδέν. Ποια είναι η πιθανότητα να επιστρέψει κάποια στιγμή στο μηδέν; Ποια είναι η πιθανότητα να επιστρέψει στο μηδέν μετά από n βήματα και όχι νωρίτερα; Η πρώτη πιθανότητα είναι η* f_{00} *και είναι ίση με*

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0|0) = F_{00}(1) = 1 - \frac{1}{R_{00}(1)} \quad (\text{δείτε θεώρημα 259})$$

Από το θεώρημα 263 προκύπτει ότι

$$P(s_n = 0 | s_0 = 0) = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} (pq)^{\frac{n}{2}}, & \text{όταν } n = 2k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επομένως,

$$R_{00}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} (pq)^n x^{2n} = (1 - 4pqx^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει χρησιμοποιώντας την ;;. Αρα

$$f_{00} = 1 - (1-4pq)^{\frac{1}{2}} = 1 - |p-q|$$

Στην περίπτωση του συμμετρικού τυχαίου περιπάτου ($p = \frac{1}{2}$) *έχουμε ότι* $f_{00} = 1$, *δηλαδή είναι βέβαιο ότι κάποια στιγμή θα επιστρέψει στο μηδέν από όπου και ξεκίνησε. Εφόσον*

$$F_{00}(x) = 1 - (1-4pqx^2)^{\frac{1}{2}}$$

μπορούμε να την αναπτύξουμε σε σειρά Taylor γύρω από το μηδέν, χρησιμοποιώντας την ;;. Το αποτέλεσμα θα είναι

$$F_{00}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1}(4pq)^k x^{2k}$$

Σημειώστε ότι $F_{00}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0|0)x^n$ *άρα λόγω μοναδικότητας του αναπτύγματος Taylor (δείτε Πόρισμα ;; και Παρατήρηση ;;) θα ισχύει ότι*

$$f_n(0|0) = \begin{cases} \binom{1/2}{k} (-1)^{k-1}(4pq)^k, & \text{όταν } n = 2k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Δηλαδή υπολογίσαμε την πιθανότητα η αλυσίδα να επιστρέψει στο μηδέν ακριβώς σε n *το πλήθος βήματα και όχι νωρίτερα. Προφανώς θα ισχύει ότι* $f_n(0|0) \le P(s_n = 0|s_0 = 0)$. *Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;*
Για λόγους συμμετρίας τα ίδια ισχύουν και για τις πιθανότητες f_{ii} *και* $f_n(i|i)$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 266 *Έστω* i *επαναληπτική κατάσταση και έστω ότι* $i \to j$. *Τότε και* j *είναι επαναληπτική και*

$$f_{ij} := P(\exists\, n \in \mathbb{N} : X_n = j | X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|j) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|i) = f_{ji} = 1$$

Προκύπτει επίσης ότι και $j \to i$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού $i \to j$ τότε $f_{ij} > 0$. Πράγματι, αφού $i \to j$ τότε υπάρχει n τ.ω.

$$0 < P(x_n = j | x_0 = i)$$

και για το μικρότερο από αυτά, έστω n_0 έχουμε

$$0 < P(x_{n_0} = j | x_0 = i)$$

Υπάρχει δηλαδή μονοπάτι

$$i \to i_1 \to \cdots \to i_{n_0-1} \to j$$

έτσι ώστε $P_{i,i_1}P_{i_1,i_2}\cdots P_{i_{n_0-1},j} > 0$ με $i_k \notin \{i,j\}$ με $k = 1, 2, \cdots, n_0 - 1$ αφού ο n_0 είναι ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε $P_{ij}^n > 0$. Θα αποδείξουμε ότι $f_{ji} = 1$. Αν δεν ισχύει τότε υπάρχει θετική πιθανότητα να μην φθάσουμε ποτέ στο i ξεκινώντας από το j. Αρα η πιθανότητα $1 - f_{ji}$ η οποία είναι η πιθανότητα να μην φθάσουμε ποτέ στο i ξεκινώντας από την j είναι θετική. Επομένως,

$$P_{i,i_1}P_{i_1,i_2}\cdots P_{i_{n_0-1},j}\cdot(1 - f_{ji}) > 0.$$

Η πιθανότητα αυτή συμβολίζει την πιθανή διαδρομή της αλυσίδας να ξεκινήσει από το i και να μην επιστρέψει ποτέ, η οποία είναι θετική. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι η i είναι επαναληπτική.
Αφού $f_{ji} = 1$ τότε υπάρχει n_1 έτσι ώστε $P_{ji}^{n_1} > 0$. Οπότε,

$$P_{jj}^{n_1+n+n_0} \geq P_{ji}^{n_1}P_{ii}^{n}P_{ij}^{n_0},$$

και άρα

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n \geq \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n_1+n+n_0} \geq P_{ji}^{n_1}P_{ij}^{n_0}\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n = \infty,$$

αφού i είναι επαναληπτική και άρα $\sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^n = \infty$. Αυτό σημαίνει ότι και η j είναι επαναληπτική. Τέλος, το ότι $f_{ij} = 1$ είναι προφανές αφού $j \to i$ και j επαναληπτική τότε κάνοντας ακριβώς τις ίδιες σκέψεις με πριν αποδεικνύουμε ότι $f_{ij} = 1$. □

Παρατηρηση 267 *Αν $i \leftrightarrow j$ τότε δεν μπορεί η μια να είναι επαναληπτική και η άλλη μεταβατική. Είτε και οι δυο θα είναι επαναληπτικές είτε μεταβατικές. Επομένως, σε ένα αδιαχώριστο σύνολο όλες οι καταστάσεις χαρακτηρίζονται το ίδιο ως προς την επαναληπτικότητα. Αν το σύνολο είναι αδιαχώριστο και πεπερασμένο τότε αναγκαστικά όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές.* □

Ασκηση 268 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

με $a, b \in (0, 1]$. Δείξτε ότι και οι δύο καταστάσεις είναι επαναληπτικές. Τι συμβαίνει στις περιπτώσεις $b = 0, a \in (0, 1]$ ή $a = 0, b \in (0, 1]$ ή $a = b = 0$;

Λυση. Θα αποδείξουμε ότι η 0 είναι επαναληπτική. Για την άλλη κατάσταση ισχύουν τα ίδια. Για να το κάνουμε αυτό θα αποδείξουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^n = \infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπολογίσουμε τον P^n το οποίο έχουμε κάνει σε προηγούμενη άσκηση. Διαπιστώνουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις το άθροισμα είναι άπειρο. Μπορούμε να αποδείξουμε το ίδιο χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η αλυσίδα έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων και ότι αυτές επικοινωνούν μεταξύ τους. Αρα και οι δυο θα είναι επαναληπτικές. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 269 *Μια κατάσταση $j \in S$ είναι επαναληπτική* **ανν**

$$P(X_n = j \text{ για άπειρα } n | X_0 = j) = 1,$$

και είναι μεταβατική **ανν**

$$P(X_n = j \text{ για άπειρα } n | X_0 = j) = 0.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω οι ακέραιοι $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Καταγράφουμε όλα τα μονοπάτια στα οποία η Μαρκοβιανή αλυσίδα επισκέπτεται την κατάσταση j στους χρόνους $n_1, \cdots, n_k$ αλλά όχι ενδιάμεσα, δηλαδή όλες τις πιθανές διαδρομές έτσι ώστε

$$\begin{aligned} X_1 &\neq j, \cdots, X_{n_1-1} \neq j, X_{n_1} = j, \\ X_{n_1+1} &\neq j, \cdots, X_{n_2-1} \neq j, X_{n_2} = j, \\ &\vdots \\ X_{n_{k-1}+1} &\neq j, \cdots, X_{n_{k-1}} \neq j, X_{n_k} = j \end{aligned}$$

Αν ξεκινήσει από την κατάσταση i τότε η πιθανότητα να συμβεί ένα τέτοιο μονοπάτι είναι

$$f_{n_1}(i|j) \cdot f_{n_2-n_1}(j|j) \cdots f_{n_k-n_{k-1}}(j|j)$$

Αθροίζοντας την παραπάνω πιθανότητα για όλα τα πιθανά $n_k \geq n_{k-1}+1$ έχουμε

$$\begin{aligned} &\sum_{l=n_{k-1}+1}^{\infty} f_{n_1}(i|j) \cdot f_{n_2-n_1}(j|j) \cdots f_{l-n_{k-1}}(j|j) \\ = \;& f_{n_1}(i|j) \cdot f_{n_2-n_1}(j|j) \cdots f_{n_{k-1}-n_{k-2}}(j|j) \cdot f_{jj} \end{aligned}$$

αφού $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(j|j) = f_{jj}$. Στην συνέχεια αθροίζουμε σε όλα τα πιθανά $n_{k-1} \geq n_{k-2}+1$ και ούτω κάθε εξής οπότε έχουμε υπολογίσει την πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την i και να επισκεφτεί την j k-φορές η οποία είναι $f_{ij} f_{jj}^{k-1}$. Αρα η πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την i και να επισκεφτεί άπειρες φορές την j είναι ίση με

$$P(X_n = j \text{ για άπειρα } n | X_0 = i) = f_{ij} \cdot \lim_{k \to \infty} f_{jj}^{k-1}$$

Αν συγκεκριμένα επιλέξουμε $i = j$ τότε προκύπτει ότι

$$P(X_n = j \text{ για άπειρα } n | X_0 = j) = \lim_{k \to \infty} f_{jj}^{k}$$

Η πιθανότητα $f_{jj} \in [0,1]$ άρα η παραπάνω πιθανότητα θα είναι ίση είτε με μηδέν είτε με την μονάδα. Αν είναι ίση με την μονάδα τότε και $\lim_{k\to\infty} f_{jj}^k = 1$ το οποίο συμβαίνει μονάχα όταν $f_{jj} = 1$ δηλαδή όταν η j είναι επαναληπτική. Αντίστροφα, αν η j είναι επαναληπτική τότε $f_{jj} = 1$ και επομένως η παραπάνω πιθανότητα είναι ίση με την μονάδα. □

Στα επόμενα δυο θεωρήματα δίνουμε τα κατάλληλα κριτήρια για να αποφασίζουμε αν μια αδιαχώριστη αλυσίδα είναι μεταβατική ή επαναληπτική. Είναι ιδιαίτερα χρήσιμα όταν η αλυσίδα έχει άπειρο πλήθος καταστάσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 270 *Έστω $s \in S$ μια οποιαδήποτε κατάσταση μιας αδιαχώριστης Μαρκοβιανής αλυσίδας. Τότε η αλυσίδα είναι μεταβατική* **αν και μόνο αν** *υπάρχει μια μη μηδενική λύση $\{y_i : i \neq s\}$ του συστήματος*

$$y_i = \sum_{j\neq s} P_{ij} y_j, \quad i \neq s$$

τέτοια ώστε $|y_j| \leq 1$ για κάθε $j \neq s$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Διαλέγουμε μια κατάσταση $s \in S$. Τότε η αλυσίδα θα είναι μεταβατική αν και μόνο αν η s είναι μεταβατική.
Έστω ότι η s είναι μεταβατική. Ορίζουμε τις πιθανότητες

$$\tau_i(n) = P(X_m \neq s,\ 1 \leq m \leq n | X_0 = i)$$

Παρατηρήστε ότι

$$\tau_i(1) = \sum_{j\neq s} P_{ij}, \quad \tau_i(n+1) = \sum_{j\neq s} P_{ij} \tau_j(n)$$

και επίσης $\tau_i(n) \geq \tau_i(n+1)$. Πράγματι,

$$\tau_i(n+1) = \sum_{j\neq s} P(X_k \neq s,\ 2 \leq k \leq n+1,\ X_1 = j | X_0 = i) = \sum_{j\neq s} P_{ij} \tau_j(n)$$

Αρα

$$\tau_i = \lim_{n\to\infty} \tau_i(n) = P(X_m \neq s,\ 1 \leq m \leq \infty | X_0 = i) = 1 - f_{is}$$

χρησιμοποιώντας το λήμμα 13.
Από την σχέση

$$\tau_i(n+1) = \sum_{j\neq s} P_{ij} \tau_j(n)$$

λαμβάνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ (χρησιμοποιώντας το λήμμα κυριαρχημένης σύγκλισης, δες ;;) έχουμε ότι

$$\tau_i = \sum_{j\neq s} P_{ij} \tau_j, \quad i \neq s$$

'ρα το σύστημα εξισώσεων έχει μια λύση τέτοια ώστε $\tau_i \leq 1$ και μένει να αποδείξουμε ότι είναι μη μηδενική. Πράγματι, $\tau_i > 0$ για κάποιο $i \neq s$ αλλιώς $f_{is} = 1$ για κάθε $i \neq s$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} f_{ss} &= f_1(s|s) + \sum_{n=2}^{\infty} P(X_n = s, X_k \neq s, k \geq 1 | X_0 = s) \\ &= P_{ss} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j \neq s} \frac{P(X_n = s, X_k \neq s, X_1 = j, X_0 = s)}{P(X_0 = s)} \\ &= P_{ss} + \sum_{j \neq s} \sum_{n=2}^{\infty} P(X_n = s, X_k \neq s, k \geq 1 | X_1 = j) P_{sj} \quad \text{(αναδιάταξη σειράς)} \\ &= P_{ss} + \sum_{j \neq s} P_{sj} f_{js} \\ &= P_{ss} + \sum_{j \neq s} P_{sj} \\ &= 1 \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι η s είναι επαναληπτική. Αυτό είναι άτοπο άρα $\tau_i > 0$ για κάποιο $i \neq s$ και επομένως η λύση αυτή του συστήματος θα είναι μη μηδενική.
Αντίστροφα, αν y_i είναι μια μη μηδενική λύση του συστήματος τέτοια ώστε $|y_i| \leq 1$ τότε

$$\begin{aligned} |y_i| &\leq \sum_{j \neq s} P_{ij} |y_j| \leq \sum_{j \neq s} P_{ij} = \tau_i(1) \\ &\vdots \\ |y_i| &\leq \sum_{j \neq s} P_{ij} \tau_j(n) = \tau_i(n+1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Δηλαδή $|y_i| \leq \tau_i(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το οποίο σημαίνει ότι $\tau_i > 0$ για κάποιο $i \neq s$. Αυτό με την σειρά του σημαίνει ότι η s είναι μεταβατική αφού υπάρχει θετική πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την s, να επισκεφθεί την i και έπειτα να μην επιστρέψει ποτέ στην s. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 271 *Έστω X_n μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$. Αν το σύστημα*

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} y_j \leq y_i, \qquad \text{για } i > 0$$

έχει μια λύση y_i τέτοια ώστε $y_i \to \infty$ καθώς $i \to \infty$ τότε η αλυσίδα είναι επαναληπτική.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν τα y_i ικανοποιούν το σύστημα αυτό τότε και τα $z_i = y_i + b$ όπου $b > 0$ επίσης ικανοποιούν το ίδιο σύστημα συνεπώς χωρίς βλάβη της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι $y_i \geq b > 0$ για κάθε $i \geq 1$.
Εφόσον τα y_i ικανοποιούν το σύστημα αυτό τότε και

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}^m y_j \leq y_i, \quad \text{για } i > 0$$

Διαλέγουμε ένα $M > 0$ και γράφουμε

$$\sum_{j=1}^{M-1} P_{ij}^m y_j + \sum_{j=M}^{\infty} P_{ij}^m y_j \leq y_i, \quad \text{για } i > 0$$

Αφού $y_i \geq b > 0$ τότε

$$\sum_{j=1}^{M-1} P_{ij}^m y_j + \min_{r \geq M}\{y_r\} \sum_{j=M}^{\infty} P_{ij}^m \leq y_i, \quad \text{για } i > 0$$

Ξεχωρίζουμε δυο περιπτώσεις. Η μια περίπτωση είναι όταν $P_{i0} = 1$ για κάθε $i > 0$. Σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι επαναληπτική διότι αν ήταν μεταβατική τότε θα έπρεπε να υπήρχε μη μηδενική λύση (δες Θεώρημα 270) για το σύστημα

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} y_j = y_i, \quad \text{για } i > 0$$

Η μοναδική λύση του συστήματος αυτού όμως είναι η μηδενική συνεπώς η αλυσίδα είναι επαναληπτική.
Η άλλη περίπτωση είναι όταν υπάρχει $i^* > 0$ τέτοιο ώστε $P_{i^*0} < 1$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{M-1} P_{i^*j}^m y_j + \min_{r \geq M}\{y_r\} \left(1 - P_{i^*0} - \sum_{j=1}^{M-1} P_{i^*j}^m\right) \leq y_{i^*} \tag{8.4}$$

Υποθέτουμε ότι η αλυσίδα είναι μεταβατική. Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{m \to \infty} P_{ij}^m = 0 \quad \text{(δες Θεώρημα 261)}$$

Λαμβάνουμε το όριο στην 8.4 καθώς $m \to \infty$ και έχουμε

$$\min_{r \geq M}\{y_r\}(1 - P_{i^*0}) \leq y_{i^*}$$

δηλαδή

$$\min_{r \geq M}\{y_r\} \leq \frac{y_{i^*}}{1 - P_{i^*0}} \tag{8.5}$$

Εφόσον $y_i \to \infty$ καθώς $i \to \infty$ τότε

$$\min_{r \geq M}\{y_r\} \to \infty \quad \text{καθώς } M \to \infty$$

το οποίο είναι άτοπο διότι το δεξί μέλος της 8.5 είναι ανεξάρτητο του M. Συνεπώς και σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι επαναληπτική. □

8.7.1 Εξισώσεις Διαφορών

Θα αναφέρουμε μερικά στοιχεία για τις ομογενείς και γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές οι οποίες εμφανίζονται συχνά στην μελέτη των στοχαστικών διαδικασιών. Σκοπός μας σε αυτή την περιγραφή είναι να μελετήσουμε τις πιο απλές μορφές χωρίς να διατυπώσουμε και αποδείξουμε αντίστοιχα θεωρήματα. Για μεθοδικότερη και βαθύτερη μελέτη μπορεί κανείς να ανατρέξει για παράδειγμα στο βιβλίο [74].

• Έστω μια ακολουθία αριθμών $y(n)$ η οποία ικανοποιεί την παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} y(n+1) &= ay(n) \quad (\text{εξίσωση διαφορών}) \\ y(0) &= y_0 \quad (\text{αρχική συνθήκη}) \end{aligned}$$

όπου $a, y_0 \in \mathbb{R}$ δοσμένοι αριθμοί. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε την ακολουθία αριθμών που ικανοποιεί τα παραπάνω. Εφόσον $y(n+1) = ay(n) = a^2y(n-1)$ προκύπτει εύκολα ότι $y(n) = a^n y(0)$. Αντικαθιστώντας και το δεδομένο $y(0) = y_0$ καταλήγουμε στο ότι $y(n) = a^n y_0$. Ως παράδειγμα μπορούμε να δούμε την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \frac{1}{2}y(n) \\ y(0) &= 3 \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε εύκολα στο συμπέρασμα ότι $y(n) = 3\frac{1}{2^n}$.

• Θα γενικεύσουμε στην συνέχεια την παραπάνω εξίσωση διαφορών εργαζόμενοι σε μια εξίσωση σε μορφή πινάκων. Έστω $z(n) = \begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \\ \vdots \\ z_k(n) \end{pmatrix}$ μια ακολουθία διανυσμάτων και έστω ένας δοσμένος πίνακας $A_{k\times k}$. Θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση διαφορών

$$\begin{aligned} z(n+1) &= A \cdot z(n) \\ z(0) &= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

όπου $c_1, c_2, \cdots, c_k \in \mathbb{R}$ δοσμένοι αριθμοί. Σκεπτόμενοι όπως προηγούμενα προκύπτει ότι $z(n) = A^n \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$. Συνεπώς θα πρέπει να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα A έτσι ώστε να πάρουμε την λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών.

• Στην συνέχεια θα ασχοληθούμε με εξισώσεις διαφορών ανώτερης τάξης.
Έστω μια ακολουθία $y(n)$ τ.ω.

$$y(n+k) + a_{k-1}y(n+k-1) + \cdots + a_1 y(n+1) + a_0 y(n) = 0 \tag{8.6}$$

όπου $a_{k-1}, \cdots, a_0$ δοσμένοι πραγματικοί αριθμοί. Μια τέτοια σχέση ονομάζεται ομογενής και γραμμική εξίσωση διαφορών k τάξης. Ένας απλός τρόπος να υπολογίσουμε την ακολουθία αυτή είναι να μετατρέψουμε το πρόβλημα αυτό στον υπολογισμό της νιοστής δύναμης ενός πίνακα A κάτι το οποίο έχουμε μελετήσει διεξοδικά στο κεφάλαιο γραμμικής άλγεβρας. Για να γίνει αυτό κατασκευάζουμε k νέες ακολουθίες $b_1(n), b_2(n), \cdots, b_k(n)$ τ.ω.

$$\begin{aligned} b_1(n) &= y(n) \\ b_2(n) &= y(n+1) \\ &\vdots \\ b_k(n) &= y(n+k-1) \end{aligned}$$

Στην συνέχεια σχηματίζουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} b_1(n+1) &= b_2(n) \\ b_2(n+1) &= b_3(n) \\ &\vdots \\ b_{k-1}(n+1) &= b_k(n) \\ b_k(n+1) &= -a_0 b_1(n) - a_1 b_2(n) - \cdots - a_{k-1} b_k(n) \end{aligned} \tag{8.7}$$

Έπειτα θέτουμε $x_n = \begin{pmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ \vdots \\ b_k(n) \end{pmatrix}$ και επομένως το σύστημα 8.7 γράφεται $x_{n+1} = A \cdot x_n$ όπου $A_{k\times k}$ είναι ο παρακάτω πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας αυτής της μορφής είναι γνωστός στην γραμμική άλγεβρα ως ο **συνοδός πίνακας** του πολυωνύμου $\lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0$ (δες [63]). Αποδεικνύεται ότι τόσο το χαρακτηριστικό όσο και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι ίσο με το $d_A(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_0$ (συγκρίνετε το με την εξίσωση διαφορών!).
Συνεπώς ισχύει ότι

$$x_n = A^n \cdot x_0$$

άρα το αρχικό πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση της νιοστής δύναμης του πίνακα A. Για να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα A θα πρέπει να σχηματίσουμε ένα πολυώνυμο $k-1$ βαθμού, το $v(\lambda) = c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_0$, έτσι ώστε

$$\begin{aligned} v(\lambda_1) &= f(\lambda_1) \\ v^{'}(\lambda_1 &= f^{'}(\lambda_1) \\ &\vdots \\ v^{(r_1-1)}(\lambda_1) &= f^{(r_1-1)}(\lambda_1) \\ &\vdots \\ v(\lambda_2) &= f(\lambda_2) \\ &\vdots \end{aligned}$$

όπου $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ οι ιδιοτιμές του πίνακα A (δηλαδή οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου) και $r_1, \cdots, r_m$ οι αντίστοιχες πολλαπλότητες τους και επίσης $f(x) = x^n$. Αν συμβολίσουμε με F τον πίνακα του παραπάνω συστήματος τότε η λύση θα είναι η

$$\begin{pmatrix} c_{k-1} \\ \vdots \\ c_0 \end{pmatrix} = F^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(\lambda_1) \\ f^{'}(\lambda_1) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Δηλαδή οι συντελεστές $c_{k-1}, \cdots, c_0$ είναι γραμμικός συνδυασμός του δεξί μέλους του παραπάνω συστήματος. Επειδή $A^n = c_{k-1}A^{k-1} + c_{k-2}A^{k-2} + \cdots + c_0 I_{k\times k}$ έπεται ότι η $y(n)$ θα έχει την μορφή

$$\begin{aligned} y(n) = b_1(n) = & \quad \lambda_1^n(d_0 + d_1 n + d_2 n^2 + \cdots + d_{r_1-1}n^{r_1-1}) \\ & + \lambda_2^n(f_0 + f_1 n + \cdots + f_{r_2-1}n^{r_2-1}) \\ & + \lambda_3^n \cdots \end{aligned}$$

όπου $d_0, d_1, \cdots, f_0, f_1, \cdots$ αυθαίρετες σταθερές οι οποίες θα υπολογισθούν αν μας δίνονται ισάριθμες αρχικές συνθήκες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 272 *Έστω η παρακάτω εξίσωση διαφορών*

$$y(n+3) + 5y(n+2) + 3y(n+1) - 9y(n) = 0$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9$$

το οποίο έχει ρίζες τις $\lambda_1 = 1$ πολλαπλότητας 1 (δηλαδή $r_1 = 1$) και $\lambda_2 = -3$ πολλαπλότητας 2 (δηλαδή $r_2 = 2$).

Σχήμα 8.4: Το γράφημα του πολυωνύμου $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 3\lambda - 9$

Συνεπώς η λύση θα έχει την μορφή

$$y(n) = c_0 1^n + (-3)^n (d_0 + d_1 n)$$

όπου $c_0, d_0, d_1 \in \mathbb{R}$ *αυθαίρετες σταθερές.* □

Σε μερικές περιπτώσεις μπορούμε να μετατρέψουμε μια μη ομογενή εξίσωση διαφορών ανώτερης τάξης σε ένα ομογενές σύστημα εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης. Για παράδειγμα, έστω η εξίσωση διαφορών

$$y(n+2) + cy(n+1) + dy(n) = w(n) \tag{8.8}$$

Αν μπορούμε να βρούμε ένα ομογενές σύστημα εξισώσεων διαφορών, δηλαδή ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{pmatrix} z_1(n+1) \\ z_2(n+1) \\ \vdots \\ z_k(n+1) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \\ \vdots \\ z_k(n) \end{pmatrix} \tag{8.9}$$

όπου $A_{k\times k}$ πίνακας πραγματικών αριθμών (και όχι συναρτήσεις του n), έτσι ώστε $z_1(n) = w(n)$ τότε η μη ομογενής εξίσωση διαφορών μπορεί να μετατραπεί σε ομογενές σύστημα εξισώσεων διαφορών. Θέτουμε

$$\begin{aligned} b_1(n) &= y(n) \\ b_2(n) &= y(n+1) \end{aligned}$$

Στην συνέχεια σχηματίζουμε το ισοδύναμο σύστημα εξισώσεων διαφορών

$$\begin{pmatrix} b_1(n+1) \\ b_2(n+1) \\ z_1(n+1) \\ z_2(n+1) \\ \vdots \\ z_k(n+1) \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ z_1(n) \\ z_2(n) \\ \vdots \\ z_k(n) \end{pmatrix} \tag{8.10}$$

όπου B κατάλληλος πίνακας πραγματικών αριθμών. Ένας βολικός τρόπος για να κατασκευάσουμε το σύστημα 8.9 είναι να κατασκευάσουμε μια ομογενή εξίσωση διαφορών ανώτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές της οποίας μια λύση να είναι η $w(n)$. Δηλαδή μια εξίσωση της μορφής

$$h(n+k) + c_{k-1}h(n+k-1) + \cdots + c_0 h(n) = 0 \tag{8.11}$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ και κατάλληλες σταθερές $c_0, c_1, \cdots$, Στην συνέχεια, κατά τα γνωστά, κατασκευάζουμε το σύστημα 8.9 από αυτή την εξίσωση διαφορών.

Ο πίνακας B του τελικού συστήματος 8.10 θα έχει την μορφή άνω τριγωνικού σε μορφή Block του οποίου το χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι το

$$\delta_B(\lambda) = \underbrace{(\lambda^2 + c\lambda + d)}_{\text{δες εξίσωση 8.8}} \cdot \underbrace{(\lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + c_0)}_{\text{δες εξίσωση 8.11}}$$

Υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές του B, έστω οι $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ πολλαπλότητας $r_1, \cdots, r_m$ αντίστοιχα, θα έχουμε ότι η λύση της εξίσωσης 8.8 θα έχει την μορφή

$$\begin{aligned} y(n) = & \quad \lambda_1^n(d_0 + d_1 n + d_2 n^2 + \cdots + d_{r_1-1} n^{r_1-1}) \\ & + \lambda_2^n(f_0 + f_1 n + \cdots + f_{r_2-1} n^{r_2-1}) \\ & + \lambda_3^n \cdots \end{aligned}$$

όπου $d_0, d_1, \cdots, f_0, f_1, \cdots$ αυθαίρετες σταθερές. Για να υπολογίσουμε τις αυθαίρετες σταθερές θα πρέπει να τοποθετήσουμε την λύση στην εξίσωση διαφορών όπου θα πρέπει να την ικανοποιεί για κάθε n. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε και τις αρχικές συνθήκες. Αν το δεξί μέλος $w(n)$ μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα $w_1(n) + w_2(n) + \cdots + w_q(n)$ τότε μπορούμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω για το κάθε w_i χωριστά. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B θα έχει την μορφή

$$\delta_B(\lambda) = (\lambda^2 + c\lambda + d) \cdot (\lambda^{r_1} + d_{r_1-1}\lambda^{r_1-1} + \cdots + d_0) \cdot (\lambda^{r_2} + f_{r_2-1}\lambda^{r_2-1} + \cdots + f_0) \cdots$$

όπου το πολυώνυμο $(\lambda^{r_1} + d_{r_1-1}\lambda^{r_1-1} + \cdots + d_0)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της εξίσωσης διαφορών που ικανοποιεί η w_1 κ.τ.λ.

Παραδειγμα 273 *Έστω η μη ομογενής εξίσωση διαφορών*

$$y(n+2) + cy(n+1) + dy(n) = w, \quad c, d, w \in \mathbb{R}$$

Θα μετατρέψουμε την παραπάνω μη ομογενή εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης σε ομογενή εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης.
Πρέπει να κατασκευάσουμε μια ομογενή εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές της οποίας λύση να είναι η $g(n) = w$. Για την συγκεκριμένη περίπτωση θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια ομογενή εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης. Δηλαδή

$$h(n+1) + c_0 h(n) = 0$$

Υπάρχει κάποιο $c_0 \in \mathbb{R}$ τ.ω. η $g(n) = w$ να είναι λύση της; Τοποθετώντας την $g(n) = w$ στην εξίσωση θα υπολογίσω το c_0, αν υπάρχει. Αν δεν υπάρχει, θα προσπαθήσω να κατασκευάσω μια ομογενή εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης η οποία θα έχει δυο συντελεστές που μπορώ να επιλέξω και άρα περισσότερες πιθανότητες επιτυχίας.
Αν η $g(n) = w$ ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση διαφορών θα ισχύει

$$w + c_0 w = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι $c_0 = -1$ και επομένως η $g(n) = w$ είναι μια λύση της εξίσωσης διαφορών

$$h(n+1) = h(n)$$

Στην προκειμένη περίπτωση δεν χρειάζεται να μετατρέψουμε αυτή την εξίσωση διαφορών σε σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης διότι είναι ήδη πρώτης τάξης.
Στην συνέχεια θα μετατρέψουμε την αρχική εξίσωση διαφορών σε ένα σύστημα εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης. Θέτουμε

$$\begin{aligned} b_1(n) &= y(n) \\ b_2(n) &= y(n+1) \\ z_1(n) &= w \end{aligned}$$

Η εξίσωση διαφορών γίνεται

$$\begin{pmatrix} b_1(n+1) \\ b_2(n+1) \\ z_1(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -d & -c & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ z_1(n) \end{pmatrix}$$

'ρα, θα πρέπει να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του παραπάνω πίνακα. Σημειώστε ότι το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι το $\delta(k) = (k-1)(k^2 + ck + d)$. Αν για παράδειγμα οι ιδιοτιμές είναι οι $k_1 = 1$ πολλαπλότητας δυο και η $k_2 = \lambda$ τότε η λύση της εξίσωσης διαφορών θα έχει την μορφή

$$y(n) = A + Bn + C\lambda^n$$

Αντικαθιστώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση διαφορών και χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες υπολογίζουμε τις σταθερές A, B, C.
Ας πάρουμε για παράδειγμα την παρακάτω εξίσωση

$$y(n+2) - \frac{1}{p}y(n+1) + \frac{1-p}{p}y(n) = -\frac{1}{p} \tag{8.12}$$

με $p \in (0,1)$.
Αν $p \neq \frac{1}{2}$ τότε οι ιδιοτιμές είναι οι $k_1 = 1$ πολλαπλότητας δυο και $k_2 = \frac{1-p}{p}$. Επομένως η λύση της εξίσωσης διαφορών θα έχει την μορφή

$$y(n) = A + Bn + C\left(\frac{1-p}{p}\right)^n$$

Τοποθετώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση διαφορών διαπιστώνουμε ότι πρέπει $B = \frac{1}{1-2p}$. Δηλαδή όταν $p \neq \frac{1}{2}$ η λύση θα έχει την μορφή

$$y(n) = A + \frac{n}{1-2p} + C\left(\frac{1-p}{p}\right)^n \tag{8.13}$$

Στην συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε και τους A, C αν έχουμε και δυο αρχικές συνθήκες.
Αν $p = \frac{1}{2}$ τότε έχουμε μια ιδιοτιμή, την $k = 1$ πολλαπλότητας τρία, επομένως η λύση θα έχει την μορφή

$$y(n) = A + Bn + Cn^2$$

Τοποθετώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση διαφορών προκύπτει ότι $C = -1$. Δηλαδή η λύση θα έχει την μορφή

$$y(n) = A + Bn - n^2 \tag{8.14}$$

Στην συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε και τους A, B αν έχουμε και δυο αρχικές συνθήκες. □

Παραδειγμα **274** *Έστω η εξίσωση διαφορών*

$$y(n+2) + cy(n+1) + dy(n) = n$$

Στόχος μας, σε πρώτη φάση, είναι να κατασκευάσουμε μια ομογενή εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές της οποίας μια λύση της να είναι η $g(n) = n$. Ας δοκιμάσουμε πάλι μια εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης, δηλαδή της μορφής

$$h(n+1) + c_0 h(n) = 0$$

Τοποθετώντας την $g(n) = n$ στην εξίσωση αυτή έχουμε

$$(n+1) + c_0 n = 0$$

Διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει $c_0 \in \mathbb{R}$ τ.ω. να ισχύει το παραπάνω για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια εξίσωση δεύτερης τάξης. Αυτή θα έχει την μορφή

$$h(n+2) + c_1 h(n+1) + c_0 h(n) = 0$$

Τοποθετώντας την $g(n) = n$ στην εξίσωση αυτή έχουμε ότι $c_1 = -2$ και $c_0 = 1$. Δηλαδή η $g(n) = n$ είναι μια λύση της εξίσωσης

$$h(n+2) - 2h(n+1) + h(n) = 0$$

Στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε το σύστημα εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης από την παραπάνω εξίσωση. Θέτουμε

$$\begin{aligned} z_1(n) &= h(n) \\ z_2(n) &= h(n+1) \end{aligned}$$

'ρα, το σύστημα εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης είναι το

$$\begin{pmatrix} z_1(n+1) \\ z_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(n) \\ z_2(n) \end{pmatrix}$$

Τέλος, θα κατασκευάσουμε το σύστημα εξισώσεων πρώτης τάξης για την αρχική εξίσωση διαφορών. Θέτουμε

$$\begin{aligned} b_1(n) &= y(n) \\ b_2(n) &= y(n+1) \end{aligned}$$

Δηλαδή, η αρχική εξίσωση διαφορών θα είναι ισοδύναμη με το παρακάτω σύστημα εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης

$$\begin{pmatrix} b_1(n+1) \\ b_2(n+1) \\ z_1(n+1) \\ z_2(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d & -c & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ z_1(n) \\ z_2(n) \end{pmatrix}$$

Ο πίνακας του παραπάνω συστήματος είναι άνω τριγωνικός σε μορφή Block επομένως το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο είναι το $\delta(k) = (k^2 + ck + d)(k^2 - 2k + 1)$.
Για παράδειγμα έστω η εξίσωση διαφορών

$$y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = n$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα θα είναι το $\delta(k) = (k-1)^2(k^2 - 2k + 1) = (k-1)^4$. Συνεπώς η λύση της εξίσωσης διαφορών θα έχει την μορφή

$$y(n) = A + Bn + Cn^2 + Dn^3$$

Τοποθετώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση διαφορών παίρνουμε την εξής σχέση

$$2C + (6n + 6)D = n$$

Η σχέση αυτή γράφεται

$$(6D - 1)n + 6D + 2C = 0$$

Η σχέση αυτή ικανοποιείται για οποιοδήποτε n όταν $D = \frac{1}{6}$ και $C = -\frac{1}{2}$. Τις σταθερές A, B μπορούμε να τις υπολογίσουμε αν έχουμε δυο αρχικές συνθήκες. Για παράδειγμα αν απαιτήσουμε $y(0) = 1$ και $y(1) = 2$ προκύπτει ότι $A = 1$ και $B = \frac{4}{3}$. Επομένως η εξίσωση διαφορών

$$\begin{aligned} y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) &= n \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 2 \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση την

$$y(n) = 1 + \frac{4}{3}n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6}$$

□

Παραδειγμα 275 *Έστω η εξίσωση διαφορών*

$$y(n+2) + cy(n+1) + dy(n) = \lambda w^n$$

Επειδή η εξίσωση είναι μη ομογενής θα πρέπει να κατασκευάσουμε μια ομογενή εξίσωση διαφορών όπου η $g(n) = \lambda w^n$ θα είναι μια λύση. Δοκιμάζουμε μια εξίσωση πρώτης τάξης, δηλαδή

$$h(n+1) + c_0 h(n) = 0$$

Τοποθετούμε την $g(n) = \lambda w^n$ στην εξίσωση αυτή και έχουμε $c_0 = w$, άρα η εξίσωση είναι η

$$h(n+1) = wh(n)$$

Επομένως η μη ομογενής εξίσωση διαφορών γράφεται, αφού πρώτα θέσουμε $b_1(n) = y(n)$ και $b_2(n) = y(n+1)$,

$$\begin{pmatrix} b_1(n+1) \\ b_2(n+1) \\ z_1(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -d & -c & 1 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1(n) \\ b_2(n) \\ z_1(n) \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα είναι το $\delta(k) = (k-w)(k^2+ck+d)$. Ας δούμε συγκεκριμένα την εξίσωση

$$\begin{aligned} y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) &= 2 \cdot 3^n \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 2 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η λύση θα είναι της μορφής

$$y(n) = A + Bn + C3^n$$

Τοποθετώντας την μορφή αυτή στην εξίσωση διαφορών προκύπτει ότι $C = \frac{1}{2}$. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας και τις αρχικές συνθήκες έχουμε τελικά την λύση η οποία είναι

$$y(n) = \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2}$$

□

Παραδειγμα 276 *Έστω η εξίσωση διαφορών*

$$y(n+2) + cy(n+1) + dy(n) = n^2 + 2^n$$

Πρόκειται για μια εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης μη ομογενής. Το δεξί μέλος είναι το $w_1(n) + w_2(n)$ με $w_1(n) = n^2$ και $w_2(n) = 2^n$. Θα βρούμε μια ομογενή εξίσωση διαφορών με σταθερούς συντελεστές που να ικανοποιείται από την w_1

και αντίστοιχα για την w_2. Αρχικά, για την w_1 δοκιμάζουμε μια εξίσωση διαφορών πρώτης τάξης, δηλαδή της μορφής $h(n+1)+c_0h(n)=0$. Διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει $c_0 \in \mathbb{R}$ κατάλληλο έτσι ώστε η w_1 να είναι λύση. Προχωράμε σε εξίσωση δεύτερης τάξης, δηλαδή της μορφής $h(n+2)+c_1h(n+1)+c_0h(n)=0$ και διαπιστώνουμε επίσης ότι δεν υπάρχουν κατάλληλοι συντελεστές έτσι ώστε η w_1 να είναι λύση της. Στην συνέχεια δοκιμάζουμε εξίσωση τρίτης τάξης, δηλαδή $h(n+3)+c_2h(n+2)+c_1h(n+1)+c_0h(n)=0$. Τοποθετώντας την $w_1(n)=n^2$ στην εξίσωση αυτή προκύπτει η ισότητα

$$n^2(1+a+b+c)+n(6+4a+2b)+9+4a+b=0$$

Για να είναι λύση θα πρέπει να τα a,b,c να ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned} 1+a+b+c &= 0 \\ 6+4a+2b &= 0 \\ 9+4a+b &= 0 \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος είναι $a=-3$, $b=3$ και $c-1$. Δηλαδή η εξίσωση διαφορών που ικανοποιεί η $w_1(n)=n^2$ είναι η

$$h(n+3)-3h(n+2)+3h(n+1)-h(n)=0$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της είναι το $\delta_{w_1}(\lambda)=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1$.
Παρόμοια, για την $w_2=2^n$ βρίσκουμε ότι ικανοποιεί την $h(n+1)-2h(n)=0$ με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $\delta_{w_2}(\lambda)=\lambda-2$. Συνεπώς το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της αρχικής εξίσωσης διαφορών είναι το

$$(\lambda^2+c\lambda+d)\cdot(\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1)\cdot(\lambda-2)$$

Αφού βρούμε τις ρίζες (ιδιοτιμές) κατασκευάζουμε την λύση κατά τα γνωστά. □

Παραδειγμα 277 (Τυχαίος Περίπατος με ένα ανακλαστικό εμπόδιο) *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n με τιμές στο $\mathbb{N}\cup\{0\}$ και $X_0=i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Έστω ότι ο πίνακας μετάβασης είναι τ.ω. $P_{i,i-1}=q$, $P_{i,i+1}=p$ για $i\geq 1$ ενώ $P_{00}=q$ και $P_{01}=p$ με $p+q=1$ και $pq\neq 0$.*
Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 270. Διαλέγουμε $s=0$ και σχηματίζουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$y_i=\sum_{j\neq 0}P_{ij}y_j, \quad i\neq 0$$

ή αλλιώς

$$\begin{aligned} y_1 &= py_2 \\ y_i &= py_{i+1}+qy_{i-1}, \quad i=2,3,\cdots, \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την θεωρία που αναπτύξαμε περί εξισώσεων διαφορών θα ισχύει ότι

$$y_i = C + D\left(\frac{q}{p}\right)^i, \quad \text{όταν } p \neq q$$

και

$$y_i = C + Di, \quad \text{όταν } p = q = \frac{1}{2}$$

• *Αν $q > p$ τότε αναγκαστικά $D = 0$ αλλιώς η λύση θα είναι μη φραγμένη. Επομένως $y_i = C$ για $i = 2, 3, \cdots$, και επιπλέον $y_1 = pC$. Αρα από την σχέση $y_2 = qy_1 + py_3$ προκύπτει ότι $C = qpC + pC$. Αν $C \neq 0$ τότε αναγκαστικά $p = 1$ το οποίο είναι άτοπο με την υπόθεση ότι $q > p$. Αρα $C = 0$ επομένως δεν υπάρχει μη μηδενική και φραγμένη λύση του συστήματος και συνεπώς η αλυσίδα είναι επαναληπτική.*
• *Αν $q = p = \frac{1}{2}$ τότε η λύση της εξίσωσης διαφορών είναι η $y_i = A + Bi$ για $i = 2, 3, \cdots$, Προφανώς, $B = 0$ αλλιώς η λύση είναι μη φραγμένη και επομένως $y_i = A$ για $i = 2, 3, \cdots$,. Όμως $y_1 = py_2 = pA$ και όπως προηγούμενα έχουμε το συμπέρασμα ότι αναγκαστικά $A = 0$, δηλαδή η αλυσίδα είναι πάλι επαναληπτική.*
• *Αν $q < p$ τότε μπορούμε να δούμε ότι μια λύση της εξίσωσης διαφορών θα είναι η*

$$y_i = 1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i, \quad \text{για } i = 1, 2, \cdots, \tag{8.15}$$

Προφανώς πρόκειται για μια μη μηδενική και φραγμένη από την μονάδα λύση των εξισώσεων επομένως σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι μεταβατική.
Αυτό θα μπορούσαμε να το δούμε και ως εξής: οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} y_1 &= py_2 \\ y_i &= py_{i+1} + qy_{i-1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

είναι ισοδύναμες με τις

$$\begin{aligned} y_i &= qy_{i-1} + py_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, \\ y_0 &= 0 \end{aligned}$$

Όταν $p \neq q$ τότε η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης διαφορών είναι η $y_i = C + D\left(\frac{q}{p}\right)^i$. Αφού $y_0 = 0$ έπεται ότι $D = -C$ και άρα $y_i = C\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right)$ για οποιοδήποτε C. Διαλέγοντας $C = 1$ παίρνουμε την μη μηδενική και φραγμένη από την μονάδα λύση της ισότητας 8.15. □

Παραδειγμα 278 (Τυχαίος Περίπατος) *Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 270 στον τυχαίο περίπατο για να επιβεβαιώσουμε το γεγονός ότι είναι επαναληπτική Μαρκοβιανή αλυσίδα όταν $p = q = \frac{1}{2}$ και μεταβατική αλλιώς (δες θεώρημα 263). Διαλέγουμε $s = 0$ και σχηματίζουμε τις εξισώσεις*

$$y_i = \sum_{j \neq 0} P_{ij} y_j, \quad i \neq 0$$

Το σύστημα αυτό μπορούμε να το χωρίσουμε σε δυο συστήματα εξισώσεων. Το πρώτο θα είναι

$$\begin{aligned} y_1 &= py_2 \\ y_i &= qy_{i-1} + py_{i+1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

και το δεύτερο θα είναι

$$\begin{aligned} y_{-1} &= qy_{-2} \\ y_{-i} &= qy_{-i-1} + py_{-i+1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

Θέτοντας $z_i = y_{-i}$ *το δεύτερο σύστημα γράφεται*

$$\begin{aligned} z_1 &= qz_2 \\ z_i &= pz_{i-1} + qz_{i+1}, \quad i = 2, 3, \cdots, \end{aligned}$$

• *Αν* $q > p$ *τότε η λύση του πρώτου συστήματος θα είναι της μορφής* $y_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i$. *Αναγκαστικά θα πρέπει* $B = 0$ *για να είναι φραγμένη και επομένως* $y_i = A$ *για* $i = 2, 3, \cdots$, *καθώς και* $y_1 = pA$. *Από την σχέση* $y_2 = qy_1 + py_3$ *προκύπτει ότι αν* $A \neq 0$ *τότε αναγκαστικά* $p = 1$ *το οποίο αντιβαίνει στην υπόθεση* $q > p$. *Αρα* $A = 0$. *Στο δεύτερο όμως σύστημα μια μη μηδενική και φραγμένη από την μονάδα λύση είναι της μορφής* $z_i = 1 - \left(\frac{p}{q}\right)^i$. *Επομένως η αλυσίδα σε αυτή την περίπτωση είναι μεταβατική.*
• *Αν* $q < p$ *εργαζόμαστε εντελώς ανάλογα και καταλήγουμε στο γνωστό συμπέρασμα ότι η αλυσίδα είναι μεταβατική.*
• *Αν* $q = p = \frac{1}{2}$ *τότε η λύση του πρώτου συστήματος θα είναι της μορφής* $y_i = A + Bi$. *Αρα πρέπει* $B = 0$ *αλλιώς θα είναι μη φραγμένη. Αν* $A \neq 0$ *τότε από τις σχέσεις* $y_1 = py_2$ *και* $y_2 = qy_1 + py_2$ *προκύπτει ότι* $p = 1$ *το οποίο είναι άτοπο με την υπόθεση ότι* $p = q = \frac{1}{2}$. *Δηλαδή αναγκαστικά* $A = 0$. *Εργαζόμενοι στο δεύτερο σύστημα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η μοναδική λύση των εξισώσεων είναι η μηδενική. Επομένως, σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι επαναληπτική.* □

Άσκηση 279 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων το* $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$ *και πίνακα μετάβασης τον* P *τέτοιος ώστε* $P_{00} = 0$, $P_{01} = 1$. *Επίσης* $P_{i-1,i} = q$ *και* $P_{i,i+1} = p$ *όπου* $p, q \in (0, 1)$ *και* $p + q = 1$. *Σε ποιες περιπτώσεις η αλυσίδα είναι μεταβατική και σε ποιες επαναληπτική;*

Άσκηση 280 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων το* $S = \mathbb{Z}$ *και πίνακα μετάβασης τον* P *τέτοιος ώστε* $P_{i-1,i} = q$, $P_{i,i} = w$ *και* $P_{i,i+1} = e$ *όπου* $q, w, e \in (0, 1)$ *και τέτοια ώστε* $q + w + e = 1$. *Σε ποιες περιπτώσεις η αλυσίδα είναι μεταβατική και σε ποιες επαναληπτική;*

8.8 Ανάλυση του συνόλου καταστάσεων

ΘΕΩΡΗΜΑ 281 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n ορισμένη σε έναν αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων S. Τότε,*

$$S = T \cup \bigcup_{j=1}^{N} C_j,$$

όπου T είναι υποσύνολο του S και περιέχει όλες τις μεταβατικές καταστάσεις της S, C_j είναι κλειστό και αδιαχώριστο υποσύνολο επαναληπτικών καταστάσεων και N είναι το πλήθος αυτών των συνόλων C_j.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $R = S \setminus T$ το οποίο είναι το σύνολο των επαναληπτικών καταστάσεων. Αν $i \leftrightarrow j$ τότε και οι δυο καταστάσεις ανήκουν είτε στην R είτε στην T αφού λόγω επικοινωνίας θα είναι είτε και οι δυο επαναληπτικές είτε όχι. Όμως,

$$R = \bigcup_{j=1}^{N} C_j$$

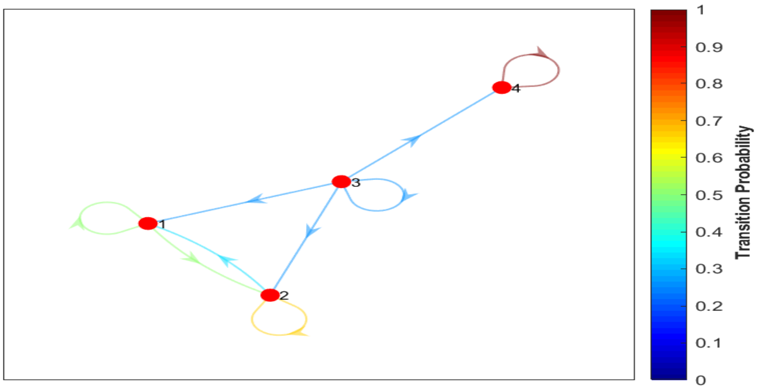
με $C_j = [s_j], s_j \in R$ δηλαδή είναι επαναληπτική. Αφού κάθε C_j είναι εξ ορισμού αδιαχώριστο, θα αποδείξουμε μόνο ότι είναι κλειστό. Αν $i \in C_k$ και $i \to j$ τότε και $i \leftrightarrow j$ οπότε και $j \in C_k$. Πράγματι, αφού $i \in C_k$ τότε η i είναι επαναληπτική, άρα και η j θα είναι επαναληπτική. Αυτό όμως σημαίνει ότι αναγκαστικά $i \leftrightarrow j$ αφού η πιθανότητα να ακολουθήσει ένα μονοπάτι της μορφής $i \to i_1 \to \cdots \to i_{n-1} \to j$ είναι θετική και αφού η i είναι επαναληπτική τότε αναγκαστικά από το j θα επιστρέψει στην i με θετική πιθανότητα και αυτό σημαίνει ότι $j \to i$. Επομένως, από την (οποιαδήποτε) κατάσταση $i \in C_k$ η αλυσίδα θα καταλήξει πάλι σε μια κατάσταση $j \in C_k$, δηλαδή το C_k είναι κλειστό. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 282 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι το $\{1,2\}$ είναι κλειστό σύνολο αφού $P_{ij} = 0$ με $i \in \{1,2\}$ και $j \notin \{1,2\}$ καθώς και το $\{4\}$ το οποίο επίσης είναι απορροφητικό. Η κατάσταση 4 ως απορροφητική είναι και επαναληπτική. Επίσης οι καταστάσεις 1 και 2 είναι επαναληπτικές. Για να το δικαιολογήσουμε αυτό μπορούμε να σκεφτούμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία έχει πίνακα μετάβασης τον

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



Σχήμα 8.5: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος 282

και σύνολο καταστάσεων τις $1, 2$. *Οι δυο καταστάσεις συνεπικοινωνούν και λόγω ότι το σύνολο καταστάσεων είναι πεπερασμένο η μια τουλάχιστον είναι επαναληπτική. Λόγω συνεπικοινωνίας θα είναι και οι δυο επαναληπτικές. Η αρχική Μαρκοβιανή αλυσίδα αν μεταβεί στο σύνολο* $\{1, 2\}$, *λόγω του ότι είναι κλειστό, θα απορροφηθεί και επομένως θα συμπεριφέρεται σαν μια νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων τις* $1, 2$ *και πίνακα μετάβασης τον* $\hat{P}$.
Η κατάσταση 3 είναι μεταβατική αφού υπάρχει θετική πιθανότητα να περάσει από την 3 και να απορροφηθεί στην 4 ή στο $\{1, 2\}$ *και άρα να μην ξαναγυρίσει στην 3. Δηλαδή, αν* $T = \{3\}$, $C_1 = \{1, 2\}$ *και* $C_2 = \{4\}$ *τότε*

$$S = \{1,2,3,4\} = \underbrace{\overbrace{\{3\}}^{T}}_{\text{σύνολο μεταβατικών}} \bigcup \underbrace{\overbrace{\{1,2\}}^{C_1} \cup \overbrace{\{4\}}^{C_2}}_{\text{ένωση κλειστών συνόλων επαναληπτικών}}$$

□

Παρατηρηση 283 *Είναι σημαντικό να αναλύσουμε τον χώρο καταστάσεων σε μεταβατικές και σε ένωση κλειστών συνόλων επαναληπτικών καταστάσεων. Εάν η Μαρκοβιανή αλυσίδα απορροφηθεί σε ένα κλειστό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων δεν υπάρχει περίπτωση να πάρει τιμές εκτός του συνόλου αυτού για όλα τα επόμενα n. Συνεπώς είναι σαν να έχουμε μια νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία έχει σύνολο καταστάσεων το κλειστό αυτό σύνολο και πίνακα μετάβασης τον πίνακα που προέρχεται από τον αρχικό διαγράφοντας στήλες και γραμμές καταστάσεων που δεν ανήκουν στο κλειστό αυτό σύνολο. Επομένως εργαζόμαστε σε έναν μικρότερο πίνακα για την μελέτη των καταστάσεων αυτών. Συνεπώς, κάθε κλειστό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων ορίζει μια νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία μπορεί να μελετηθεί χωριστά.*

□

8.9 Μηδενικά και θετικά επαναληπτικές καταστάσεις

Έστω $j \in S$ μια κατάσταση μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας X_n. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$T_j = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = j | X_0 = j\}$$

Δηλαδή, σε κάθε πιθανό μονοπάτι η T_j μας δίνει το πλήθος βημάτων για το οποίο η αλυσίδα επανήλθε στην κατάσταση j ξεκινώντας από την j. Ο μέσος χρόνος επαναφοράς είναι

$$\begin{aligned} m_j = \mathbb{E}(T_j) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(X_n = j, X_l \neq j, 1 \leq l \leq n-1 | X_0 = j) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(j|j) \end{aligned}$$

είναι δηλαδή η μέση τιμή του πλήθους των βημάτων για επαναφορά αν το πείραμα επαναληφθεί άπειρες φορές (κάθε μονοπάτι αναπαριστά ένα πείραμα).

Ορισμος 284 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n. Θα λέμε ότι η $i \in S$ είναι* ***μηδενικά επαναληπτική*** *κατάσταση εάν είναι επαναληπτική και αν ο μέσος χρόνος επαναφοράς*

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(i|i) = \infty.$$

Μια κατάσταση $i \in S$ ονομάζεται ***θετικά επαναληπτική*** *αν είναι επαναληπτική και $m_i < \infty$.*

'Σκηση 285 *Αποδείξτε ότι η κατάσταση i είναι απορροφητική* **ανν** *ο μέσος χρόνος επαναφοράς της είναι μονάδα, δηλαδή $m_i = 1$.*

Λυση. Θα χρειαστούμε την σημαντική παρατήρηση 260, η οποία στην ουσία λέει ότι αν μια κατάσταση είναι επαναληπτική τότε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|i) = 1$.

· Έστω ότι είναι απορροφητική. Τότε $P_{ii} = 1$. Θα υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο επαναφοράς m_i. Έχουμε ότι $m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(i|i)$. Παρατηρούμε ότι $f_1(i|i) = P_{ii} = 1$ ενώ $f_m(i|i) = 0$ για κάθε $m \geq 2$ διότι η πιθανότητα $P_{ij} = 0$ για κάθε $j \neq i$. Άρα προκύπτει ότι $m_i = 1$.

· Αντίστροφα, αν $m_i = 1$ θα αποδείξουμε ότι η i είναι απορροφητική. Εφόσον $m_i = 1$ έπεται ότι η κατάσταση i είναι θετικά επαναληπτική και άρα επαναληπτική. Επομένως ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|i) = 1$. Έστω ότι υπάρχει κάποιος ακέραιος $n_j \in \{n \in \mathbb{N} : f_n(i|i) > 0\}$ τέτοιος ώστε $n_j > 1$. Τότε

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(i|i) > \sum_{n=1}^{\infty} f_n(i|i) = 1$$

Αυτό όμως είναι άτοπο διότι έχουμε υποθέσει ότι $m_i = 1$. Αρα $\{n \in \mathbb{N} : f_n(i|i) > 0\} = \{1\}$. Αφού $m_i = f_1(i|i) = 1$ έπεται ότι $P_{ii} = f_1(i|i) = 1$ άρα η κατάσταση i είναι απορροφητική. □

Άσκηση 286 *Για την Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$\begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

και καταστάσεις $0,1$ *δείξτε ότι οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές όταν* $a, b \in (0,1)$.

Λυση. Θα υπολογίσουμε την $f_n(0|0)$ όταν $b \in (0,1)$. Από τον ορισμό βλέπουμε ότι

$$f_n(0|0) = P_{01}(P_{11})^{n-2}P_{10} = a(1-b)^{n-2}b \quad \text{όταν } n \geq 2$$

ενώ $f_1(0|0) = 1 - a$. Θα υπολογίσουμε το άπειρο άθροισμα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n f_n(0|0) = 1 - a + \frac{ab}{1-b}\sum_{n=2}^{\infty} n(1-b)^{n-1}$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} n(1-x)^{n-1} &= -\sum_{n=2}^{\infty}((1-x)^n)' \\
&= -\left(\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)^n\right)' + (1+(1-x))' \\
&= \frac{1}{x^2} - 1 \quad \text{όταν } |1-x| < 1
\end{aligned}$$

'ρα

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(1-b)^{n-1} = \frac{1}{b^2} - 1$$

και επομένως ο μέσος χρόνος επαναφοράς

$$m_0 = 1 - a + \frac{ab}{(1-b)}\left(\frac{1}{b^2} - 1\right) = \frac{a+b}{b}$$

Παρομοίως εργαζόμαστε για τον υπολογισμό της m_1. □

Άσκηση 287 *Εξετάστε την αλυσίδα του περιπατητή ως προς την επαναληπτικότητα. Υπολογίστε τον μέσο χρόνο επαναφοράς των θετικά επαναληπτικών καταστάσεων.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εύκολα βλέπουμε ότι όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους και επειδή η αλυσίδα είναι πεπερασμένη όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές. Θα εξετάσουμε αν είναι θετικά επαναληπτικές ή μηδενικά επαναληπτικές.
Υπολογίζουμε το

$$R_{11}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{11}^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P_{11}^n x^n$$

Αφού $P_{11}^{2k} = 1/2$ ενώ $P_{11}^{2k+1} = 0$ τότε

$$R_{11}(x) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(x^2)^n = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} - 1\right)$$

Δηλαδή, $F_{11}(x) = \frac{x^2}{2-x^2}$ (δες 259) και επομένως $F_{11}'(1) = 4 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(1|1) = m_1$. Αρα η κατάσταση 1 είναι θετικά επαναληπτική με μέσο χρόνο επαναφοράς $m_1 = 4$. Παρομοίως για τις άλλες καταστάσεις. □

8.10 Περιοδικότητα καταστάσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ 288 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n με τιμές στο χώρο καταστάσεων S. Θα λέμε ότι η i είναι* **περιοδική** *κατάσταση* **ανν** *ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\{n \in \mathbb{N} : P_{ii}^n > 0\}$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 2 αλλιώς ονομάζεται* **απεριοδική**. *Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης συμβολίζεται με $d(i)$ και ονομάζεται η περίοδος της κατάστασης i. Οπότε η κατάσταση i είναι περιοδική* **ανν** *$d(i) \geq 2$. Μια κατάσταση i η οποία είναι ταυτόχρονα θετικά επαναληπτική και απεριοδική ονομάζεται* **εργοδική**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 289 *Έστω κάποιος ακέραιος αριθμός n_0 τέτοιος ώστε $P_{ii}^{n_0} > 0$ για κάποια κατάσταση i. Τότε προφανώς ισχύει ότι $P_{ii}^{kn_0} > 0$ για κάθε $k = 1, 2, \cdots$ (υπολογίστε για παράδειγμα το στοιχείο $P_{ii}^{2n_0}$) και επίσης ο $d(i)$ θα διαιρεί τον n_0. Αν ο n_0 είναι πρώτος αριθμός τότε $d(i) = 1$ ή n_0.*

ΑΣΚΗΣΗ 290 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με δυο καταστάσεις $1, 2$ και πίνακα μετάβασης*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθούν τα $d(1), d(2)$.

ΛΥΣΗ. Υπολογίζουμε τους πίνακες P^2, P^3. Θα δούμε ότι δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε μεγαλύτερες δυνάμεις, στο συγκεκριμένο παράδειγμα. Έχουμε,

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

και

$$P^3 = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/8 & 5/8 \end{pmatrix}$$

'ρα $P_{11} = 0, P_{11}^2 = 1/2, P_{11}^3 = 1/4$. Επομένως, για $n = 2, 3$ έχουμε θετική πιθανότητα. Αυτό σημαίνει ότι $d(1) = 1$. Αντίστοιχα, βλέπουμε ότι $P_{22} = 1/2 > 0$ οπότε $d(2) = 1$.
Γενικά, αν δεν μπορούμε να βρούμε το αποτέλεσμα δουλεύοντας μέχρι κάποια λογική δύναμη, τότε ίσως είναι προτιμότερο να υπολογίσουμε τον P^n ή μόνο το στοιχείο P_{ii}^n προκειμένου να χαρακτηρίσουμε την κατάσταση i. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 291 *Έστω $i, j \in S$ και $i \leftrightarrow j$. Τότε $d(i) = d(j)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού $i \leftrightarrow j$ τότε μπορούμε να βρούμε $n, m \in \mathbb{N}$ τ.ω. $P_{ji}^n > 0$ και $P_{ij}^m > 0$. Άρα $\varepsilon = P_{ij}^m P_{ji}^n > 0$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{s=1}^{d} A_{is} B_{sj}$$

με A, B πίνακες και $d \leq \infty$, έχουμε

$$P_{jj}^{n+m+k} = \sum_{s=1}^{d} P_{js}^n P_{sj}^{m+k} \geq P_{ij}^m P_{ii}^k P_{ji}^n = \varepsilon P_{ii}^k. \tag{8.16}$$

Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$P_{ii}^{n+m+k} \geq \varepsilon P_{jj}^k. \tag{8.17}$$

Διαλέγοντας $k = 0$ στην ανισότητα 8.17 έχουμε ότι $P_{ii}^{n+m} > 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο $d(i)$ διαιρεί τον $n+m$. Επίσης, για κάθε k με $P_{jj}^k > 0$ έχουμε ότι $P_{ii}^{n+m+k} > 0$ άρα ο $d(i)$ διαιρεί και τον $n+m+k$ και επομένως και τον k. 'ρα, ο $d(i)$ διαιρεί όλους τους αριθμούς που διαιρεί ο $d(j)$ (αφού εξ ορισμού ο $d(j)$ είναι ο Μ.Κ.Δ. όλων των k τ.ω. $P_{jj}^k > 0$) και επιπλέον τον $n + m$. Αναγκαστικά, λοιπόν $d(i) \leq d(j)$. Διαλέγοντας $k = 0$ στην ανισότητα 8.16 και κάνοντας τους ίδιους συλλογισμούς με πριν έχουμε ότι $d(j) \leq d(i)$, συνεπώς $d(i) = d(j)$. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 292 *Άρα, σε κάθε αδιαχώριστο σύνολο $C \subseteq S$ όλες οι καταστάσεις έχουν την ίδια περίοδο d. Αν συμβολίσουμε με n_0^i τον πρώτο ακέραιο τ.ω. $P_{ii}^{n_0^i} > 0$ τότε ο d θα διαιρεί όλους τους αριθμούς n_0^i όπου $i \in C$. Αν κάποιος από τους ακέραιους n_0^i είναι* **πρώτος** *αριθμός τότε $d = 1$ όταν υπάρχει ακέραιος k που δεν είναι πολλαπλάσιο του n_0^i και κατάσταση j τ.ω. $P_{jj}^k > 0$. Όταν ο πίνακας μετάβασης είναι μεγάλος και είναι δύσκολο να υπολογίσουμε ιδιοτιμές (και ιδιοδιανύσματα αν χρειάζεται) τότε το παραπάνω σκεπτικό μπορεί να είναι ιδιαίτερα βολικό όταν κανείς μπορεί να χρησιμοποιήσει μαθηματικό λογισμικό για να υπολογίζει δυνάμεις του πίνακα.* □

Παραδειγμα 293 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

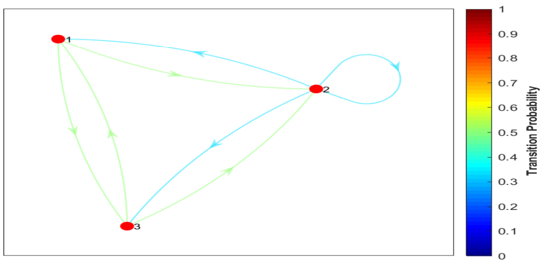
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη ενώ η εύρεση ιδιοτιμών είναι δύσκολη. Θα χρησιμοποιήσουμε το σκεπτικό της παρατήρησης 292. Υπολογίζουμε τους ακεραίους n_0^i για $i = 1, \cdots, 6$ και βλέπουμε ότι είναι ίσοι με 3, δηλαδή είναι πρώτος αριθμός. Δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα όσον αφορά την περιοδικότητα παρά μόνο ότι είναι είτε 1 είτε 3. Συνεχίζουμε τον υπολογισμό των δυνάμεων του πίνακα και βλέπουμε ότι $P_{ii}^5 > 0$ και το 5 δεν είναι πολλαπλάσιο του 3, επομένως ο $d = 1$. □

Ασκηση 294 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Να εξετασθεί ως προς την περιοδικότητα η κατάσταση 1.



Σχήμα 8.6: Το γράφημα της αλυσίδας της άσκησης 294

Λυση. Βλέπουμε ότι $P_{11} = 0$ επομένως θα πρέπει να υπολογίσουμε τους P^2, P^3 και ίσως να χρειαστούν και επιπλέον υπολογισμοί. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 291 για να αποφύγουμε τους πολλαπλασιασμούς πινάκων. Διαπιστώνουμε ότι $P_{22} = 1/3 > 0$ επομένως η κατάσταση 2 είναι απεριοδική. Αν $1 \leftrightarrow 2$ τότε και η 1 θα είναι απεριοδική, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα. Εξετάζοντας την αλυσίδα ως προς την επικοινωνία βλέπουμε εύκολα ότι όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους επομένως όλες είναι απεριοδικές. □

Ασκηση 295 *Να μελετηθεί ως προς την περιοδικότητα και επαναληπτικότητα ο πίνακας μετάβασης του πειράματος του περιπατητή.*

Λυση. Ο πίνακας μετάβασης είναι

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Προτού εξετάσουμε την περιοδικότητα των καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$ θα εξετάσουμε το πρόβλημα της επικοινωνίας τους. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι όλες συνεπικοινωνούν μεταξύ τους άρα θα είναι περιοδικές με την ίδια περίοδο ή όλες απεριοδικές.

Για την κατάσταση 1 βλέπουμε ότι $P_{11} = 0$ και παρομοίως για τις υπόλοιπες καταστάσεις. Υποχρεωτικά θα υπολογίσουμε τους πίνακες P^2, P^3. Έχουμε

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Είναι φανερό ότι $P^3 = P^2P = P$ και επομένως $P^5 = P^3P^2 = P^2P = P$ και συνεχίζοντας έτσι έχουμε ότι $P^{2k+1} = P$ για $k = 1, 2, \cdots$ Αντίστοιχα έχουμε $P^4 = P^3P = PP = P^2$ και συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό έχουμε ότι $P^{2k} = P^2$ για $k = 1, 2, \cdots$ Επίσης, $P_{11}^{2k} = 1/2 > 0$ ενώ $P_{11}^{2k+1} = 0$ επομένως $d(1) =$ Μ.Κ.Δ $\{2, 4, 6, \cdots\} = 2$ και αυτό σημαίνει ότι όλες οι καταστάσεις είναι περιοδικές με περίοδο 2. □

Λημμα 296 *Έστω A ένα σύνολο άπειρου πλήθους θετικών ακέραιων αριθμών των οποίων ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι ο d. Τότε υπάρχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του A των οποίων ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι ο d.*

Αποδειξη. Το σύνολο A αποτελείται από τους ακέραιους $\{n_1, n_2, \cdots\}$. Αν $d = n_1$ τότε έχουμε τελειώσει. Αλλιώς ψάχνουμε τον επόμενο ακέραιο που ανήκει στο A ο οποίος να μην είναι πολλαπλάσιος του n_1. Έστω ο n_{k_2} δεν είναι πολλαπλάσιος του n_1. Τότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης d_{k_2} του συνόλου $\{n_1, n_{k_2}\}$ είναι αυστηρά μικρότερος του n_1. Συνεχίζουμε την διαδικασία αυτή, βρίσκοντας στην συνέχεια έναν ακέραιο, τον n_{k_3}, τέτοιον ώστε $n_{k_3} \neq l_1 n_1 + l_2 n_{k_2}$ για οποιουσδήποτε ακέραιους $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος ακέραιος στο A τότε ο d είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\{n_1, n_{k_2}\}$ οπότε έχουμε τελειώσει αλλιώς ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\{n_1, n_{n_2}, n_{k_3}\}$, έστω d_{k_3} είναι αυστηρά μικρότερος του d_{k_2}. Με την λογική αυτή θα κατασκευάσουμε μια αυστηρά φθίνουσα ακολουθία ακεραίων d_{k_n} η οποία σε πεπερασμένα βήματα θα πάρει την τιμή d. □

ΛΗΜΜΑ 297 *Έστω A σύνολο ακεραίων των οποίων ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι ο d. Υποθέτουμε επιπλέον ότι το A είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, δηλαδή αν $n_1, n_2 \in A$ τότε και $n_1 + n_2 \in A$. Τότε το A περιέχει όλους τους ακέραιους της μορφής kd για αρκετά μεγάλο k.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα χρειαστούμε δυο επιμέρους αποτελέσματα για να αποδείξουμε το λήμμα αυτό.
· Έστω $S \subseteq \mathbb{Z}$ ένα σύνολο το οποίο περιέχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο και ας υποθέσουμε ότι το S είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση. Θα αποδείξουμε ότι το S περιέχει ένα στοιχείο a το οποίο είναι το μικρότερο θετικό στοιχείο και ισχύει ότι $S = \{ka : k \in \mathbb{Z}\}$. Πράγματι, έστω $c \neq 0$ το οποίο ανήκει στο S. Τότε και το $0 \in S$ αλλά και το $-c \in S$. Επομένως το S έχει τουλάχιστον ένα θετικό στοιχείο και συμβολίζουμε με a το μικρότερο εξ αυτών. Τότε θα περιέχει και τα $2a, -a, -2a$ δηλαδή $\{ka : n \in Z\} \subseteq S$. Για $c \in S$ μπορούμε να γράψουμε $c = ka + r$ όπου $k \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq r < a$. Όμως $r = c - ka \in S$ και αν υποθέσουμε ότι $r > 0$ θα οδηγηθούμε σε άτοπο διότι έχουμε υποθέσει ότι το a είναι το μικρότερο θετικό στοιχείο του S. Αναγκαστικά λοιπόν $r = 0$ και επομένως $c = ka$. Αρα $S = \{ka : k \in \mathbb{Z}\}$.
· Έστω $n_1, \cdots, n_k \in \mathbb{N}$ με μέγιστο κοινό διαιρέτη τον d. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε $d = \sum_{i=1}^{k} c_i n_i$. Πράγματι, το σύνολο $S = \{\sum_{i=1}^{k} c_i n_i : c_i \in \mathbb{Z}\}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και την αφαίρεση επομένως $S = \{la : l \in \mathbb{Z}\}$ όπου $a = \sum_{i=1}^{k} c_i n_i$ είναι το μικρότερο θετικό στοιχείο του S. Όμως, ο d διαιρεί όλους τους ακέραιους n_i και επομένως και τον a, άρα $0 < d \leq a$. Επίσης, κάθε $n_i \in S$ και επομένως είναι πολλαπλάσιο του a, συνεπώς $a \leq d$ και άρα $a = d$.
Από το λήμμα 296 μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο πλήθος στοιχείων του A, έστω τα $\{n_1, \cdots, n_k\}$, έτσι ώστε ο d να είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $d = 1$. Αν δεν είναι, μπορούμε να διαιρέσουμε τα $n_1, \cdots, n_k$ με το d. Σύμφωνα με τα προηγούμενα μπορούμε να βρούμε $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{Z}$ έτσι ώστε $1 = \sum_{i=1}^{k} c_i n_i$. Ξεχωρίζουμε τους θετικούς όρους από τους αρνητικούς και προκύπτει $1 = M - P$ με $M, P \in A$. Έστω κάποιος ακέραιος $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $n \geq P(P-1)$. Τότε $n = aP + r$ όπου $0 \leq r \leq P - 1$. Αναγκαστικά ισχύει ότι $a \geq P - 1$ (διότι διαφορετικά θα ίσχυε $n < P(P-2) + P = P(P-1)$) επομένως $n = aP + r(M - P) = (a - r)P + rM$ με $a - r \geq 0$. Επομένως, $n \in A$. □

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 298 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα και έστω ότι η κατάσταση j είναι απεριοδική ή έχει περίοδο $d \geq 2$. Έστω $A = \{n \in \mathbb{N} : P_{jj}^{n} > 0\}$. Το σύνολο αυτό είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση. Πράγματι, αν $n, k \in A$ τότε $P_{jj}^{n+k} = \sum_{q \in S} P_{jq}^{n} P_{qj}^{k} \geq P_{jj}^{n} P_{jj}^{k} > 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο $n + k \in A$. Από το λήμμα 297 προκύπτει ότι υπάρχει ακέραιος k_0 τέτοιος ώστε για όλα τα $k \geq k_0$ να ισχύει ότι $P_{jj}^{k} > 0$ αν είναι απεριοδική και $P_{jj}^{kd} > 0$ αν είναι περιοδική.*
Επίσης μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν $i \to j$, τότε υπάρχουν m, k_0 έτσι ώστε

$P_{ij}^{kd+m} > 0$ *για κάθε* $k \geq k_0$ *αν η* j *είναι περιοδική με περίοδο* $d \geq 2$ *και* $P_{ij}^{k} > 0$ *για κάθε* $k \geq k_0$ *αν είναι απεριοδική. Πράγματι, εφόσον* $i \to j$ *τότε υπάρχει κάποιο* m *τέτοιο ώστε* $P_{ij}^{m} > 0$. *Όμως*

$$P_{ij}^{kd+m} \geq P_{ij}^{m} P_{jj}^{kd} > 0$$

για όλα τα $k \geq k_0$. *Παρόμοια αν η* j *είναι απεριοδική.*
Τα παραπάνω ικανοποιούνται είτε η καταστάση j *είναι επαναληπτική είτε μεταβατική. Στην περίπτωση που η κατάσταση* j *είναι μεταβατική τότε γνωρίζουμε επιπλέον ότι οι πιθανότητες αυτές συγκλίνουν στο μηδέν.* □

ΛΗΜΜΑ 299 *Έστω τα σύνολα* $A = \{n \in \mathbb{N} : P_{ii}^{n} > 0\}$ *και* $B = \{n \in \mathbb{N} : f_n(i|i) > 0\}$ *για μια δοσμένη κατάσταση* i *μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας. Τότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του συνόλου* A *είναι ίσος με εκείνον του* B.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα δώσουμε δυο διαφορετικές αποδείξεις. Στην πρώτη απόδειξη θα χαρακτηρίσουμε κατά κάποιον τρόπο τα στοιχεία του B σε σχέση με τα στοιχεία του A.
Έστω ότι $A = \{n_1, n_2, \cdots ,\}$. Λόγω του ότι $f_n(i|i) \leq P_{ii}^{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι οποιοδήποτε $n \in B$ τότε και $n \in A$ επομένως $B \subseteq A$. Αν d_A και d_B είναι οι μέγιστοι κοινοί διαιρέτες των A και B αντίστοιχα τότε προφανώς $d_A \leq d_B$. Σημειώστε ότι $n_1 \in B$ αφού είναι ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε $P_{ii}^{n_1} > 0$ άρα και $f_{n_1}(i|i) > 0$.

1ος τρόπος. Λόγω του λήμματος 296 υπάρχει ένα πεπερασμένου πλήθους σύνολο $\hat{A}$ τέτοιο ώστε $d_A = d_{\hat{A}}$. Σύμφωνα με την κατασκευή του συνόλου $\hat{A}$ (βλέπε λήμμα 296) το σύνολο αυτό έχει την μορφή $\hat{A} = \{n_1, n_{k_2}, \cdots , n_{k_m}\}$. Έστω κάποιος ακέραιος n_l με $l = k_2, \cdots , k_m$. Αφού $P_{ii}^{n_l} > 0$ υπάρχουν μονοπάτια τα οποία ξεκινούν από την κατάσταση i και καταλήγουν στην i μετά από n_l βήματα. Αν σε αυτά δεν υπάρχει μονοπάτι που να μην περνά ενδιάμεσα από το i τότε $f_{n_l}(i|i) = 0$ άρα $n_l \notin B$. Όμως αυτό σημαίνει ότι σε όλα τα μονοπάτια η αλυσίδα έχει επισκεφθεί την i ενδιάμεσα, έστω στο $n_{l^*} \in A$ βήμα σε κάποιο μονοπάτι. Τότε $P_{ii}^{n_l - n_{l^*}} > 0$ και αυτό με την σειρά του σημαίνει ότι $n_l - n_{l^*} = n_t \in A$ όπου $n_t < n_l$ ή αλλιώς $n_l = n_{l^*} + n_t$. Όμως τα n_l και n_{l^*} (είτε ανήκουν στο $\hat{A}$ είτε όχι) γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων στοιχείων του n_l που ανήκουν στο $\hat{A}$ άρα το ίδιο συμβαίνει και με τον n_l το οποίο είναι άτοπο. Αρα, $\hat{A} \subseteq B$ και επομένως $d_A = d_B$. Με τον τρόπο αυτό όχι μόνο αποδείξαμε ότι τα σύνολα A και B έχουν τον ίδιο μέγιστο κοινό διαιρέτη αλλά γνωρίζουμε και την μορφή που έχουν τα στοιχεία του B. Το B λοιπόν περιέχει όλα τα στοιχεία του $\hat{A}$ και οποιοδήποτε άλλο στοιχείο που ανήκει στο B και δεν ανήκει στο $\hat{A}$ θα είναι σίγουρα γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\hat{A}$, δηλαδή αν $n^* \in B$ τότε θα υπάρχουν $l_i \in \mathbb{N}$ τ.ω. $l_1 n_1 + \cdots l_m n_{k_m} = n^*$. Αν δεν ίσχυε αυτό τότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του B θα ήταν μικρότερος του $\hat{A}$. Τα ίδια ισχύουν και για το A, δηλαδή περιέχει όλο το $\hat{A}$ και όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του είναι γραμμικοί συνδυασμοί στοιχείων του $\hat{A}$.

2^{ος} τρόπος. Θα αποδείξουμε ότι ο d_B διαιρεί όλα τα στοιχεία του A. Έστω ότι αυτό δεν ισχύει και έστω ο $n \in A$ είναι ο μικρότερος ακέραιος που δεν διαιρείται από τον d_B. Τότε $n = ad_B + b$ με $0 < b < d_B$. Επομένως

$$P_{ii}^n = \sum_{k=1}^{n} f_k(i|i) P_{ii}^{n-k} = \sum_{r=1}^{a} f_{rd_B}(i|i) P_{ii}^{ad_B+b-rd_B}$$

Ο d_B δεν διαιρεί επίσης τον $(a-r)d_B + b < n$ οπότε αναγκαστικά $(a-r)d_B + b \notin A$ αλλιώς θα ήταν άτοπο με την υπόθεση ότι ο $n \in A$ είναι ο μικρότερος ακέραιος που δεν διαιρείται από τον d_B. Επομένως ισχύει ότι $P_{ii}^{ad_B+b-rd_B} = 0$ για κάθε $r = 1, 2, \cdots, a$. Από αυτό όμως προκύπτει ότι $P_{ii}^n = 0$ το οποίο είναι άτοπο. □

Το λήμμα αυτό έχει θεωρητική αξία όπως θα δούμε παρακάτω αλλά και πρακτική όπως θα δούμε στα επόμενα παραδείγματα. Θα δούμε ότι σε μερικές περιπτώσεις βολεύει ιδιαίτερα να υπολογίσουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη του συνόλου $\{n \in \mathbb{N} : f_n(i|i) > 0\}$ αντί του συνόλου $\{n \in \mathbb{N} : P_{ii}^n > 0\}$. Όσον αφορά το πλήθος των στοιχείων του B υπάρχουν περιπτώσεις όπου το σύνολο B είναι πεπερασμένο και περιπτώσεις όπου είναι άπειρο.

ΑΣΚΗΣΗ 300 *Να εξεταστεί ως προς την περιοδικότητα η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

ΛΥΣΗ. Η κατάσταση 1 είναι απορροφητική, απεριοδική και επαναληπτική. Οι καταστάσεις 2,3 είναι μεταβατικές αφού υπάρχει θετική πιθανότητα να απορροφηθούν στην 1 και επομένως η πιθανότητα να επιστρέψει στην κατάσταση 2 ή 3 είναι αυστηρά μικρότερη της μονάδας. Επίσης, οι δυο καταστάσεις συνεπικοινωνούν άρα θα έχουν την ίδια περίοδο.

1^{ος} τρόπος. Για να εξετάσουμε την περιοδικότητα των καταστάσεων 2,3 θα υπολογίσουμε τον πίνακα P^n χρησιμοποιώντας το θεώρημα Cayley-Hamilton ως πρώτο τρόπο. Εύκολα υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές οι οποίες είναι $k_1 = 1, k_2 = 1/2, k_3 = -1/2$. Αρα σχηματίζουμε τρεις εξισώσεις με τρεις αγνώστους για να υπολογίσουμε τις σταθερές του πολυωνύμου $v(k) = ak^2 + bk + c$ το οποίο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $k^n : \delta_P(k)$ όπου το $\delta_P(k)$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του P. Οι εξισώσεις είναι οι εξής

$$\begin{aligned} a + b + c &= 1, \\ a\frac{1}{4} - b\frac{1}{2} + c &= (-1)^n \frac{1}{2^n}, \\ a\frac{1}{4} + b\frac{1}{2} + c &= \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

Θα μελετήσουμε την κατάσταση 3 και το συμπέρασμα λόγω επικοινωνίας θα ισχύει και για την 2. Για να βρούμε την περιοδικότητα της 3 χρειαζόμαστε την πιθανότητα P^n_{33}. Το θεώρημα Cayley-Hamilton μας πληροφορεί ότι $\delta_P(P) = 0$ επομένως, αν $k^n = \delta_P(k)t(k) + v(k)$,

$$P^n = \delta_P(P)t(P) + v(P) = aP^2 + bP + cI$$

Για να υπολογίσω το P^n_{33} θα χρειαστώ μόνο το P^2_{33} το οποίο εύκολα βρίσκω και είναι το $P^2_{33} = 1/4$. Αρα από την ισότητα για τον P^n έχω ότι

$$P^n_{33} = aP^2_{33} + bP_{33} + cI_{33} = a\frac{1}{4} + c$$

Από το σύστημα για τα a, b, c υπολογίζω εύκολα το b αφαιρώντας την δεύτερη εξίσωση από την τρίτη και βρίσκω $b = \frac{1-(-1)^n}{2^n}$ και αντικαθιστώντας το b στην τρίτη εξίσωση υπολογίζω την ποσότητα $P^n_{33} = a\frac{1}{4} + c = \frac{1+(-1)^n}{2^{n+1}}$.
Δηλαδή, διαπιστώνουμε ότι για $n = 2k$ έχουμε ότι $P^{2k}_{33} = \frac{2}{2^{2k+1}} = \frac{1}{2^{2k}} > 0$ ενώ για $n = 2k + 1$ προκύπτει ότι $P^{2k+1}_{33} = 0$. Αρα, η κατάσταση 3 και επομένως και η κατάσταση 2 είναι περιοδικές με περίοδο 2.
2ος τρόπος. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να υπολογίσουμε την περιοδικότητα εφαρμόζοντας το λήμμα 299. Παρατηρούμε ότι $f_1(2|2) = 0$, $f_2(2|2) = 1/4 > 0$ και $f_m(2|2) = 0$ για $m \geq 3$. Συνεπώς $\{n \in \mathbb{N} : f_n(2|2) > 0\} = \{2\}$ άρα ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι ο 2 και επομένως η περίοδος των δυο καταστάσεων είναι $d = 2$.

□

Ασκηση 301 *Αποδείξτε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι απεριοδική χωρίς να υπολογίσετε δυνάμεις του πίνακα.

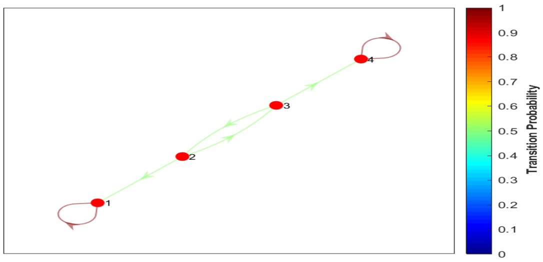
Λυση. Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη επομένως μπορούμε να εξετάσουμε την περιοδικότητα της κατάστασης 1 μόνο. Θα εξετάσουμε για ποια n οι πιθανότητες $f_n(1|1)$ είναι θετικές. Παρατηρούμε ότι $f_1(1|1) = f_2(1|1) = 0$. Όμως $f_3(1|1) > 0$ διότι το μονοπάτι $1 \to 3 \to 2 \to 1$ έχει θετική πιθανότητα. Επίσης, $f_5(1|1) > 0$ διότι το μονοπάτι $1 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$ έχει θετική πιθανότητα. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των 3 και 5 είναι η μονάδα. Όποιοι άλλοι ακέραιοι n είναι τέτοιοι ώστε $f_n(1|1) > 0$ δεν θα μεταβάλουν άλλο τον μέγιστο κοινό διαιρέτη. Ας θυμηθούμε ότι αν ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\{n_1, \cdots, n_k\}$ είναι ίσος με d τότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\{n_1, \cdots, n_k, n_{k+1}\}$ είναι ο $\hat{d} \leq d$. Συνεπώς η αλυσίδα είναι απεριοδική.

□

Άσκηση 302 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και σύνολο καταστάσεων το $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Να εξεταστεί ως προς την περιοδικότητα.



Σχήμα 8.7: Το γράφημα της αλυσίδας της άσκησης 302

Λύση. Οι καταστάσεις $1, 4$ είναι απορροφητικές ενώ οι $2, 3$ συνεπικοινωνούν και είναι μεταβατικές. Θα εξετάσουμε τις καταστάσεις $2, 3$ ως προς την περιοδικότητα. Προφανώς θα έχουν την ίδια περίοδο λόγω συνεπικοινωνίας. Υπολογίζοντας τις πιθανότητες $f_n(2|2)$ προκύπτει ότι $f_1(2|2) = 0$, $f_2(2|2) = 1/4$ και $f_m(2|2) = 0$ για $m \geq 3$. Συνεπώς ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του $\{n \in \mathbb{N} : f_n(2|2) > 0\}$ είναι ίσος με το 2 και λόγω του προηγούμενου λήμματος το 2 είναι και η περίοδος των καταστάσεων 2 και 3.
Για να βρούμε το ίδιο αποτέλεσμα υπολογίζοντας τον P^n μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά ότι $P_{22}^{2k} = \frac{1}{2^{2k}}$ και $P_{22}^{2k+1} = 0$ επομένως προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα. □

Παράδειγμα 303 *Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 299 για να υπολογίσουμε την περίοδο της Μαρκοβιανής αλυσίδας του περιπατητή. Όλες οι καταστάσεις λόγω συνεπικοινωνίας έχουν την ίδια περίοδο επομένως αρκεί να υπολογίσουμε το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : f_n(1|1) > 0\}$. Εύκολα παρατηρούμε ότι $f_{2k+1}(1|1) = 0$ και $f_{2k}(1|1) > 0$ επομένως $\{n \in \mathbb{N} : f_n(1|1) > 0\} = \{2, 4, \cdots, 2k, \cdots\}$ για $k = 1, 2, \cdots$. Άρα ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι ο αριθμός 2 ο οποίος είναι και η περίοδος της αλυσίδας.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 304 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Η κατάσταση 1 είναι απορροφητική ενώ οι καταστάσεις 2,3,4,5 συνεπικοινωνούν και είναι μεταβατικές αφού υπάρχει θετική πιθανότητα να απορροφηθούν στην 1. Θα υπολογίσουμε την περίοδο των καταστάσεων αφού υπολογίσουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη του συνόλου $\{n \in \mathbb{N} : f_n(2|2) > 0\}$. *Βλέπουμε ότι* $f_1(2|2) = 0$ *και* $f_2(2|2) > 0$ *αφού μπορεί η αλυσίδα να ξεκινήσει από την 2 να μεταβεί στην 3 και να επιστρέψει στην 2. Στην συνέχεια διαπιστώνουμε ότι* $f_3(2|2) > 0$ *εφόσον η αλυσίδα μπορεί να ξεκινήσει από την 2 να μεταβεί στην 3 έπειτα στην 4 και μετά ξανά στην 2. Αυτό όμως σημαίνει ότι το σύνολο* $\{n \in \mathbb{N} : f_n(2|2) > 0\}$ *περιέχει τουλάχιστον τους αριθμούς 2 και 3 επομένως ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του συνόλου θα είναι η μονάδα. Επίσης, η κατάσταση 1 ως απορροφητική είναι απεριοδική επομένως όλες οι καταστάσεις είναι απεριοδικές.*
Τα ίδια συμπεράσματα θα είχαμε βγάλει αν υπολογίζαμε τους P^2 *και* P^3. □

8.10.1 Σύνολα κυκλικής μετάβασης και περιοδικότητα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 305 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη. Θα την μελετήσουμε ως προς την περιοδικότητα. Κάνοντας τους πολλαπλασιασμούς πινάκων βλέπουμε ότι $P^5 = P$ *επομένως επαναλαμβάνεται ενώ η περίοδος της αλυσίδας είναι* $d = 4$. *Αυτό όμως που έχει μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι το γεγονός ότι ξεκινώντας από την κατάσταση 1 σίγουρα θα μεταβεί στην 2 και έπειτα σίγουρα στην 3 κ.τ.λ. Θα δούμε στην συνέχεια ότι σε κάθε αδιαχώριστη και περιοδική αλυσίδα ισχύει παρόμοιο αποτέλεσμα.* □

Όταν $n = ad + b$ θα γράφουμε $n \equiv b \mod d$ όπου $a, d, b \in \mathbb{N}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 306 *Έστω* $i \leftrightarrow j$ *δυο περιοδικές καταστάσεις περιόδου* d *μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας. Τότε κάθε στοιχείο του συνόλου* $\{n \in \mathbb{N} : P_{ij}^n > 0\}$ *έχει την μορφή* $n \equiv b \mod d$ *όπου το* b *εξαρτάται μονάχα από τις καταστάσεις* i, j *και όχι από το* n.

Αποδειξη. Έστω r, s, t τέτοια ώστε $P_{ij}^r > 0$, $P_{ij}^s > 0$ και $P_{ji}^t > 0$ και $s > r$. Επειδή $P_{ii}^{r+t} \geq P_{ij}^r P_{ji}^t > 0$ τότε ο d διαιρεί τον $r+t$ και παρομοίως διαιρεί και τον $s+t$. Αρα διαιρεί και τον $s-r$ επομένως αν $r = ad + b$ με a, b ακέραιους και $0 \leq b \leq d-1$ τότε και $s = cd + b$. Πράγματι, αφού ο d διαιρεί τον $s-r$ τότε υπάρχει κάποιος $l \in \mathbb{N}$ τ.ω. $s - r = ld$. Συνεπώς, $s = ld + r = ld + ad + b = (l+a)d + b$. Αυτό σημαίνει ότι αν $P_{ij}^n > 0$ τότε αναγκαστικά το n έχει την μορφή $n = ed + b$ ή αλλιώς $n \equiv b \mod d$ και το b εξαρτάται μόνο από τα i, j και όχι από το n. □

Σε κάθε ζευγάρι καταστάσεων (i, j) αντιστοιχεί λοιπόν όπως είδαμε στο προηγούμενο θεώρημα ένας μοναδικός ακέραιος b. Αν σταθεροποιήσουμε μια κατάσταση i τότε όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις χωρίζονται σε υποσύνολα με βάση τον ακέραιο b. Δηλαδή, μαζεύουμε σε ένα σύνολο όλες τις καταστάσεις j τ.ω. στο ζευγάρι (i, j) να αντιστοιχεί ο ίδιος ακέραιος b. Με τον τρόπο αυτό θα κατασκευάσουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης.

Ορισμος 307 (Σύνολα Κυκλικής Μετάβασης) *Διαλέγουμε $i \in C$ (το C είναι αδιαχώριστο σύνολο καταστάσεων) και ορίζουμε τα σύνολα, τα οποία ονομάζονται* **σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση** *i,*

$$\begin{aligned} C_0 &= \{j \in C : \text{ αν } P_{ij}^n > 0 \text{ τότε } n \equiv 0 \mod d\} \\ C_1 &= \{j \in C : \text{ αν } P_{ij}^n > 0 \text{ τότε } n \equiv 1 \mod d\} \\ &\vdots \\ C_{d-1} &= \{j \in C : \text{ αν } P_{ij}^n > 0 \text{ τότε } n \equiv d-1 \mod d\} \end{aligned}$$

Τα σύνολα αυτά είναι ξένα μεταξύ τους και τέτοια ώστε

$$C = \bigcup_{j=0}^{d-1} C_j$$

Προφανώς $i \in C_0$ διότι αν $P_{ii}^n > 0$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τότε σίγουρα ο d διαιρεί ακριβώς το n, δηλαδή εδώ $b = 0$.

Ισχύει το επόμενο θεώρημα το οποίο περιγράφει την κίνηση της Μαρκοβιανής αλυσίδας σε μια τέτοια περίπτωση.

Θεωρημα 308 *Έστω C αδιαχώριστο σύνολο καταστάσεων και $i, k, j \in C$. Έστω $C_0, C_1, \cdots, C_{d-1}$ τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση i. Αν $k \in C_t$ και $P_{kj} > 0$ όπου $j \in C$ τότε αναγκαστικά $j \in C_{t+1}$ όπου $C_d = C_0$. Αυτό σημαίνει ότι αν η Μαρκοβιανή αλυσίδα βρεθεί στο σύνολο C_t τότε για όσο χρονικό διάστημα παραμείνει στο σύνολο C θα ακολουθεί την πορεία $C_t \to C_{t+1} \to C_{t+2} \cdots$. Στην περίπτωση όπου το C έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων m ισχύει ότι $d \leq m$.*

Αποδειξη. Διαλέγουμε κάποιο n τέτοιο ώστε $P_{ik}^n > 0$ το οποίο προφανώς υπάρχει αφού το C είναι αδιαχώριστο. Τότε, εξ ορισμού, το $n \equiv t \mod d$. Επίσης, $P_{ij}^{n+1} \geq$

$P_{ik}^n P_{kj} > 0$ και αφού $n+1 \equiv (t+1) \mod d$ τότε $j \in C_{t+1}$.
Προφανώς, όταν το C έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων, έστω m, τότε το πλήθος d των συνόλων κυκλικής μετάβασης δεν μπορεί να ξεπερνά το m διότι τότε θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε $d > m$ το πλήθος σύνολα $C_0, C_1, \cdots, C_{d-1}$ ξένα μεταξύ τους (και μη κενά) το οποίο είναι άτοπο. □

Σε ένα αδιαχώριστο σύνολο καταστάσεων η κατασκευή των συνόλων κυκλικής μετάβασης μπορεί να μας οδηγήσει στον υπολογισμό της περιόδου των καταστάσεων αυτών όπως θα δούμε στα επόμενα παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 309 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και επομένως μπορούμε να κατασκευάσουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση, για παράδειγμα, την κατάσταση 1.
Ξεκινάμε βάζοντας την κατάσταση 1 στο σύνολο C_0. Δηλαδή, $C_0 = \{1, \cdots, \}$. Στην συνέχεια βάζουμε στο σύνολο C_1 όλες τις καταστάσεις με τις οποίες επικοινωνεί η 1 σε ένα βήμα. Αρα $C_1 = \{3, 5, \cdots\}$. Έπειτα, στο σύνολο C_2 βάζουμε τις καταστάσεις με τις οποίες οι 3 και 5 επικοινωνούν σε ένα βήμα. 'ρα, $C_2 = \{2, \cdots, \}$. Από την κατάσταση 2 η αλυσίδα μεταβαίνει σε ένα βήμα στις 1,4,6. Επομένως, συμπληρώνουμε τις 4,6 στο σύνολο C_0. Στην συνέχεια διαπιστώνουμε ότι η Μαρκοβιανή αλυσίδα μεταβαίνει από το σύνολο C_0 στο C_1 και έπειτα στο C_2. Αρα τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 1 είναι τα

$$\begin{aligned} C_0 &= \{1, 4, 6\} \\ C_1 &= \{3, 5\} \\ C_2 &= \{2\} \end{aligned}$$

Έτσι, τα n για τα οποία $P_{ii}^n > 0$ είναι σίγουρα πολλαπλάσια του 3. Για να αποδείξουμε ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι ακριβώς 3 αρκεί να βρούμε μια κατάσταση i τέτοια ώστε να υπάρχει θετική πιθανότητα να επανέλθει η αλυσίδα σε 3 βήματα. Ας κοιτάξουμε για παράδειγμα την πιθανότητα P_{11}^3. Από την κατάσταση 1 θα μεταβεί σίγουρα στην 3 ή στην 5 και από κει σίγουρα στην 2. Από την 2 με πιθανότητα 1/3 θα γυρίσει στην 1. Αρα, η πιθανότητα $P_{11}^3 > 0$ διότι για παράδειγμα μπορεί η αλυσίδα να ακολουθήσει το μονοπάτι $1 \to 3 \to 2 \to 1$. Ακόμη ευκολότερο είναι το συμπέρασμα κοιτώντας την κατάσταση 2 για την οποία είναι σίγουρο (δηλαδή με πιθανότητα 1) ότι η αλυσίδα θα επανέλθει σε 3 βήματα. □

Παραδειγμα 310 *Αν κοιτάξουμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα του περιπατητή με βάση την κατάσταση 1 κατασκευάζουμε τα σύνολα*

$$\begin{aligned} C_0 &= \{1,3\} \\ C_1 &= \{2,4\} \end{aligned}$$

Επομένως, ξεκινώντας από το σύνολο C_0 η αλυσίδα σίγουρα θα μεταβεί στο C_1 και έπειτα στο C_0 κ.τ.λ. Παρομοίως, διαπιστώνουμε ότι η περιοδικότητα είναι ίση με 2. □

Παραδειγμα 311 *Κατασκευάζοντας τα σύνολα κυκλικής μετάβασης του τυχαίου περιπάτου με βάση την κατάσταση 0 για παράδειγμα διαπιστώνουμε ότι*

$$\begin{aligned} C_0 &= \{0,2,-2,\cdots,2k,-2k,\cdots\} \\ C_1 &= \{1,-1,\cdots,2k+1,-(2k+1),\cdots\} \end{aligned}$$

Παρομοίως εξάγουμε το συμπέρασμα ότι ο τυχαίος περίπατος είναι περιοδική αλυσίδα με περίοδο 2. Εύκολα προκύπτει το ίδιο συμπέρασμα μιας και γνωρίζουμε τις πιθανότητες μετάβασης P_{ii}^n τις οποίες έχουμε υπολογίσει στο θεώρημα 263. □

Παραδειγμα 312 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι οι καταστάσεις 2,3,4,5 συνεπικοινωνούν και είναι μεταβατικές αφού υπάρχει θετική πιθανότητα να απορροφηθούν στην 1 η οποία είναι απορροφητική κατάσταση (και άρα απεριοδική). Το σύνολο λοιπόν $C = \{2,3,4,5\}$ είναι αδιαχώριστο (αλλά όχι κλειστό). Το σύνολο αυτό μπορούμε να το χωρίσουμε σε σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 2 ως εξής

$$\begin{aligned} C_0 &= \{2,4\} \\ C_1 &= \{3,5\} \end{aligned}$$

Δηλαδή, για όσο χρονικό διάστημα η αλυσίδα παραμένει στο σύνολο C θα έχει την εξής πορεία $\cdots C_0 \to C_1 \to C_0 \to \cdots$. Για να υπολογίσουμε την κοινή περίοδο των καταστάσεων του συνόλου C παρατηρούμε ότι το σύνολο των ακεραίων $\{n \in \mathbb{N} : P_{22}^n > 0\}$ περιέχει μονάχα άρτιους αριθμούς. Επιπλέον, ο αριθμός 2 ανήκει σε αυτό το σύνολο των ακεραίων αφού $P_{22}^2 > 0$ άρα ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του συνόλου είναι το 2. Η κοινή λοιπόν περίοδος των καταστάσεων $\{2,3,4,5\}$ είναι $d = 2$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 313 *Έστω $d > 1$ δοσμένο. Θα κατασκευάσουμε μια αδιαχώριστη Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων η οποία να έχει περίοδο τον δοσμένο αριθμό d. Προφανώς, το πλήθος των καταστάσεων θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από την περίοδο (δες 308).*
Επιλέγουμε το πλήθος των καταστάσεων, έστω $m > d$. Στην συνέχεια κατασκευάζουμε d το πλήθος σύνολα, τα $C_0, \cdots, C_{d-1}$ τοποθετώντας σε κάθε σύνολο μερικές από τις καταστάσεις χωρίς να να υπάρχουν σύνολα τα οποία να περιέχουν την ίδια κατάσταση. Έτσι, έχουμε κατασκευάσει τα σύνολα $C_0, \cdots, C_{d-1}$ τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους και η ένωση τους είναι ίση με τον χώρο καταστάσεων S.
Στην συνέχεια κατασκευάζουμε τον πίνακα μετάβασης της αλυσίδας και άρα θα έχουμε κατασκευάσει και την ίδια την αλυσίδα. Ξεκινάμε με την πρώτη κατάσταση που βρίσκεται στο σύνολο C_0. Στην πρώτη γραμμή του πίνακα P βάζουμε τις πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση αυτή σε όλες τις καταστάσεις που βρίσκονται στο σύνολο C_1 (και μόνο). Έπειτα, στην δεύτερη γραμμή, τοποθετούμε τις πιθανότητες μετάβασης από την δεύτερη κατάσταση του συνόλου C_0 σε όλες τις καταστάσεις του συνόλου C_1. Σημειώστε ότι μπορούμε να επιλέξουμε όπως θέλουμε τους αριθμούς αυτούς (τις πιθανότητες μετάβασης) αρκεί να αθροίζουν στην μονάδα. Κάνουμε το ίδιο για όλες τις καταστάσεις του συνόλου C_0 και προχωράμε να εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία σε κάθε ένα από τα σύνολα $C_1, \cdots, C_{d-1}$. Σημειώστε ότι το σύνολο C_{d-1} θα συσχετιστεί με το σύνολο C_0.
Ας το δούμε σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα. Έστω $d = 2$. Θα κατασκευάσουμε έναν πίνακα $P_{4\times4}$ ο οποίος θα είναι ο πίνακας μετάβασης μιας περιοδικής Μαρκοβιανής αλυσίδας με περίοδο $d = 2$. Η αλυσίδα θα έχει λοιπόν 4 καταστάσεις οι οποίες θα πρέπει να τοποθετηθούν σε δύο σύνολα, τα C_0, C_1. Προφανώς η τοποθέτηση δεν είναι μοναδική. Έστω $C_0 = \{1\}$ και $C_1 = \{2, 3, 4\}$. Στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε τον πίνακα μετάβασης της αλυσίδας (ο οποίος επίσης δεν είναι μοναδικός, έχουμε άπειρες επιλογές). Στην πρώτη γραμμή θα τοποθετήσουμε τις πιθανότητες μετάβασης από την κατάσταση 1 στις καταστάσεις 2,3 και 4. Έστω, $P_{12} = \frac{1}{3}$, $P_{13} = \frac{1}{3}$ και $P_{14} = \frac{1}{3}$. Έπειτα θα κάνουμε το ίδιο με το σύνολο C_1. Δηλαδή, στην δεύτερη γραμμή του πίνακα θα τοποθετήσουμε τις πιθανότητες μετάβασης της κατάστασης 2 στην κατάσταση 1. Αναγκαστικά, θα ισχύει ότι $P_{21} = 1$. Το ίδιο συμβαίνει και με τις άλλες καταστάσεις του συνόλου C_1. Έτσι καταλήγουμε στον πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Εύρεση Περιόδου Καταστάσεων

Γενικότερα, είναι χρήσιμο να αναλύσουμε την αλυσίδα στο σύνολο των μεταβατικών και στην ένωση κλειστών και αδιαχώριστων συνόλων που περιέχουν επαναληπτικές

καταστάσεις. Όσον αφορά την περιοδικότητα των μεταβατικών καταστάσεων ίσως είναι αρκετά χρήσιμο το λήμμα 299 και άρα η εύρεση του μέγιστου κοινού διαιρέτη του συνόλου $\{n \in \mathbb{N} : f_n(i|i) > 0\}$ όπου i είναι μεταβατική κατάσταση. Σημειώστε ότι δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε την ακριβή τιμή της $f_n(i|i)$ αλλά μόνο εάν είναι θετική ή όχι. Εν γένει, ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας αυτής είναι αρκετά δύσκολη υπόθεση. Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης των αδιαχώριστων συνόλων που αποτελούνται από μεταβατικές καταστάσεις.
Για την περιοδικότητα των επαναληπτικών καταστάσεων θα εργαστούμε στο κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο στο οποίο ανήκει η κάθε κατάσταση. Σε κάθε τέτοιο σύνολο ίσως είναι προτιμότερο να δοκιμάσουμε πρώτα την κατασκευή των συνόλων κυκλικής μετάβασης για την εύρεση της περιοδικότητας κάθε κατάστασης του συνόλου (αφού έχουν την ίδια περίοδο).

Παραδείγματα

• Ας εξετάσουμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

και σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Είναι φανερό ότι

$$S = \underbrace{\overbrace{\{7, 8\}}^{T}}_{\text{μεταβατικές καταστάσεις}} \cup \underbrace{\overbrace{\{1, 2, 3\}}^{C_1} \cup \overbrace{\{4, 5, 6\}}^{C_2}}_{\text{κλειστά σύνολα επαναληπτικών καταστάσεων}}$$

Οι καταστάσεις 7 και 8 συνεπικοινωνούν άρα έχουν την ίδια περίοδο. Επομένως θα υπολογίσουμε την περίοδο της κατάστασης 7 εξετάζοντας το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : f_n(7|7) > 0\}$. Εύκολα βλέπουμε ότι $f_1(7|7) = 0$, $f_2(7|7) > 0$ και $f_m(7|7) = 0$ για $m \geq 3$ συνεπώς η περίοδος των 7 και 8 είναι $d = 2$.
Στην συνέχεια εξετάζουμε τα σύνολα C_1 και C_2 τα οποία είναι κλειστά και αδιαχώριστα. Θεωρούμε τις Μαρκοβιανές αλυσίδες X_n, Y_n με σύνολο καταστάσεων C_1 και C_2 αντίστοιχα και πίνακες μετάβασης τους αντίστοιχους υποπίνακες του πίνακα P. Δηλαδή η αλυσίδα X_n θα έχει σύνολο καταστάσεων τις $1, 2, 3$ και πίνακα μετάβασης

τον

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

ενώ η Y_n θα έχει σύνολο καταστάσεων τις $4, 5, 6$ και πίνακα μετάβασης τον

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε την κοινή περίοδο των καταστάσεων 1,2,3 θα κατασκευάσουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 1. Εύκολα καταλήγουμε στα σύνολα $K_0 = \{1, 2\}$ και $K_1 = \{3\}$. Εφόσον ένα σύνολο από αυτά είναι μονοσύνολο και το πλήθος των συνόλων είναι 2 ισχύει ότι η περίοδος των καταστάσεων είναι 2. Αν δοκιμάσουμε να κατασκευάσουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης για το κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο $\{4, 5, 6\}$ θα δούμε ότι καταλήγουμε σε ένα σύνολο. Αυτό σημαίνει ότι οι καταστάσεις είναι απεριοδικές. Μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε υπολογίζοντας τον μέγιστο κοινό διαιρέτη του συνόλου $\{n \in \mathbb{N} : f_n(4|4) > 0\}$. Βλέπουμε ότι $f_1(4|4) = 0$, $f_2(4|4) > 0$ και $f_3(4|4) > 0$ επομένως ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι $d = 1$.

• Θα εξετάσουμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

και χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Βλέπουμε ότι οι καταστάσεις $\{1, 2, 3\}$ συνεπικοινωνούν. Οι καταστάσεις αυτές είναι απεριοδικές αφού $f_1(1|1) = 0$, $f_2(1|1) > 0$ και $f_3(1|1) > 0$. Η κατάσταση 4 είναι μεταβατική αφού υπάρχει θετική πιθανότητα να απορροφηθεί στο κλειστό σύνολο $\{1, 2, 3\}$ και να μην επιστρέψει όταν η αλυσίδα έχει ξεκινήσει από την 4. Όσον αφορά την περιοδικότητα της 4 διαπιστώνουμε ότι $\{n \in \mathbb{N} : f_n(4|4) > 0\} = \emptyset$ επομένως μπορούμε να πούμε ότι έχει περίοδο $d = \infty$.

• Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων το $S = \{1, 2, 3, \cdots\}$ και τέτοια ώστε

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{όταν } j = i + 1 \quad \text{ή} \quad j = i + 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $i \in S$. Διαπιστώνουμε ότι όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές και όσον αφορά την περίοδο έχουμε ότι $d = \infty$ για κάθε κατάσταση του S.

Παρατηρηση 314 *Έστω ότι η κατάσταση i είναι περιοδική με περίοδο d. Συνδυάζοντας το θεώρημα 306 με το συμπέρασμα 298 προκύπτει ότι το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : P_{ii}^n > 0\}$ αποτελείται από όλους τους ακέραιους (και μόνον) της μορφής kd για k αρκετά μεγάλο. Δηλαδή, αν η αλυσίδα ξεκινήσει από την i τότε υπάρχει θετική πιθανότητα να επανέλθει στην i μόνο μετά από ακέραιο πολλαπλάσιο του d πλήθος βημάτων. Το συμπέρασμα αυτό είναι κάτι που διαισθητικά περιμέναμε. Παρόμοια, αν $i \leftrightarrow j$, το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : P_{ij}^n > 0\}$ περιέχει όλους τους ακέραιους της μορφής $n = kd + b$ για όλα τα $k \geq k_0$ και μόνον αυτούς. Δηλαδή οι μεταβάσεις από την i στην j έχουν θετική πιθανότητα μόνον σε συγκεκριμένο πλήθος βημάτων.*
Επιπλέον, αν οι καταστάσεις είναι μεταβατικές, τότε οι μη μηδενικές αυτές πιθανότητες συγκλίνουν στο μηδέν (δες θεώρημα 261).
Ως παράδειγμα, ας δούμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η κατάσταση 1 είναι απορροφητική (άρα απεριοδική) ενώ οι καταστάσεις 2 και 3 μεταβατικές και περιοδικές με περίοδο 2. Συνεπώς, σύμφωνα με τα προηγούμενα, αν η αλυσίδα επισκεφθεί την κατάσταση 2 τότε μόνο σε άρτιο πλήθος βημάτων υπάρχει θετική πιθανότητα να επανέλθει στην 2. Παρόμοια, αν βρεθεί στην κατάσταση 2, υπάρχει θετική πιθανότητα να επισκεφθεί την 3 μόνο σε περιττό πλήθος βημάτων. Πράγματι, εφόσον $P_{23}^1 = 1/2 > 0$, έχουμε ότι $1 = kd + b$ και αναγκαστικά $b = 1$. Αρα, αν βρεθεί στην 2, υπάρχει θετική πιθανότητα να επισκεφθεί την 3 μονάχα όταν το πλήθος βημάτων έχει την μορφή $n = 2k+1$. Επιπλέον, επειδή οι καταστάσεις 2 και 3 είναι μεταβατικές, οι πιθανότητες P_{i2}^n και P_{i3}^n συγκλίνουν στο μηδέν (όταν δεν είναι ήδη μηδέν) για $i = 1, 2, 3$.
Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τα συμπεράσματα αυτά υπολογίζοντας την νιοστή δύναμη του πίνακα η οποία είναι

$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{1}{2^n} & \frac{(-1)^n+1}{2^{n+1}} & \frac{(-1)^{n+1}+1}{2^{n+1}} \\ 1 - \frac{1}{2^n} & \frac{(-1)^{n+1}+1}{2^{n+1}} & \frac{(-1)^n+1}{2^{n+1}} \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι πράγματι, οι P_{i2}^n και P_{i3}^n για $i = 1, 2, 3$ συγκλίνουν στο μηδέν. Επίσης, η P_{22}^n είναι θετική μονάχα όταν το n είναι άρτιο και επιπλέον η P_{23}^n είναι θετική μονάχα όταν το n είναι περιττό.

'λλο ένα παράδειγμα είναι η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η κατάσταση 1 είναι απορροφητική και όλες οι υπόλοιπες είναι μεταβατικές. Επιπλέον, το σύνολο $C = \{2,3,4,5\}$ *είναι αδιαχώριστο (αλλά όχι κλειστό). Μπορούμε το σύνολο αυτό να το χωρίσουμε σε σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 2 ως εξής*

$$\begin{aligned} C_0 &= \{2\} \\ C_1 &= \{3\} \\ C_2 &= \{4,5\} \end{aligned}$$

Δηλαδή για όσο παραμένει η αλυσίδα στο σύνολο C *θα ακολουθεί υποχρεωτικά μια συγκεκριμένη πορεία* $\cdots C_0 \to C_1 \to C_2 \to C_0 \cdots$. *Με αυτό τον τρόπο γνωρίζουμε ότι το σύνολο των ακεραίων* $\{n \in \mathbb{N} : P_{22}^n > 0\}$ *περιέχει μονάχα πολλαπλάσια του 3. Επειδή όμως* $P_{22}^3 > 0$ $(2 \to 3 \to 4 \to 2)$ *έπεται ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης είναι το 3. Αρα η κοινή περίοδος των καταστάσεων* $\{2,3,4,5\}$ *είναι ο* $d = 3$. *Σύμφωνα με τα προηγούμενα αυτό σημαίνει ότι αν η αλυσίδα επισκεφθεί την κατάσταση 2 τότε υπάρχει θετική πιθανότητα να επισκεφθεί την 4 σε πλήθος βημάτων της μορφής* $n = 3k + b$. *Μένει να υπολογίσουμε το* b. *Παρατηρούμε ότι* $P_{24}^2 > 0$ $(2 \to 3 \to 4)$ *και επομένως ο αριθμός 2 θα έχει την μορφή* $2 = 3k + b$. *Αυτό συμβαίνει μονάχα όταν* $k = 0$ *και* $b = 2$. *Αρα λοιπόν υπάρχει θετική πιθανότητα η αλυσίδα να μεταβεί από την 2 στην 4 μονάχα σε* $n = 3k + 2$ *πλήθος βημάτων, δηλαδή* $P_{24}^{3k+2} > 0$ *για κάθε* k *αρκετά μεγάλο ενώ* $P_{24}^n = 0$ *όταν* $n \neq 3k + 2$.
Ας δούμε ακόμη ένα παράδειγμα Μαρκοβιανής αλυσίδας με πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι η κατάσταση 1 είναι απορροφητική και όλες οι υπόλοιπες είναι μεταβατικές. Όμως τα σύνολα $C = \{2,3,4,5\}$ και $V = \{6,7,8\}$ είναι αδιαχώριστα (αλλά όχι κλειστά). Το σύνολο C μπορεί να χωρισθεί σε τρία σύνολα κυκλικής μετάβασης ως εξής,

$$\begin{aligned} C_0 &= \{2\} \\ C_1 &= \{3\} \\ C_2 &= \{4,5\} \end{aligned}$$

και όπως πριν αποδεικνύεται ότι το σύνολο C είναι περιοδικό με περίοδο 3. Παρόμοια, το σύνολο V μπορεί να χωρισθεί σε δυο σύνολα κυκλικής μετάβασης ως εξής

$$\begin{aligned} V_0 &= \{6\} \\ V_1 &= \{7,8\} \end{aligned}$$

και να αποδειχθεί ότι το σύνολο V είναι περιοδικό με περίοδο 2.
Δηλαδή, αν η αλυσίδα ξεκινήσει από μια κατάσταση του συνόλου C τότε (όσο παραμένει σε αυτό το σύνολο) θα κινείται ως εξής $\cdots C_0 \to C_1 \to C_2 \to C_0 \cdots$. Αν ξεκινήσει από το σύνολο V θα κινείται ως εξής (για όσο παραμένει στο V) $\cdots V_0 \to V_1 \to V_0 \cdots$. □

8.11 Πιθανότητες και χρόνοι πρώτης εισόδου

ΟΡΙΣΜΟΣ 315 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης P. Ο χρόνος πρώτης εισόδου ενός συνόλου $A \subseteq S$ είναι μια τυχαία μεταβλητή $H^A : \Omega \to \{0,1,2,3,\cdots\} \cup \{\infty\}$ η οποία δίνεται από*

$$H^A(\omega) = \min\{n \geq 0 : X_n(\omega) \in A\},$$

και ορίζουμε το $\min \emptyset = \infty$. Συμβολίζουμε την πιθανότητα να εισέλθει κάποτε η Μαρκοβιανή αλυσίδα στο σύνολο A δεδομένου ότι ξεκινά από την κατάσταση i, με

$$h_i^A = P(H^A < \infty | X_0 = i)$$

Όταν το A είναι κλειστό τότε η h_i^A ονομάζεται **πιθανότητα απορρόφησης***.*
*Η δεσμευμένη μέση τιμή του απαιτούμενου χρόνου (***χρόνος πρώτης εισόδου***) για να εισέλθει η Μαρκοβιανή αλυσίδα στο A δεδομένου ότι ξεκίνησε από την κατάσταση i είναι*

$$y_i^A = \mathbb{E}_i(H^A) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(H^A = n | X_0 = i)$$

όταν $P(H^A < +\infty | X_0 = i) = 1$ αλλιώς $+\infty$.

Ο υπολογισμός των παραπάνω ποσοτήτων γίνεται, γενικότερα, με την βοήθεια των επόμενων θεωρημάτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 316 *Οι* **πιθανότητες πρώτης εισόδου** *(ή πιθανότητες πρώτης επίσκεψης) h_i^A με $A \subseteq S$ δίνονται από την ελάχιστη μη αρνητική λύση του συστήματος,*

$$\begin{aligned} h_i^A &= 1, \quad \text{όταν} \quad i \in A, \\ h_i^A &= \sum_{j \in S} P_{ij} h_j^A, \quad \text{όταν} \quad i \notin A. \end{aligned}$$

Ελάχιστη εδώ εννοούμε ότι αν x_i είναι μια άλλη λύση των παραπάνω εξισώσεων τότε $x_i \geq h_i$ για κάθε i.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $X_0 = i \in A$ τότε $H^A = 0$ άρα και $h_i^A = 1$. Αν $X_0 = i \notin A$ τότε και $H^A \geq 1$ οπότε από την Μαρκοβιανή ιδιότητα έχουμε

$$P(H^A < \infty | X_1 = j, X_0 = i) = h_j^A,$$

και

$$\begin{aligned} h_i^A &= \sum_{j \in S} P(H^A < \infty, X_1 = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in S} P(H^A < \infty | X_1 = j, X_0 = i) P(X_1 = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in S} P_{ij} h_j^A. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε το πρώτο μέρος, ότι ικανοποιεί τις εξισώσεις. Θα αποδείξουμε το δεύτερο μέρος, ότι είναι το μικρότερο διάνυσμα που ικανοποιεί τις εξισώσεις αυτές.
Έστω $x = (x_i : i \in S)$ ένα άλλο διάνυσμα που ικανοποιεί τις ίδιες εξισώσεις. Θα αποδείξουμε ότι $x_i \geq h_i^A$. Όμως, $h_i^A = x_i = 1$ όταν $i \in A$. Έστω $i \notin A$ τότε

$$x_i = \sum_{j \in S} P_{ij} x_j = \sum_{j \in A} P_{ij} + \sum_{j \notin A} P_{ij} x_j.$$

Οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_{j \in A} P_{ij} + \sum_{j \notin A} P_{ij} \left(\sum_{k \in A} P_{jk} + \sum_{k \notin A} P_{jk} x_k \right) \\ &= P(X_1 \in A | X_0 = i) + P(X_1 \notin A, X_2 \in A | X_0 = i) \\ &\quad + \sum_{j \notin A} \sum_{k \notin A} P_{ij} P_{jk} x_k. \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι

$$\begin{aligned} P_{ij} P_{jk} &= P(X_2 = k | X_1 = j) P(X_1 = j | X_0 = i) = P(X_2 = k | X_1 = j, X_0 = i) P(X_1 = j | X \\ &= P(X_2 = k, X_1 = j | X_0 = i) \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας την αντικατάσταση του x_k μετά από n-βήματα έχουμε,

$$\begin{aligned} x_i &= P(X_1 \in A|X_0 = i) + \cdots \\ &\quad + P(X_1 \notin A, \cdots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A|X_0 = i) \\ &\quad + \sum_{j_1 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} P_{ij_1} \cdots P_{j_{n-1}j_n} x_{j_n}. \end{aligned}$$

Αφού τα x_i είναι μη αρνητικά τότε και το άθροισμα στο δεξί μέλος θα είναι μη αρνητικό. Οπότε

$$x_i \geq P(H^A < n + 1|X_0 = i)$$

για κάθε n. Επομένως,

$$x_i \geq \lim_{n\to\infty} P(H^A < n+1|X_0 = i) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P(H^A < n+1|X_0 = i) = P(H^A < \infty|X_0 = i) = h$$

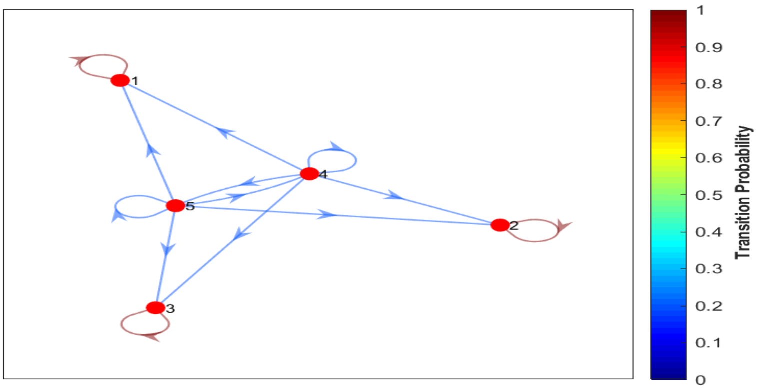
□

Προφανώς το σύνολο A μπορεί να είναι και μονοσύνολο οπότε σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για την πιθανότητα **επίσκεψης** στην κατάσταση i ξεκινώντας από την κατάσταση j (αρκεί $i \neq j$) και την συμβολίζουμε με h^i_j (αλλά και με f_{ij} δες παρατήρηση 264). Ο υπολογισμός τέτοιων πιθανοτήτων θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμος αργότερα για τον υπολογισμό των οριακών πιθανοτήτων μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 317 *Λόγω του θεωρήματος 266 αν $i \leftrightarrow j$ και i, j επαναληπτικές τότε $h^j_i = f_{ij} = 1$ (όταν $i \neq j$) ενώ αν $i \nrightarrow j$ τότε $h^j_i = f_{ij} = 0$. Μπορούμε λοιπόν να αντικαταστήσουμε αυτές τις πιθανότητες στις εξισώσεις του προηγούμενου θεωρήματος εκ των προτέρων για να αποφύγουμε μερικούς υπολογισμούς. Έτσι, αν A είναι ένα κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων και $j \in A$ τότε $h^j_i = h^A_i$ για οποιαδήποτε $i \in S$.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 318 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$



Σχήμα 8.8: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος 318

Οι καταστάσεις 1,2,3 είναι απορροφητικές ενώ οι 4,5 μεταβατικές. Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες απορρόφησης στην κατάσταση 1 χρησιμοποιώντας το θεώρημα 316. Λύνοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις προκύπτει το εξής διάνυσμα λύσεων

$$\left(1, h_2^1, h_3^1, 1/3 + 1/3(h_2^1 + h_3^1), 1/3 + 1/3(h_2^1 + h_3^1)\right)$$

οπότε οι ζητούμενες πιθανότητες βρίσκονται ελαχιστοποιώντας το παραπάνω διάνυσμα διαλέγοντας h_2^1 *και* h_3^1 *να είναι μηδέν, οπότε η λύση είναι*

$$(1, 0, 0, 1/3, 1/3)$$

□

Εφόσον η H^A μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$ τότε

$$y_i = \mathbb{E}_i(H^A) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A = n|X_0 = i) + \infty \cdot P(H^A = +\infty|X_0 = i)$$

Επομένως όταν $P(H^A = +\infty|X_0 = i) > 0$ τότε $y_i = +\infty$. Αν $k_i = \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A = n|X_0 = i)$ τότε ισχύουν τα παρακάτω.

ΛΗΜΜΑ 319 *Έστω ότι υπάρχει κάποια κατάσταση* $q \in S$ *τέτοια ώστε*

$$k_q^A = \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A = n|X_0 = q) = \infty$$

Τότε $k_j^A = \infty$ *για οποιαδήποτε κατάσταση* j *τέτοια ώστε* $P_{jq} > 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$k_j^A = \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A = n|X_0 = j) = \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{l \in S} P(H^A = n|X_1 = l)P_{jl} = \sum_{l \in S} P_{jl} \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A =$$

Στο διπλό άθροισμα παραπάνω θα εμφανιστεί και το άθροισμα για $l = q$ το οποίο είναι ίσο με άπειρο. Επομένως θα ισχύει ότι $k_j^A = \infty$ για οποιαδήποτε κατάσταση j τέτοια ώστε $P_{jq} > 0$. □

Θέτουμε $T \subseteq S$ το υποσύνολο του S το οποίο είναι τέτοιο ώστε $h_i^A > 0$ για κάθε $i \in T$. Έχουμε το παρακάτω θεώρημα που αφορά τους αριθμούς k_i.

ΘΕΩΡΗΜΑ 320 *Το διάνυσμα k_i^A αποτελεί μια λύση του παρακάτω συστήματος*

$$\begin{aligned} k_i^A &= 0, && \text{όταν} \quad i \in A, \\ k_i^A &= 1 + \sum_{j \notin A} P_{ij} k_j^A, && \text{όταν} \quad i \in T \setminus A. \end{aligned}$$

Αν το παραπάνω σύστημα δεν επιδέχεται μη αρνητική λύση και ταυτόχρονα όλες οι μεταβατικές συνεπικοινωνούν τότε $k_i^A = \infty$ για κάθε $i \in T$ ενώ αν επιδέχεται λύση τότε οι k_i^A είναι πεπερασμένοι και επομένως αποτελούν μια λύση του συστήματος.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όταν $i \in A$ τότε $H^A = 0$ άρα και $k_i^A = 0$. Υποθέτουμε ότι $k_i^A < \infty$ για κάθε $i \notin A$. Έστω ότι $i \notin A$ τότε

$$k_i^A = \mathbb{E}_i(H^A) = \sum_{j \in S} \mathbb{E}_i(H^A \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}}) = \sum_{j \in A} \mathbb{E}_i(H^A \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}}) + \sum_{j \notin A} \mathbb{E}_i(H^A \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}})$$

Ας πάρουμε τον πρώτο όρο από το δεξί μέλος. Θα υπολογίσουμε το

$$\mathbb{E}_i(H^A \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}}),$$

όταν $j \in A$. Αφού $j \in A$ τότε $H^A = 1$ και άρα

$$\mathbb{E}_i(H^A \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}}) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(H^A = n, X_1 = j | X_0 = i) = P_{ij},$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\{H^A = n\} = \emptyset$ για $n \geq 2$.
Αρα

$$\sum_{j \in A} \mathbb{E}_i(H^A \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}}) = \sum_{j \in A} P_{ij}.$$

Θα υπολογίσουμε τώρα και τον δεύτερο όρο στο δεξί μέλος. Θα υπολογίσουμε το

$$\mathbb{E}_i(H^A \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}}),$$

όταν $j \notin A$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i(H^A \mathbb{I}_{\{X_1=j\}}) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A = n, X_1 = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P(H^A = n, X_1 = j | X_0 = i) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} P(H^A = n, X_1 = j | X_0 = i).\end{aligned}$$

Όμως

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(H^A = n, X_1 = j | X_0 = i) = P_{ij}.$$

Από την άλλη μεριά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P(H^A = n, X_1 = j | X_0 = i) &= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P(H^A = n | X_1 = j) P_{ij} \\ &= P_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P(H^A = n | X_1 = j)\end{aligned}$$

Μένει να αποδείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P(H^A = n | X_1 = j) = k_j^A = \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^A = n | X_0 = j).$$

Η πιθανότητα $P(H^A = n | X_1 = j) = \frac{P(H^A=n, X_1=j)}{P(X_1=j)}$ όπου $n \geq 2$ αφού $j \notin A$. Η πιθανότητα $\frac{P(H^A=n, X_1=j)}{P(X_1=j)}$ είναι το άθροισμα όλων των πιθανοτήτων της μορφής $P_{ji_2} P_{i_2 i_3} \cdots P_{i_{n-1} i_n}$ με $j, i_2, \cdots, i_{n-1} \notin A$ και $i_n \in A$. Από την άλλη μεριά έχουμε ότι η πιθανότητα $\frac{P(H^A=n-1, X_0=j)}{P(X_0=j)}$ είναι το άθροισμα των πιθανοτήτων της μορφής $P_{ji_1} \cdots P_{i_{n-2} i_{n-1}}$. Αρα $P(H^A = n | X_1 = j) = P(H^A = n-1 | X_0 = j)$. Οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P(H^A = n | X_1 = j) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P(H^A = n-1 | X_0 = j) = k_j^A$$

Τελικά έχουμε ότι

$$k_i^A = \sum_{j \in A} P_{ij} + \sum_{j \notin A} P_{ij} + \sum_{j \notin A} P_{ij} k_j^A = 1 + \sum_{j \notin A} P_{ij} k_j^A,$$

όταν $i \notin A$.

Έστω y_i μια οποιαδήποτε λύση του συστήματος. Θα δείξουμε ότι είναι πάντοτε μεγαλύτερη ή ίση της k_i. Για $i \in A$ έχουμε προφανώς ότι $k_i = y_i = 0$. Για $i \notin A$ ισχύει

$$\begin{aligned} y_i &= 1 + \sum_{j \notin A} P_{ij} y_j \\ &= 1 + \sum_{j \notin A} P_{ij}(1 + \sum_{r \notin A} P_{jr} y_r) \\ &= P(H^A \geq 1 | X_0 = i) + P(H^A \geq 2 | X_0 = i) \\ &\quad + \sum_{j \notin A} \sum_{r \notin A} P_{ij} P_{jr} y_r. \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι αφού $i \notin A$ τότε $P(H^A \geq 1 | X_0 = i) = 1$. Επίσης,

$$\begin{aligned} \sum_{j \notin A} P_{ij} &= \sum_{j \notin A} P(X_1 = j | X_0 = i) \\ &= P(X_1 \notin A | X_0 = i) = P(H^A \geq 2 | X_0 = i). \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας τις αντικαταστάσεις του y_r προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} y_i &= P(H^A \geq 1 | X_0 = i) + \cdots + P(H^A \geq n | X_0 = i) \\ &\quad + \sum_{j_1 \notin A} \cdots \sum_{j_n \notin A} P_{ij_1} \cdots P_{j_{n-1} j_n} y_{j_n} \end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε n,

$$y_i \geq \sum_{v=1}^{n} P(H^A \geq v | X_0 = i) = \sum_{v=1}^{n} v P(H^A = v | X_0 = i).$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ έχουμε

$$y_i \geq \sum_{n=1}^{\infty} n P(H^A = n | X_0 = i) = k_i^A.$$

Προφανώς, αν το σύστημα των εξισώσεων επιδέχεται λύση, τότε σύμφωνα με τα παραπάνω αποτελεί και ένα άνω φράγμα για τους μέσους χρόνους k_i^A, δηλαδή είναι πεπερασμένοι. Εφόσον είναι πεπερασμένοι τότε θα ικανοποιούν και το σύστημα των εξισώσεων. Στην περίπτωση που το σύστημα δεν επιδέχεται μη αρνητική λύση τότε υποχρεωτικά $k_i^A = \infty$ για κάθε $i \notin A$ (δες και λήμμα 319) διότι αλλιώς το διάνυσμα με τους k_i^A θα αποτελούσε λύση. □

Παρατηρηση 321 *Αν $P(H^A < +\infty | X_0 = i) = 1$ τότε στην πραγματικότητα έχουμε ότι $k_i = y_i$ ενώ αν $k_i = +\infty$ τότε προφανώς και $y_i = +\infty$ αφού πάντοτε ισχύει ότι $k_i \leq y_i$ και μάλιστα σε μερικές περιπτώσεις η ανισότητα είναι αυστηρή.* □

Έστω $q \subseteq S$ και έστω $G_i(x) = G_i^q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(H^q = n|X_0 = i)x^n$. Συμβολίζουμε με $T \subseteq S$ το υποσύνολο των καταστάσεων που επικοινωνούν με το q, δηλαδή $h_l^q > 0$ για κάθε $l \in T$.

Στο επόμενο θεώρημα θα δώσουμε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν οι συναρτήσεις $G_i(x)$. Το σύστημα αυτό ενδέχεται να μην έχει μοναδική λύση. Όμως η λύση που ψάχνουμε, δηλαδή η $G_i(x)$, αναλύεται σε σειρά Taylor στο διάστημα $(-1, 1)$ και αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό που ίσως χρειαστεί έτσι ώστε να την ξεχωρίσουμε από τις υπόλοιπες λύσεις του συστήματος. Σημειώνοντας ότι $G_i(x) \geq 0$ για $x \in (0, 1)$ προκύπτει ένα σημαντικότερο χαρακτηριστικό, δηλαδή ότι είναι η ελάχιστη λύση με την έννοια που περιγράφει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 322 (Κατανομή Χρόνου Απορρόφησης) *Οι παρακάτω εξισώσεις επιδέχονται τουλάχιστον μια λύση*

$$\begin{aligned} r_i(x) &= 1, \quad i \in q \\ r_i(x) &= x \sum_{j \in T} P_{ij} r_j(x), \quad i \in \hat{T} = T \setminus q \end{aligned}$$

και μια από αυτές είναι η συνάρτηση $G_i(x)$. Αν υπάρχουν λύσεις $r_i(x)$ του παραπάνω συστήματος τέτοιες ώστε $r_i(x) > 0$ για $x \in I$ με $(0, 1) \subseteq I$ τότε $r_i(x) \geq G_i(x)$ για $x \in I$, για οποιαδήποτε τέτοια λύση που αναλύεται σε σειρά Taylor γύρω από το 0 με διάστημα απόλυτης σύγκλισης το $(-1, 1)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $i \in q$ τότε $P(H^q = 0|X_0 = i) = 1$ και $P(H^q \geq 1|X_0 = i) = 0$ επομένως $G_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(H^q = n|X_0 = i)x^n = 1$. Αν $i \in \hat{T}$ τότε με ανάλυση πρώτου βήματος έχουμε

$$\begin{aligned} G_i(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(H^q = n|X_0 = i)x^n \\ &= P(H^q = 0|X_0 = i) + \sum_{n=1}^{\infty} P(H^q = n|X_0 = i)x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in S} P(H^q = n, X_1 = j|X_0 = i)x^n \\ &= \sum_{j \in T} \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij} P(H^q = n|X_1 = j)x^n \\ &= x \sum_{j \in T} P_{ij} \sum_{n=0}^{\infty} P(H^q = n|X_0 = j)x^n \\ &= x \sum_{j \in T} P_{ij} G_j(x) \end{aligned}$$

Έστω $r_i(x)$ μια λύση των εξισώσεων τ.ω. $r_i(x) > 0$ για $i \in T$ για κάποια $x \in (0, 1)$.

Τότε

$$\begin{aligned} r_i(x) &= x\sum_{j\in q} P_{ij} + x\sum_{j\in\hat{T}} P_{ij}r_j(x) \\ &= x\sum_{j\in q} P_{ij} + x^2\sum_{j\in\hat{T}} P_{ij}\sum_{l\in q} P_{jl} + x^2\sum_{j\in\hat{T}}\sum_{l\in\hat{T}} P_{ij}P_{jl}r_l(x) \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} \sum_{j\in q} P_{ij} &= P(X_1\in q|X_0=i) = P(H^q=1|X_0=i) \\ \sum_{j\in\hat{T}} P_{ij}\sum_{l\in q} P_{jl} &= P(X_2\in q, X_1\notin q|X_0=i) = P(H^q=2|X_0=i) \end{aligned}$$

’ρα

$$r_i(x) \geq P(H^q=1|X_0=i)x + P(H^q=2|X_0=i)x^2$$

Συνεχίζοντας τις αντικαταστάσεις των $r_l(x)$ προκύπτει ότι

$$r_i(x) \geq \sum_{k=1}^{n} P(H^q=k|X_0=i)x^k$$

Στο όριο προκύπτει ότι $r_i(x) \geq G_i(x)$. □

Παραδειγμα 323 *Έστω ο απλός τυχαίος περίπατος (δηλαδή χωρίς εμπόδια) με* $P_{i,i+1} = p$ *και* $P_{i,i-1} = q$. *Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση* $G_i(x)$ *για* $|x| < 1$ *με*

$$G_i(x) = P(H^{\{0\}}=0|X_0=i) + \sum_{n=1}^{\infty} P(H^{\{0\}}=n|X_0=i)x^n, \quad i=0,1,2,\cdots$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα 322. Οι εξισώσεις που ικανοποιεί είναι

$$\begin{aligned} G_0(x) &= 1 \\ G_i(x) &= xqG_{i-1}(x) + xpG_{i+1}(x), \quad i=1,2,\cdots \end{aligned}$$

Πρόκειται για μια εξίσωση διαφορών ως προς την μεταβλητή i *θεωρώντας σταθερό το* x. *Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι*

$$r_1 = \frac{1-\sqrt{1-4pqx^2}}{2px}, \quad r_2 = \frac{1+\sqrt{1-4pqx^2}}{2px}$$

όπου προφανώς $r_2 \geq r_1$ *και* $r_1 > 0$ *για* $x \in (0,1)$. *Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης διαφορών είναι*

$$G_i(x) = A(x)r_1^i + B(x)r_2^i$$

Επειδή $G_0(x) = 1$ προκύπτει ότι $A(x) = 1 - B(x)$ και άρα

$$G_i(x) = r_1^i + B(x)(r_2^i - r_1^i)$$

Έχουμε άπειρες θετικές λύσεις για $x \in (0,1)$ αν επιλέξουμε $B(x) \geq 0$. Θα επιλέξουμε την ελάχιστη από αυτές η οποία προκύπτει για $B(x) = 0$. Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$\begin{aligned} G_0(x) &= 1, \\ G_i(x) &= \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}}{2px}\right)^i, \quad i = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

για $|x| < 1$. Ας θυμηθούμε ότι

$$G_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P(H^{\{0\}} = n | X_0 = i) x^n, \quad i = 1, 2, \cdots$$

Από την θεωρία των σειρών Taylor ισχύει ότι

$$P(H^{\{0\}} = n | X_0 = i) = \frac{G_i^{(n)}(0)}{n!}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

δηλαδή για να υπολογίσω την πιθανότητα $P(H^{\{0\}} = n | X_0 = i)$ για $i = 1, 2, \cdots$ θα υπολογίσω την n-οστή παράγωγο της $G_i(x)$ ως προς x, θα θέσω $x = 0$ και θα διαιρέσω με $n!$

Παρόμοια, μπορούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις $G_{-i}(x)$ για $i = 1, 2, \cdots$. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} G_0(x) &= 1 \\ G_{-i}(x) &= xqG_{-i-1}(x) + xpG_{-i+1}(x) \end{aligned}$$

Θέτοντας $W_i(x) = G_{-i}(x)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1 \\ W_i(x) &= xpW_{i-1}(x) + xqW_{i+1}(x) \end{aligned}$$

Η λύση τότε θα είναι

$$\begin{aligned} W_0(x) &= 1, \\ W_i(x) &= \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}}{2qx}\right)^i, \quad i = 1, 2, \cdots \end{aligned}$$

για $|x| < 1$. Δηλαδή για να υπολογίσουμε για παράδειγμα την πιθανότητα $P(H^{\{0\}} = n | X_0 = -3)$ θα πρέπει να παραγωγίσουμε n φορές την συνάρτηση $W_3(x)$, να θέσουμε $x = 0$ και να διαιρέσουμε με $n!$ □

Περισσότερα για μπορεί να βρει κανείς στο άρθρο [46].
Το θεώρημα 320 μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό του μέσου χρόνου επαναφοράς μιας επαναληπτικής κατάστασης i της Μαρκοβιανής αλυσίδας X_n με σύνολο τιμών S. Θέτοντας

$$H^i(\omega) = \min\{n \geq 1 : X_n(\omega) = i\}$$

έχουμε ότι ο μέσος χρόνος επαναφοράς μιας κατάστασης i είναι

$$m_i = \mathbb{E}(H^i|X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(i|i) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^i = n|X_0 = i)$$

Ισχύει το επόμενο θεώρημα για τον μέσο χρόνο επαναφοράς μιας κατάστασης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 324 *Ο μέσος χρόνος επαναφοράς της επαναληπτικής κατάστασης i μιας αδιαχώριστης αλυσίδας δίνεται από*

$$m_i = 1 + \sum_{j \neq i} P_{ij} k_j^i$$

όπου k_j^i είναι οι ***μέσοι χρόνοι πρώτης επίσκεψης*** *(mean first passage times) στην κατάσταση i ξεκινώντας από την j.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
m_i &= \mathbb{E}(H^i|X_0 = i) \\
&= \sum_{j \in S} \mathbb{E}(H^i \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}}|X_0 = i) \\
&= \mathbb{E}(H^i \mathbb{I}_{\{X_1 = i\}}|X_0 = i) + \sum_{j \neq i} \mathbb{E}(H^i \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}}|X_0 = i) \\
&= P_{ii} + \sum_{j \neq i} \mathbb{E}(H^i \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}}|X_0 = i)
\end{aligned}$$

Θα εκτιμήσουμε τον όρο $\mathbb{E}(H^i \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}}|X_0 = i)$ όταν $j \neq i$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(H^i \mathbb{I}_{\{X_1 = j\}}|X_0 = i) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(H^i = n, X_1 = j|X_0 = i) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P(H^i = n, X_1 = j|X_0 = i) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} P(H^i = n, X_1 = j|X_0 = i) \\
&= P_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P(H^i = n|X_1 = j) + P_{ij} \\
&= P_{ij} + P_{ij} k_j^i
\end{aligned}$$

'ρα

$$m_i = P_{ii} + \sum_{j \neq i} P_{ij} + \sum_{j \neq i} P_{ij} k_j^i = 1 + \sum_{j \neq i} P_{ij} k_j^i$$

□

Παραδειγμα 325 *Θα υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο επαναφοράς της κατάστασης 1 της Μαρκοβιανής αλυσίδας του περιπατητή η οποία έχει πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους πρώτης επίσκεψης στην κατάσταση 1 εφαρμόζοντας το θεώρημα 320 με $A = \{1\}$. Οι εξισώσεις είναι

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_2 &= 1 + \frac{1}{2}k_3 \\ k_3 &= 1 + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_4 \\ k_4 &= 1 + \frac{1}{2}k_3 \end{aligned}$$

και το διάνυσμα λύσεων είναι το $(0, 3, 4, 3)$. Αρα σύμφωνα με το θεώρημα 324 ο μέσος χρόνος επαναφοράς είναι

$$m_1 = 1 + \frac{1}{2}k_2 + \frac{1}{2}k_4 = 4$$

□

Παραδειγμα 326 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα 316 για να υπολογίσουμε τις $h_i^{\{4\}}$ θα έχουμε,

$$\begin{aligned} h_4 &= 1, \\ h_2 &= 1/2h_1 + 1/2h_3 \\ h_3 &= 1/2h_2 + 1/2h_4, \end{aligned}$$

οπότε

$$h_2 = 1/3 + 2/3h1, \quad h_3 = 2/3 + 1/3h_1.$$

Διαπιστώνουμε ότι το παραπάνω θεώρημα δεν αναφέρει ακριβώς ποια είναι η τιμή του h_1 *όμως αναφέρει ότι το διάνυσμα* h_i *θα είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση του συστήματος. Αρα μπορούμε να διαλέξουμε* $h_1 = 0$ *και επομένως* $h_2 = 1/3, h_3 = 2/3$.
□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **327** (Τυχαίος Περίπατος με ένα ή δυο απορροφητικά εμπόδια) *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα* X_n *με τιμές στο* $\mathbb{N} \cup \{0\}$ *και* $X_0 = i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Έστω ότι ο πίνακας μετάβασης είναι τ.ω.* $P_{i,i-1} = q, P_{i,i+1} = p$ *για* $i \geq 1$ *ενώ* $P_{00} = 1$ *με* $p + q = 1$ *και* $pq \neq 0$. *Αυτή η αλυσίδα μοντελοποιεί την περίπτωση ενός παίκτη στο καζίνο, όπου σε κάθε παιχνίδι η πιθανότητα να κερδίσει ένα ευρώ είναι* p *και αντίστοιχα η πιθανότητα να χάσει ένα ευρώ είναι* q. *Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι να υπολογίσουμε την* $h_i^{\{0\}}$, *δηλαδή να υπολογίσουμε την πιθανότητα ο παίκτης να ξεκινήσει με* i *ευρώ και να καταλήξει με μηδέν ευρώ. Το παραπάνω θεώρημα μας δίνει τις εξισώσεις,*

$$\begin{aligned} h_0 &= 1, \\ h_i &= ph_{i+1} + qh_{i-1}. \end{aligned}$$

Αν $p \neq q$ *τότε η εξίσωση διαφορών έχει ως λύση την*

$$h_i = A + B\left(\frac{q}{p}\right)^i, \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

με αυθαίρετες σταθερές τις A, B.
· *Αν* $p < q$ *τότε αφού* $h_i \in [0, 1]$ *πρέπει* $B = 0$ *άρα* $h_i = A$ *και επομένως* $A = 1$, *δηλαδή* $h_i = 1$ *για κάθε* $i = 0, 1, 2, \cdots$.
· *Αν* $p > q$ *τότε (αφού* $h_0 = 1$*) έχουμε*

$$h_i = 1 - c\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i\right)$$

για μια αυθαίρετη σταθερά c. *Η ελάχιστη μη αρνητική λύση του συστήματος προκύπτει όταν* $c = 1$. *Τελικά, όταν* $p > q$ *έχουμε ότι*

$$h_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i$$

· *Στην περίπτωση όπου* $p = q$ *η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών είναι* $h_i = A + Bi$. *Αναγκαστικά* $B = 0$ *οπότε όπως πριν πρέπει* $A = 1$ *δηλαδή* $h_i = 1$ *για* $i = 0, 1, 2, \cdots$.
Αυτό σημαίνει ότι ακόμη και αν το παιχνίδι στο καζίνο είναι δίκαιο η πιθανότητα ο παίκτης να χάσει τα χρήματά του είναι 1.

*Αν όμως ο παίκτης αποφασίσει να σταματήσει το παιχνίδι όταν κερδίσει ένα συγκεκριμένο ποσό τότε τα πράγματα αλλάζουν (***τυχαίος περίπατος με δυο απορροφητικά εμπόδια***). Ας υποθέσουμε ότι θα σταματήσει το παιχνίδι όταν κερδίσει m ευρώ ή τα χάσει όλα. Τότε κατασκευάζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το $S = \{0, 1, \cdots, m\}$ και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η αλυσίδα αυτή έχει δυο απορροφητικές καταστάσεις, τις 0 και m. Όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι μεταβατικές διότι υπάρχει θετική πιθανότητα να απορροφηθούν σε μια από τις δυο απορροφητικές καταστάσεις. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση m ξεκινώντας από οποιαδήποτε κατάσταση i, δηλαδή θα υπολογίσουμε τις ποσότητες h_i^m. Θα υπολογίσουμε τις ποσότητες αυτές από τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} h_m^m &= 1, \quad h_0^m = 0 \\ h_i^m &= (1-p)h_{i-1}^m + p h_{i+1}^m, \quad i = 1, \cdots, m-1 \end{aligned}$$

Για να αποφύγουμε την εφαρμογή της θεωρίας εξισώσεων διαφορών μπορούμε να γράψουμε την αναδρομική σχέση ως εξής

$$(1-p)(h_i^m - h_{i-1}^m) = p(h_{i+1}^m - h_i^m), \quad i = 1, \cdots, m$$

Θέτοντας $\delta_i = h_{i+1}^m - h_i^m$ έχουμε ότι

$$\delta_i = \rho \delta_{i-1}, \quad i = 1, \cdots, m-1$$

όπου $\rho = \frac{1-p}{p}$. Έτσι, εύκολα προκύπτει ότι

$$\delta_i = \rho^i \delta_0, \quad i = 1, \cdots, m$$

Επειδή

$$\delta_0 + \delta_1 + \cdots + \delta_{m-1} = h_m^m - h_0^m = 1$$

προκύπτει ότι

$$\delta_0 = \frac{1}{1 + \rho + \cdots + \rho^{m-1}}$$

Όμως $h_i^m = \delta_0 + \cdots + \delta_{i-1}$ και αντικαθιστώντας έχουμε ότι

$$h_i^m = (1 + \rho + \cdots + \rho^{i-1})\delta_0 = \frac{1 + \rho + \cdots + \rho^{i-1}}{1 + \rho + \cdots + \rho^{m-1}}$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$h_i^m = \begin{cases} \frac{1-\rho^i}{1-\rho^m}, & \text{όταν } \rho \neq 1 \\ \frac{i}{m}, & \text{όταν } \rho = 1 \end{cases}$$

Θα υπολογίσουμε στην συνέχεια τους μέσους χρόνους απορρόφησης, ξεκινώντας από τον τυχαίο περίπατο με δυο απορροφητικά εμπόδια όπου η αλυσίδα έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Σύμφωνα με το θεώρημα 320 οι k_i *θα ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις*

$$\begin{aligned} k_0 &= k_m = 0 \\ k_i &= 1 + (1-p)k_{i-1} + pk_{i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, m-1 \end{aligned}$$

Όπως βλέπουμε πρόκειται για μια μη ομογενή εξίσωση διαφορών. Είναι ισοδύναμη με την 8.12 (του παραδείγματος 273). Η λύση της, όταν $p \neq \frac{1}{2}$ *είναι η 8.13 ενώ όταν* $p = \frac{1}{2}$ *είναι η 8.14. Στην περίπτωση* $p \neq \frac{1}{2}$ *χρησιμοποιώντας τις συνθήκες* $k_0 = k_m = 0$ *προκύπτει ότι*

$$C = -A = \frac{mp^m}{(1-2p)(p^m - (1-p)^m)}$$

ενώ στην περίπτωση $p = \frac{1}{2}$ *προκύπτει ότι* $A = 0$ *και* $B = m$*. Δηλαδή στον τυχαίο περίπατο με δυο απορροφητικά εμπόδια έχουμε*

$$k_n = \begin{cases} \frac{n}{1-2p} + \frac{mp^m}{(1-2p)(p^m-(1-p)^m)}\left(\frac{(1-p)^n}{p^n} - 1\right), & \text{όταν } p \neq \frac{1}{2} \\ n(m-n), & \text{όταν } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Στην προκειμένη περίπτωση επειδή $P(H^{\{0,m\}} < +\infty | X_0 = i) = 1$ *οι* k_i *που υπολογίσαμε είναι οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης.*
Θα υπολογίσουμε στην συνέχεια τους μέσους χρόνους απορρόφησης στον τυχαίο περίπατο με ένα απορροφητικό εμπόδιο. Αν $p \neq \frac{1}{2}$ *τότε η λύση όπως είδαμε είναι η*

$$k_n = A + \frac{n}{1-2p} + C\frac{(1-p)^n}{p^n}$$

Χρησιμοποιώντας την συνθήκη $k_0 = 0$ *προκύπτει ότι*

$$k_n = \frac{n}{1-2p} + C\left(\frac{(1-p)^n}{p^n} - 1\right)$$

Αν $p < \frac{1}{2}$ *(οπότε και* $h_i^{\{0\}} = 1$*) οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης θα δίνονται διαλέγοντας* $C = 0$ *οπότε θα είναι*

$$k_n = \frac{n}{1-2p}, \quad p < \frac{1}{2}$$

Αν $p > \frac{1}{2}$ *δεν υπάρχει σταθερά* $C \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε η* k_n *να είναι θετική για κάθε* $n \in \mathbb{N}$. *Αυτό σημαίνει ότι στην περίπτωση αυτή οι μέσοι χρόνοι απορρόφησης είναι ίσοι με άπειρο. Παρόμοια και στην περίπτωση* $p = \frac{1}{2}$.
Τελικά στον τυχαίο περίπατο με ένα απορροφητικό εμπόδιο θα έχουμε

$$k_n = \begin{cases} \frac{n}{1-2p}, & \text{όταν } p < \frac{1}{2} \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

□

Σχήμα 8.9: Ο τυχαίος περίπατος συχνά «περιγράφεται» ως η διαδρομή ενός μεθυσμένου!

Παραδειγμα 328 (Απλός Τυχαίος Περίπατος) *Σε αυτό το παράδειγμα θα μελετήσουμε πάλι τον τυχαίο περίπατο, χωρίς εμπόδια, ο οποίος ξεκινά από το 0, δηλαδή* $X_0 = 0$. *Επίσης υποθέτουμε ότι* $P(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) = p$ *και* $P(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) = 1-p$ *όπου* $p > \frac{1}{2}$. *Ξεκινώντας από το μηδέν, ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι ποιος είναι ο μέσος όρος βημάτων για να μεταβεί στην κατάσταση* $m > 0$. *Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό θα πρέπει να υπολογίσουμε τους* k_i^m *για όλα τα* $i \leq m$. *Οι εξισώσεις που ικανοποιούν είναι οι παρακάτω*

$$\begin{aligned} k_m^m &= 0 \\ k_i^m &= 1 + (1-p)k_{i-1}^m + pk_{i+1}^m \end{aligned}$$

Η εξίσωση διαφορών έχει ως λύση την

$$k_i^m = A + \frac{i}{1-2p} + C\frac{(1-p)^i}{p^i}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $k_m^m = 0$ *προκύπτει ότι*

$$k_i^m = \frac{m-i}{2p-1} + C\left(\frac{(1-p)^i}{p^i} - \frac{(1-p)^m}{p^m}\right)$$

Οι ζητούμενοι μέσοι χρόνοι είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση των εξισώσεων η οποία λαμβάνεται όταν $C = 0$. *Δηλαδή*

$$k_i^m = \frac{m-i}{2p-1}$$

και ειδικότερα ο μέσος χρόνος για να μεταβεί από την κατάσταση μηδέν στην $m > 0$ *είναι*

$$k_0^m = \frac{m}{2p-1}$$

Αν $m < i$ *τότε οι εξισώσεις δεν επιδέχονται μη αρνητική λύση (αφού δεν υπάρχει κατάλληλη σταθερά* $C \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $k_i^m \geq 0$ *για κάθε* $i \in (m, +\infty)$*) το οποίο*

σημαίνει ότι οι μέσοι χρόνοι είναι ίσοι με το άπειρο. Δηλαδή ξεκινώντας από το μηδέν κατά μέσο όρο θα χρειαστούν άπειρα βήματα για να φτάσει στην αμέσως προηγούμενη κατάσταση, δηλαδή την $m = -1$.
Ας δούμε και την περίπτωση $p = \frac{1}{2}$. *Στην περίπτωση αυτή η λύση των εξισώσεων θα έχει την μορφή*

$$k_i^m = A + Bi - i^2, \quad \text{για όλα τα } i \leq m$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $k_m^m = 0$ *προκύπτει ότι*

$$k_i^m = (m-i)(m+i-B), \quad \text{για όλα τα } i \leq m$$

Οι ζητούμενοι μέσοι χρόνοι είναι η μικρότερη μη αρνητική λύση των εξισώσεων. Όμως δεν υπάρχει τέτοια λύση καθώς δεν μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο $B \in \mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $k_i^m \geq 0$ *για όλα τα* $i \in (-\infty, m)$. *Αρα* $k_i^m = \infty$ *και πιο συγκεκριμένα σημαίνει ότι στον συμμετρικό τυχαίο περίπατο ο μέσος χρόνος βημάτων για να μεταβεί από την κατάσταση 0 στην 1 είναι ίσος με το άπειρο. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το θεώρημα 324 διαπιστώνουμε ότι ο μέσος χρόνος επαναφοράς* $m_0 = \infty$ *για κάθε* $p \in (0,1)$ *και επομένως όλες οι καταστάσεις είναι μηδενικά επαναληπτικές όταν είναι επαναληπτικές.*
Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει το ερώτημα: ποια είναι η πιθανότητα, ξεκινώντας από το 0, να μεταβεί στην κατάσταση j.
Έστω ότι $p < \frac{1}{2}$. *Θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες* h_i^j *με* $i \leq j$, *δηλαδή την πιθανότητα να μεταβεί από την κατάσταση* i *στην* j. *Οι πιθανότητες αυτές ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις*

$$\begin{aligned} h_j^j &= 1 \\ h_i^j &= (1-p)h_{i-1}^j + p h_{i+1}^j \end{aligned}$$

Η λύση των εξισώσεων έχει την μορφή

$$h_i^j = A + B\frac{(1-p)^i}{p^i}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $h_j^j = 1$ *προκύπτει ότι*

$$h_i^j = 1 + B\left(\frac{(1-p)^i}{p^i} - \frac{(1-p)^j}{p^j}\right)$$

Οι ζητούμενες πιθανότητες είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση των εξισώσεων οι οποίες δίνονται επιλέγοντας $B = \frac{p^j}{(1-p)^j}$. *Δηλαδή*

$$h_i^j = \frac{p^{j-i}}{(1-p)^{j-i}}, \quad \text{για κάθε } i \leq j$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα και h_i^j *όταν* $j \leq i$. *Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με την διαφορά ότι η ελάχιστη μη αρνητική λύση των εξισώσεων δίνεται επιλέγοντας* $B = 0$, *δηλαδή* $h_i^j = 1$.
Θα εξετάσουμε και την περίπτωση $p = \frac{1}{2}$. *Στην περίπτωση αυτή η λύση της εξίσωσης διαφορών έχει την μορφή*

$$h_i^j = A + Bi$$

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $h_j^j = 1$ *προκύπτει ότι*

$$h_i^j = 1 + B(i - j)$$

Η ελάχιστη μη αρνητική λύση του συστήματος είναι επιλέγοντας $B = 0$ (*είτε* $i \leq j$ *είτε* $j \leq i$). *Επομένως,* $h_i^j = 1$.
Τελικά έχουμε ότι

$$h_i^j = \begin{cases} \frac{p^{j-i}}{(1-p)^{j-i}}, & \text{για κάθε } i \leq j, \quad \text{όταν } p < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{για κάθε } j \leq i, \quad \text{όταν } p < \frac{1}{2} \\ 1, & \qquad \text{όταν } p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Συγκεκριμένα, αν $p < \frac{1}{2}$ *η πιθανότητα να μεταβεί από την μηδέν στην* $j > 0$ *είναι ίση με* $\frac{p^j}{(1-p)^j} < 1$ *ενώ αν* $j < 0$ *τότε είναι ίση με 1. Επίσης, στην περίπτωση που* $p = \frac{1}{2}$ *η πιθανότητα να μεταβεί από την μηδέν σε οποιαδήποτε κατάσταση είναι 1.* □

Παραδειγμα 329 (Πιθανότητα και Μέσος Χρόνος Διαφυγής) *Ας ξαναγυρίσουμε στον συμμετρικό απλό τυχαίο περίπατο. Ξεκινώντας από το μηδέν, υπάρχουν άραγε κάποια όρια* a, b *τ.ω. ο τυχαίος περίπατος να μη φύγει ποτέ έξω από το διάστημα* $(-a, b)$; *Θέτοντας διαφορετικά το ερώτημα: ξεκινώντας από το μηδέν ποια είναι η πιθανότητα να παραμείνει για πάντα στο διάστημα* $(-a, b)$ *για* $a, b > 0$; *Τα ίδια ερωτήματα ισχύουν και στον μη συμμετρικό τυχαίο περίπατο, π.χ.* $p > \frac{1}{2}$.
Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $h_0^{\{-a\}\cup\{b\}}$ *η οποία είναι η πιθανότητα ο τυχαίος περίπατος να φτάσει κάποια στιγμή σε κάποιο από το δυο άκρα. Στην πραγματικότητα θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες* $h_i^{\{-a\}\cup\{b\}}$ *για* $i \in (-a, b)$. *Οι πιθανότητες αυτές θα ικανοποιούν τις γνωστές εξισώσεις, δηλαδή*

$$\begin{aligned} h_{-a} &= h_b = 1 \\ h_i &= \frac{1}{2}h_{i-1} + \frac{1}{2}h_{i+1} \end{aligned}$$

Η λύση της εξίσωσης διαφορών είναι της μορφής

$$h_i = A + Bi$$

Χρησιμοποιώντας και τις συνθήκες $h_{-a} = h_b = 1$ *προκύπτει ότι* $h_i = 1$. *Συγκεκριμένα, η* $h_0^{\{-a\}\cup\{b\}}$ *είναι ίση με την μονάδα, το οποίο σημαίνει ότι ο τυχαίος περίπατος* *ξεκινώντας από το μηδέν με πιθανότητα ένα θα περάσει οποιοδήποτε φράγμα θέσουμε ή αλλιώς η πιθανότητα να παραμείνει για πάντα στο διάσημα $(-a, b)$ είναι ίση με το μηδέν. Εφόσον είναι σίγουρο ότι θα ξεπεράσει οποιοδήποτε φράγμα μπορούμε να υπολογίσουμε και το μέσο πλήθος βημάτων που θα χρειαστούν μέχρι να γίνει αυτό, δηλαδή τους $k_i^{\{-a\}\cup\{b\}}$. Οι μέσοι αυτοί χρόνοι ικανοποιούν, κατά τα γνωστά τις εξισώσεις*

$$\begin{aligned} k_{-a} &= k_b = 0 \\ k_i &= 1 + \frac{1}{2}k_{i-1} + \frac{1}{2}k_{i+1} \end{aligned}$$

Η λύση της εξίσωσης διαφορών είναι

$$k_i = A + Bi - i^2$$

Εφαρμόζοντας και τις συνθήκες $k_{-a} = k_b = 0$ προκύπτει ότι

$$k_i = (b-i)(i+a)$$

Δηλαδή ο μέσος χρόνος που χρειάζεται ο τυχαίος περίπατος ξεκινώντας από το μηδέν να φτάσει στα άκρα είναι $k_0 = ab$. Αν επιλέξουμε $a = b = R$ τότε προκύπτει ότι $k_0 = R^2$, δηλαδή ο μέσος χρόνος για να βγει από το διάστημα $(-R, R)$, ξεκινώντας από το μηδέν, είναι ίσος με R^2. □

Παραδειγμα **330** (Μέσος Χρόνος Απορρόφησης υπό Προϋπόθεση) *Η εφαρμογή του θεωρήματος 320 χρειάζεται προσοχή. Αν το σύνολο καταστάσεων περιέχει κλειστά σύνολα τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο απορρόφησης στην ένωση αυτών των κλειστών συνόλων και όχι σε κάθε ένα ξεχωριστά. Παρόλα αυτά ενδιαφέρον παρουσιάζει και η εύρεση του μέσου χρόνου απορρόφησης σε ένα από τα κλειστά σύνολα. Ας το δούμε σε ένα παράδειγμα.*

Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, 3\}$ και πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Πρόκειται για τυχαίο περίπατο με δυο απορροφητικά εμπόδια (δείτε παράδειγμα 327). Κατά τα γνωστά μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο απορρόφησης ξεκινώντας από την κατάσταση 2 ο οποίος είναι ίσος με $k_2 = 2(3-2) = 2$. Αλλά, δεδομένου ότι θα απορροφηθεί στην κατάσταση 3, ποιος είναι ο μέσος χρόνος απορρόφησης; Για να υπολογίσουμε αυτή την ποσότητα θα πρέπει να εξαιρέσουμε όλα τα πιθανά σενάρια (μονοπάτια) στα οποία η αλυσίδα απορροφάται στην κατάσταση μηδέν. Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τον ζητούμενο μέσο χρόνο πάνω σε όλα τα υπόλοιπα πιθανά μονοπάτια.

Έστω B_i το ενδεχόμενο στο οποίο η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση i και κάποια στιγμή απορροφάται στην 3, δηλαδή

$$B_i = \{\exists n \geq 0 : X_n = 3\} \cap \{X_0 = i\}$$

Ορίζουμε ένα νέο μέτρο πιθανότητας (δείτε άσκηση 19), το Q^i, έτσι ώστε

$$Q^i(F) = P(F|B_i)$$

Θέτουμε την τυχαία μεταβλητή H η οποία μετρά τα βήματα που χρειάζεται η αλυσίδα για να απορροφηθεί στην 3, δηλαδή

$$H = \min\{n \geq 1 : X_n = 3\}$$

Ο ζητούμενος μέσος χρόνος απορρόφησης στην 3 θα είναι τότε ο

$$\mathbb{E}_{Q^i}(H) = \sum_{n=1}^{\infty} nQ^i(H = n)$$

δηλαδή η μέση τιμή της H κάτω από το μέτρο Q. Όμως

$$Q^i(H = n) = P(H = n|B_i) = \frac{f_n(i|3)}{h_i^3}$$

Τελικά

$$\mathbb{E}_{Q^i} = \frac{1}{h_i^3} \sum_{n=1}^{\infty} nf_n(i|3)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$f_n(2|3) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{1}{4^k}, & \text{όταν } n = 2k+1, k = 0, 1, 2, \cdots, \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

'ρα

$$\mathbb{E}_{Q^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n}\right) = \frac{5}{3}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $h_2^3 = \frac{2}{3}$.
Δεν είναι πάντοτε εφικτό να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $f_n(i|j)$ οπότε στην συνέχεια θα περιγράψουμε τις εξισώσεις (σαν αυτές του θεωρήματος 320) που ικανοποιούν οι ζητούμενοι μέσοι χρόνοι απορρόφησης. Έστω λοιπόν ότι σε μια αλυσίδα το σύνολο καταστάσεων S χωρίζεται σε ένα υποσύνολο C το οποίο αποτελείται από απορροφητικές καταστάσεις και ένα υποσύνολο T το οποίο αποτελείται από μεταβατικές καταστάσεις. Έστω ότι η q είναι απορροφητική, δηλαδή $q \in C$. Συμβολίζουμε με k_i τον μέσο χρόνο $\mathbb{E}_{Q^i}(H)$ απορρόφησης στην κατάσταση q ξεκινώντας από την

i, δεδομένου ότι η αλυσίδα θα απορροφηθεί σε αυτή. Επίσης με $\hat{T}$ συμβολίζουμε το υποσύνολο των μεταβατικών τέτοιων ώστε αν $j \in \hat{T}$ τότε $h_j^q > 0$. Αν $k_j < \infty$ για κάθε $j \in \hat{T}$ τότε ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις

$$\begin{aligned} k_q &= 0, \\ k_i &= 1 + \frac{1}{h_i^q} \sum_{j \in \hat{T}} P_{ij} h_j^q k_j, \quad i \in \hat{T} \end{aligned} \tag{8.18}$$

όπου h_i^q είναι η πιθανότητα να απορροφηθεί η αλυσίδα στην q ξεκινώντας από την i.
Προφανώς, υπάρχουν αλυσίδες με κλειστά σύνολα (τα οποία δεν είναι μονοσύνολα κατά ανάγκη) και μας ενδιαφέρει επίσης να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο απορρόφησης σε ένα από τα κλειστά σύνολα δεδομένου ότι θα απορροφηθεί εκεί. Μπορούμε το κάθε κλειστό σύνολο να το συρρικνώσουμε σε μια απορροφητική κατάσταση και στην συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις 8.18. Επίσης, το ίδιο αποτέλεσμα με το λήμμα 319 ισχύει και στην παραπάνω περίπτωση. Αυτό σημαίνει ότι αν οι εξισώσεις 8.18 δεν επιδέχονται λύση και όλες οι μεταβατικές συνεπικοινωνούν τότε αναγκαστικά οι μέσοι χρόνοι είναι ίσοι με άπειρο.
Στο ίδιο πνεύμα με το παράδειγμα αυτό μπορεί κανείς να συμβουλευτεί το [;]. □

8.11.1 Πιθανότητα απορρόφησης από μεταβατικές καταστάσεις

Αν έχουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με κάποιες επαναληπτικές καταστάσεις και κάποιες μεταβατικές καταστάσεις έχει νόημα να υπολογίσουμε την πιθανότητα απορρόφησης από τις μεταβατικές καταστάσεις. Δηλαδή την πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από μια μεταβατική κατάσταση και να παραμείνει για πάντα στο σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων.
Αν $A \subseteq S$ είναι το σύνολο όλων των επαναληπτικών καταστάσεων και T το σύνολο των μεταβατικών τότε με h_i^A όπου $i \in T$ συμβολίζουμε την πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την i και να απορροφηθεί από το σύνολο των επαναληπτικών (διότι $k \nrightarrow i$ όταν k επαναληπτική και i μεταβατική). Με β_i συμβολίζουμε την (συμπληρωματική) πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την i (μεταβατική) και να παραμείνει στο σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων για πάντα. Προφανώς ισχύει ότι $h_i^A + \beta_i = 1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 331 *Οι πιθανότητες απορρόφησης από το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων β_i ικανοποιούν τις εξισώσεις*

$$\begin{aligned} \beta_i &= \quad 0, \qquad \textit{όταν} \quad i \in A, \\ \beta_i &= \sum_{j \in T} P_{ij} \beta_j, \quad \textit{όταν} \quad i \notin A. \end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το αποτέλεσμα είναι προφανές από την σχέση $h_i^A + \beta_i = 1$ και από τις εξισώσεις που ικανοποιούν οι h_i^A. □

Πόρισμα 332 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Τότε η πιθανότητα απορρόφησης (ξεκινώντας από μεταβατική κατάσταση) στο σύνολο των επαναληπτικών καταστάσεων είναι ίση με 1.*

Απόδειξη. Αναδιατάσσουμε τις καταστάσεις της αλυσίδας έτσι ώστε οι επαναληπτικές να είναι δίπλα-δίπλα.
Αν υπολογίσουμε τις πιθανότητες απορρόφησης από το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων λύνοντας τις εξισώσεις του προηγούμενου θεωρήματος θα διαπιστώσουμε ότι ο πίνακας (εδώ είναι χρήσιμη η αναδιάταξη των καταστάσεων) του γραμμικού συστήματος έχει αυστηρά κυρίαρχη διαγώνιο. Επομένως είναι αντιστρέψιμος (δες ;;) και άρα έχει μοναδική λύση η οποία είναι η μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι $\beta_i = 0$ και επομένως $h_i^A = 1$. □

Παράδειγμα 333 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με άπειρο πλήθος καταστάσεων το $S = \mathbb{N} \cup \{0\}$ και πίνακα μετάβασης τέτοιον ώστε $P_{00} = 1$, $P_{10} = p_1$, $P_{11} = p_2$, $P_{12} = p_3$, $P_{ii} = p$ και $P_{i,i+1} = q$ για $i \geq 2$. Υποθέτουμε ότι $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ και $p + q = 1$. Προφανώς η κατάσταση 0 είναι απορροφητική. Η κατάσταση 1 είναι μεταβατική διότι υπάρχει θετική πιθανότητα ξεκινώντας από την 1 να απορροφηθεί στην 0. Οι καταστάσεις $2, 3, \cdots$ είναι επίσης μεταβατικές για διαφορετικό όμως λόγο. Αν για παράδειγμα η αλυσίδα ξεκινήσει από την κατάσταση 2 δεν υπάρχει περίπτωση να μεταβεί ποτέ στην 0 και να απορροφηθεί εκεί. Παρόλα αυτά υπάρχει θετική πιθανότητα να μεταβεί στην 3 το οποίο σημαίνει ότι δεν θα επιστρέψει ποτέ ξανά στην 2.*
Αν $A = \{0\}$ και $T = \{1, 2, \cdots\}$ τότε $\beta_i = 1$ για $i \geq 2$ η οποία είναι η πιθανότητα να ξεκινήσει από την κατάσταση i και να παραμείνει στο T το οποίο είναι το σύνολο των μεταβατικών. Επιπλέον, $\beta_0 = 0$ άρα

$$\beta_1 = p_2\beta_1 + p_3\beta_2$$

δηλαδή

$$\beta_1 = \frac{p_3}{1 - p_2}$$

η οποία είναι η πιθανότητα να ξεκινήσει από την κατάσταση 1 και να παραμείνει στις μεταβατικές καταστάσεις. Η πιθανότητα $1 - \beta_1$ είναι η πιθανότητα να απορροφηθεί στην 0. Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρίσκαμε αν υπολογίζαμε την h_1^A δεδομένου ότι $h_i^A = 0$ για $i \geq 2$. □

8.12 Μέσο πλήθος επισκέψεων

Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων το S.
Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή N_j^n με $j \in S$ η οποία είναι τέτοια ώστε

$$N_j^n(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } X_n = j \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επομένως, η τυχαία μεταβλητή

$$M_j = \sum_{n=1}^{\infty} N_j^n$$

μας δίνει το πλήθος των επισκέψεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας στην κατάσταση j από την X_1 και μετά ενώ η $M_j(n)$ που είναι τέτοια ώστε

$$M_j(n) = \sum_{k=1}^{n} N_j^k \tag{8.19}$$

μας δίνει το πλήθος των επισκέψεων της Μαρκοβιανής αλυσίδας στην κατάσταση j από την X_1 και μετά στις πρώτες n μεταβάσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ 334 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων S. Ισχύουν τα εξής,*

$$\begin{aligned} P(M_j = 0|X_0 = i) &= 1 - f_{ij} \\ P(M_j = p|X_0 = i) &= f_{ij} \cdot f_{jj}^{p-1} \cdot (1 - f_{jj}) \end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι προφανές ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου $\{M_j = 0\}$ δεδομένου ότι $X_0 = i$ ισοδυναμεί με όλες τις πιθανές διαδρομές της αλυσίδας η οποία ξεκινά από το i και δεν επισκέπτεται ποτέ την j. Η πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την i και να επισκεφθεί την j κάποια στιγμή είναι η f_{ij} επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $1 - f_{ij}$.
Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι

$$P(M_j = p|X_0 = i) = f_{ij} \cdot f_{jj}^{p-1} \cdot (1 - f_{jj}), \quad p \geq 1$$

Το ενδεχόμενο $\{M_j = 3\} \cap \{X_0 = i\}$, για παράδειγμα, περιέχει όλα τα μονοπάτια τέτοια ώστε

$$\underbrace{i \to i_1 \to \cdots i_k \to j}_{f_{ij}} \underbrace{\to j_1 \cdots j_k \to j}_{f_{jj}} \underbrace{\to j_{k1} \cdots j_{kl} \to j}_{f_{jj}} \underbrace{\to w_1 \to w_2 \cdots}_{1-f_{jj}}$$

όπου η αλυσίδα θα επισκεφθεί την κατάσταση j ακριβώς 3-φορές, δηλαδή $w_l \neq j$ για $l = 1, 2, \cdots$. Με $\underbrace{i \to i_1 \to \cdots i_k \to j}_{f_{ij}}$ εννοούμε ότι η πιθανότητα όλων των πιθανών μονοπατιών που ξεκινούν από την i και καταλήγουν στην j (χωρίς ενδιάμεσα να έχουν επισκεφθεί την j) είναι ίση με f_{ij}. Παρομοίως και τα υπόλοιπα. Συνεπώς $P(M_j = 3|X_0 = i) = f_{ij} \cdot f_{jj}^2 \cdot (1 - f_{jj})$. Παρόμοια για οποιοδήποτε $p \geq 1$. □

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε τις ποσότητες

$$\mu_{ij} = \mathbb{E}\left(M_j|X_0 = i\right), \quad \mu_{ij}(n) = \mathbb{E}\left(M_j(n)|X_0 = i\right)$$

Σημειώστε ότι

$$\mu_{ij} = \lim_{n\to\infty} \mu_{ij}(n) \quad (\text{θεώρημα μονότονης σύγκλισης } 105)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 335 *Ισχύουν τα παρακάτω*

$$\begin{aligned}\mu_{ij} &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n \\ \mu_{ij} &= P_{ij} + \sum_{l\in S} P_{il}\mu_{lj} \quad \text{όταν } i,j \text{ μεταβατικές}\end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πράγματι,

$$\mu_{ij}(n) = \mathbb{E}\left(M_j(n)|X_0 = i\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} N_j^k|X_0 = i\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(N_j^k|X_0 = i) = \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k$$

'ρα $\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n$. Αυτό σημαίνει ότι αν j επαναληπτική τότε $\mu_{ij} = \infty$ (δες 261) ενώ αν είναι μεταβατική τότε $\mu_{ij} < \infty$. Στην περίπτωση που i είναι επαναληπτική και j μεταβατική τότε $\mu_{ij} = 0$ διότι $i \nrightarrow j$.
Αν οι i, j είναι μεταβατικές ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n &= P_{ij} + \sum_{n=2}^{\infty} P_{ij}^n \\ &= P_{ij} + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{l\in S} P_{il}P_{lj}^{n-1} \\ &= P_{ij} + \sum_{l\in S} P_{il}\sum_{n=2}^{\infty} P_{lj}^{n-1} \quad \text{(πρόταση ;;)} \\ &= P_{ij} + \sum_{l\in S} P_{il}\mu_{lj}\end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 336 *Στην περίπτωση που έχουμε πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων, έστω m, τότε ο πίνακας του γραμμικού συστήματος (αφού υπάρχει τουλάχιστον μια επαναληπτική κατάσταση)*

$$\mu_{ij} = P_{ij} + \sum_{l=0}^{m} P_{il}\mu_{lj}, \quad i \in S, j \text{ σταθερό}$$

είναι πάντοτε αντιστρέψιμος διότι έχει αυστηρά κυρίαρχη διαγώνιο (δες ;;) τονίζοντας ότι $P_{il} = 0$ όταν i επαναληπτική και l μεταβατική. Για τον ίδιο λόγο $\mu_{il} = 0$ επομένως το γραμμικό σύστημα που προκύπτει αποτελείται από τόσες εξισώσεις και αγνώστους όσο και το πλήθος των μεταβατικών καταστάσεων. □

Από το θεώρημα 261 προκύπτει ότι αν j είναι επαναληπτική τότε $\mu_{ij} = \infty$ ενώ αν η j είναι μεταβατική $\mu_{ij} < \infty$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 337 *Έστω $i \in S$ οποιαδήποτε κατάσταση και j μεταβατική κατάσταση. Τότε*

$$\begin{aligned} P(M_j < \infty | X_0 = i) &= 1 \\ \mu_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} P_{ij}^k &= \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} \end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή η j είναι μεταβατική τότε $f_{jj} < 1$. Όμως

$$\{M_j = \infty\} = \{M_j \geq 0\} \cap \{M_j \geq 1\} \cap \{M_j \geq 2\} \cap \cdots \cap \{M_j \geq m\} \cap \cdots$$

Συνεπώς

$$P(M_j = \infty | X_0 = i) = \lim_{m \to \infty} P(M_j \geq m | X_0 = i) = f_{ij} \lim_{m \to \infty} f_{jj}^{m-1} = 0$$

Αυτό σημαίνει ότι $P(M_j < \infty | X_0 = i) = 1$.
Τέλος,

$$\mu_{ij} = \quad \textstyle\sum_{m=1}^{\infty} mP(M_j = m | X_0 = i) = \sum_{m=1}^{\infty} m f_{ij} (1 - f_{jj}) f_{jj}^{m-1} = f_{ij}(1 - f_{jj}) \sum_{m=1}^{\infty} m f_{jj}^{m}$$

Όμως, για $|x| < 1$ ισχύει ότι

$$\sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (x^m)' = \left(\sum_{m=0}^{\infty} x^m \right)' = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Επομένως

$$\mu_{ij} = f_{ij}(1 - f_{jj}) \frac{1}{(1 - f_{jj})^2} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 338 *Για οποιεσδήποτε μεταβατικές καταστάσεις $i, j \in S$ με $i \to j$ ισχύει ότι*

$$f_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu_{jj} + 1}$$

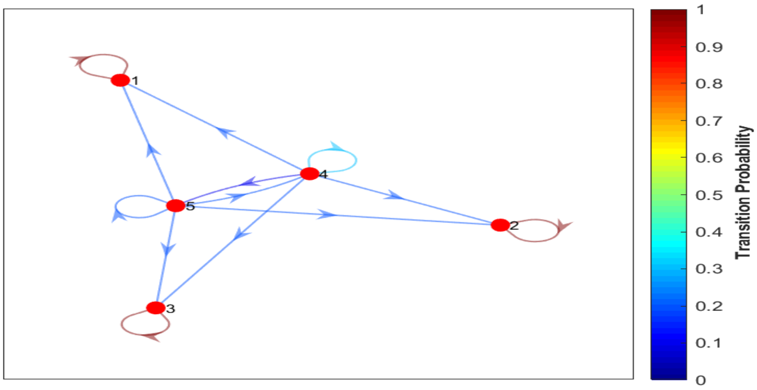
ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mu_{ij} &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k} \quad \text{(αναδιάταξη σειράς θετικών όρων)} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(i|j) \sum_{n=k}^{\infty} P_{jj}^{n-k} \\ &= (\mu_{jj} + 1) f_{ij} \end{aligned}$$

Δηλαδή $f_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\mu_{jj}+1}$ όπου f_{ij} είναι η πιθανότητα η αλυσίδα να επισκεφθεί την κατάσταση j ξεκινώντας από την i. □

Παραδειγμα 339 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$



Σχήμα 8.10: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος 339

Θα υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους επίσκεψης στην κατάσταση 4 η οποία είναι μεταβατική (όπως επίσης είναι και η 5) ενώ οι καταστάσεις $1, 2, 3$ *είναι επαναληπτικές και απορροφητικές. Θα υπολογίσουμε δηλαδή τους* μ_{44} *και* μ_{54}*. Οι εξισώσεις που ικανοποιούν είναι οι παρακάτω*

$$\begin{aligned} \mu_{44} &= \frac{3}{10} + \frac{3}{10}\mu_{44} + \frac{1}{10}\mu_{54} \\ \mu_{54} &= \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\mu_{44} + \frac{1}{5}\mu_{54} \end{aligned}$$

Η λύση των εξισώσεων είναι $\mu_{54} = \frac{10}{27}$ *και* $\mu_{44} = \frac{13}{27}$*, οπότε* $f_{54} = \frac{1}{4}$*. Υπολογίζοντας τις πιθανότητες* f_{54} *και* f_{44} *διαφορετικά, δηλαδή,*

$$\begin{aligned} f_{54} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(5|4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{4}, \\ f_{44} &= \cdots = \frac{13}{40} \end{aligned}$$

επιβεβαιώνουμε ότι

$$\mu_{54} = \frac{f_{54}}{1 - f_{44}} = \frac{10}{27} \quad \mu_{44} = \frac{f_{44}}{1 - f_{44}} = \frac{13}{27} \quad f_{44} = \frac{\mu_{44}}{\mu_{44} + 1} = \frac{13}{40}$$

□

8.13 Στάσιμες κατανομές

ΘΕΩΡΗΜΑ 340 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων S και πίνακα μετάβασης P. Ας υποθέσουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j, \qquad \text{για κάθε } j \in S$$

δηλαδή υπάρχει το όριο και είναι ανεξάρτητο του i. Τότε

(i) $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$ *ή* $\pi_j = 0$*, για κάθε* $j \in S$*,*

(ii) $\sum_{i\in S} P_{ij}\pi_i = \pi_j$*, για κάθε* $j \in S$*.*

(iii) *Αν* $\sum \pi_j = 1$ *τότε το διάνυσμα* $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots,)$ *είναι η μοναδική λύση του συστήματος*

$$\begin{aligned} \sum_{i\in S} P_{ij} v_i &= v_j \qquad \text{για κάθε } j \in S \\ \sum_{i\in S} v_i &= 1 \end{aligned}$$

Αν $\pi_j = 0$ *για κάθε* $j \in S$ *τότε το σύστημα δεν έχει λύση.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα υποθέσουμε αρχικά ότι το S είναι πεπερασμένο με m στοιχεία. Έχουμε τότε,

$$\sum_{j=1}^m \pi_j = \sum_{j=1}^m \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^m P_{ij}^n = 1.$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό έχουμε για κάποια $j, k \in S$,

$$\sum_{i=1}^m P_{ij}\pi_i = \quad \textstyle\sum_{i=1}^m P_{ij}(\lim_{n\to\infty} P_{ki}^n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^m P_{ki}^n P_{ij} = \lim_{n\to\infty} P_{kj}^{n+1} = \pi_j.$$

Στην περίπτωση που το S έχει άπειρα στοιχεία τότε δεν μπορούμε να εναλλάξουμε το όριο με το άπειρο άθροισμα παρά μόνο όταν το άθροισμα είναι πεπερασμένο. Για τον λόγο αυτό θα εφαρμόσουμε το λήμμα ;;, οπότε

$$\sum_{j=1}^\infty \pi_j = \sum_{j=1}^\infty \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n \le \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=1}^\infty P_{ij}^n = 1.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο P^n είναι στοχαστικός πίνακας.
Για $j, k \in S$ έχουμε,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} P_{ij}\pi_i &= \sum_{i=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} P_{ij}P_{ki}^n \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} P_{ki}^n P_{ij} \\ &= \liminf_{n\to\infty} P_{kj}^{n+1} \\ &= \pi_j\end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε την ισότητα υποθέτουμε ότι για κάποιο $k \in S$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_{ik}\pi_i < \pi_k.$$

Αφού

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=1, j\neq k}^{\infty} \pi_j + \pi_k$$

έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j &> \sum_{j=1,j\neq k}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} P_{ij}\pi_i\right) + \sum_{i=1}^{\infty} P_{ik}\pi_i \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} P_{ij}\pi_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} P_{ij}\pi_i \quad \text{(αναδιάταξη σειράς θετικών όρων)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i.\end{aligned}$$

Αυτό είναι άτοπο άρα ισχύει η ισότητα.
Τέλος, αν

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$$

το ίδιο συμβαίνει και με τον P^k για οποιοδήποτε $k \ge 1$ δηλαδή $\lim_{n\to\infty} (P_{ij}^k)^n = \pi_j$. Αρα,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_{ij}^k \pi_i = \pi_j.$$

Επομένως,

$$\lim_{k\to\infty} \pi_j = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} P_{ij}^k \pi_i \le \sum_{i=1}^{\infty} \pi_j \pi_i = \pi_j \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i.$$

Δηλαδή, έχοντας αποδείξει ήδη ότι $\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \leq 1$, έχουμε

$$0 \leq \pi_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i - 1 \right) \leq 0$$

Οπότε προκύπτει και το i).
Αν $\sum \pi_j = 1$ τότε το διάνυσμα $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$ είναι λύση του συστήματος, αφού από το (ii) ικανοποιεί τις εξισώσεις. Θα αποδείξουμε ότι είναι και η μοναδική. Έστω ότι υπάρχει ακόμη μια λύση, το διάνυσμα $v = (v_1, v_2, \cdots)$. Δηλαδή ικανοποιεί τις εξισώσεις $vP = v$ (σε μορφή πινάκων) από το οποίο προκύπτει ότι $vP^n = v$ για κάθε n. Δηλαδή, το διάνυσμα v ικανοποιεί τις εξισώσεις $\sum_{i\in S} P_{ij}^n v_i = v_j, \sum_{i \in S} v_i = 1$.
Λαμβάνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ (χρησιμοποιώντας το λήμμα Fatou) έχουμε $\sum_{i\in S} v_i \pi_j \leq v_j$ ή αλλιώς $\pi_j \sum_{i\in S} v_i \leq v_j$. Όμως $\sum_{i\in S} v_i = 1$ επομένως $\pi_i \leq v_i$ για κάθε $i \in S$. Αυτό όμως αναγκαστικά σημαίνει ότι $\pi_i = v_i$ για κάθε $i \in S$ διότι διαφορετικά θα έπρεπε $\sum v_i > 1$.
Στην περίπτωση όπου $\pi_j = 0$ για κάθε $j \in S$ τότε το σύστημα αυτό δεν επιδέχεται λύση. Πράγματι, έστω v_i μια λύση του συστήματος. Τότε θα ικανοποιεί και τις εξισώσεις

$$\sum_{i\in S} P_{ij}^n v_i = v_j$$

Λαμβάνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το λήμμα κυριαρχημένης σύγκλισης προκύπτει ότι $v_j = 0$ για κάθε $j \in S$, άτοπο διότι $\sum v_j = 1$. □

Παρατηρηση 341 *Αν $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$ τότε, αν $m^{(0)}$ είναι η αρχική κατανομή, έχουμε ότι (δες 230),*

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \lim_{n\to\infty} m_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} (m^{(0)} \cdot P^n)_j = \lim_{n\to\infty} \sum_{s\in S} m_s P_{sj}^n = \pi_j$$

εφαρμόζοντας το λήμμα κυριαρχημένης σύγκλισης (δες ;;).

Ορισμος 342 *Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\pi_j \in [0,1]$ με $j \in S$ τέτοιοι ώστε*

$$\begin{aligned} \sum_{i\in S} \pi_i P_{ij} &= \pi_j, \quad \forall j \in S, \\ \sum_{j\in S} \pi_j &= 1, \quad (\textit{εξίσωση κανονικοποίησης}) \end{aligned}$$

τότε το διάνυσμα $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$ θα ονομάζεται **στάσιμη κατανομή** *της Μαρκοβιανής αλυσίδας και οι παραπάνω εξισώσεις ονομάζονται* **εξισώσεις στοχαστικής ισορροπίας** *ή* **στάσιμες εξισώσεις**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 343 *Για παράδειγμα, αν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει ως αρχική κατανομή την στάσιμη κατανομή, δηλαδή $P(X_0 = j) = \pi_j$ για κάθε $j \in S$, τότε*

$$P(X_n = j) = \pi_j,$$

για κάθε n. Οπότε, η Μαρκοβιανή αλυσίδα διατηρεί την ίδια κατανομή σε όλες τις χρονικές στιγμές και για τον λόγο αυτόν ονομάζεται στάσιμη κατανομή. Πράγματι,

$$P(X_1 = j) = \sum_{i\in S} P(X_1 = j|X_0 = i)P(X_0 = i) = \sum_{i\in S} \pi_i P_{ij} = \pi_j.$$

Συνεχίζοντας, προκύπτει το ίδιο συμπέρασμα για όλους τους χρόνους. □

Στην συνέχεια θα δώσουμε θεωρήματα στα οποία θα μελετήσουμε τις προϋποθέσεις που απαιτούνται για να υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$ και κατόπιν να το συσχετίσουμε με την στάσιμη κατανομή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 344 *Οι στάσιμες εξισώσεις είναι ισοδύναμες με την ισότητα $\pi P = \pi$ όπου $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots,)$ και P ο πίνακας μετάβασης. Είναι εύκολο να δούμε ότι αν κάποιο διάνυσμα π ικανοποιεί την ισότητα αυτή τότε το ίδιο θα συμβαίνει και με τον πίνακα P^m, δηλαδή $\pi P^m = \pi$. Πράγματι, αν πολλαπλασιάσουμε διαδοχικά την ισότητα $\pi P = \pi$ με τον πίνακα P και αντικαθιστούμε το γινόμενο πP με το π στο δεξί μέλος έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.*
Ας υποθέσουμε ότι υπολογίζουμε ένα διάνυσμα π χρησιμοποιώντας την εξίσωση κανονικοποίησης και τις εξισώσεις $\pi P = \pi$ εκτός από μια (οποιαδήποτε). Αν αθροίσουμε τις εξισώσεις αυτές και χρησιμοποιήσουμε και την εξίσωση κανονικοποίησης τότε θα πάρουμε την εξίσωση που δεν έχουμε λάβει υπόψη. Αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα που υπολογίσαμε ικανοποιεί και την εξίσωση που δεν λάβαμε υπόψη στην αρχή, επομένως για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή (αν υπάρχει) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση κανονικοποίησης και τις εξισώσεις $\pi P = \pi$ εκτός από μια, όποια μας βολεύει. □

8.14 Οριακές πιθανότητες

Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης P. Όπως γνωρίζουμε ο πίνακας περιέχει τις πιθανότητες $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$. Δηλαδή στην θέση (i, j) βρίσκεται η πιθανότητα $P(X_{n+1} = j|X_n = i)$. Έχουμε αποδείξει επίσης ότι η πιθανότητα $P(X_{n+m} = j|X_m = i) = P(X_n = j|X_0 = i)$ (υπόθεση χρονικής ομοιογένειας) είναι στην (i, j) θέση του πίνακα P^n. Στις εφαρμογές συχνά μας ενδιαφέρουν οι οριακές πιθανότητες καθώς $n \to \infty$ δηλαδή τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{n+m} = j|X_m = i)$$

Όταν η αλυσίδα έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων μπορεί να βρει κάποιος τις οριακές πιθανότητες υπολογίζοντας την νιοστή δύναμη του πίνακα P και ύστερα υπολογίζοντας τα όρια των στοιχείων του.
Ας το δούμε με ένα παράδειγμα μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας με πίνακα μετάβασης τον

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η αλυσίδα έχει ένα κλειστό σύνολο, το $C = \{1, 2, 3\}$ το οποίο έχει περίοδο 2. Επίσης η κατάσταση 4 είναι μεταβατική.
Μπορούμε να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα P που είναι

$$P^n = \begin{bmatrix} \frac{1+(-1)^n}{4} & \frac{1+(-1)^n}{4} & \frac{1-(-1)^n}{2} & 0 \\ \frac{1+(-1)^n}{4} & \frac{1+(-1)^n}{4} & \frac{1-(-1)^n}{2} & 0 \\ \frac{1-(-1)^n}{4} & \frac{1-(-1)^n}{4} & \frac{1+(-1)^n}{2} & 0 \\ \frac{1+\frac{1}{3^n}}{4} & \frac{1+\frac{1}{3^{n-1}}}{4} & \frac{1-\frac{1}{3^n}}{2} & \frac{1}{3^n} \end{bmatrix}$$

Για παράδειγμα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{n+m} = 1|X_m = 1) = \lim_{n\to\infty} P_{11}^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+(-1)^n}{4}$$

ενώ

$$\lim_{n\to\infty} P(X_{n+m} = 1|X_m = 4) = \lim_{n\to\infty} P_{41}^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{3^n}}{4} = \frac{1}{4}$$

Η πρώτη ακολουθία δεν έχει όριο διότι η ακολουθία των άρτιων όρων συγκλίνει στο $\frac{1}{2}$ ενώ η ακολουθία των περιττών όρων στο μηδέν.
Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι ο P^n έχει δυο συγκλίνουσες υπακολουθίες. Το γεγονός αυτό προκύπτει από την ύπαρξη καταστάσεων με περίοδο 2.
Θα αναπτύξουμε στην συνέχεια κατάλληλη μεθοδολογία με την οποία θα υπολογίζουμε τις οριακές πιθανότητες (χωρίς να υπολογίζουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα) η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην περίπτωση Μαρκοβιανών αλυσίδων με άπειρο πλήθος καταστάσεων. Σημειώστε ότι από το παράδειγμα που μόλις δώσαμε έχουμε το συμπέρασμα ότι η περίοδος των καταστάσεων παίζει σημαντικό ρόλο στην εύρεση των οριακών πιθανοτήτων.

8.14.1 Ανανεωτικό θεώρημα

Ιδιαίτερα χρήσιμο στις αποδείξεις των θεωρημάτων της ενότητας αυτής είναι το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως Ανανεωτικό Θεώρημα.

Θεωρημα 345 (Ανανεωτικο Θεωρημα) *Έστω $f_1, f_2, \cdots$ μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών έτσι ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1$ και Μ.Κ.Δ. $\{j : f_j > 0\} = 1$. Θέτουμε $u_0 = 1$ και $u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}$, με $n = 1, 2, \cdots$. Αν ορίσουμε $m = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n$ τότε $u_n \to \frac{1}{m}$ καθώς $n \to \infty$.*

Αποδειξη. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $u_n \in [0,1]$ με επαγωγή. Είναι εύκολο να δούμε ότι $u_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον, $u_0 = 1$ θα υποθέσουμε ότι $u_n \in [0,1]$ για κάποιο n και θα αποδείξουμε ότι το ίδιο συμβαίνει και για $n+1$. Πράγματι,

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} f_k u_{n+1-k} = f_1 u_n + \cdots + f_{n+1} u_0 \leq f_1 + \cdots + f_{n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n = 1$$

Θέτουμε

$$r_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j, \quad \text{για } n = 0, 1, \cdots$$

Χρησιμοποιώντας αυτό μπορούμε να γράψουμε

$$u_n = f_1 u_{n-1} + \cdots + f_n u_0 = (r_0 - r_1) u_{n-1} + \cdots + (r_{n-1} - r_n) u_0$$

Λόγω του ότι $r_0 = 1$ εύκολα προκύπτει ότι

$$r_0 u_n + \cdots + r_n u_0 = r_0 u_{n-1} + \cdots + r_{n-1} u_0$$

Θέτοντας $A_n = \sum_{k=0}^{n} r_k u_{n-k}$ βλέπουμε ότι η προηγούμενη ισότητα σημαίνει ότι $A_n = A_{n-1}$ για κάθε n και άρα $A_n = A_0 = r_0 u_0 = 1$ ή αλλιώς

$$\sum_{k=0}^{n} r_k u_{n-k} = 1, \quad \text{για } n = 0, 1, \cdots \tag{8.20}$$

Εφόσον, η ακολουθία u_n είναι φραγμένη ισχύει ότι $b = \limsup_n u_n \in [0,1]$. Έστω u_{n_k} υπακολουθία της u_n τέτοια ώστε $u_{n_k} \to b$ καθώς $k \to \infty$. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} b &= \liminf_k u_{n_k} \\ &= \liminf_k \left(f_i u_{n_k - i} + \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} f_j u_{n_k - j} \right) \\ &\leq \liminf_k f_i u_{n_k - i} + b \sum_{j=1, j\neq i}^{\infty} f_j \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι ισχύει η επόμενη ανισότητα

$$b \leq f_i \liminf_k u_{n_k - i} + (1 - f_i) b$$

δηλαδή

$$f_i \liminf_k u_{n_k - i} \geq f_i b$$

Συνεπώς, όταν $f_i > 0$ τότε $u_{n_k - i} \to b$ καθώς $k \to \infty$. Δεδομένου $f_i > 0$ εφαρμόζουμε την παραπάνω διαδικασία στην ακολουθία $u_{n_k - i}$ και επομένως αν $f_j > 0$ τότε και $u_{n_k - i - j} \to b$.
Όπως έχουμε υποθέσει, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\{j : f_j > 0\}$ είναι ίσος με την μονάδα. Από το λήμμα 296 προκύπτει ότι υπάρχει πεπερασμένου πλήθους ακεραίων, έστω $\{i_1, \cdots, i_m\}$, τέτοιοι ώστε η μονάδα να είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης τους. Επομένως, για τους ακέραιους της μορφής $t = \sum_{r=1}^{m} a_r i_r$ με a_r θετικούς ακέραιους και $f_{i_r} > 0$ ισχύει ότι $u_{n_k - t} \to b$ καθώς $k \to \infty$. Το σύνολο S που περιέχει αυτούς τους ακέραιους είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και ταυτόχρονα η μονάδα είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των στοιχείων του. Επομένως, το S περιέχει όλους τους θετικούς ακέραιους (δες 297) μετά από έναν θετικό ακέραιο I και πάνω. Δηλαδή $u_{n_k - i} \to b$ καθώς $k \to \infty$ για κάθε $i \geq I$. Από την 8.20 προκύπτει ότι $\sum_{j=0}^{\infty} r_j u_{n_k - I - j} = 1$ θέτοντας $u_n = 0$ όταν $n < 0$. Αν $\sum_{j=0}^{\infty} r_j < \infty$ τότε χρησιμοποιώντας το λήμμα κυριαρχημένης σύγκλισης (δες ;;) προκύπτει ότι $b \sum_{j=0}^{\infty} r_j = 1$. Αν $\sum_{j=0}^{\infty} r_j = \infty$, χρησιμοποιώντας το λήμμα Fatou (δες ;;) προκύπτει ότι $1 \geq b \sum_{j=0}^{\infty} r_j$ το οποίο σημαίνει ότι $b = 0$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε ότι

$$b = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} r_j}$$

Όμως $\sum_{n=0}^{\infty} r_n = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n = m$.
Με την ίδια συλλογιστική αποδεικνύουμε ότι $\liminf u_n = \frac{1}{m}$ και επομένως ισχύει ότι $\lim u_n = \frac{1}{m}$. □

8.14.2 Θεωρήματα οριακών πιθανοτήτων

Θέτουμε $f_n = f_n(i|i)$ όπου $i \in S$ επαναληπτική και απεριοδική και $u_n = P_{ii}^n$ οπότε $u_n = \sum_{k=1}^{n} f_k u_{n-k}$ (δες λήμμα 258). Επειδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\{n \in \mathbb{N} : f_n > 0\}$ είναι ίσος με 1 (δες 299) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Ανανεωτικό Θεώρημα και να πάρουμε το εξής αποτέλεσμα

$$\lim_{n \to \infty} P_{ii}^n = \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n f_n(i|i)} = \frac{1}{m_i}$$

το οποίο θα χρησιμοποιηθεί στις αποδείξεις των επόμενων θεωρημάτων. Σημειώστε ότι σημαντικό ρόλο διαδραματίζει ο υπολογισμός του μέσου χρόνου επαναφοράς m_i της κατάστασης i.

ΘΕΩΡΗΜΑ 346 *Αν η κατάσταση j μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι μεταβατική τότε $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n < \infty$ για κάθε i επομένως $P_{ij}^n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Αν η j είναι επαναληπτική και απεριοδική ενώ η i είναι τέτοια ώστε $i \leftrightarrow j$ τότε $P_{ij}^n \to \frac{1}{m_j}$. Επίσης, το $m_j < \infty$* **ανν** *$m_i < \infty$, δηλαδή σε κάθε αδιαχώριστο σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων είτε θα είναι όλες οι καταστάσεις θετικά επαναληπτικές είτε μηδενικά επαναληπτικές. Αν i είναι μια οποιαδήποτε κατάσταση τότε $P_{ij}^n \to \frac{f_{ij}}{m_j} = \frac{h_i^j}{m_j}$ από όπου βγάζουμε το συμπέρασμα ότι αν η j είναι μηδενικά επαναληπτική τότε $P_{ij}^n \to 0$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν η κατάσταση j είναι μεταβατική έχουμε ήδη αποδείξει (δες θεώρημα 261) ότι $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ij}^n < \infty$ για κάθε i επομένως $P_{ij}^n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.
Αν η κατάσταση j είναι επαναληπτική και απεριοδική τότε γράφουμε

$$P_{ij}^n = \sum_{k=1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k}$$

Διαλέγουμε κάποιο $m < n$ και γράφουμε

$$P_{ij}^n = \sum_{k=1}^{m} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k} + \sum_{k=m+1}^{n} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k}$$

Συνεπώς

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k} \leq P_{ij}^n \leq \sum_{k=1}^{m} f_k(i|j) P_{jj}^{n-k} + \sum_{k=m+1}^{n} f_k(i|j) \tag{8.21}$$

Επειδή $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(i|j) = f_{ij} \leq 1$ τότε ισχύει

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} f_k(i|j) = f_{ij} - \sum_{k=1}^{m} f_k(i|j)$$

Λαμβάνουμε το όριο καθώς $n \to \infty$ στην 8.21 και έχουμε (δεδομένου ότι το άθροισμα είναι πεπερασμένο)

$$\frac{\sum_{k=1}^{m} f_k(i|j)}{m_j} \leq \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n \leq \frac{\sum_{k=1}^{m} f_k(i|j)}{m_j} + f_{ij} - \sum_{k=1}^{m} f_k(i|j)$$

Στην συνέχεια λαμβάνουμε το όριο καθώς $m \to \infty$ και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(i|j)}{m_j} = \frac{f_{ij}}{m_j} = \frac{h_i^j}{m_j}$$

Σημειώστε ότι όταν $i \leftrightarrow j$ τότε $f_{ij} = h_i^j = 1$.

Έστω ότι $m_j < \infty$ και έστω r, s τέτοια ώστε $P_{ij}^r > 0$ και $P_{ji}^s > 0$. Τότε $P_{ii}^{n+r+s} \geq P_{ij}^r P_{jj}^n P_{ji}^s > \frac{c}{m_j} > 0$. Αν $m_i = \infty$ τότε $P_{ii}^n \to 0$ καθώς $n \to \infty$ οπότε έχουμε άτοπο. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 347 *Το αποτέλεσμα του παραπάνω θεωρήματος γράφεται συνοπτικά ως εξής*

$$\lim_{n\to\infty} (P^n)_{ij} = \begin{cases} \frac{h_i^j}{m_j}, & \text{όταν η } j \text{ είναι θετικά επαναληπτική} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

αν η κατάσταση j είναι απεριοδική. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 348 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία είναι αδιαχώριστη και περιοδική με περίοδο $d > 1$ και έστω δυο καταστάσεις i, j. Έστω $C_0, C_1, \cdots, C_{d-1}$ τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση i (δηλαδή $i \in C_0$ και $j \in C_a$ για κάποιο $a = 0, 1, \cdots, d-1$). Τότε*

$$\begin{aligned} P_{ij}^{nd+a} &\to \frac{d}{m_j}, \quad \text{όταν} \quad j \in C_a, \ a = 0, 1, 2, \cdots, d-1, \\ P_{ij}^{nd+b} &= 0, \quad \text{όταν} \quad j \in C_a, \ b \neq a \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει επιπλέον ότι αν η j είναι μηδενικά επαναληπτική τότε $P_{ij}^{nd+b} \to 0$ για κάθε $b = 0, 1, \cdots, d-1$. Επίσης, $m_j < \infty$ **ανν** *$m_i < \infty$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Στην περίπτωση όπου $a = 0$, δηλαδή $j \in C_0$ τότε η j είναι επαναληπτική και απεριοδική στην Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης P^d. Αρα

$$\left(P_{ij}^d\right)^n \to \frac{1}{\sum_{k=1}^{\infty} k f_{kd}(j|j)} = \frac{d}{\sum_{k=1}^{\infty} kd f_{kd}(j|j)} = \frac{d}{m_j}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $f_n(j|j) = 0$ όταν $n \neq kd$. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει όταν $i, j \in C_a$ για κάποιο $a = 0, 1, \cdots, d-1$ διότι σε αυτή την περίπτωση κατασκευάζεις τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση το i ή το j οπότε τότε θα ισχύει ότι $i, j \in C_0$.
Στην γενική περίπτωση μπορούμε να γράψουμε

$$P_{ij}^{nd+a} = \sum_{k\in S} P_{ik}^a P_{kj}^{nd} = \sum_{k\in C_a} P_{ik}^a P_{kj}^{nd} \to \frac{d}{m_j} \sum_{k\in C_a} P_{ik}^a = \frac{d}{m_j}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $P_{kj}^{nd} \to \frac{d}{m_j}$ διότι $k, j \in C_a$ και το γεγονός ότι $\sum_{k\in C_a} P_{ik}^a = 1$ διότι ξεκινώντας από την κατάσταση $i \in C_0$, σε a βήματα θα μεταβεί στο C_a σίγουρα (με πιθανότητα 1). Επίσης το όριο

$$\sum_{k\in C_a} P_{ik}^a P_{kj}^{nd} \to \frac{d}{m_j} \sum_{k\in C_a} P_{ik}^a$$

προκύπτει με την εφαρμογή του λήμματος κυριαρχημένης σύγκλισης σημειώνοντας ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{kj}^{nd} = \frac{d}{m_j}$$

Η συνεπαγωγή $m_j < \infty \;\Leftrightarrow\; m_i < \infty$ είναι παρόμοια με το προηγούμενο θεώρημα απλώς αντικαθιστώντας το n με το nd.
Όταν $j \in C_a$ τότε προφανώς $P_{ij}^{nd+b} = 0$ όταν $b \neq a$ διότι σε αυτό τον αριθμό βημάτων η αλυσίδα θα βρεθεί στο σύνολο C_b στο οποίο δεν ανήκει η κατάσταση j. □

Παρατηρηση 349 *Σημειώστε ότι στο παραπάνω θεώρημα κατασκευάσαμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση i, συνεπώς το a εξαρτάται από τα i και j. Αρα, πρώτα επιλέγουμε τα συγκεκριμένα i και j για τα οποία θέλουμε να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες από την i στην j και έπειτα κατασκευάζουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την i. Στην συνέχεια υπολογίζουμε το a και μετά χρησιμοποιούμε τα παραπάνω αποτελέσματα. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες από την κατάσταση k στην j τότε θα κάνουμε τα προηγούμενα βήματα από την αρχή διότι το a εξαρτάται από τις καταστάσεις k, j. Δείτε σχετικά το παράδειγμα 374.* □

Θεωρημα 350 *Κάθε πεπερασμένη αλυσίδα δεν έχει μηδενικά επαναληπτικές καταστάσεις.*

Αποδειξη. Έστω ότι το C είναι ένα κλειστό και αδιαχώριστο υποσύνολο με μηδενικά επαναληπτικές καταστάσεις. Τότε

$$\sum_{j\in C} P_{ij}^{n} = 1, \quad i \in C$$

Σημειώστε ότι αφού το C είναι κλειστό και αδιαχώριστο τότε ορίζει μια νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον C το οποίο σημαίνει ότι το άθροισμα των στοιχείων της κάθε γραμμής του C είναι μονάδα. Λαμβάνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\lim P_{ij}^{n} = 0$ προκύπτει ότι $0 = 1$, δηλαδή έχουμε άτοπο. □

Θεωρημα 351 *Αν η κατάσταση j είναι επαναληπτική και περιοδική με περίοδο $d > 1$ και i μια οποιαδήποτε κατάσταση τότε*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{nd+a} = \frac{d}{m_j}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{kd+a}(i|j)\right), \quad a = 0, 1, \cdots, d-1$$

όπου $f_0(i|j) = 0$. Επομένως, αν η j είναι μηδενικά επαναληπτική τότε $P_{ij}^{n} \to 0$ για κάθε $i \in S$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα χρησιμοποιήσουμε την ισότητα

$$P_{ij}^{nd+a} = \sum_{k=1}^{nd+a} f_k(i|j) P_{jj}^{nd+a-k}, \quad a = 0, 1, \cdots, d-1$$

Αφού η j είναι περιοδική με περίοδο $d > 1$ προκύπτει ότι $P_{jj}^{nd+a-k} = 0$ όταν $k - a \neq rd$, συνεπώς

$$P_{ij}^{nd+a} = \sum_{r=0}^{n} f_{rd+a}(i|j) P_{jj}^{(n-r)d} \tag{8.22}$$

Διαλέγοντας κάποιο $m < n$ έχουμε

$$P_{ij}^{nd+a} = \sum_{r=0}^{m} f_{rd+a}(i|j) P_{jj}^{(n-r)d} + \sum_{r=m+1}^{n} f_{rd+a}(i|j) P_{jj}^{(n-r)d}$$

Λόγω του ότι $\sum_{r=0}^{\infty} f_{rd+a}(i|j) = q \in [0,1]$ προκύπτει ότι

$$\sum_{r=m+1}^{\infty} f_{rd+a}(i|j) = q - \sum_{r=0}^{m} f_{rd+a}(i|j)$$

Ισχύει όμως η ανισότητα

$$\sum_{r=0}^{m} f_{rd+a}(i|j) P_{jj}^{(n-r)d} \leq P_{ij}^{nd+a} \leq \sum_{r=0}^{m} f_{rd+a}(i|j) P_{jj}^{(n-r)d} + \sum_{r=m+1}^{n} f_{rd+a}(i|j)$$

και λαμβάνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ προκύπτει η ανισότητα

$$\frac{d}{m_j} \sum_{r=0}^{m} f_{rd+a}(i|j) \leq \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{nd+a} \leq \frac{d}{m_j} \sum_{r=0}^{m} f_{rd+a}(i|j) + q - \sum_{r=0}^{m} f_{rd+a}(i|j) \tag{8.23}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το θεώρημα 348 για το όριο $P_{jj}^{(n-r)d} \to \frac{d}{m_j}$. Στην συνέχεια παίρνουμε το όριο καθώς $m \to \infty$ στην ανισότητα 8.23, επομένως προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{nd+a} = \frac{d}{m_j} \sum_{r=0}^{\infty} f_{rd+a}(i|j)$$

□

Στην περίπτωση που μια Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων τότε θα αποδείξουμε ότι ο πίνακας των οριακών πιθανοτήτων είναι επίσης στοχαστικός το οποίο μπορεί να είναι χρήσιμο στον υπολογισμό των οριακών πιθανοτήτων. Το ίδιο δεν ισχύει, εν γένει, για αλυσίδες με άπειρο πλήθος καταστάσεων όπως για παράδειγμα η περίπτωση του τυχαίου περιπάτου όπου ο πίνακας των οριακών πιθανοτήτων είναι ο μηδενικός.

Προταση 352 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων S και πίνακα μετάβασης P. Αν υπάρχει υπακολουθία n_k τέτοια ώστε οι ακολουθίες πιθανοτήτων $(P^{n_k})_{ij}$ να συγκλίνουν τότε*

$$\sum_{j\in S} p_{ij} = 1, \qquad \text{για κάθε } i \in S$$

όπου $\lim_{n_k\to\infty} (P^{n_k})_{ij} = p_{ij}$.

Αποδειξη. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι αν P είναι στοχαστικός τότε και P^n είναι στοχαστικός για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω μια υπακολουθία $n_k \to \infty$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n_k\to\infty} (P^{n_k})_{ij} = p_{ij}$$

Λόγω του ότι ο P^{n_k} είναι στοχαστικός ισχύει ότι

$$\sum_{j\in S} (P^{n_k})_{ij} = 1$$

Λαμβάνοντας το όριο $n_k \to \infty$ κατά μέλη έχουμε ότι

$$\lim_{n_k\to\infty} \sum_{j\in S} (P^{n_k})_{ij} = 1$$

Επειδή το άθροισμα είναι πεπερασμένο μπορούμε να εναλλάξουμε το όριο με το άθροισμα και έτσι να πάρουμε το αποτέλεσμα ότι

$$\sum_{j\in S} p_{ij} = 1$$

□

8.14.3 Εργοδικά Θεωρήματα

Παρατηρηση 353 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων S. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξω τυχαία κάποιο $k = 1, \cdots, n$ και να ισχύει ότι $X_k = j$ δεδομένου ότι έχει ξεκινήσει από την κατάσταση i; Ο αριθμός $\frac{\sum_{k=1}^n P_{ij}^k}{n}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως την ζητούμενη πιθανότητα. Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα που συγκλίνει η πιθανότητα αυτή καθώς $n \to \infty$. Στο πόρισμα 357 γενικεύουμε το αποτέλεσμα αυτό.*

Θεωρημα 354 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων S. Τότε για κάθε $i, j \in S$ ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^n P_{ij}^k}{n} = \begin{cases} \frac{f_{ij}}{m_j}, & \text{όταν } j \text{ θετικά επαναληπτική} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς αν $i \nrightarrow j$ τότε $f_{ij} = 0$ και ταυτόχρονα $\frac{\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k}{n} = 0$ για κάθε $n \geq 1$ οπότε ισχύει. Στην συνέχεια θα υποθέσουμε ότι $i \to j$.

1^{ος} τρόπος: (Χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα οριακών πιθανοτήτων).

Στην περίπτωση που η j είναι απεριοδική και θετικά επαναληπτική τότε από το 346 έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{f_{ij}}{m_j}$. Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k}{n} = \frac{f_{ij}}{m_j}, \qquad (\text{δες };;)$$

Στην περίπτωση που η j είναι περιοδική με περίοδο $d > 1$ και θετικά επαναληπτική θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 351. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{nd+a} = \frac{d}{m_j}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{kd+a}(i|j)\right), \quad a = 0, 1, \cdots, d-1 \tag{8.24}$$

Ένα οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ γράφεται $n = md + b$ με $b = 0, 1, \cdots, d-1$ όπου προφανώς τα m, b εξαρτώνται από το n αλλά το b είναι μη αρνητικό και άνω φραγμένο από το d. Αρα

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k = \sum_{k=1}^{md+b} P_{ij}^k = \sum_{k=1}^{md} P_{ij}^k + \sum_{k=0}^{b} P_{ij}^k$$

Επειδή

$$0 \leq \sum_{k=0}^{b} P_{ij}^k \leq d$$

έπεται ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{b} P_{ij}^k}{n} = 0$$

Όμως

$$\sum_{k=1}^{md} P_{ij}^k = \sum_{a=0}^{d-1} \sum_{l=1}^{m} P_{ij}^{ld+a}$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{a=0}^{d-1} \sum_{l=1}^{m} P_{ij}^{ld+a}}{n} = \sum_{a=0}^{d-1} \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{l=1}^{m} P_{ij}^{ld+a}}{n}$$

Λόγω της 8.24 και του παραδείγματος ;; ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{l=1}^{m} P_{ij}^{ld+a}}{n} &= \lim_{m\to\infty} \frac{\sum_{l=1}^{m} P_{ij}^{ld+a}}{m} \frac{m}{md+a} \\
&= \frac{1}{m_j}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{kd+a}(i|j)\right)
\end{aligned}$$

Επομένως

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^{k}}{n} &= \frac{1}{m_j} \sum_{a=0}^{d-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{kd+a}(i|j) \right) \\
&= \frac{1}{m_j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{a=0}^{d-1} f_{kd+a}(i|j) \quad \text{(αναδιάταξη σειράς θετικών όρων)} \\
&= \frac{1}{m_j} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(i|j) \\
&= \frac{f_{ij}}{m_j}
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(i|j)$.
Τέλος, στην περίπτωση που η j είναι μεταβατική ή μηδενικά επαναληπτική τότε $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = 0$ επομένως προκύπτει εύκολα το αποτέλεσμα (μέσω πάλι του παραδείγματος ;;).
$2^{ος}$ τρόπος: (Χωρίς την εφαρμογή των οριακών θεωρημάτων).
Έστω ότι η κατάσταση j είναι θετικά επαναληπτική επομένως ο μέσος χρόνος επαναφοράς $m_j < \infty$. Συμβολίζουμε με $m^{(0)}$ την αρχική κατανομή της αλυσίδας, δηλαδή $m_i^{(0)} = P(X_0 = i)$ όπου $i \in S$.
Θεωρούμε το ενδεχόμενο $A_i = \{\exists\, n \in \mathbb{N} : X_n = j\} \cap \{X_0 = i\}$ όπου $i \in S$. Επειδή $P(A_i) = P(\exists\, n \in \mathbb{N} : X_n = j | X_0 = i) \cdot m_i^{(0)}$ βλέπουμε ότι $P(A_i) = f_{ij} \cdot m_i^{(0)}$. Στην συνέχεια θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας που παράγεται από το ενδεχόμενο A_i, δηλαδή το $P_{A_i}(\cdot) = P(\cdot|A_i)$ (δες 19). Θα εργαστούμε κάτω από αυτό το μέτρο ούτως ώστε να εστιάσουμε την προσοχή μας στις τροχιές της αλυσίδας στις οποίες κάποια στιγμή η αλυσίδα μεταβαίνει στην j ξεκινώντας από την i. Παρομοίως, η μέση τιμή θα είναι κάτω από αυτό το μέτρο και θα συμβολίζεται με $\mathbb{E}_{A_i}$.
Ορίζουμε αναδρομικά τις παρακάτω τυχαίες μεταβλητές

$$
n_1(\omega) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) = j\}, & \text{όταν } \omega \in A_i \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}
$$

$$
n_2(\omega) = \begin{cases} \min\{n > n_1 : X_n(\omega) = j\}, & \text{όταν } \omega \in A_i \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}
$$

$$
\vdots
$$

$$
n_k(\omega) = \begin{cases} \min\{n > n_{k-1} : X_n(\omega) = j\}, & \text{όταν } \omega \in A_i \\ \infty, & \text{αλλιώς} \end{cases}
$$

Θέτουμε $Z_m = \begin{cases} n_{m+1} - n_m, & \text{όταν } \omega \in A_i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ για $m \geq 1$ η οποία μας δίνει το πλήθος των βημάτων επαναφοράς στην κατάσταση j. Σημειώστε ότι η ακολουθία $Z_1, Z_2, \cdots$, είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Εφόσον η κατάσταση j είναι θετικά επαναληπτική τότε ο μέσος χρόνος επαναφοράς m_j είναι πεπερασμένος και τέτοιος ώστε $m_j = \mathbb{E}_{A_i}(Z_k)$ για κάθε $k \geq 1$. Στην συνέχεια ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $S_l = Z_1 + \cdots + Z_l$ και $S_0 = 0$. Σημειώστε ότι

$$S_l + n_1 = n_{l+1} \quad \text{για κάθε } l \geq 0 \tag{8.25}$$

Εφαρμόζοντας τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών (δες 183) έχουμε ότι

$$P_{A_i}\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = m_j\}\right) = 1$$

Ας ανακαλέσουμε την τυχαία μεταβλητή $M_j(n)$ η οποία μετρά το πλήθος των επισκέψεων στην κατάσταση j (από την X_1 και μετά) μέχρι την $n^{\text{οστή}}$ μετάβαση (δες παράγραφο 8.12). Λόγω της επαναληπτικότητας της j ισχύει ότι $M_j(n) \to \infty$ καθώς $n \to \infty$ (δες 269). Εύκολα βλέπουμε ότι $n_{M_j(k)} \leq k$ για κάθε $k \geq 1$.
Λόγω της 8.25 διαπιστώνουμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$S_{M_j(n)-1} + n_1 \leq n \leq S_{M_j(n)} + n_1, \quad n \geq 1, \quad \text{για κάθε } \omega \in A_i$$

Διαιρώντας με το $M_j(n) > 0$ για $n > n_1$ έχουμε

$$\frac{S_{M_j(n)-1} + n_1}{M_j(n) - 1} \frac{M_j(n) - 1}{M_j(n)} \leq \frac{n}{M_j(n)} \leq \frac{S_{M_j(n)}}{M_j(n)}, \quad n \geq n_2, \quad \text{για κάθε } \omega \in A_i$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$P_{A_i}\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = \frac{1}{m_j}\}\right) = 1 \tag{8.26}$$

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε το όριο της μέσης τιμής

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}_{A_i}(M_j(n))}{n}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης 105 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}_{A_i}(M_j(n))}{n} &= \mathbb{E}_{A_i}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n}\right) \\ &= \mathbb{E}_{A_i}\left(\frac{1}{m_j}\right) \\ &= \frac{1}{m_j} \end{aligned}$$

Επειδή

$$\mathbb{E}_{A_i}\left(\frac{M_j(n)}{n}\right) = \frac{\mathbb{E}\left(\frac{M_j(n)}{n}\mathbb{I}_{A_i}\right)}{P(A_i)}$$

ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{M_j(n)}{n}\mathbb{I}_{A_i}\right) = \frac{P(A_i)}{m_j} = m_i^{(0)}\frac{f_{ij}}{m_j} \tag{8.27}$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι, συμβολίζοντας με $A = \{\exists\, k \in \mathbb{N} : X_k = j\}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{M_j(n)}{n}|X_0 = i\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{M_j(n)}{n}\mathbb{I}_A|X_0 = i\right) + \mathbb{E}\left(\frac{M_j(n)}{n}\mathbb{I}_{A^c}|X_0 = i\right)\\
&= \mathbb{E}\left(\frac{M_j(n)}{n}\mathbb{I}_A|X_0 = i\right)\\
&= \frac{\mathbb{E}\left(\frac{M_j(n)}{n}\mathbb{I}_{A_i}\right)}{m_i^{(0)}}
\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει επειδή $M_j(n)\mathbb{I}_{A^c} = 0$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_{ij}(n)}{n} = \lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(\frac{M_j(n)}{n}|X_0 = i\right) = \frac{f_{ij}}{m_j}$$

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mu_{ij}(n)}{n} = \frac{f_{ij}}{m_j}$$

□

Παραδειγμα 355 (Μεσο Πληθος Μονοβηματικων Μεταβασεων $j \to k$) *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων S και έστω δυο καταστάσεις $j, k \in S$. Στα πρώτα n βήματα της αλυσίδας (ξεκινώντας από μια κατάσταση i) πόσες μεταβάσεις από την j στην k έγιναν σε ένα βήμα; Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές*

$$Q_j^k(l) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } X_l = j \text{ και } X_{l+1} = k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad \text{και} \quad q_j^k(n) = \sum_{l=1}^{n-1} Q_j^k(l)$$

Επομένως, το πλήθος των μεταβάσεων από την j στην k σε ένα βήμα στα πρώτα n βήματα της αλυσίδας είναι ίσο με $q_j^k(n)$.
Το μέσο πλήθος των μεταβάσεων σε ένα βήμα από την j στην k, ξεκινώντας από την κατάσταση i, στα πρώτα n βήματα της αλυσίδας το συμβολίζουμε με $\mu_j^k(n)$ και είναι $\mu_j^k(n) = \mathbb{E}(q_j^k(n)|X_0 = i)$. Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το μέσο αυτό πλήθος

και θα εξετάσουμε το όριο του καθώς το $n \to \infty$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{l=1}^{n-1} Q_j^k(l)|X_0 = i\right) &= \sum_{l=1}^{n-1} \mathbb{E}(Q_j^k(l)|X_0 = i) \\
&= \sum_{l=1}^{n-1} P(X_l = j, X_{l+1} = k|X_0 = i) \\
&= \sum_{l=1}^{n-1} P_{jk} P(X_l = j|X_0 = i) \\
&= P_{jk} \sum_{l=1}^{n-1} P_{ij}^l
\end{aligned}$$

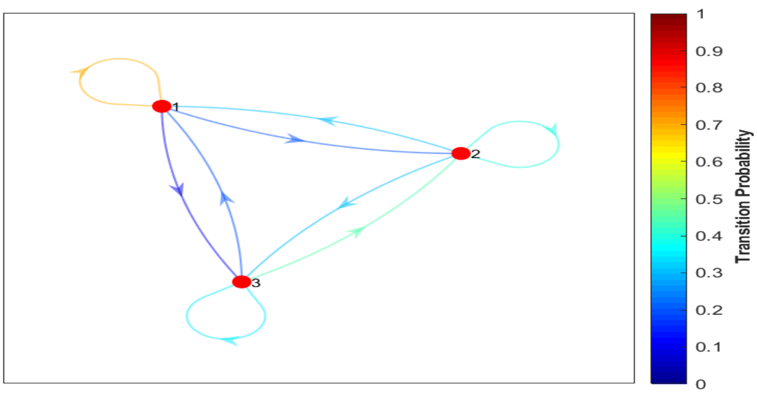
'ρα

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu_j^k(n)}{n} = \begin{cases} P_{jk}\frac{f_{ij}}{m_j}, & \text{όταν } j \text{ θετικά επαναληπτική} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Σημειώστε ότι το όριο είναι ανεξάρτητο της αρχικής κατάστασης όταν $f_{ij} = 1$. □

Παραδειγμα 356 *Ας υποθέσουμε ότι ο καιρός σε μια πόλη μπορεί να μοντελοποιηθεί ως Μαρκοβιανή αλυσίδα με καταστάσεις 1 =* **ηλιοφάνεια**, *2 =* **συννεφιά** *και 3 =* **βροχή** *σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.45 & 0.35 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 8.11: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος 356

Δηλαδή στην θέση $P_{11} = 0.7$ βρίσκεται η πιθανότητα αύριο να έχει ηλιοφάνεια δεδομένου ότι σήμερα έχει ηλιοφάνεια. Στην θέση $P_{31} = 0.2$ βρίσκεται η πιθανότητα αύριο να έχει ηλιοφάνεια δεδομένου ότι σήμερα βρέχει κ.τ.λ.

Εύκολα βλέπουμε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και επειδή το πλήθος των καταστάσεων είναι πεπερασμένο όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές.
Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι για παράδειγμα πόσες μέρες κατά μέσο όρο θα περάσουν μέχρι να βρέξει δεδομένου ότι σήμερα έχει ηλιοφάνεια. Ο αριθμός αυτός είναι ο k_1^3, *δηλαδή ο μέσος χρόνος πρώτης επίσκεψης στην κατάσταση 3 δεδομένου ότι ξεκινά από την κατάσταση 1.*
Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 320. Στην περίπτωση μας έχουμε $A = 3$. *Κατασκευάζουμε τις εξισώσεις για να υπολογίσουμε τα* k_1^3 *και* k_2^3 *οι οποίες είναι*

$$\begin{aligned} k_1^3 &= 1 + P_{11}k_1^3 + P_{12}k_2^3 \\ k_2^3 &= 1 + P_{21}k_1^3 + P_{22}k_2^3 \end{aligned}$$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι $k_1^3 = 6.66$ *και* $k_2^3 = 5$. *Δηλαδή κατά μέσο όρο θα περάσουν 6.66 ημέρες μέχρι να βρέξει δεδομένου ότι σήμερα έχει ηλιοφάνεια ενώ θα περάσουν κατά μέσο όρο 5 ημέρες μέχρι να βρέξει δεδομένου ότι σήμερα έχει συννεφιά.*
Μπορούμε, χρησιμοποιώντας το θεώρημα 324, να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο επαναφοράς m_3. *Θα είναι*

$$m_3 = 1 + P_{31}k_1^3 + P_{32}k_2^3 = 4.582$$

Ο αριθμός αυτός παριστάνει το πόσες ημέρες θα περάσουν κατά μέσο όρο για να βρέξει δεδομένου ότι σήμερα βρέχει. Αφού ο αριθμός αυτός είναι πεπερασμένος έπεται ότι η κατάσταση 3 είναι θετικά επαναληπτική (δες ορισμό 284).
Ένα ενδιαφέρον ερώτημα επίσης είναι: σε χρονικό διάστημα ενός έτους κατά μέσο όρο πόσες ημέρες θα έχουμε βροχή ενώ την προηγούμενη είχε ηλιοφάνεια. Δηλαδή, πόσες μονοβηματικές μεταβάσεις από ηλιοφάνεια σε βροχή θα συμβούν κατά μέσο όρο σε ένα έτος; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος. Το ζητούμενο μέσο πλήθος είναι ίσο με $\mu_1^3(365)$ *δεδομένου ότι ξεκινά από την κατάσταση* i *(οποιαδήποτε). Σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα, για αρκετά μεγάλο* n, *έχουμε ότι*

$$\frac{\mu_1^3(365)}{365} \approx P_{13}\frac{f_{i1}}{m_3} = \frac{0.1}{4.582}$$

αφού $f_{i1} = 1$. *Δηλαδή*

$$\mu_1^3(365) \approx \frac{365 \cdot 0.1}{4.582} \approx 8 \text{ ημέρες}$$

Δηλαδή, κατά μέσο όρο σε ένα έτος, θα υπάρξουν 8 μονομηματικές μεταβάσεις από ηλιοφάνεια σε βροχή. □

Γενικεύοντας το ερώτημα της παρατήρησης 353 θέτουμε το επόμενο ερώτημα. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξω μια από τις πρώτες n μεταβάσεις της αλυσίδας και να ισχύει $X_k = j$; Η ποσότητα $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_j^{(k)}$ μπορεί να ερμηνευθεί ως την ζητούμενη πιθανότητα όπου $m_j^{(k)} = P(X_k = j)$.

Πορισμα 357 *Ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_j^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{1}{m_j}\displaystyle\sum_{i\in S} m_i^{(0)} f_{ij}, & \text{όταν } j \text{ θετικά επαναληπτική} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για κάθε $j \in S$.

Αποδειξη. Ισχύει, για κάθε $j \in S$, ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m_j^{(k)} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(m^{(0)}\cdot P^k)_j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i\in S} m_i^{(0)} P_{ij}^k \\ &= \sum_{i\in S} m_i^{(0)} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k \end{aligned}$$

Για να πάρουμε την πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα 230. Για να πάρουμε την τελευταία ισότητα αναδιατάξαμε τους όρους θετικής σειράς. Στην συνέχεια λαμβάνουμε το όριο καθώς $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας το ;; (για να εναλλάξουμε όριο με άθροισμα) καθώς και το θεώρημα 354 προκύπτει το αποτέλεσμα. □

Προταση 358 *Αν η κατάσταση j είναι θετικά επαναληπτική, τότε ισχύει*

$$\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty}\frac{M_j(n)}{n} = \frac{1}{m_j}\} \cup \{\omega\in\Omega : M_j(n) = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}\} = \Omega \setminus E$$

με $P(E) = 0$. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι

$$P\left(\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty}\frac{M_j(n)}{n} = \frac{1}{m_j}\}\right) = \sum_{i\in S} m_i^{(0)}\cdot f_{ij}$$

και

$$P\left(\{\omega\in\Omega : M_j(n) = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}\}\right) = \sum_{i\in S} m_i^{(0)}\cdot(1-f_{ij})$$

Όταν είναι μηδενικά επαναληπτική ή μεταβατική, ισχύει ότι

$$P\left(\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty}\frac{M_j(n)}{n} = 0\}\right) = 1$$

Συγκεκριμένα, ισχύει ότι

$$P\left(\{\omega\in\Omega : \lim_{n\to\infty}\frac{M_j(n)}{n} = 0\}\cap A\right) = \sum_{i\in S} m_i^{(0)}\cdot f_{ij}$$

όπου $A = \{\exists\, l\in\mathbb{N} : X_l = j\}$ και

$$P\left(\{\omega\in\Omega : M_j(n) = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}\}\right) = \sum_{i\in S} m_i^{(0)}\cdot(1-f_{ij})$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σε κάθε Μαρκοβιανή αλυσίδα και οποιαδήποτε κατάσταση j ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & P(\{\omega \in \Omega : M_j(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\}) \\ = & P(\{\nexists k \in \mathbb{N} : X_k = j\}) \\ = & \sum_{i \in S} P(\{\nexists k \in \mathbb{N} : X_k = j\} | X_0 = i) P(X_0 = i) \\ = & \sum_{i \in S} m_i^{(0)} \cdot (1 - f_{ij}) \end{aligned} \tag{8.28}$$

· Υποθέτουμε ότι η κατάσταση j είναι θετικά επαναληπτική. Συμβολίζοντας με $B = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = \frac{1}{m_j}\}$ γράφουμε

$$B = \bigcup_{i \in S} \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = \frac{1}{m_j}\} \cap \{X_0 = i\} = \bigcup_{i \in S} B_i$$

και συνεπώς $P(B) = \sum_{i \in S} P(B_i)$.
Όμως

$$B_i = B_i \cap \{\exists\ k \in \mathbb{N} : X_k = j\} \bigcup B_i \cap \{\nexists\ k \in \mathbb{N} : X_k = j\}$$

οπότε $P(B_i) = P(B_i \cap \{\exists\ k \in \mathbb{N} : X_k = j\}) + P(B_i \cap \{\nexists\ k \in \mathbb{N} : X_k = j\})$. Στην συνέχεια έχουμε ότι, δες 8.26

$$\begin{aligned} P(B_i \cap \{\exists\ k \in \mathbb{N} : X_k = j\}) &= P_{A_i}\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = \frac{1}{m_j}\}\right) \cdot P(A_i) \\ &= m_i^{(0)} \cdot f_{ij} \end{aligned}$$

Επιπλέον

$$P(B_i \cap \{\nexists\ k \in \mathbb{N} : X_k = j\}) = 0$$

αφού σε αυτό το ενδεχόμενο ισχύει ότι $M_j(n) = 0$. Επομένως $P(B_i) = m_i^{(0)} \cdot f_{ij}$ και άρα

$$P(B) = \sum_{i \in S} m_i^{(0)} \cdot f_{ij}$$

Τα ενδεχόμενα

$$\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = \frac{1}{m_j}\} \quad \text{και} \quad \{\omega \in \Omega : M_j(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

είναι ξένα μεταξύ τους συνεπώς λόγω της 8.28 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 &= P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = \frac{1}{m_j}\}\right) + P\left(\{\omega \in \Omega : M_j(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\}\right) \\ &= P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = \frac{1}{m_j}\} \cup \{\omega \in \Omega : M_j(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\}\right) \end{aligned}$$

'ρα αναγκαστικά

$$\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = \frac{1}{m_j}\} \cup \{\omega \in \Omega : M_j(n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\} = \Omega \setminus E$$

με $P(E) = 0$.
· Έστω ότι η κατάσταση j είναι μηδενικά επαναληπτική. Ας ανακαλέσουμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών Z_m που είχαμε ορίσει στην προηγούμενη απόδειξη

$$Z_m = \begin{cases} n_{m+1} - n_m, & \text{όταν } \omega \in A_i \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \qquad \text{για } m \geq 1$$

Εφόσον η j είναι μηδενικά επαναληπτική τότε $\mathbb{E}(Z_m) = \infty$ για κάθε $m \geq 1$. Ορίζουμε τώρα την ακολουθία $Z_m^R = Z_m \mathbb{I}_{\{Z_m < R\}}$ για $R > 0$ για την οποία ισχύει ότι $\mathbb{E}(Z_m^R) = \mathbb{E}(Z_1^R) < \infty$ για κάθε $m \geq 1$. Η ακολουθία Z_m^R είναι πάλι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών. Συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών και να πάρουμε

$$P_{A_i}\left(\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{S_n^R}{n} = \mathbb{E}_{A_i}(Z_1^R)\right)$$

όπου $S_n^R = Z_1^R + Z_2^R + \cdots + Z_n^R \leq S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$ και A_i καθώς και P_{A_i} όπως σε προηγούμενη απόδειξη. Επομένως, ισχύει ότι

$$S^R_{M_j(n)-1} + n_1 \leq S_{M_j(n)-1} + n_1 \leq n$$

Συνεπώς, ισχύει ότι

$$\frac{S^R_{M_j(n)-1} + n_1}{M_j(n) - 1} \frac{M_j(n) - 1}{M_j(n)} \leq \frac{n}{M_j(n)}, \quad n \geq n_2, \qquad \text{για κάθε } \omega \in A_i$$

Λαμβάνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ (υπό την έννοια της σχεδόν βέβαια σύγκλισης) ισχύει ότι

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} \leq \frac{1}{\mathbb{E}(Z_1^R)}, \quad \text{σχεδόν βέβαια,} \quad \text{για κάθε } R > 0$$

υπό την έννοια του P_{A_i} μέτρου πιθανότητας. Σημειώστε ότι Z_1^R είναι αύξουσα ως προς R και μάλιστα ισχύει ότι $Z_1^R \to Z_1$ σχεδόν βέβαια καθώς $R \to \infty$. Συνεπώς $\mathbb{E}_{A_i}(Z_1^R) \to \mathbb{E}_{A_i}(Z_1) = \infty$ εφαρμόζοντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης. Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0 \quad \text{σχεδόν βέβαια}$$

κάτω από το μέτρο P_{A_i}, δηλαδή

$$P_{A_i}\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\}\right) = 1 \tag{8.29}$$

Έστω το ενδεχόμενο $\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} \geq \varepsilon\}$ όπου $\varepsilon > 0$. Σημειώστε ότι

$$P\left(\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} \geq \varepsilon\} \cap A^c\right) = 0$$

όπου $A = \{\exists\, l \in \mathbb{N} : X_l = j\}$ και

$$\begin{aligned} & P\left(\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} \geq \varepsilon\} \cap A\right) \\ = & \sum_{i\in S} P\left(\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} \geq \varepsilon\} \cap A_i\right) \\ = & \sum_{i\in S} \underbrace{P_{A_i}\left(\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} \geq \varepsilon\}\right)}_{=0,\ (\text{δες } 8.29)} P(A_i) \\ = & \ 0 \end{aligned}$$

Επομένως

$$P\left(\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} \geq \varepsilon\}\right) = 0, \qquad \text{για κάθε } \varepsilon > 0 \tag{8.30}$$

Επειδή $\frac{M_j(n)}{n} \geq 0$ προκύπτει ότι

$$P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\}\right) = 1 \tag{8.31}$$

Από την σχέση 8.29 προκύπτει εύκολα ότι

$$P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\} \cap A\right) = \sum_{i\in S} m_i^{(0)} \cdot f_{ij}$$

· Τέλος, υποθέτουμε ότι η κατάσταση j είναι μεταβατική. Γνωρίζουμε ότι $P(M_j < \infty | X_0 = i) = 1$ για οποιαδήποτε κατάσταση i (δες 337). Αρα

$$P(M_j < \infty) = \sum_{i\in S} P(M_j < \infty | X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) = \sum_{i\in S} m_i^{(0)} = 1$$

Επίσης

$$\Omega = \left(\bigcup_{N=0}^{\infty} B_N\right) \cup B_\infty$$

όπου $B_N = \{M_j = N\}$ και $B_\infty = \{M_j = \infty\}$. Συνεπώς

$$\sum_{N=0}^{\infty} P(B_N) = 1 \tag{8.32}$$

αφού $P(B_\infty) = 0$.
Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\} \\
= &\left(\bigcup_{N=0}^{\infty} \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\} \cap B_N\right) \cup \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\} \cap B_\infty
\end{aligned}$$

’ρα

$$P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\}\right) = \sum_{N=0}^{\infty} P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\} \cap B_N\right)$$

αφού $P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\} \cap B_\infty\right) \leq P(B_\infty) = 0$. Όμως

$$\begin{aligned}
&P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\} \cap B_N\right) \\
= &P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\} | B_N\right) P(B_N) \\
= &P(B_N)
\end{aligned}$$

αφού ισχύει ότι $P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\} | B_N\right) = 1$. Εφόσον

$$\begin{aligned}
P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\}\right) &= \sum_{N=0}^{\infty} P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\} \cap B_N\right) \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} P(B_N) = 1
\end{aligned}$$

προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.
Επειδή $P(\{\omega \in \Omega : M_j(n) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}\} = P(B_0)$ και λόγω των 8.28 και 8.32 μπορούμε να γράψουμε ότι

$$P\left(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{M_j(n)}{n} = 0\} \cap A\right) = \sum_{N=1}^{\infty} P(B_N) = \sum_{i \in S} m_i^{(0)} \cdot f_{ij}$$

όπου $A = \{\exists k \in \mathbb{N} : X_k = j\}$. □

Πορισμα 359 *Αν $g : S \to \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε*

$$\sum_{i \in S} |g(i)| < \infty$$

τότε ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E} g(X_k) = \sum_{j \in C} \frac{g(j)}{m_j} \sum_{i \in S} m_i^{(0)} f_{ij}$$

όπου $C \subseteq S$ είναι το υποσύνολο του S των θετικά επαναληπτικών καταστάσεων.

Απόδειξη. Ας σημειώσουμε ότι $g(X_k) = \sum_{j\in S} g(j)\mathbb{I}_{\{X_k=j\}}$. Επομένως

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}g(X_k) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in S} g(j)\mathbb{E}\mathbb{I}_{\{X_k=j\}} \\
&= \sum_{j\in S} g(j)\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\mathbb{I}_{\{X_k=j\}} \\
&= \sum_{j\in S} g(j)\mathbb{E}\left(\frac{M_j(n)}{n}\right)
\end{aligned}$$

Έχουμε εναλλάξει τα αθροίσματα $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in S}$ επειδή η σειρά είναι απολύτως συγκλίνουσα αφού $\sum_{i\in S}|g(i)| < \infty$.
Συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}g(X_k) = \lim_{n\to\infty}\sum_{j\in S} g(j)\mathbb{E}\left(\frac{M_j(n)}{n}\right) = \sum_{j\in C}\frac{g(j)}{m_j}\sum_{i\in S} m_i^{(0)} f_{ij}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για να εναλλάξουμε το όριο με το άθροισμα στην δεύτερη ισότητα παραπάνω. □

Πόρισμα 360 (Εργοδικό Θεώρημα) *Δοσμένης μιας συνάρτησης $g : S \to \mathbb{R}$ τέτοιας ώστε*

$$\sum_{i\in S}|g(i)| < \infty$$

ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k) = \sum_{j\in C}\frac{g(j)}{m_j}\mathbb{I}_{A^j} \qquad \text{σχεδόν βέβαια}$$

όπου $A^j = \{\omega\in\Omega : \exists\, l\in\mathbb{N}$ τ.ω. $X_l = j\}$ με $P(A^j) = \sum_{i\in S}\mu_i^{(0)}\cdot f_{ij}$. Συγκεκριμένα, αν η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη τότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k) = \begin{cases} \sum_{j\in S} g(j)\pi_j, & \text{όταν είναι θετικά επαναληπτική} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$ η μοναδική στάσιμη κατανομή.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σημειώστε ότι

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k) \\
= \ & \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\in S} g(j)\mathbb{I}_{\{X_k=j\}} \\
= \ & \sum_{j\in S} g(j)\frac{M_j(n)}{n} \\
= \ & \sum_{j\in C} g(j)\frac{M_j(n)}{n}\mathbb{I}_{A^j} + \sum_{j\in NR} g(j)\frac{M_j(n)}{n} + \sum_{j\in T} g(j)\frac{M_j(n)}{n} \qquad (8.33)
\end{aligned}$$

όπου $C \subseteq S$ είναι το υποσύνολο του S των θετικά επαναληπτικών καταστάσεων, $NR \subseteq S$ είναι το υποσύνολο του S των μηδενικά επαναληπτικών καταστάσεων, $T \subseteq S$ είναι το υποσύνολο του S των μεταβατικών καταστάσεων και $A^j = \{\omega \in \Omega : \exists\ l \in \mathbb{N} : X_l = j\}$. Η συνθήκη για την g, δηλαδή $\sum_{i\in S}|g(i)| < \infty$ χρειάζεται για την εναλλαγή των αθροισμάτων για να πάρουμε την δεύτερη ισότητα παραπάνω.
Σημειώστε ότι $A^j = \bigcup_{i\in S}\{\exists\ l \in \mathbb{N} : X_l = j\} \cap \{X_0 = i\}$ και επομένως $P(A^j) = \sum_{i\in S}\mu_i^{(0)} \cdot f_{ij}$
Τέλος, χρησιμοποιώντας την πρόταση 358, έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k) = \sum_{j\in C}\frac{g(j)}{m_j}\mathbb{I}_{A^j}, \qquad \text{σχεδόν βέβαια}$$

Στην περίπτωση που η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη τότε θα είναι είτε θετικά επαναληπτική οπότε θα έχει μοναδική στάσιμη κατανομή είτε όχι. Με βάση την 8.33 είναι προφανές ότι

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j\in S} g(j)\pi_j, & \text{όταν είναι θετικά επαναληπτική} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$ η μοναδική στάσιμη κατανομή. Σημειώστε ότι $f_{ij} = 1$ στην περίπτωση της αδιαχώριστης αλυσίδας και άρα $P(A^j) = 1$ το οποίο με την σειρά του σημαίνει ότι $\mathbb{I}_{A^j} = 1$ σχεδόν βέβαια. □

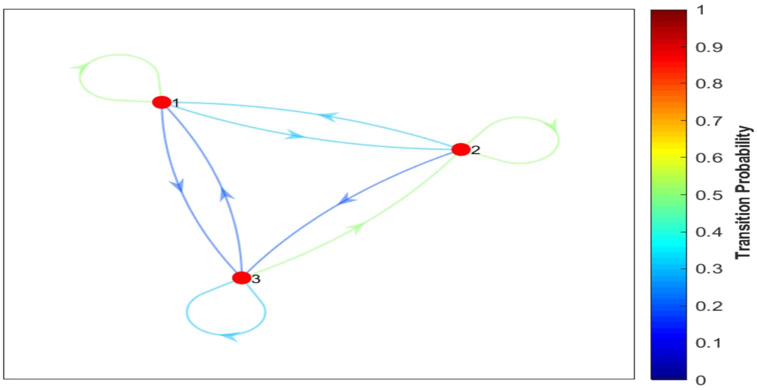
Το πόρισμα αυτό είναι στενά συνδεδεμένο με το εργοδικό θεώρημα του Birkoff, (δες για παράδειγμα [73] και [110]) με την έννοια ότι θα μπορούσαμε να πάρουμε τα ίδια αποτελέσματα εφαρμόζοντας το. Το θεώρημα αυτό είναι στην πραγματικότητα ένα γενικότερο αποτέλεσμα το οποίο έχει και άλλες εφαρμογές. Κρίθηκε όμως σκόπιμο να παρουσιάσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα εφαρμόζοντας απλούστερα μαθηματικά εργαλεία για την καλύτερη κατανόηση τους.

Σε ποιες περιπτώσεις η πιθανότητα $f_{ij} = 1$; Σημειώστε ότι $f_{ij} = h_i^{S_a}$ όπου S_a είναι η επαναληπτική κλάση που ανήκει η κατάσταση j. Αν η κατάσταση i ανήκει στην ίδια κλάση με την j τότε $f_{ij} = 1$ (δες 266). Στην περίπτωση που η i δεν ανήκει στην ίδια κλάση τότε είτε $i \nrightarrow j$ είτε η i είναι μεταβατική. Αν η επαναληπτική κλάση που ανήκει η j είναι μοναδική και ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος τότε $f_{ij} = 1$ (δες 332). Ακόμη και στην περίπτωση που έχουμε περισσότερες από μια επαναληπτικές κλάσεις μπορεί να ισχύει $f_{ij} = 1$ αρκεί η μεταβατική κατάσταση i να μην επικοινωνεί με καμία από τις άλλες επαναληπτικές κλάσεις.

Παρατηρηση 361 *Διαπιστώνουμε ότι ενώ το όριο των πιθανοτήτων P_{ij}^n μπορεί να μην υπάρχει, το αντίστοιχο όριο του αριθμητικού μέσου υπάρχει πάντοτε και μάλιστα είναι ανεξάρτητο από την κατάσταση i στην περίπτωση που $f_{ij} = 1$. Σε αυτή την περίπτωση η ζητούμενη πιθανότητα της παρατήρησης 353 συγκλίνει πάντοτε σε ένα όριο ανεξάρτητο της αρχικής κατάστασης και επομένως το συμπέρασμά μας θα είναι και αυτό ανεξάρτητο της αρχικής κατάστασης.* □

Παραδειγμα 362 *Ένας γεωργός έχει δυο άλογα για τις αγροτικές του εργασίες. Όταν κάποιο άλογο αρρωσταίνει το αντικαθιστά με κάποιο άλλο το οποίο νοικιάζει με 20 Ευρώ την ημέρα. Συμβολίζουμε με 1 την κατάσταση «κανένα άλογο δεν είναι άρρωστο», με 2 την κατάσταση όπου «1 άλογο είναι άρρωστο» και με 3 την κατάσταση όπου «και τα δυο είναι άρρωστα». Ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα αύριο να βρεθεί ο αγρότης σε οποιαδήποτε από τις τρεις καταστάσεις εξαρτάται μονάχα από την σημερινή κατάσταση. Έστω επίσης ο παρακάτω πίνακας μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$



Σχήμα 8.12: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος 362

ο οποίος περιγράφει τις πιθανότητες μετάβασης από κατάσταση σε κατάσταση και έστω X_n η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον P και σύνολο καταστάσεων το

$S = \{1, 2, 3\}$. *Το ερώτημα που προκύπτει είναι πόσα χρήματα ξοδεύει ο γεωργός κατά μέσο όρο την ημέρα για ενοικίαση κάποιου αλόγου;*
Κατασκευάζουμε την συνάρτηση

$$g(i) = \begin{cases} 0, & \textit{όταν } i = 1 \\ 20, & \textit{όταν } i = 2 \\ 40, & \textit{όταν } i = 3 \end{cases}$$

η οποία μας δίνει το ποσό χρημάτων που χρειάζεται ο αγρότης στην κάθε κατάσταση. Ο μέσος όρος για n *ημέρες λοιπόν είναι*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(X_k)$$

Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη. Σύμφωνα με το εργοδικό θεώρημα η παραπάνω ποσότητα συγκλίνει στην ποσότητα

$$g(1)\pi_1 + g(2)\pi_2 + g(3)\pi_3$$

όπου $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ *είναι η στάσιμη κατανομή. Υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή και έχουμε* $\pi = (0.34, 0.43, 0.22)$. *Επομένως ο μέσος όρος χρημάτων που χρειάζεται ο αγρότης την ημέρα είναι*

$$0 * 0.34 + 20 * 0.43 + 40 * 0.22 = 17.4 \textit{ Ευρώ}$$

□

8.14.4 Μέσος χρόνος επαναφοράς και στάσιμη κατανομή

Στην συνέχεια δίνουμε μερικά αποτελέσματα που συνδέουν τους μέσους χρόνους επαναφοράς με την στάσιμη κατανομή. Χρησιμοποιώντας τα παρακάτω αποτελέσματα μπορούμε να υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς οι οποίοι είναι χρήσιμοι στον προσδιορισμό των οριακών πιθανοτήτων.

Πορισμα 363 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία είναι αδιαχώριστη, επαναληπτική και απεριοδική. Αν οι στάσιμες εξισώσεις έχουν μοναδική λύση τότε*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j = \frac{1}{m_j}$$

και επομένως οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές όπου π_j *η μοναδική λύση των στάσιμων εξισώσεων και* m_j *ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης* j. *Αν οι στάσιμες εξισώσεις δεν έχουν μοναδική λύση τότε*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 0$$

το οποίο σημαίνει επιπλέον ότι οι καταστάσεις είναι μηδενικά επαναληπτικές.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Οι καταστάσεις θα είναι είτε θετικά επαναληπτικές είτε μηδενικά επαναληπτικές αλλά μόνο στην περίπτωση που είναι θετικά επαναληπτικές το σύστημα των στάσιμων εξισώσεων έχει μοναδική λύση. Πράγματι, αν είναι θετικά επαναληπτικές τότε από το θεώρημα 346 προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j}$$

δηλαδή το όριο υπάρχει και είναι ανεξάρτητο του i. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 340 έχουμε (αφού η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική, δηλαδή $m_j < \infty$ για κάθε $j \in S$) ότι $\pi_j = \frac{1}{m_j} \in (0, 1]$ είναι η μοναδική λύση των στάσιμων εξισώσεων.
Αν είναι μηδενικά επαναληπτικές τότε προκύπτει ότι $P_{ij}^n \to 0$ και επομένως οι στάσιμες εξισώσεις δεν επιδέχονται λύση.
Τελικά, αν το σύστημα των στάσιμων εξισώσεων έχει λύση τότε οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές αλλιώς (αν ήταν μηδενικά επαναληπτικές) το σύστημα δεν θα είχε (μοναδική) λύση, οπότε προκύπτει το αποτέλεσμα. □

ΠΟΡΙΣΜΑ **364** *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων S. Αν είναι αδιαχώριστη και απεριοδική τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα,*

(*i*) *μια κατάσταση είναι θετικά επαναληπτική,*

(*ii*) *κάθε κατάσταση είναι θετικά επαναληπτική,*

(*iii*) *Υπάρχει μοναδική στάσιμη κατανομή π.*

Αν οποιοδήποτε από τα τρία ενδεχόμενα είναι αληθές τότε $\pi_j = \frac{1}{m_j}$ όπου m_j είναι ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης j.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη επομένως είτε όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές είτε επαναληπτικές. Αν είναι μεταβατικές τότε οι οριακές πιθανότητες είναι μηδέν και επομένως κανένα από τα τρία ενδεχόμενα του θεωρήματος δεν μπορεί να συμβαίνει. Αν οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές τότε θα είναι είτε θετικά επαναληπτικές είτε μηδενικά επαναληπτικές (δες θεώρημα 346). Στην δεύτερη περίπτωση οι οριακές πιθανότητες είναι πάλι μηδέν και επομένως κανένα από τα τρία ενδεχόμενα του θεωρήματος δεν μπορεί να συμβαίνει. Συνεπώς προκύπτει η ισοδυναμία $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
Μένει να αποδείξουμε την συνεπαγωγή $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.
Αν όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές τότε $P_{ij}^n \to \frac{1}{m_j} \neq 0$ (δες θεώρημα 346) και επομένως το σύστημα των στάσιμων εξισώσεων έχει ως μοναδική λύση το διάνυσμα $\frac{1}{m_j}$ για $j \in S$. Αντίστροφα, αν το σύστημα των στάσιμων εξισώσεων έχει μοναδική λύση, την π, τότε αναγκαστικά όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές (αν ήταν μηδενικά επαναληπτικές τότε $P_{ij}^n \to 0$ άρα το σύστημα των στάσιμων εξισώσεων δεν θα είχε λύση) και επομένως $P_{ij}^n \to \frac{1}{m_j}$ όπου το όριο αυτό θα είναι και η μοναδική λύση των στάσιμων εξισώσεων, δηλαδή $\pi_j = \frac{1}{m_j}$. □

Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων το S και πίνακα μετάβασης τον P η οποία είναι αδιαχώριστη, επαναληπτική και περιοδική με περίοδο $d > 1$. Τότε η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον P^d περιέχει d κλειστά σύνολα, τα $C_0, C_1, \cdots, C_{d-1}$ τα οποία είναι τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση μια κατάσταση j. Το κάθε ένα από αυτά τα σύνολα ορίζει μια νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία είναι αδιαχώριστη, επαναληπτική και απεριοδική. Συμβολίζουμε με P_{C_t} τον πίνακα μετάβασης που προέρχεται από τον P^d διαγράφοντας τις γραμμές και τις στήλες των καταστάσεων που δεν ανήκουν στο C_t. Ενώ με π^{C_t} συμβολίζουμε την στάσιμη κατανομή (αν υπάρχει) της Μαρκοβιανής αλυσίδας με πίνακα μετάβασης τον P_{C_t}.

Πορισμα 365 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων το S και πίνακα μετάβασης τον P η οποία είναι αδιαχώριστη, επαναληπτική και περιοδική με περίοδο $d > 1$. Τότε*

$$m_j = \frac{d}{\pi_j^{C_t}}$$

όπου $j \in C_t$. Αν οι στάσιμες εξισώσεις του πίνακα P_{C_t} δεν επιδέχονται λύση τότε $m_j = \infty$. Στην περίπτωση όπου κάποιο σύνολο C_t είναι μονοσύνολο τότε ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης που ανήκει στο C_t είναι ίσος με την περίοδο d.

Αποδειξη. Η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον P_{C_t} για $t = 0, \cdots, d-1$ είναι αδιαχώριστη, απεριοδική και επαναληπτική. Οι στάσιμες εξισώσεις (του πίνακα P_{C_t}) έχουν λύση **ανν** οι καταστάσεις του C_t είναι θετικά επαναληπτικές. Σε αυτή την περίπτωση, $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{nd} = \frac{d}{m_j}$ όταν $i, j \in C_t$ (δες 348). Όμως

$$\lim_{n\to\infty} (P_{C_t})_{ij}^n = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{nd} = \frac{d}{m_j}, \quad \text{για } i, j \in C_t$$

Για να δει κάποιος την ισότητα $(P_{C_t})_{ij}^n = P_{ij}^{nd}$ αρκεί να κάνει μια αναδιάταξη στον πίνακα P έτσι ώστε οι καταστάσεις που ανήκουν στο ίδιο σύνολο C_t να βρίσκονται δίπλα-δίπλα. Τότε, ο P^d θα είναι ένας διαγώνιος πίνακας με blocks, οπότε χρησιμοποιώντας την δομή αυτή προκύπτει το αποτέλεσμα. Δηλαδή, η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης P_{C_t} έχει ως στάσιμη κατανομή το διάνυσμα π^{C_t} με στοιχεία $\pi_j^{C_t} = \frac{d}{m_j}$ όπου $j \in C_t$. Αρα, αν οι στάσιμες εξισώσεις έχουν λύση τότε $m_j = \frac{d}{\pi_j^{C_t}}$ αλλιώς $m_j = \infty$.
Στην περίπτωση που κάποιο σύνολο C_t αποτελείται μονάχα από ένα στοιχείο, έστω j, τότε ο μέσος χρόνος επαναφοράς είναι $m_j = d$. Πράγματι, υπολογίζουμε τα $f_n(j|j)$ για όλα τα n και έχουμε

$$\begin{aligned} f_1(j|j) &= f_2(j|j) = \cdots = f_{d-1}(j|j) = 0, \\ f_d(j|j) &= 1 \quad \text{και } f_k(j|j) = 0 \text{ για } k > d \end{aligned}$$

'ρα $m_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_n(j|j) = d f_d(j|j) = d.$ □

Προταση 366 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης P η οποία είναι αδιαχώριστη και περιοδική με περίοδο $d > 1$. Αν η αλυσίδα έχει στάσιμη κατανομή τότε θα είναι μοναδική και τέτοια ώστε*

$$\pi_j = \frac{1}{m_j}$$

Σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα προφανώς θα είναι θετικά επαναληπτική.

Αποδειξη. Έστω $C_0, C_1, \cdots$ τα σύνολα κυκλικής μετάβασης. Αναδιατάσσουμε τα στοιχεία του χώρου καταστάσεων S (και επομένως και τον πίνακα μετάβασης P) έτσι ώστε οι καταστάσεις που ανήκουν σε κάθε σύνολο C_t να είναι δίπλα-δίπλα.
Έστω ότι η αλυσίδα έχει μια στάσιμη κατανομή την π'. Λόγω της παρατήρησης 344 θα ισχύει ότι $\pi' P^d = \pi'$.
Αν οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς είναι πεπερασμένοι, τότε από το πόρισμα 365 γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{j\in C_0} \pi_j^{C_0} = 1, \quad \sum_{j\in C_1} \pi_j^{C_1} = 1, \cdots$$

ή αλλιώς

$$\sum_{j\in C_0} \frac{1}{m_j} = \frac{1}{d}, \quad \sum_{j\in C_1} \frac{1}{m_j} = \frac{1}{d}, \cdots$$

Επειδή τα σύνολα κυκλικής μετάβασης $C_0, C_1, \cdots$ είναι d το πλήθος τότε προκύπτει άμεσα ότι

$$\sum_{j\in S} \frac{1}{m_j} = 1$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η $\pi = (\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2}, \cdots)$ είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή του πίνακα P^d (εδώ είναι χρήσιμη η αναδιάταξη του συνόλου καταστάσεων), δηλαδή $\pi P^d = \pi$.
Αυτό όμως σημαίνει ότι $\pi' = \pi$, δηλαδή αν η αρχική αλυσίδα έχει στάσιμη κατανομή αυτή θα είναι μοναδική.
Αν οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς δεν είναι πεπερασμένοι ή αν η αλυσίδα είναι μεταβατική τότε όλες οι οριακές πιθανότητες συγκλίνουν στο μηδέν και επομένως η αλυσίδα δεν έχει στάσιμη κατανομή. Πράγματι, έστω ότι έχει μια στάσιμη κατανομή, την v. Τότε $vP^n = v$ και λαμβάνοντας το όριο κατά μέλη εφαρμόζοντας το λήμμα κυριαρχημένης σύγκλισης ;; προκύπτει άτοπο. □

Στην επόμενη πρόταση θα αποδείξουμε και το αντίστροφο.

Προταση 367 *Έστω X_n μια αδιαχώριστη και θετικά επαναληπτική αλυσίδα. Τότε έχει μια στάσιμη κατανομή.*

Αποδειξη. Έστω $k \in S$ και T_k ο χρόνος πρώτης επανόδου στην κατάσταση k, δηλαδή $T_k = \min\{n \in \mathbb{N} : X_{m+n} = k, X_m = k\}$. Επίσης θέτουμε την τυχαία μεταβλητή για $i \in S$

$$N_i = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{I}_{\{X_n=i\}\cap\{T_k\geq n\}}$$

η οποία είναι ίση με τον αριθμό των επισκέψεων στην κατάσταση i χωρίς να έχει επισκεφθεί την k ενδιάμεσα.
Τέλος, θέτουμε

$$\rho_i(k) = \mathbb{E}(N_i|X_0 = k) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i, T_k \geq n|X_0 = k)$$

Ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης k, δηλαδή ο m_k είναι τέτοιος ώστε

$$m_k = \mathbb{E}(T_k|X_0 = k) = \mathbb{E}\left(\sum_{i\in S} N_i|X_0 = k\right) = \sum_{i\in S} \mathbb{E}(N_i|X_0 = k) = \sum_{i\in S} \rho_i(k)$$

αφού ισχύει ότι $T_k = \sum_{i\in S} N_i$, δηλαδή ο χρόνος πρώτης επανόδου της k είναι το άθροισμα του πλήθους των επισκέψεων της κάθε κατάστασης $i \in S$ έχοντας ξεκινήσει από την k.
Θα αποδείξουμε στην συνέχεια ότι $\rho_i(k) < \infty$ όταν $i \neq k$. Συμβολίζουμε με

$$l_{ki}(n) = P(X_n = i, T_k \geq n|X_0 = k)$$

και επομένως $\rho_i(k) = \sum_{n=1}^{\infty} l_{ki}(n)$.
Προφανώς ισχύει ότι $f_{m+n}(k|k) \geq l_{ki}(m)f_n(i|k)$. Η $l_{ki}(m)$ εκφράζει την πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την k και σε m βήματα να φτάσει στην i χωρίς ενδιάμεσα να έχει επισκεφθεί την k. Από την άλλη μεριά η $f_n(i|k)$ εκφράζει την πιθανότητα η αλυσίδα να ξεκινήσει από την i και να επισκεφθεί για πρώτη φορά την k μετά από n βήματα ενώ η $f_{m+n}(k|k)$ εκφράζει την πιθανότητα να ξεκινήσει από την k και να επιστρέψει σε αυτή μετά από ακριβώς $m + n$ βήματα και όχι νωρίτερα. Στην τελευταία αυτή πιθανότητα υπάρχουν μονοπάτια στα οποία η αλυσίδα ενδεχομένως έχει επισκεφθεί την i. Η πιθανότητα όμως των μονοπατιών που η αλυσίδα έχει επισκεφθεί την i σε ακριβώς m βήματα είναι προφανώς μικρότερη από την πιθανότητα όλων των μονοπατιών, είτε έχει επισκεφθεί την i ενδιάμεσα (και σε ποιο βήμα) είτε όχι.
Λόγω του ότι όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν υπάρχει κάποιο $n^* \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f_{n^*}(i|k) > 0$. Άρα

$$\rho_i(k) = \sum_{m=1}^{\infty} l_{ki}(m) \leq \frac{1}{f_{n^*}(i|k)} \sum_{m=1}^{\infty} f_{m+n^*}(k|k) \leq \frac{1}{f_{n^*}(i|k)} < \infty$$

Επίσης,

$$l_{ki}(n) = \sum_{j \neq k} P(X_n = i, X_{n-1} = j, T_k \geq n | X_0 = k) = \sum_{j \neq k} l_{kj}(n-1) P_{ji}, \quad n \geq 2$$

και $l_{ki}(1) = P_{ki}$. Για να δούμε την τελευταία ισότητα, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& P(X_n = i, X_{n-1} = j, T_k \geq n | X_0 = k) \\
= & \frac{P(X_n = i, X_{n-1} = j, T_k \geq n, X_0 = k)}{P(X_0 = k)} \cdot \frac{P(X_{n-1} = j, T_k \geq n, X_0 = k)}{P(X_{n-1} = j, T_k \geq n, X_0 = k)} \\
= & P(X_n = i | X_{n-1} = j) \cdot l_{kj}(n-1)
\end{aligned}$$

Σημειώστε ότι $\{T_k \geq n\} = \{X_1 \neq k\} \cap \{X_2 \neq k\} \cap \cdots \cap \{X_{n-1} \neq k\}$.
Αρα

$$\begin{aligned}
\rho_i(k) &= \sum_{n=1}^{\infty} l_{ki}(n) \\
&= P_{ki} + \sum_{n=2}^{\infty} l_{ki}(n) \\
&= P_{ki} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{j \neq k} l_{kj}(n-1) P_{ji} \\
&= P_{ki} + \sum_{j \neq k} \left(\sum_{n \geq 2} l_{kj}(n-1) \right) P_{ji} \quad \text{(αναδιάταξη σειράς θετικών όρων)} \\
&= \rho_k(k) P_{ki} + \sum_{j \neq k} \rho_j(k) P_{ji} \\
&= \sum_{j \in S} \rho_j(k) P_{ji}
\end{aligned}$$

αφού $\rho_k(k) = 1$.
Αφού η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική τότε $m_k < \infty$ και επομένως το διάνυσμα $\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots,)$ με $\pi_i = \frac{\rho_i(k)}{m_k}$ είναι τέτοιο ώστε $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$ και $\pi P = \pi$ δηλαδή είναι στάσιμη κατανομή. □

Οι προηγούμενες δυο προτάσεις μαζί με το πόρισμα 364 μας οδηγούν στο επόμενο σημαντικό πόρισμα.

Πορισμα 368 *Έστω X_n μια αδιαχώριστη αλυσίδα. Η αλυσίδα έχει στάσιμη κατανομή* **ανν** *είναι θετικά επαναληπτική. Σε αυτή την περίπτωση η στάσιμη κατανομή είναι μοναδική και ισχύει ότι*

$$\pi_j = \frac{1}{m_j}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 369 *Προκύπτει από τα προηγούμενα και από την απόδειξη του θεωρήματος 367 ότι*

$$\rho_i(k) = \frac{\pi_i}{\pi_k}$$

όπου $\rho_i(k)$ είναι το μέσο πλήθος επισκέψεων της αλυσίδας στην κατάσταση i μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην κατάσταση k.

ΠΟΡΙΣΜΑ 370 *Έστω X_n Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο σύνολο καταστάσεων S, έστω k το πλήθος, και πίνακα μετάβασης P. Αν ο χώρος καταστάσεων αναλύεται σε ακριβώς μια επαναληπτική απεριοδική κλάση και κάποιες μεταβατικές καταστάσεις τότε η αλυσίδα έχει μοναδική στάσιμη κατανομή π τέτοια ώστε*

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{ij} = \pi_j$$

Επιπλέον, υπάρχουν θετικές σταθερές c και $\gamma \in (0,1)$ τέτοιες ώστε

$$|P^n_{ij} - \pi_j| \leq c\gamma^n$$

για $n \geq n^*$ για κάποιο n^* αρκετά μεγάλο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω C η επαναληπτική κλάση της αλυσίδας και T το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων. Αναδιατάσσουμε το σύνολο των καταστάσεων έτσι ώστε οι επαναληπτικές να είναι οι πρώτες w και στην συνέχεια να εμφανίζονται οι μεταβατικές. Οι επαναληπτικές καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές (δες 350) συνεπώς από το θεώρημα 346 οι οριακές πιθανότητες είναι της μορφής

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{ij} = \frac{f_{ij}}{m_j} = \frac{h^C_i}{m_j}$$

για j επαναληπτική ενώ $\lim_{n\to\infty} P^n_{ij} = 0$ για j μεταβατική. Λόγω του πορίσματος 332 έχουμε ότι $h^C_i = 1$. Αρα οι οριακές πιθανότητες είναι τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P^n_{ij} &= \frac{1}{m_j}, \quad j = 1, \cdots, w \\
\lim_{n\to\infty} P^n_{ij} &= 0, \quad j = w+1, \cdots, k
\end{aligned}$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητες από το i. Αυτό σημαίνει ότι η $\pi = (\frac{1}{m_1}, \cdots, \frac{1}{m_w}, 0 \cdots, 0)$ είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή (δες 340) η οποία ικανοποιεί τις στάσιμες εξισώσεις.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την εκτίμηση

$$|P^n_{ij} - \pi_j| \leq c\gamma^n$$

για $n \geq n^*$ όπου n^* αρκετά μεγάλο.

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι ισχύει η παραπάνω εκτίμηση όταν j επαναληπτική. Εφόσον οι επαναληπτικές καταστάσεις είναι απεριοδικές τότε λόγω του 297 υπάρχει κάποιος $n_j \in \mathbb{N}$ όταν j επαναληπτική τέτοιο ώστε $P^n_{jj} > 0$ για κάθε $n \geq n_j$. Διαλέγουμε $n_0 = \max\{n_1, \cdots, n_w\}$ (όπου w το πλήθος των επαναληπτικών) οπότε ισχύει $P^n_{ii} > 0$ για κάθε $n \geq n_0$ και για οποιαδήποτε επαναληπτική κατάσταση i.
Διαλέγοντας $n^* \geq n_0 + m$ έχουμε ότι για κάθε $n \geq n^*$ και για κάθε $i \in S$ και j επαναληπτική ισχύει ότι $P^n_{ij} > 0$. Για να το δούμε αυτό γράφουμε

$$P^n_{ij} = \sum_{p=1}^{n} f_p(i|j) P^{n-p}_{jj}$$

Λόγω του ότι η αλυσίδα είναι πεπερασμένη ισχύει ότι (δες 252) υπάρχει κάποιο $n_{ij} \leq m - 1$ έτσι ώστε $f_{n_{ij}}(i|j) > 0$. Παράλληλα, $P^{n-n_{ij}}_{jj} > 0$ διότι $n - n_{ij} \geq n_0$. Αρα $P^n_{ij} > 0$ για κάθε $n \geq n^*$ και για κάθε $i \in S$ και j επαναληπτική.
Θεωρούμε δυο στοχαστικές διαδικασίες, τις X_n και Y_n, οι οποίες έχουν τον ίδιο πίνακα μετάβασης και τον ίδιο χώρο καταστάσεων και υποθέτουμε ότι $P(X_0 = i) = m_i$ και $P(Y_0 = i) = \nu_i$ (έχουν δηλαδή διαφορετικές αρχικές κατανομές). Αν l επαναληπτική θέτουμε $\beta = \min_i P^{n^*}_{il} > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα και οι δυο αλυσίδες να βρεθούν στην κατάσταση l μετά n^* βήματα είναι τουλάχιστον β^2. Θέτοντας $T = \min\{n \in \mathbb{N} : X_n = Y_n\}$ βλέπουμε ότι

$$P(T > n^*) \leq 1 - \beta^2$$

Παρόμοια,

$$P(T > 2n^*) = P(T > n^*)P(T > 2n^*|T > n^*) \leq (1 - \beta^2)^2$$

και γενικότερα

$$P(T > kn^*) \leq (1 - \beta^2)^k$$

Επομένως

$$P(T \geq n) \leq c\gamma^n$$

όπου $\gamma = (1 - \beta^2)^{\frac{1}{n^*}}$ και $c = \frac{1}{(1-\beta^2)^{n^*}}$.
Στην συνέχεια έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
P(X_n = j|T \leq n) &= \sum_{t=0}^{n} \sum_{l=1}^{m} P(X_n = j|T = t, X_t = l) P(T = t, X_t = l|T \leq n) \\
&= \sum_{t=0}^{n} \sum_{l=1}^{m} P(X_n = j|X_t = l) P(T = t, X_t = l|T \leq n) \\
&= \sum_{t=0}^{n} \sum_{l=1}^{m} P^{n-t}_{lj} P(T = t, X_t = l|T \leq n)
\end{aligned}$$

Παρόμοια, ισχύει ότι

$$P(Y_n = j|T \le n) = \sum_{t=0}^{n} \sum_{l=1}^{m} P_{lj}^{n-t} P(T = t, Y_t = l|T \le n)$$

και επειδή τα ενδεχόμενα $\{T = t, X_t = l\}$ και $\{T = t, Y_t = l\}$ ταυτίζονται προκύπτει ότι

$$P(X_n = j|T \le n) = P(Y_n = j|T \le n)$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τις

$$\begin{aligned} r_j^X(n) &= P(X_n = j) = (mP^n)_j \\ &= P(X_n = j|T \le n)P(T \le n) + P(X_n = j|T > n)P(T > n) \\ r_j^Y(n) &= P(Y_n = j) = (\nu P^n)_j \\ &= P(Y_n = j|T \le n)P(T \le n) + P(Y_n = j|T > n)P(T > n) \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$|r_j^X(n) - r_j^Y(n)| \le P(T > n) \le c\gamma^n$$

Θέτοντας $P(X_0 = i) = 1$ έχουμε ότι $r_j^X(n) = P_{ij}^n$ και θέτοντας $\nu_j = \pi_j$ έχουμε (δες 344) $r_j^Y(n) = \pi_j$ και άρα

$$|P_{ij}^n - \pi_j| \le c\gamma^n$$

όταν j επαναληπτική και $n \ge n^*$.
Τέλος, θα αποδείξουμε την ίδια εκτίμηση στην περίπτωση όπου j μεταβατική. Γνωρίζουμε ότι $P_{ij}^n \to \pi_j = 0$ όταν j μεταβατική άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι $|P_{ij}^n| \le c\gamma^n$ για κάποιες θετικές σταθερές c και $\gamma \in (0, 1)$.
Θέτουμε

$$q_i(n) = P(X_n \text{ μεταβατική } |X_0 = i)$$

Γνωρίζουμε από το 252 ότι ο μέγιστος αριθμός βημάτων που χρειάζεται για να επισκεφθεί η αλυσίδα μια κατάσταση j ξεκινώντας από μια κατάσταση i είναι $m - 1$. Επομένως υπάρχει θετική πιθανότητα σε $m - 1$ βήματα να επισκεφθεί μια επαναληπτική κατάσταση το οποίο σημαίνει ότι (σε αυτό το μονοπάτι) δεν θα επισκεφθεί καμία μεταβατική στο μέλλον. Αρα η πιθανότητα $q_i(m) < 1$ ακριβώς διότι στα πρώτα $m - 1$ βήματα υπάρχει θετική πιθανότητα να έχει επισκεφθεί μια επαναληπτική και επομένως η πιθανότητα στο επόμενο βήμα να μην επισκεφθεί μια μεταβατική είναι αυστηρά θετική.
Θέτουμε

$$\beta = \max_{i=1,\cdots,m} q_i(m)$$

όπου λόγω του πεπερασμένου πλήθους καταστάσεων έχουμε ότι $\beta < 1$.
Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι, συμβολίζοντας με T τις μεταβατικές καταστάσεις,

$$\begin{aligned} q_i(2m) &= P(X_{2m} \in T | X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in T} P(X_{2m} \in T | X_m = j, X_0 = i) P(X_m = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in T} P(X_{2m} \in T | X_m = j) P(X_m = j | X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in T} P(X_m \in T | X_0 = j) P(X_m = j | X_0 = i) \\ &\leq \beta \sum_{j \in T} P(X_m = j | X_0 = i) \\ &= \beta P(X_m \in T | X_0 = i) \\ &\leq \beta^2 \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό έχουμε ότι $q_i(km) \leq \beta^k$ για κάθε $i \in S$ και $k \geq 1$. Έστω τώρα n ένας οποιοσδήποτε ακέραιος και k τέτοιος ώστε $km \leq n < (k+1)m$. Τότε

$$q_i(n) \leq q_i(km) \leq \beta^k = \beta^{-1}(\beta^{1/m})^{(k+1)m} \leq \beta^{-1}(\beta^{1/m})^n$$

Επομένως ισχύει η ζητούμενη σχέση για $c = \beta^{-1}$ και $\gamma = \beta^{1/m}$.
Τέλος, θέτουμε $c = \max\{\beta^{-1}, \frac{1}{(1-\beta^2)^{n^*}}\}$ και $\gamma = \max\{\beta^{1/m}, (1-\beta^2)^{\frac{1}{n^*}}\}$. Τότε ισχύει ότι

$$|P_{ij}^n - \pi_j| \leq c\gamma^n$$

για $n \geq n^*$ και $i, j \in S$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 371 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

και σύνολο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3\}$.

Σχήμα 8.13: Το γράφημα της αλυσίδας

Διαπιστώνουμε ότι το $C = \{1, 2\}$ *κλειστό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων και απεριοδικών ενώ η κατάσταση 3 είναι μεταβατική. Σύμφωνα με το πόρισμα 370 η αλυσίδα θα έχει μια μοναδική στάσιμη κατανομή. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων* $\pi P = P$ *και* $\sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1$ *προκύπτει ότι*

$$\pi = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$$

Σύμφωνα με το πόρισμα 370 θα ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$ *και μάλιστα*

$$|P_{ij}^n - \pi_j| \leq c\gamma^n, \quad i, j = 1, 2, 3 \tag{8.34}$$

για κάποιο $c > 0$ *και* $\gamma \in (0, 1)$.
Μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε το πόρισμα 370 υπολογίζοντας την νιοστή δύναμη του πίνακα. Θα έχουμε

$$P^n = \begin{bmatrix} 2/5 + 3/5\ (6^n)^{-1} & 3/5 - 3/5\ (6^n)^{-1} & 0 \\ 2/5 - 2/5\ (6^n)^{-1} & 3/5 + 2/5\ (6^n)^{-1} & 0 \\ 2/5 - 2/5\ (6^n)^{-1} & 3/5 + 2/5\ (6^n)^{-1} - (3^n)^{-1} & (3^n)^{-1} \end{bmatrix}$$

Πράγματι ισχύει η σχέση 8.34 με $c = \frac{1}{5}$ *και* $\gamma = \frac{1}{3}$. □

Παρατηρηση 372 (Ερμηνεια της Στασιμης Κατανομης) *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα* X_k. *Δεδομένου μιας συγκεκριμένης κατάστασης* j *ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξω τυχαία ένα αρκετά μεγάλο* k *και να ισχύει ότι* $X_k = j$; *Θα εξετάσουμε το ερώτημα αυτό και θα συσχετίσουμε την ζητούμενη πιθανότητα με την στάσιμη κατανομή.*

· *Αν η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, απεριοδική και θετικά επαναληπτική τότε από το 363 γνωρίζουμε ότι* $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$ *και επομένως (δες 341)*

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \lim_{n\to\infty} m_j^{(n)} = \lim_{n\to\infty} (m^{(0)} \cdot P^n)_j = \pi_j$$

Δηλαδή, για αρκετά μεγάλο k*, η πιθανότητα* π_j *είναι περίπου ίση με την* $P(X_k = j)$*, ανεξάρτητα της αρχικής κατανομής. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα να επιλέξω τυχαία ένα μεγάλο* $k \in \mathbb{N}$ *και να ισχύει* $X_k = j$ *είναι περίπου ίση με* π_j.
· *Έστω ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, περιοδική με περίοδο* d *και έστω ότι* $X_0 = i$*. Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε ένα φυσικό νόημα (και στην περιοδική περίπτωση) στις πιθανότητες* π_j *όταν η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική. Πότε είναι θετική η πιθανότητα σε κάποιο βήμα* k *να πάρει την τιμή* j*; Εφόσον η αλυσίδα είναι περιοδική με περίοδο* d *τότε ένα οποιοδήποτε* $k \in \mathbb{N}$ *θα έχει την μορφή* $k = nd + b$ *για κάποιο* $b = 0, 1, \cdots, d-1$*. Κατασκευάζοντας τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση* i *έχουμε ότι* $j \in C_a$ *για κάποιο* $a = 0, 1, \cdots, d-1$*. Δηλαδή η τιμή της* X_k *είναι πιθανό να είναι ίση με* j *μονάχα όταν* $k = nd + a$ *αλλιώς η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού είναι ίση με το μηδέν. Σε αυτή την περίπτωση* ($k = nd + a$) *έχουμε ότι* $P_{ij}^k \approx \frac{d}{m_j}$ *και άρα*

$$P(X_k = j) = m_j^{(k)} = (m^{(0)} \cdot P^k)_j = P_{ij}^k \approx \frac{d}{m_j}$$

αφού $m^{(0)} = (0, 0, \cdots, 1, 0, 0 \cdots)$ *όπου η μονάδα είναι στην θέση* i*. Αν αφήσουμε την ακολουθία να τρέξει αρκετά και την σταματήσουμε τυχαία σε κάποιο* k *τότε η πιθανότητα αυτό το* k *να είναι της μορφής* $k = nd + a$ *είναι ίση με* $\frac{1}{d}$*. Αρα η πιθανότητα* $P(X_k = j)$ *για κάποιο τυχαία επιλεγμένο* k *είναι* $P(X_k = j) \approx \frac{1}{m_j} = \pi_j$ *για μεγάλο* k*. Το συμπέρασμα αυτό είναι ανεξάρτητο της αρχικής κατάστασης* i *από όπου ξεκινά η αλυσίδα. Όπως διαπιστώνουμε η λογική που αναπτύξαμε περιέχει και άλλο ένα πείραμα, αυτό της τυχαίας επιλογής του* k.
· *Στην περίπτωση μιας πεπερασμένης αλυσίδας με μια επαναληπτική και απεριοδική κλάση και με κάποιες μεταβατικές καταστάσεις υπάρχει μοναδική στάσιμη κατανομή (δες 370). Επομένως, και σε αυτή την περίπτωση ισχύει η ίδια ερμηνεία για την στάσιμη κατανομή.*
· *Παρόμοια ερμηνεία (αλλά όχι την ίδια) έχει και η ποσότητα*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k}{n}$$

(δες παρατήρηση 353).

Παρατηρηση 373 *Επειδή δεν ισχύει πάντοτε*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$$

είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε τις στάσιμες κατανομές περισσότερο ως εργαλείο εύρεσης των μέσων χρόνων επαναφοράς παρά για τον απευθείας προσδιορισμό των οριακών πιθανοτήτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 374 *Για παράδειγμα, η Μαρκοβιανή αλυσίδα του περιπατητή είναι περιοδική με περίοδο* $d = 2$. *Οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές και αν διαλέξουμε την* $j = 1$ *τότε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την* j *είναι τα* $C_0 = \{1, 3\}$ *και* $C_1 = \{2, 4\}$. *Υπολογίζουμε τον* P^2 *οπότε ο πίνακας* P_{C_0} *σε αυτή την περίπτωση είναι ο*

$$P_{C_0} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

του οποίου η στάσιμη κατανομή είναι $\pi = (1/2, 1/2)$. *Επομένως,* $m_1 = \frac{2}{1/2} = 4$. *Παρομοίως* $m_2 = m_3 = m_4 = 4$.
Ένας δεύτερος τρόπος υπολογισμού των μέσων χρόνον επαναφοράς είναι μέσω της μοναδικής στάσιμης κατανομής της αρχικής αλυσίδας (δες 368). Η αρχική Μαρκοβιανή αλυσίδα έχει μοναδική στάσιμη κατανομή η οποία είναι $\pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ *συνεπώς επιβεβαιώνουμε ότι οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς είναι τέτοιοι ώστε* $m_i = 4$ *για* $i = 1, 2, 3, 4$.
Θα εξετάσουμε τις οριακές πιθανότητες χρησιμοποιώντας το θεώρημα 348. Όπως έχουμε παρατηρήσει (δες παρατήρηση 349), οι οριακές πιθανότητες P_{ij}^n *εξαρτώνται από τα* i, j. *Για να βρούμε τις οριακές πιθανότητες της πρώτης γραμμής, θα κατασκευάσουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης της πρώτης κατάστασης, δηλαδή της 1. Αυτά είναι* $C_0 = \{1, 3\}$ *και* $C_1 = \{2, 4\}$. *Έτσι έχουμε ότι*

$$\begin{aligned} P_{11}^{2n} &\to \frac{d}{m_1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ P_{11}^{2n+1} &= 0 \end{aligned}$$

διότι $1 \in C_0$ *ενώ* $1 \notin C_1$. *Παρόμοια*

$$\begin{array}{lll} P_{12}^{2n} = 0 & P_{13}^{2n} \to \frac{1}{2} & P_{14}^{2n} = 0 \\ P_{12}^{2n+1} \to \frac{1}{2} & P_{13}^{2n+1} = 0 & P_{14}^{2n+1} \to \frac{1}{2} \end{array}$$

Παρόμοια, για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της δεύτερης γραμμής θα πρέπει να κατασκευάσουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 2. Το ίδιο για την τρίτη και τέταρτη γραμμή. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 375 *Έστω* P *ένας στοχαστικός πίνακας. Θα λέμε ότι είναι* **διπλά στοχαστικός** *αν το άθροισμα των στοιχείων της κάθε στήλης του είναι μονάδα.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 376 *Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία είναι αδιαχώριστη και απεριοδική με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων (έστω m) και διπλά στοχαστικό πίνακα μετάβασης P. Τότε έχουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j = \frac{1}{m}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές. Επομένως, από το Πόρισμα 363 προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j} = \pi_j$$

όπου π_j είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή. Εύκολα όμως διαπιστώνουμε ότι το διάνυσμα

$$\pi = \Big(\underbrace{\frac{1}{m}, \cdots, \frac{1}{m}}_{m \text{ το πλήθος}} \Big)$$

ικανοποιεί τις στάσιμες εξισώσεις (χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το άθροισμα των στηλών είναι μονάδα) συνεπώς είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή και άρα έχουμε το ζητούμενο. □

8.14.5 Μεταβατικές καταστάσεις και περιοδικές υποαλυσίδες

Σε αρκετές περιπτώσεις (ειδικά όταν υπάρχουν περισσότερες από δυο μεταβατικές καταστάσεις που συνεπικοινωνούν) είναι αρκετά δύσκολο να υπολογισθεί το

$$\sum_{r=0}^{\infty} f_{rd+a}(i|j)$$

Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να εργαστούμε στο πνεύμα της απόδειξης του πορίσματος 365 και να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα P^d, ειδικά όταν η αλυσίδα είναι πεπερασμένη. Αν η κατάσταση j ανήκει σε ένα κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο S_1 με περίοδο d τότε το S_1 μπορεί να χωρισθεί στα σύνολα κυκλικής μετάβασης $C_0, \cdots, C_{d-1}$. Τα σύνολα $C_0, \cdots, C_{d-1}$ αποτελούν κλειστά και αδιαχώριστα σύνολα του P^d και μάλιστα απεριοδικά. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το Συμπέρασμα 298 έχουμε ότι υπάρχει κάποιο k_0 τέτοιο ώστε για κάθε $k \geq k_0$ να ισχύει $(Q^k)_{jj} = (P^d)^k_{jj} > 0$. Εφόσον υπάρχουν τουλάχιστον δυο πρώτοι αριθμοί μετά τον k_0 προκύπτει ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των $\{k \geq k_0 : (Q^k)_{jj} > 0\}$ είναι ίσος με τη μονάδα, δηλαδή η κατάσταση j είναι απεριοδική στην αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον $Q = P^d$. Επομένως μπορούμε να μελετήσουμε το όριο $(P^{nd})_{ij}$ καθώς $n \to \infty$. Για να το κάνουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 346. Έστω ότι

$(P^{nd})_{ij}$ συγκλίνει στο $(P^{\infty d})_{ij}$. Τότε οι οριακές πιθανότητες θα είναι, εφαρμόζοντας το λήμμα κυριαρχημένης σύγκλισης ;;,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(P^{nd+a})_{ij} &= \lim_{n\to\infty}(P^a \cdot P^{nd})_{ij} \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k\in S}P^a_{ik}P^{nd}_{kj} \\ &= \left(P^a \cdot P^{\infty d}\right)_{ij}, \quad a = 0, 1, \cdots, d-1\end{aligned}$$

αφού $\sum_{k\in S}P^a_{ik}P^{nd}_{kj} \leq \sum_{k\in S}P^a_{ik} = 1$.

Σημειώστε ότι, εν γένει, $P^a \cdot P^{\infty d} \neq P^{\infty d} \cdot P^a$. Αν όμως ο πίνακας είναι πεπερασμένος τότε το παραπάνω επιχείρημα ισχύει χωρίς την εφαρμογή του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης επομένως σε αυτή την περίπτωση $P^a \cdot P^{\infty d} = P^{\infty d} \cdot P^a$. Δηλαδή, γενικά, το σωστό συμπέρασμα είναι

$$\lim_{n\to\infty}(P^{nd+a})_{ij} = (P^a \cdot P^{\infty d})_{ij} \tag{8.35}$$

και όχι $\lim_{n\to\infty}(P^{nd+a})_{ij} = (P^{\infty d} \cdot P^a)_{ij}$.

Το παραπάνω είναι πρακτικά χρήσιμο όταν ο πίνακας μετάβασης είναι αρκετά μεγάλος έτσι ώστε να μην είναι εύκολο να υπολογίσουμε την νιοστή του δύναμη. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί να δει κανείς στην επόμενη εργασία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 377 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το* $S = \{1, 2, 3\}$ *και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της αλυσίδας, δηλαδή τα όρια

$$\lim_{n\to\infty}P^n_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

Ένας τρόπος προφανώς είναι να υπολογίσουμε την νιοστή δύναμη του πίνακα και στην συνέχεια να υπολογίσουμε ένα-ένα τα όρια ξεχωριστά. Ο συγκεκριμένος όμως πίνακας έχει δυο (συζυγείς) μιγαδικές ρίζες και έτσι ο υπολογισμός της νιοστής δύναμης είναι λίγο πιο περίπλοκος.

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 346 για τον υπολογισμό των οριακών πιθανοτήτων. Το πρώτο που θα πρέπει να κάνουμε είναι να δούμε αν τυχόν η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, αν έχει μεταβατικές καταστάσεις, ποιες καταστάσεις επικοινωνούν με ποιες, περιοδικότητα κ.τ.λ.

Διαπιστώνουμε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και απεριοδική και όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές (δες παρατήρηση 262 και θεώρημα 266). Σύμφωνα με το θεώρημα 346 θα ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j}$$

όπου m_j *ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης* j. *Για να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο επαναφοράς θα χρησιμοποιήσουμε το πόρισμα 368. Θα υπολογίσουμε δηλαδή την στάσιμη κατανομή, αν υπάρχει. Στην περίπτωση που υπάρχει τότε* $m_j = \frac{1}{\pi_j}$ *ενώ αν δεν υπάρχει θεωρούμε ότι* $m_j = \infty$ *και επομένως οι αντίστοιχες οριακές πιθανότητες θα είναι μηδέν.*
Για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ *θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις*

$$\begin{aligned} \pi P &= \pi \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 &= 1 \end{aligned}$$

Λύνοντας τις εξισώσεις έχουμε

$$\pi_1 = \frac{1}{7}, \quad \pi_2 = \frac{3}{7}, \quad \pi_3 = \frac{3}{7}$$

Επομένως ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty = \begin{bmatrix} 1/7 & 3/7 & 3/7 \\ 1/7 & 3/7 & 3/7 \\ 1/7 & 3/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με το παράδειγμα ;;. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 378 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα του παραδείγματος 371 με χώρο καταστάσεων* $S = \{1, 2, 3\}$ *και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες εφαρμόζοντας το θεώρημα 346. Λόγω του ότι η κατάσταση 3 είναι μεταβατική Θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{i3}^n = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Επομένως πρέπει να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n, \quad i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2$$

Εφόσον οι καταστάσεις $1,2$ *συνεπικοινωνούν τότε σύμφωνα με το θεώρημα 346 θα ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j}, \quad i = 1,2 \quad j = 1,2$$

ενώ

$$\lim_{n\to\infty} P_{3j}^n = \frac{h_3^j}{m_j}, \quad j = 1,2$$

Λόγω της παρατήρησης 317 θα ισχύει ότι $h_3^j = h_3^C$ *για* $j = 1,2$ *και λόγω του πορίσματος 332 θα ισχύει ότι* $h_3^j = h_3^C = 1$ *για* $j = 1,2$. *Αρα τελικά μένει να βρούμε μόνο τους μέσους χρόνους επαναφοράς* m_1, m_2. *Για να το κάνουμε αυτό θα εργαστούμε στην υποαλυσίδα με χώρο καταστάσεων το* $C = \{1,2\}$ *και πίνακα μετάβασης τον αρχικό εάν όμως διαγράψουμε την γραμμή και στήλη που ανήκει η κατάσταση 3. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον υποπίνακα, τον οποίο συμβολίζουμε με* A, *θα υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή* $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ *από τις εξισώσεις*

$$\begin{aligned} \pi A &= \pi \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα θα έχουμε

$$\pi_1 = \frac{2}{5}, \quad \pi_2 = \frac{3}{5}$$

επομένως $m_1 = \frac{5}{2}$ *και* $m_2 = \frac{5}{3}$. *Τελικά θα έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 379 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το* $S = \{1,2,3,4,5\}$ *και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 0 & 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν δυο κλειστά και αδιαχώριστα σύνολα επαναληπτικών καταστάσεων, τα $C_1 = \{1, 2\}$ *και* $C_2 = \{3, 4\}$ *τα οποία είναι και απεριοδικά. Η κατάσταση 5 είναι μεταβατική. Σύμφωνα με το θεώρημα 346 θα ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to\infty} P_{i5}^n = 0, \quad i = 1, \cdots, 5$$

Εφόσον οι καταστάσεις 1 *και* 2 *συνεπικοινωνούν θα έχουμε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2$$

Παρόμοια για τις 3 *και* 4 *θα έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{m_j}, \quad i = 3, 4, \quad j = 3, 4$$

Για τις οριακές πιθανότητες

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n, \quad i = 3, 4 \quad j = 1, 2$$

θα ισχύει ότι είναι μηδέν αφού $h_i^j = 0$ *όταν* $i = 3, 4$ *και* $j = 1, 2$*. Παρόμοια για τις πιθανότητες*

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n, \quad i = 1, 2 \quad j = 3, 4$$

θα είναι επίσης μηδέν.
Για τις οριακές πιθανότητες της γραμμής 5 θα ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} P_{5j}^n = \frac{h_5^j}{m_j}, \quad j = 1, \cdots, 5$$

Λόγω της παρατήρησης 317 θα ισχύει ότι

$$h_5^1 = h_5^2 = h_5^{C_1}, \quad h_5^3 = h_5^4 = h_5^{C_2}$$

Δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{0}{m_1} & \frac{0}{m_2} & \frac{1}{m_3} & \frac{1}{m_4} & 0 \\ \frac{0}{m_1} & \frac{0}{m_2} & \frac{1}{m_3} & \frac{1}{m_4} & 0 \\ \frac{h_5^{C_1}}{m_1} & \frac{h_5^{C_1}}{m_2} & \frac{h_5^{C_2}}{m_3} & \frac{h_5^{C_2}}{m_4} & 0 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς, πρέπει να υπολογίσουμε τα m_1, m_2, m_3, m_4, $h_5^{C_1}$ *και* $h_5^{C_2}$*. Για να υπολογίσουμε τα* m_1 *και* m_2 *θα υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή της υποαλυσίδας* *με χώρο καταστάσεων το C_1 και πίνακα μετάβασης τον A ο οποίος προέρχεται από τον αρχικό διαγράφοντας τις γραμμές 3,4,5 και τις αντίστοιχες στήλες. Η στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ θα ικανοποιεί*

$$\begin{aligned} \pi A &= \pi \\ \pi_1 + \pi_2 &= 1 \end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι

$$\pi_1 = \frac{2}{5}, \quad \pi_2 = \frac{3}{5}$$

Επομένως $m_1 = \frac{5}{2}$ και $m_2 = \frac{5}{3}$.
Για να υπολογίσουμε τους m_3 και m_4 θα εργαστούμε στην υποαλυσίδα με χώρο καταστάσεων το C_2 και πίνακα μετάβασης τον αρχικό διαγράφοντας τις στήλες 1,2,5 και τις αντίστοιχες γραμμές και τον οποίο συμβολίζουμε με B. Για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_3, \pi_4)$ θα λύσουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \pi B &= \pi \\ \pi_3 + \pi_4 &= 1 \end{aligned}$$

Η λύση είναι

$$\pi_3 = \frac{3}{11}, \quad \pi_4 = \frac{8}{11}$$

Επομένως $m_3 = \frac{11}{3}$ και $m_4 = \frac{11}{8}$.
Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες $h_5^{C_1}$ και $h_5^{C_2}$. Λύνοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις σύμφωνα με το θεώρημα 316 προκύπτει ότι $h_5^{C_1} = h_5^{C_2} = 0.5$. Τελικά θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} P^n = P^\infty = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/11 & \frac{8}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 3/11 & \frac{8}{11} & 0 \\ 1/5 & 3/10 & \frac{3}{22} & 4/11 & 0 \end{bmatrix}$$

Σημειώστε ότι ο οριακός πίνακας P^∞ είναι στοχαστικός (δείτε και την πρόταση 352).

□

Παραδειγμα 380 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Στην αλυσίδα αυτή έχουμε ένα κλειστό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων, το $C = \{1, 2, 3\}$ *το οποίο όμως είναι περιοδικό με περίοδο 2. Η κατάσταση 4 είναι μεταβατική. Αρα οι οριακές πιθανότητες της τέταρτης στήλης θα είναι*

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{i4} = 0, \quad i = 1, \cdots, 4$$

Εφόσον οι καταστάσεις 1,2,3 είναι περιοδικές με περίοδο 2 δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 346 στην αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον P*. Για την περίπτωση αυτή θα ακολουθήσουμε την μεθοδολογία της παραγράφου 8.14.5. Θα εργαστούμε στην αλυσίδα* Y_n *με πίνακα μετάβασης τον* P^2*, δηλαδή*

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{48} & \frac{11}{48} & \frac{9}{16} & 1/16 \end{bmatrix}$$

Στην αλυσίδα Y_n *οι καταστάσεις* $1, 2$ *ορίζουν ένα κλειστό, αδιαχώριστο και απεριοδικό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων το οποίο συμβολίζουμε με* $C_1 = \{1, 2\}$*, η κατάσταση 3 είναι απορροφητική και η 4 μεταβατική. Θα υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της αλυσίδας* Y_n *σύμφωνα με το θεώρημα 346. Θα έχουμε*

$$P^{2\infty} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ \frac{0}{m_1} & \frac{0}{m_2} & \frac{1}{m_3} & 0 \\ \frac{h_4^{C_1}}{m_1} & \frac{h_4^{C_1}}{m_2} & \frac{h_4^3}{m_3} & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή η 3 είναι απορροφητική έπεται ότι $m_3 = 1$ *(δείτε άσκηση 285). Υπολογίζουμε όπως σε προηγούμενη άσκηση τους* m_1 *και* m_2 *μέσω της στάσιμης κατανομής στην υποαλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον αρχικό διαγράφοντας τις στήλες 3,4 και τις αντίστοιχες γραμμές. Προκύπτει ότι* $m_1 = 3$ *και* $m_2 = \frac{3}{2}$*. Στην συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε την* h_4^3*. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 316 προκύπτει ότι* $h_4^3 = \frac{3}{5}$ *και επομένως θα ισχύει ότι* $h_4^{C_1} = \frac{2}{5}$ *(δες πόρισμα 332). Τελικά θα έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} P^{2n} = P^{2\infty} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2/15 & \frac{4}{15} & 3/5 & 0 \end{bmatrix}$$

Για να υπολογίσουμε το όριο των περιττών δυνάμεων γράφουμε

$$\lim_{n\to\infty} P^{2n+1} = P^{2\infty+1} = P^{2\infty} \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 & 0 \end{bmatrix}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 381 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και χώρο καταστάσεων $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Οι καταστάσεις $S_1 = \{1,2,3\}$ αποτελούν ένα κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο με περίοδο 2. Η κατάσταση 6 είναι απορροφητική και οι καταστάσεις 4 και 5 είναι μεταβατικές. Η εύρεση των οριακών πιθανοτήτων

$$(P^{\infty})_{ij} \quad i = 4,5, \quad j = 1,2,3$$

είναι δυσκολότερη υπόθεση από ότι όλων των άλλων. Για να τις υπολογίσουμε θα εργαστούμε στον P^2 ο οποίος είναι

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{15} & \frac{1}{15} & 0 & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{30} & \frac{2}{15} & 0 & \frac{1}{15} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και θα θεωρήσουμε μια νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα Y_n με πίνακα μετάβασης τον P^2. Υπολογίζουμε τις πιθανότητες $h_4^{C_0}$ και $h_5^{C_0}$ όπου $C_0 = \{1,2\}$ και έχουμε ότι $h_4^{C_0} = h_5^{C_0} = \frac{3}{7}$. Ο μέσος χρόνος επαναφοράς των καταστάσεων 1 και 2 (στην αλυσίδα Y_n) είναι $m_1 = m_2 = 2$ το οποίο το βρίσκουμε υπολογίζοντας την στάσιμη κατανομή. Αρα τα όρια

$$\lim_{n\to\infty} (P^{nd})_{41} = \frac{h_4^{C_0}}{m_1} = \frac{3}{14} = \lim_{n\to\infty} (P^{nd})_{42} = \lim_{n\to\infty} (P^{nd})_{51} = \lim_{n\to\infty} (P^{nd})_{52}$$

Παρομοίως υπολογίζουμε τις οριακές πιθανότητες

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(P_{43}^{nd}\right) &= \frac{h_4^{\{3\}}}{m_3} = \frac{4}{14} \\
\lim_{n\to\infty}\left(P_{53}^{nd}\right) &= \frac{h_5^{\{3\}}}{m_3} = \frac{1}{7} \\
\lim_{n\to\infty}\left(P_{46}^{nd}\right) &= \frac{h_4^{\{6\}}}{m_6} = \frac{4}{14} \\
\lim_{n\to\infty}\left(P_{56}^{nd}\right) &= \frac{h_5^{\{6\}}}{m_6} = \frac{3}{7}
\end{aligned}$$

αφού παρατηρήσουμε ότι $m_3 = m_6 = 1$ *στην αλυσίδα* Y_n. *Παρομοίως υπολογίζουμε όλες τις οριακές πιθανότητες της αλυσίδας* Y_n *κατασκευάζοντας έτσι τον οριακό πίνακα* $P^{\infty 2}$ *ο οποίος είναι*

$$P^{\infty 2} = \begin{pmatrix}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{3}{14} & \frac{3}{14} & \frac{2}{7} & 0 & 0 & \frac{2}{7} \\
\frac{3}{14} & \frac{3}{14} & \frac{1}{7} & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

Για να βρούμε τις οριακές πιθανότητες $\left(\lim_{n\to\infty} P^{n2+1}\right)_{ij}$ *αρκεί να πολλαπλασιάσουμε τον* $P^{\infty 2}$ *με τον* P *λαμβάνοντας έτσι τον*

$$P^{\infty 2+1} = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 & 0 & \frac{2}{7} \\
\frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{3}{7} & 0 & 0 & \frac{3}{7} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

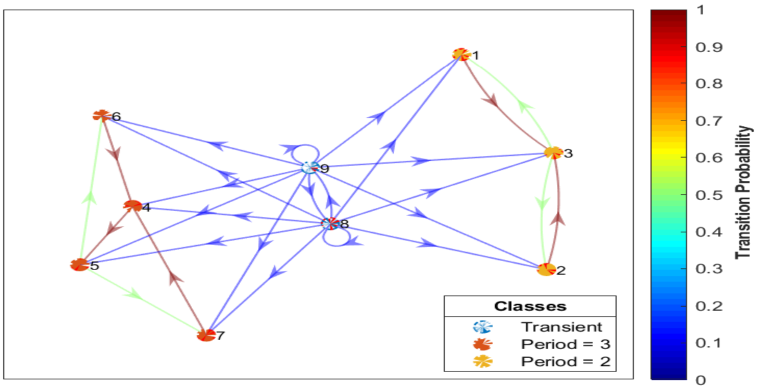
$\square$

Στην συνέχεια θα δούμε ένα πιο περίπλοκο παράδειγμα με δυο περιοδικές υποαλυσίδες και δυο μεταβατικές καταστάσεις.

Παραδειγμα 382 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Διαπιστώνουμε ότι έχουμε δυο κλειστά σύνολα, τα $S_1 = \{1, 2, 3\}$ *και* $S_2 = \{4, 5, 6, 7\}$ *τα οποία είναι περιοδικά με περίοδο 2 και 3 αντίστοιχα. Οι καταστάσεις 8 και 9 είναι μεταβατικές. Η περίπτωση της αλυσίδας αυτής είναι αρκετά πιο περίπλοκη μιας και εμφανίζονται δυο περιοδικές υποαλυσίδες με διαφορετική περίοδο και 2 μεταβατικές που συνεπικοινωνούν.*



Σχήμα 8.14: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος 382

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα η αλυσίδα να απορροφηθεί στο σύνολο S_1. *Εφόσον τα σύνολα* S_1 *και* S_2 *είναι κλειστά μπορούμε να τα «συρρικνώσουμε» σε δυο μονοσύνολα τα οποία θα αποτελούνται από μια απορροφητική κατάσταση το καθένα. Έτσι λοιπόν έχουμε τον παρακάτω «ισοδύναμο» πίνακα μετάβασης*

$$\hat{P} = \begin{array}{c|cccc} & \mathbf{S_1} & \mathbf{S_2} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \\ \hline \mathbf{S_1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{S_2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{8} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \mathbf{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{array}$$

Βλέπουμε ότι στην θέση $\hat{P}_{31}$ έχουμε βάλει την συνολική πιθανότητα η αλυσίδα να μεταβεί σε ένα βήμα από την κατάσταση 8 στο κλειστό σύνολο S_1 ενώ στην θέση $\hat{P}_{32}$ την συνολική πιθανότητα από την 8 στην S_2 σε ένα βήμα. Παρόμοια, για την κατάσταση 9. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $h_i^{S_1}$ και $h_i^{S_2}$. Για να δει κανείς αυτή την ισοδυναμία αρκεί να εφαρμόσει το θεώρημα 316 τόσο στην αρχική αλυσίδα όσο και στην αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον $\hat{P}$. Συρρικνώνοντας τα κλειστά σύνολα μειώνουμε αρκετά το πλήθος των πράξεων.
Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της αρχικής αλυσίδας που βρίσκονται κάτω από τα κλειστά σύνολα S_1 και S_2 θα εφαρμόσουμε το ίδιο σκεπτικό συρρικνώνοντας αρχικά το κλειστό σύνολο S_2 και αφήνοντας το S_1 ως έχει. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μετάβασης

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες που βρίσκονται κάτω από το σύνολο S_1, (δηλαδή τις P_{ij}^n για $i = 8, 9$ και $j = 1, 2, 3$) εφαρμόζοντας το σκεπτικό του παραδείγματος 381 χρησιμοποιώντας τον πίνακα A. Σημειώστε ότι η δυσκολία δημιουργείται λόγω του ότι τα περιοδικά σύνολα S_1 και S_2 έχουν διαφορετική περίοδο και επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε ταυτόχρονα τις οριακές πιθανότητες που βρίσκονται κάτω από τα σύνολα S_1 και S_2. Εναλλακτικά, αντί να συρρικνώσουμε το S_2 μπορούμε να θέσουμε προσωρινά τυχαίους αριθμούς (π.χ. μηδέν) ως οριακές πιθανότητες κάτω από το S_2 και να συνεχίσουμε με τους υπολογισμούς μας. Αυτό δεν επιδρά καθόλου στις πράξεις μιας και οι αριθμοί αυτοί θα πολλαπλασιαστούν με μηδενικά όπως θα εξηγήσουμε στην συνέχεια.
Για να δικαιολογήσουμε την «ισοδυναμία» των πινάκων P και A αρκεί να διαπιστώσουμε ότι τα στοιχεία των πινάκων P^n και A^n που μας ενδιαφέρουν είναι ίσα. Θα συγκρίνουμε τα στοιχεία $(P^n)_{ij}$ με $i = 8, 9$ και $j = 1, 2, 3$ με τα στοιχεία $(A^n)_{ij}$ με $i = 5, 6$ και $j = 1, 2, 3$. Σημειώστε ότι τα στοιχεία $(P^n)_{ij}$ με $i = 4, 5, 6, 7$ και $j = 1, 2, 3$ είναι ίσα με το μηδέν διότι αναπαριστούν την πιθανότητα η αλυσίδα να μεταβεί από μια κατάσταση του συνόλου S_2 σε μια κατάσταση του συνόλου S_1 σε n-βήματα. Το ίδιο συμβαίνει και με τα στοιχεία $(A^n)_{4j}$ τα οποία είναι μηδέν εκτός από την περίπτωση $j = 4$ όπου είναι ίσο με 1 διότι η κατάσταση 4 στον πίνακα A είναι απορροφητική. Με την παρατήρηση αυτή βλέπουμε ότι το στοιχείο $(P^2)_{81}$ δεν εξαρτάται καθόλου από τις τιμές των P_{8j} με $j = 4, 5, 6, 7$ μιας και αυτά τα στοιχεία θα πολλαπλασιαστούν με μηδενικά. Παρόμοια, το στοιχείο $(A^2)_{51}$ δεν εξαρτάται καθόλου από το στοιχείο A_{54}. Αρα, $(P^2)_{81} = (A^2)_{51}$. Επαγωγικά έχουμε ότι $(P^n)_{81} = (A^n)_{51}$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Παρομοίως για τα υπόλοιπα στοιχεία.
Στην συνέχεια, συρρικνώνουμε το κλειστό σύνολο S_1 και αφήνουμε το S_2 ως έχει κατασκευάζοντας έτσι τον παρακάτω πίνακα μετάβασης

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{3}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις οριακές πιθανότητες κάτω από το σύνολο S_2 (δηλαδή τις P_{ij}^n για $i = 8, 9$ και $j = 4, 5, 6, 7$) όπως το παράδειγμα 381 χρησιμοποιώντας τον πίνακα B. Οι υπόλοιπες οριακές πιθανότητες υπολογίζονται κατά τα γνωστά. □

Παραδειγμα 383 *Θα εξετάσουμε την αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το $S = \{0, 1, 2, \cdots, \}$ και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι αποτελείται από ένα κλειστό σύνολο επαναληπτικών και απεριοδικών καταστάσεων, το $A = \{0, 1\}$. Οι καταστάσεις $T = \{2, 3, \cdots, \}$ συνεπικοινωνούν και είναι μεταβατικές. Σκοπός μας είναι να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της αλυσίδας. Οι οριακές πιθανότητες που βρίσκονται στις στήλες $2, 3, \cdots$, είναι μηδέν διότι οι αντίστοιχες καταστάσεις είναι μεταβατικές. Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες $P_{00}^\infty, P_{01}^\infty, P_{10}^\infty, P_{11}^\infty$ θα εργαστούμε στον πεπερασμένο υποπίνακα που προκύπτει από τον αρχικό διαγράφοντας τις γραμμές και στήλες που ανήκουν οι καταστάσεις $2, 3, \cdots,$. Υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή η οποία είναι η $\pi_0 = 0.4$ και $\pi_1 = 0.6$. Άρα

$$P_{00}^\infty = P_{10}^\infty = 0.4$$
$$P_{01}^\infty = P_{11}^\infty = 0.6$$

Επομένως μένει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες P_{i0}^∞ και P_{i1}^∞ για $i = 2, 3, \cdots$, Θα έχουμε λοιπόν

$$P_{i0}^\infty = \frac{h_i^{\{0\}}}{m_0}, \quad i = 2, 3, \cdots,$$
$$P_{i1}^\infty = \frac{h_i^{\{1\}}}{m_1}, \quad i = 2, 3, \cdots,$$

όπου $m_0 = \frac{1}{\pi_0} = \frac{5}{2}$ *και* $m_1 = \frac{1}{\pi_1} = \frac{5}{3}$. *Λόγω της παρατήρησης 317 προκύπτει ότι* $h_i^{\{0\}} = h_i^A$ *και* $h_i^{\{1\}} = h_i^A$ *όπου* $A = \{0, 1\}$.
Αν θεωρήσουμε την ισοδύναμη αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το $\{A, 2, 3, \cdots, \}$ *και πίνακα μετάβασης τον πίνακα μετάβασης του παραδείγματος 327 διαπιστώνουμε ότι*

$$h_i^A = \begin{cases} 1, & \text{όταν } q \geq p \\ \left(\frac{q}{p}\right)^i, & \text{όταν } q < p \end{cases}$$

Τελικά οι οριακές πιθανότητες θα είναι

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{h_2^A}{m_0} & \frac{h_2^A}{m_1} & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{h_3^A}{m_0} & \frac{h_3^A}{m_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση $q < p$ *το άθροισμα γραμμών είναι αυστηρά μικρότερο της μονάδας, εκτός από τις πρώτες δυο γραμμές που είναι ίσο με 1. Ας θυμηθούμε ότι ο πίνακας με τις οριακές πιθανότητες είναι στοχαστικός αν η αλυσίδα είναι πεπερασμένη (δείτε πρόταση 352). Δεν συμβαίνει το ίδιο όμως για αλυσίδες με άπειρες καταστάσεις και ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το παραπάνω όταν* $q < p$. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 384 (Γενικευμένος αντίστροφος και οριακές πιθανότητες) *Έστω* P *ένας πίνακας μετάβασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Ο πίνακας* $A = I - P$ *δεν είναι αντιστρέψιμος αφού έχει ως ιδιοτιμή το μηδέν. Παρόλα αυτά υπάρχει ο Drazin γενικευμένος αντίστροφος του ο οποίος συμβολίζεται με* A^D. *Ο αντίστροφος αυτός έχει σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό οριακών πιθανοτήτων (δες [67]). Όπως είδαμε στην παρατήρηση ;; ένας τρόπος υπολογισμού του αντιστρόφου αυτού είναι να υπολογίσει κανείς τον* A^n *και στην συνέχεια να αντικαταστήσει το* n *με το* -1. □

8.15 Μαρκοβιανές Αλυσίδες και Martingales

Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, \cdots, d\}$ και έστω ότι ικανοποιεί την σχέση

$$\sum_{j \in S} j P_{ij} = i, \quad i = 0, 1, \cdots, d \tag{8.36}$$

Χρησιμοποιώντας την Μαρκοβιανή ιδιότητα και την σχέση 8.36 έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}(X_{n+1}|X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) \\
= & \sum_{j\in S} jP(X_{n+1} = j|X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) \\
= & \sum_{j\in S} jP(X_{n+1} = j|X_n = i) \\
= & \sum_{j\in S} jP_{ij} \\
= & \; i
\end{aligned}
$$

Κάθε στοχαστική διαδικασία X_n η οποία ικανοποιεί την σχέση $\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n = i) = X_n = i$ ονομάζεται `martingale`. Μια διαδικασία martingale δεν είναι κατά ανάγκη Μαρκοβιανή. Περισσότερα για αυτές τις στοχαστικές διαδικασίες μπορεί να δει κανείς στο βιβλίο [30].

8.15.1 Ιδιότητες μιας Μαρκοβιανής martingale αλυσίδας

Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, \cdots, d\}$ η οποία ικανοποιεί την σχέση 8.36.

• Θα αποδείξουμε ότι οι καταστάσεις 0 και d είναι απορροφητικές. Ισχύει ότι

$$P(0,1) + 2P(0,2) + \cdots + dP(0,d) = 0$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι

$$P(0,1) = P(0,2) = \cdots = P(0,d) = 0$$

δηλαδή η κατάσταση 0 είναι απορροφητική μιας και η πιθανότητα η αλυσίδα να μεταβεί οπουδήποτε αλλού είναι μηδέν.

Παρόμοια, από την σχέση

$$P(d,1) + 2P(d,2) + \cdots + dP(d,d) = d$$

και από την προφανή σχέση

$$dP(d,0) + \cdots + dP(d,d) = d$$

προκύπτει ότι

$$dP(d,0) + (d-1)P(d,1) + \cdots + P(d,d-1) = 0$$

'ρα, αναγκαστικά $P(d,0) = P(d,1) = \cdots = P(d,d-1) = 0$ το οποίο σημαίνει ότι η κατάσταση d είναι απορροφητική.

• Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, \cdots, d\}$ για την οποία ισχύει η 8.36. Αν οι μοναδικές απορροφητικές καταστάσεις είναι οι 0 και d τότε θα αποδείξουμε ότι όλες οι υπόλοιπες καταστάσεις είναι μεταβατικές και επικοινωνούν με την κατάσταση μηδέν. Από την σχέση 8.36 έχουμε ότι

$$P(1,1) + 2P(1,2) + \cdots + dP(1,d) = 1$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$P(1,0) + \cdots + P(1,d) = 1$$

και επομένως

$$P(1,0) = P(1,2) + \cdots + (d-1)P(1,d)$$

Αν ίσχυε ότι $P(1,2) = \cdots = P(1,d) = 0$ τότε και $P(1,0) = 0$ άρα η κατάσταση 1 είναι απορροφητική το οποίο είναι άτοπο με την αρχική μας υπόθεση. Αυτό σημαίνει ότι αναγκαστικά $P(1,0) > 0$, δηλαδή $1 \to 0$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν με την μηδέν. Αυτό με την σειρά του σημαίνει ότι είναι μεταβατικές αφού υπάρχει θετική πιθανότητα η αλυσίδα να απορροφηθεί στην μηδέν ξεκινώντας από οποιαδήποτε κατάσταση $i = 1, 2, \cdots, d$.

• Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, \cdots, d\}$. Υποθέτουμε ότι ισχύει η 8.36 και ότι οι μοναδικές απορροφητικές καταστάσεις είναι οι 0 και d. Θα αποδείξουμε ότι

$$f_{id} = h_i^d = \frac{i}{d}, \quad f_{i0} = h_i^0 = \frac{d-i}{d}, \quad i = 0, 1, \cdots, d$$

Από την σχέση 258 έχουμε ότι

$$P_{i,0}^n = \sum_{k=1}^{n} f_k(i|0)$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $P_{00} = 1$. Αυτό επίσης σημαίνει ότι

$$P_{i,0}^n \to f_{i0} \quad \text{καθώς } n \to \infty$$

’ρα

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n|X_0 = i) &= \sum_{j \in S} jP(X_n = j|X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in S} jP_{ij}^n \\ &= \sum_{j=1}^{d-1} jP_{ij}^n + dP_{id}^n \end{aligned}$$

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι οι καταστάσεις $1, 2, \cdots, d-1$ είναι μεταβατικές συνεπώς λαμβάνοντας το όριο καθώς $n \to \infty$ προκύπτει ότι

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}(X_n|X_0 = i) = df_{id}$$

Θέτοντας $D = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ d \end{pmatrix}$ έχουμε ότι η σχέση 8.36 ισοδυναμεί με την $P \cdot D = D$. Αρα επίσης ισχύει ότι $P^n D = D$ ή αλλιώς $\sum_{j=0}^{d} j P_{ij}^n = i$. Αρα

$$\mathbb{E}(X_n | X_0 = i) = \sum_{j=0}^{d} j P(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{j=0}^{d} j P_{ij}^n = i$$

και επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n | X_0 = i) = i$$

Όμως $f_{id} + f_{i0} = 1$ (δες 332) άρα χρησιμοποιώντας τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$f_{id} = \frac{i}{d}, \quad f_{i0} = \frac{d-i}{d}, \quad i = 0, 1, \cdots, d$$

Παραδειγμα 385 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, 3\}$ και με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ικανοποιεί την σχέση 8.36. Επομένως, οι καταστάσεις 0 και 3 είναι απορροφητικές και είναι οι μοναδικές απορροφητικές. Αρα οι καταστάσεις 1 και 2 είναι μεταβατικές καταστάσεις και μάλιστα

$$\begin{aligned} f_{10} &= \tfrac{3-1}{3} = \tfrac{2}{3}, & f_{20} &= \tfrac{3-2}{3} = \tfrac{1}{3} \\ f_{13} &= \tfrac{1}{3}, & f_{23} &= \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

□

8.16 Χρονικά Αναστρέψιμες Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Έστω μια Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n. Θα εξετάσουμε την χρονικά ανάστροφη στοχαστική διαδικασία X_{N-n} για κάποιο $N \geq 1$.

Θεωρημα 386 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον P και αρχική κατανομή την στάσιμη κατανομή π η οποία είναι τέτοια ώστε $\pi_i > 0$ για κάθε*

$i \in S$ όπου S ο χώρος καταστάσεων. Τότε, για κάθε $N \geq 1$ η χρονικά ανάστροφη στοχαστική διαδικασία $(X_N, X_{N-1}, \cdots, X_0)$ είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον $\hat{P}$ και στάσιμη κατανομή την π όπου $\hat{P}$ είναι τέτοιος ώστε

$$\hat{P}_{ij} = \frac{\pi_j}{\pi_i} P_{ji} \tag{8.37}$$

Επιπλέον, αν η X_n είναι αδιαχώριστη το ίδιο συμβαίνει και με την X_{N-n}.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ο πίνακας $\hat{P}$ είναι στοχαστικός διότι

$$\sum_j \hat{P}_{ij} = \frac{1}{\pi_i} \sum_j \pi_j P_{ji} = \frac{\pi_i}{\pi_i} = 1$$

Επίσης,

$$\sum_i \pi_i \hat{P}_{ij} = \sum_i \pi_j P_{ji} = \pi_j \sum_i P_{ji} = \pi_j$$

Τέλος

$$\begin{aligned} P(X_N = i_N, \cdots, X_0 = i_0) &= \pi_{i_0} \cdot P_{i_0,i_1} \cdots P_{i_{N-1},i_N} \\ &= \hat{P}_{i_1,i_0} \pi_{i_1} \cdots P_{i_{N-1},i_N} \\ &= \hat{P}_{i_1,i_0} \hat{P}_{i_2,i_1} \pi_{i_2} \cdots \\ &= \pi_N \hat{P}_{i_N,i_{N-1}} \cdots \hat{P}_{i_1,i_0} \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τις 8.37. Τα παραπάνω σημαίνουν ότι η χρονικά ανάστροφη στοχαστική διαδικασία είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον $\hat{P}$ και στάσιμη κατανομή την π.

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αν οποιεσδήποτε δυο καταστάσεις i, j συνεπικοινωνούν στην αρχική Μαρκοβιανή αλυσίδα τότε το ίδιο συμβαίνει και με την χρονικά ανάστροφη αλυσίδα.

Έστω $i \to j$. Τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα μονοπάτι τέτοιο ώστε $i = i_0 \to i_1 \to \cdots \to i_n = j$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} 0 < P_{i_0,i_1} \cdots P_{i_{N-1},i_N} &= \frac{1}{\pi_{i_0}} \pi_{i_0} P_{i_0,i_1} \cdots P_{i_{N-1},i_N} \\ &= \frac{1}{\pi_{i_0}} \hat{P}_{i_1,i_0} \cdots \hat{P}_{i_n,i_{n-1}} \pi_{i_n} \end{aligned}$$

Δηλαδή $\hat{P}_{i_1,i_0} \cdots \hat{P}_{i_n,i_{n-1}} > 0$ άρα $j \to i$ στην χρονικά ανάστροφη αλυσίδα. Παρομοίως, ξεκινώντας από την υπόθεση ότι $j \to i$ στην X_n αποδεικνύουμε ότι $i \to j$ στην χρονικά ανάστροφη. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 387 *Έστω X_n μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με μοναδική στάσιμη κατανομή την π. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα*

(i) *για κάθε* $n \geq 1$ *και* $i_0, \cdots, i_n \in S$ *όπου* S *ο χώρος καταστάσεων ισχύει ότι*

$$P(X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) = P(X_0 = i_n, \cdots, X_n = i_0) \tag{8.38}$$

(ii) *Η αλυσίδα είναι τέτοια ώστε* $P(X_0 = i) = \pi_i$ *για κάθε* $i \in S$ *και επίσης*

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}, \qquad \text{για κάθε } i, j \in S \tag{8.39}$$

Αποδειξη. Έστω ότι ισχύει το (i). Για $n = 1$ έχουμε ότι

$$P(X_0 = i, X_1 = j) = P(X_0 = j, X_1 = i)$$

Όμως

$$\sum_j P(X_0 = i, X_1 = j) = P(X_0 = i) = \lambda_i$$

και

$$\sum_j P(X_0 = j, X_1 = i) = P(X_1 = i) = (\lambda P)_i$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lambda P = \lambda$ και επομένως η $\lambda = \pi$.
Επίσης,

$$P(X_0 = i, X_1 = j) = \pi_i P_{ij} = P(X_0 = j, X_1 = i) = \pi_j P_{ji}$$

Στην συνέχεια θα υποθέσουμε ότι ισχύει η (ii) και θα αποδείξουμε την (i). Ισχύει ότι

$$P(X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) = \pi_{i_0} P_{i_0,i_1} \cdots P_{i_{n-1},i_n}$$

'ρα

$$\begin{aligned} \pi_{i_0} P_{i_0,i_1} \cdots P_{i_{n-1},i_n} &= P_{i_0,i_1} \pi_{i_1} \cdots P_{i_{n-1},i_n} \\ &= \pi_{i_n} P_{i_n,i_{n-1}} \cdots P_{i_0,i_1} \\ &= P(X_0 = i_n, \cdots, X_n = i_0) \end{aligned}$$

□

Ορισμος 388 *Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα που ικανοποιεί την εξίσωση 8.38 ονομάζεται* **αναστρέψιμη**. *Οι εξισώσεις 8.39 ονομάζονται* **ανάστροφες εξισώσεις ισορροπίας**.

Θεωρημα 389 *Αν* λ *και* P *ικανοποιούν τις εξισώσεις 8.39 δηλαδή*

$$\lambda_i P_{ij} = \lambda_j P_{ji}, \quad i, j \in S$$

τότε η λ *είναι τέτοια ώστε* $\lambda P = \lambda$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αθροίζουμε για $j \in S$ και έχουμε

$$\sum_{j\in S} \lambda_i P_{ij} = \sum_{j\in S} \lambda_j P_{ji}$$

επομένως

$$\lambda_i = \sum_{j\in S} \lambda_j P_{ji}$$

ή αλλιώς

$$\lambda = \lambda \cdot P$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 390 (ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΓΕΝΝΗΣΕΩΣ - ΘΑΝΑΤΟΥ) *Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες των οποίων οι καταστάσεις είναι τοποθετημένες με τέτοιο τρόπο ώστε οι μεταβάσεις να είναι δυνατό να συμβούν μόνο από μια κατάσταση στην ίδια ή σε γειτονική της ονομάζονται* **διαδικασίες γεννήσεως - θανάτου**. *Η εφαρμογή του θεωρήματος 389 (δηλαδή η επίλυση των ανάστροφων εξισώσεων ισορροπίας 8.39) είναι εφικτή σε όλες τις διαδικασίες γεννήσεως - θανάτου και είναι ιδιαίτερα βολικό στον υπολογισμό της στάσιμης κατανομής. Επομένως κάθε διαδικασία γεννήσεως - θανάτου με αρχική κατανομή την στάσιμη είναι χρονικά αναστρέψιμη (δες 387). Στην συνέχεια θα δώσουμε τρία κλασικά παραδείγματα διαδικασιών γεννήσεως - θανάτου.*

• **Τυχαίος Περίπατος με Ανακλαστικά Εμπόδια**. *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, \cdots, m\}$ και πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 1-b & b & 0 & \cdots & 0 \\ 1-b & 0 & b & 0 & \cdots \\ 0 & 1-b & 0 & b & \cdots \\ \vdots & 0 & 1-b & 0 & b \\ 0 & \cdots & 0 & 1-b & b \end{pmatrix}$$

όπου $b \in (0, 1)$. Η συγκεκριμένη αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και απεριοδική και λόγω του ότι είναι πεπερασμένη είναι και θετικά επαναληπτική (δες 350). Αυτό σημαίνει ότι έχει μοναδική στάσιμη κατανομή. Για να την υπολογίσουμε θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 389 λύνοντας τις ανάστροφες εξισώσεις ισορροπίας. Διαλέγοντας $j = i + 1$ οι ανάστροφες εξισώσεις ισορροπίας γίνονται

$$\pi_i b = \pi_{i+1}(1-b), \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

ή αλλιώς

$$\pi_{i+1} = \rho \pi_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m-1$$

όπου $\rho = \frac{b}{1-b}$. *Αναδρομικά προκύπτει ότι*

$$\pi_i = \rho^{i-1}\pi_1, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

Απαιτώντας $\sum \pi_i = 1$ *καταλήγουμε στο ότι*

$$\pi_i = \frac{\rho^{i-1}}{1 + \rho + \cdots + \rho^{m-1}}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

Σύμφωνα με το θεώρημα 389 αυτή είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή.

• Θεωρια Ουρων. *Έστω ότι πακέτα φθάνουν σε ένα κόμβο δικτύου επικοινωνίας όπου αποθηκεύονται στη μνήμη προσωρινά και έπειτα αποστέλλονται. Η χωρητικότητα της μνήμης είναι* m. *Εάν* m *πακέτα είναι ήδη στη μνήμη τα καινούρια που έρχονται απορρίπτονται. Σε κάθε χρονική περίοδο θα συμβαίνει κάτι από τα παρακάτω: ένα καινούριο πακέτο φθάνει με πιθανότητα* $b > 0$. *Ένα υπάρχον πακέτο ολοκληρώνει την αποστολή του με πιθανότητα* $d > 0$ *όταν υπάρχει τουλάχιστον ένα πακέτο στην μνήμη και με πιθανότητα 0 διαφορετικά. Κανένα καινούριο πακέτο δεν φθάνει και κανένα υπάρχον πακέτο δεν ολοκληρώνει την αποστολή του το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα* $1 - b - d$ *εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα πακέτο στην μνήμη και με πιθανότητα* $1 - b$ *διαφορετικά.*

Κατασκευάζουμε μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων

$$S = \{0, 1, \cdots, m\}$$

και πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1-b & b & 0 & \cdots & 0 \\ d & 1-b-d & b & \cdots & 0 \\ 0 & d & 1-b-d & b & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d & 1-d \end{pmatrix}$$

Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, απεριοδική και θετικά επαναληπτική επομένως έχει μοναδική στάσιμη κατανομή. Επειδή είναι μια αλυσίδα γεννήσεως - θανάτου μπορούμε να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή εφαρμόζοντας το θεώρημα 389. Έτσι, οι ανάστροφες εξισώσεις ισορροπίας γίνονται

$$\pi_i b = \pi_{i+1} d, \quad i = 0, 1, \cdots, m-1$$

Θέτοντας $\rho = \frac{b}{d}$ *προκύπτει ότι*

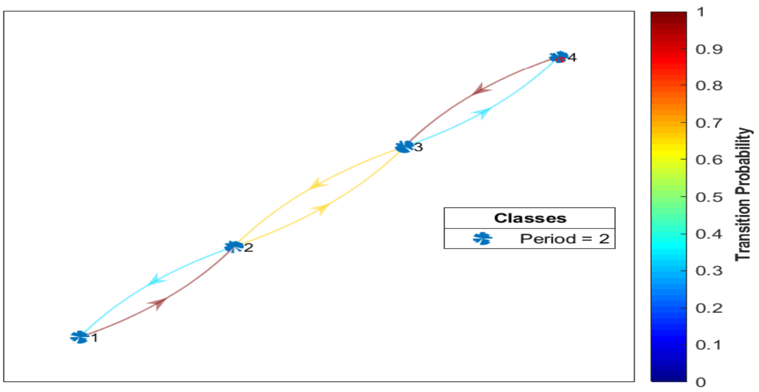
$$\pi_i = \rho^i \pi_0, \quad i = 0, 1, \cdots, m$$

Απαιτώντας $\sum \pi_i = 1$ *καταλήγουμε στην μοναδική στάσιμη κατανομή η οποία είναι*

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}}\rho^i, & \text{όταν } \rho \neq 1 \\ \frac{1}{m+1}, & \text{όταν } \rho = 1 \end{cases} \qquad i = 0, 1, \cdots, m$$

• Το μοντελο διαχυσης του Ehrenfest. *Έστω ότι έχουμε δυο δοχεία τα οποία περιέχουν συνολικά n μόρια. Κάθε φορά επιλέγουμε τυχαία ένα από τα n μόρια (το οποίο βρίσκεται είτε στο δοχείο A είτε στο B) και το μεταφέρουμε στο άλλο δοχείο. Το πείραμα αυτό μοντελοποιεί την κίνηση ενός υγρού σε δυο όμοια συγκοινωνούντα δοχεία. Θα μελετήσουμε το πείραμα αυτό κατασκευάζοντας μια Μαρκοβιανή αλυσίδα. Θα θεωρήσουμε ότι $n = 3$ και θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_k η τιμή της οποίας αναπαριστά το πλήθος των μορίων στο δοχείο A μετά από την $k^{οστή}$ μεταφορά μορίου. Δηλαδή $X_k = i$ όπου $i = 0, 1, 2, 3$. Προφανώς, για να μαντέψουμε σε ποια κατάσταση θα βρεθεί η ακολουθία στο αμέσως επόμενο βήμα αρκεί να γνωρίζουμε σε ποια κατάσταση βρίσκεται στο προηγούμενο βήμα και όχι νωρίτερα. Αρα αυτή η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων το $S = \{0, 1, 2, 3\}$ και πίνακα μετάβασης τον*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Σχήμα 8.15: Το γράφημα της αλυσίδας του μοντέλου διάχυσης του Ehrenfest για $n = 3$

Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και περιοδική με περίοδο 2. Τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 0 είναι τα $C_0 = \{0, 2\}$ και $C_1 = \{1, 3\}$. Θα υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες. Εφόσον είναι αδιαχώριστη θα υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή η οποία είναι $\pi = (\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8})$ οπότε σύμφωνα με το πόρισμα 368 οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς είναι $m_0 = 8 = m_3$ και $m_1 = \frac{8}{3} = m_2$.
Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 348.

Έχουμε ότι

$$P^{\infty 2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P^{\infty 2+1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Αυτό σημαίνει ότι αν αφήσουμε το πείραμα να «τρέξει» πολλές φορές και το σταματήσουμε τυχαία σε κάποιο σημείο, δηλαδή με πιθανότητα $1/2$ *μετά από άρτιες επαναλήψεις και με πιθανότητα* $1/2$ *μετά από περιττές επαναλήψεις, τότε η πιθανότητα το δοχείο A να περιέχει 1 μόριο είναι* $3/8$*, να περιέχει 2 μόρια είναι επίσης* $3/8$ *ενώ η πιθανότητα να περιέχει 0 μόρια είναι* $1/8$ *το ίδιο όπως και 3 μόρια. Δηλαδή, όταν αφήσουμε το πείραμα να τρέξει πολλές φορές η μεγαλύτερη πιθανότητα είναι τα μόρια να είναι μοιρασμένα ανεξάρτητα από το πως ήταν τοποθετημένα στην αρχή. Οι πιθανότητες αυτές εκφράζονται από την στάσιμη κατανομή (δες 372).*
Όταν έχουμε m *μόρια ο πίνακας μετάβασης γίνεται*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 & \frac{m-1}{m} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{m} & 0 & \frac{m-2}{m} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{i}{m} & 0 & \frac{m-i}{m} & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή λύνοντας τις ανάστροφες εξισώσεις ισορροπίας οι οποίες στην προκειμένη περίπτωση γίνονται

$$\pi_i = \frac{m-(i-1)}{i}\pi_{i-1}, \quad i = 1, \cdots, m$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\pi_i = \binom{m}{i}\pi_0, \quad i = 1, \cdots, m$$

Για να είναι στάσιμη κατανομή θα πρέπει $\sum \pi_i = 1$ *από το οποίο προκύπτει ότι*

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}} = \frac{1}{2^m}$$

αφού $2^m = (1+1)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}$ *(δες ;;).*
Τελικά η μοναδική στάσιμη κατανομή είναι η

$$\pi_j = \binom{m}{j}\left(\frac{1}{2}\right)^m, \quad j = 0, 1, \cdots, m$$

Αν το πλήθος των μορίων είναι άρτιο τότε η ποσότητα π_j μεγιστοποιείται όταν $j = \frac{m}{2}$ ενώ όταν είναι περιττός για $j = [\frac{m}{2}]$ και $j = [\frac{m}{2}] + 1$. $\square$

8.17 Μελέτη Μαρκοβιανής αλυσίδας

• (ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ) Το πρώτο που θα κάνουμε είναι να αναλύσουμε τον χώρο καταστάσεων σε μεταβατικές καταστάσεις και κλειστά και αδιαχώριστα σύνολα επαναληπτικών καταστάσεων, έστω τα $S_1, S_2, \cdots$, (δες θεώρημα 281). Εδώ μπορεί να είναι χρήσιμα τα θεωρήματα 270 και 271, ειδικά όταν πρόκειται για αλυσίδα με άπειρες καταστάσεις. Μπορούμε να αναδιατάξουμε τις καταστάσεις έτσι ώστε να είναι δίπλα-δίπλα οι καταστάσεις που ανήκουν στο ίδιο κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο επαναληπτικών. Αφήνουμε τελευταίες όλες τις μεταβατικές καταστάσεις. Με αυτό τον τρόπο θα σχηματιστούν block στον (αναδιατεταγμένο) πίνακα μετάβασης και αυτό θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε διάφορους υπολογισμούς.

• (ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ ΚΑΙ ΜΕΣΟΙ ΧΡΟΝΟΙ ΑΠΟΡΡΟΦΗΣΗΣ) Στο σημείο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες απορρόφησης $h_j^{S_a}$ όπου j μεταβατική κατάσταση και S_a ένα από τα κλειστά και αδιαχώριστα σύνολα επαναληπτικών (δες θεώρημα 316). Σημειώστε ότι αν $k \in S_a$ τότε $h_j^k = h_j^{S_a}$ (δες παρατήρηση 317). Παρόμοια, μπορούμε να υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους απορρόφησης $k_i^{S_1 \cup S_2 \cup \cdots}$ (δες θεώρημα 320).

• (ΠΕΡΙΟΔΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΝ) Στην συνέχεια μελετούμε την περιοδικότητα των καταστάσεων.

Για τις μεταβατικές καταστάσεις μπορούμε να δοκιμάσουμε να βρούμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη του συνόλου $\{n \in \mathbb{N} : f_n(i|i)\}$ όπου i μεταβατική κατάσταση (δες λήμμα 299) όπως επίσης και τα σύνολα κυκλικής μετάβασης.

Στα κλειστά σύνολα επαναληπτικών καταστάσεων θα είναι χρήσιμο να κατασκευάσουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης και με τον τρόπο αυτό θα υπολογίσουμε την περίοδο των καταστάσεων σε κάθε τέτοιο σύνολο.

• (ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΣΩΝ ΧΡΟΝΩΝ ΕΠΑΝΑΦΟΡΑΣ) Θεωρούμε τις Μαρκοβιανές αλυσίδες (υποαλυσίδες) οι οποίες έχουν ως πίνακα μετάβασης τον πίνακα που προκύπτει αν διαγράψουμε γραμμές και στήλες καταστάσεων που δεν ανήκουν στο S_a. Υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή σε κάθε τέτοια υποαλυσίδα (αν υπάρχει) και με αυτό τον τρόπο έχουμε υπολογίσει τους μέσους χρόνους επαναφοράς (δες πόρισμα 368). Στην περίπτωση που πρόκειται για αλυσίδα γεννήσεως - θανάτου ένας βολικός τρόπος υπολογισμού της στάσιμης κατανομής είναι μέσω των ανάστροφων εξισώσεων ισορροπίας (δες παράδειγμα 390). Αν δεν υπάρχει λύση των στάσιμων εξισώσεων τότε είτε η υποαλυσίδα είναι μηδενικά επαναληπτική οπότε οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς είναι $m_j = \infty$ για $j \in S_a$ είτε είναι μεταβατική.

• (ΕΥΡΕΣΗ ΟΡΙΑΚΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ) Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες.

Οι στήλες κάτω από τις μεταβατικές καταστάσεις και κάτω από τις μηδενικά επανα-

ληπτικές καταστάσεις έχουν μηδενικές οριακές πιθανότητες (δες 261).
Σε κάθε υποαλυσίδα επαναληπτικών καταστάσεων μπορούμε να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες αφού έχουμε ήδη υπολογίσει την περίοδο και τους μέσους χρόνους επαναφοράς χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα 346 και 348. Σημειώστε ότι δεν ισχύει πάντοτε $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$.
Οι πιθανότητες της μορφής P_{ij}^n όπου i μεταβατική και $j \in S_a$ με S_a απεριοδική έχουν ως όριο το κλάσμα $\frac{h_i^{S_a}}{m_j}$ όπου $h_i^{S_a}$ είναι η πιθανότητα μετάβασης στο σύνολο S_a ξεκινώντας από την i. Τις $h_i^{S_a}$ τις υπολογίζουμε από το θεώρημα 316.
Αν S_a είναι περιοδική τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα 351 (δες επίσης και ενότητα 8.14.5).
Βολικό επίσης είναι το ενδεχόμενο ο πίνακας μιας υποαλυσίδας να είναι διπλά στοχαστικός (δες 376).

8.18 Παραδείγματα και Ασκήσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 391 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα στο χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2\}$ και πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

Θα υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή $\pi = (\pi_1, \pi_2)$. Θα ικανοποιεί το σύστημα $\pi P = \pi$ καθώς και την εξίσωση κανονικοποίησης $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Η μοναδική λύση των εξισώσεων είναι $\pi_1 = \frac{b}{a+b}$ και $\pi_2 = \frac{a}{a+b}$. Δηλαδή, το όριο

$$\lim_{n\to\infty} P_{i1}^n = \pi_1, i = 1, 2$$

και

$$\lim_{n\to\infty} P_{i2}^n = \pi_2, i = 1, 2$$

το οποίο είναι ήδη γνωστό από προηγούμενη άσκηση. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 392 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με χώρο καταστάσεων $S = \{1, 2, 3\}$ και πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & q \\ q & 0 & p \\ p & q & 0 \end{pmatrix}$$

με $p + q = 1$ και $pq > 0$. Εξετάστε τα όρια $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$. Να εξεταστεί ως προς την περίοδο.

ΛΥΣΗ. Εύκολα βλέπουμε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και πεπερασμένη. Αρα όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές.

Όσον αφορά την περιοδικότητα, υπολογίζουμε τους πίνακες P^2 και P^3 και εύκολα βλέπουμε ότι η αλυσίδα είναι απεριοδική. Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε την περιοδικότητα μέσω των πιθανοτήτων $f_n(1|1)$. Βλέπουμε ότι $f_1(1|1) = 0$, $f_2(1|1) > 0$ διότι μπορεί να ακολουθήσει το μονοπάτι $1 \to 2 \to 1$. Τέλος, $f_3(1|1) > 0$ διότι μπορεί να ακολουθήσει το μονοπάτι $1 \to 2 \to 3 \to 1$.
Ο πίνακας είναι διπλά στοχαστικός επομένως οι οριακές πιθανότητες είναι

$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{1}{3}$$

Οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς είναι $m_i = 3$ για $i = 1, 2, 3$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 393 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων*

$$S = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

και πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & \dots \\ q & 0 & p & \dots \\ q & 0 & 0 & p \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots \end{pmatrix}$$

με $p+q = 1$ και $pq > 0$. Διαπιστώνουμε ότι οι καταστάσεις της αλυσίδας επικοινωνούν μεταξύ τους και άρα η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη. Επίσης είναι απεριοδική αφού $q > 0$. Θα υπολογίσουμε τώρα την

$$f_n(0|0) = P_{01}P_{12}\cdots P_{23}\cdots P_{n-1,0} = p^{n-1}q.$$

Γνωρίζοντας την $f_n(0|0)$ μπορούμε να αποφασίσουμε αν η κατάσταση 0 (άρα και οι υπόλοιπες) είναι επαναληπτική. Πράγματι,

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(0|0) = q\frac{1}{1-p} = 1$$

Επομένως, όλες οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές. Επίσης,

$$m_0 = \sum_{n=1}^{\infty} nf_n(0|0) = \sum_{n=1}^{\infty} nqp^{n-1} = \frac{1}{q}$$

Επομένως όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές. Δείξτε ότι η στάσιμη κατανομή είναι η $\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_n, \cdots)$ με $\pi_k = (1-p)p^k, k = 0, 1, 2, \cdots$ Προκύπτει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_{ik}^n = \pi_k = \frac{1}{m_k}$$

για $k = 0, 1, \cdots$. Αν υποθέσουμε ότι η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση j, πόσες φορές κατά μέσο όρο θα επισκεφτεί την i πριν ξαναγυρίσει στην j; Χρησιμοποιώντας *την παρατήρηση 369 μπορούμε να υπολογίσουμε το μέσο πλήθος επισκέψεων στην κατάσταση i μεταξύ δυο διαδοχικών επισκέψεων στην κατάσταση j, δηλαδή να απαντήσουμε στο προηγούμενο ερώτημα. Αυτό θα είναι ίσο με*

$$\frac{\pi_i}{\pi_j} = p^{i-j}$$

Μια γενίκευση αυτής της Μαρκοβιανής αλυσίδας είναι η αλυσίδα με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & 1-p_0 & 0 & \dots \\ p_1 & 0 & 1-p_1 & \dots \\ p_2 & 0 & 0 & 1-p_2 \\ \vdots & 0 & 0 & \vdots \end{pmatrix}$$

με $0 < p_i < 1$ για $i = 0, 1, 2, \cdots$. Η αλυσίδα είναι πάλι αδιαχώριστη αφού $p_i > 0$ για όλα τα i άρα όλες οι καταστάσεις χαρακτηρίζονται το ίδιο ως προς την επαναληπτικότητα. Επομένως η αλυσίδα θα είναι μεταβατική **αν και μόνο αν** *είναι μεταβατική η κατάσταση 0. Αν η αλυσίδα βρεθεί στην κατάσταση 0 τότε το μόνο πιθανό μονοπάτι στο οποίο δεν ξαναγυρνά είναι το $0 \to 1 \to 2 \to \cdots$. Η πιθανότητα να ακολουθήσει η αλυσίδα αυτό το μονοπάτι είναι $(1-p_0)\cdot(1-p_1)\cdots$. Η πιθανότητα αυτή δηλαδή είναι ίση με την πιθανότητα η αλυσίδα να φύγει από την κατάσταση 0 και να μην επιστρέψει ποτέ. Συνεπώς, αν είναι θετική τότε η κατάσταση 0 είναι μεταβατική ενώ αν είναι μηδέν είναι επαναληπτική. Δηλαδή η αλυσίδα είναι μεταβατική* **αν και μόνο αν**

$$\prod_{i=0}^{\infty}(1-p_i) > 0$$

ή αλλιώς

$$\prod_{i=0}^{\infty}\frac{1}{1-p_i} < \infty$$

Ας εφαρμόσουμε και το θεώρημα 270 για να δούμε αν συμφωνεί με το παραπάνω συμπέρασμα. Διαλέγουμε $s = 0$ και σχηματίζουμε το σύστημα εξισώσεων

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} P_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \cdots, \tag{8.40}$$

Διαπιστώνουμε ότι

$$y_n = \frac{1}{1-p_{n-1}} y_{n-1}$$

επομένως

$$y_n = y_1 \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-p_i}$$

Εφόσον $\frac{1}{1-p_i} > 1$ *έπεται ότι η ακολουθία*

$$x_n = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-p_i}$$

είναι αύξουσα. Αν η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο ∞ *τότε υποχρεωτικά θα πρέπει να διαλέξουμε* $y_1 = 0$ *και τότε η αλυσίδα θα είναι επαναληπτική. Αν όμως η ακολουθία συγκλίνει σε κάποιο* $A < \infty$ *τότε μπορούμε να διαλέξουμε* $y_1 = \frac{1}{A}$ *και επομένως η*

$$y_n = y_1 \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-p_i}$$

θα είναι μια μη μηδενική και φραγμένη από την μονάδα λύση του συστήματος των εξισώσεων 8.40. Τελικά η αλυσίδα θα είναι μεταβατική **αν και μόνο αν**

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_i} < \infty$$

ή αλλιώς

$$\prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{1-p_i} - 1\right) < \infty$$

Χρησιμοποιώντας την πρόταση ;; καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η αλυσίδα είναι μεταβατική **αν και μόνο αν**

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{1-p_i} < \infty$$

Στην προκειμένη περίπτωση ισχύει ότι (δες παράδειγμα ;;)

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n < \infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n}{1-p_n} < \infty$$

Για παράδειγμα αν $p_n = \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$ *για* $n \geq 2$ *τότε προκύπτει ότι*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n}{1-p_n} = \infty$$

δηλαδή η αλυσίδα είναι επαναληπτική ενώ αν $p_n = \frac{1}{n^2}$ *τότε*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_n}{1-p_n} < \infty$$

και επομένως είναι μεταβατική.

Στην περίπτωση όπου οι καταστάσεις είναι επαναληπτικές τότε θα υπάρχει στάσιμη κατανομή αν και μόνο αν (δες πόρισμα 364) οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές. Υπολογίζοντας την στάσιμη κατανομή εύκολα βλέπουμε ότι κάθε στοιχείο του διανύσματος π έχει την μορφή $\pi_k = \pi_0(1-p_0)\cdots(1-p_{k-1})$ οπότε χρησιμοποιώντας την εξίσωση κανονικοποίησης προκύπτει ότι

$$\pi_0 = \frac{1}{1+1-p_0+\sum_{k=2}^{\infty}(1-p_0)\cdots(1-p_{k-1})} \tag{8.41}$$

Για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις $\pi P = \pi$ εκτός από την πρώτη (δες παρατήρηση 344). Από αυτές θα πάρουμε εύκολα το συμπέρασμα ότι $\pi_k = \pi_0(1-p_0)\cdots(1-p_{k-1})$ και με την εξίσωση κανονικοποίησης το τελικό αποτέλεσμα που έχουμε πάρει παραπάνω.
Αν η αλυσίδα είναι επαναληπτική τότε

$$\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-p_i} = \infty$$

το οποίο σημαίνει ότι $(1-p_0)\cdots(1-p_n)\to 0$ καθώς $n\to\infty$. Παρότι τα γινόμενα $(1-p_0)\cdots(1-p_n)\to 0$ καθώς $n\to\infty$ υπάρχει περίπτωση όπου το άπειρο άθροισμα στην ισότητα 8.41 να αποκλίνει. Πράγματι, αν $p_k = \frac{1}{k}$ για $k > 1$ τότε τα γινόμενα είναι ίσα με $(1-p_0)\cdot(1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdots(1-p_k) = (1-p_0)\cdot(1-p_1)\cdot\frac{1}{k}$ συγκλίνουν στο μηδέν όμως το άπειρο άθροισμα αποκλίνει διότι έχει γενικό όρο τον $\frac{1}{k}$ και ως γνωστό η σειρά αποκλίνει οπότε σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και μηδενικά επαναληπτική.
Οι οριακές πιθανότητες είναι ίσες με μηδέν και στις δυο περιπτώσεις όπου οι καταστάσεις δεν είναι θετικά επαναληπτικές. Στην πρώτη περίπτωση όπου όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές έχουμε αποδείξει ότι $P_{ij}^n \to 0$ καθώς $n\to\infty$. Όταν οι καταστάσεις είναι μηδενικά επαναληπτικές τότε οι καταστάσεις έχουν μέσο χρόνο επαναφοράς $m_i = \infty$ επομένως από το θεώρημα 346 προκύπτει ότι οι οριακές πιθανότητες είναι πάλι μηδέν. Στην περίπτωση που είναι θετικά επαναληπτικές τότε οι οριακές πιθανότητες είναι ίσες με $\pi_i = \frac{1}{m_i}$. □

ΑΣΚΗΣΗ 394 *Αποδείξτε ότι σε έναν συμμετρικό τυχαίο περίπατο (δηλαδή $p = 1/2$) η κατάσταση 0 είναι μηδενικά επαναληπτική. Τι μπορούμε να πούμε για τις υπόλοιπες καταστάσεις; Μπορείτε να υπολογίσετε όλες τις οριακές πιθανότητες;*

ΛΥΣΗ. Αρχικά, από το θεώρημα 348 βγάζουμε το συμπέρασμα ότι όλες οι καταστάσεις είναι είτε μηδενικά επαναληπτικές είτε θετικά επαναληπτικές. Έστω ότι είναι θετικά επαναληπτικές. Τότε $m_i < \infty$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$ και επομένως, λόγω του θεωρήματος 348, θα έπρεπε κάποιες οριακές πιθανότητες να είναι μη μηδενικές το οποίο έρχεται σε αντίφαση με το θεώρημα 263. Αρα όλες οι καταστάσεις είναι μηδενικά επαναληπτικές. Το ότι $m_i = \infty$ σημαίνει ότι όλες οι οριακές πιθανότητες είναι μηδενικές. □

Παραδειγμα 395 *Έστω η αλυσίδα με χώρο καταστάσεων* $S = \{1, 2, 3, 4\}$ *και πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και $p + q = 1$, *και* $pq > 0$. *Υπολογίστε τα όρια*

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^n$$

Υπολογίστε επίσης τους μέσους χρόνους επαναφοράς και την περιοδικότητα.

Λυση. Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη άρα όλες οι καταστάσεις είναι θετικά επαναληπτικές.
1ος τρόπος. Εξετάζοντας την αλυσίδα ως προς την περιοδικότητα βλέπουμε ότι $P^4 = P$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} P^5 &= P^4 P = P^2, \\ P^6 &= P^4 P^2 = P^3, \\ P^7 &= P^4 P^3 = P P^3 = P^4 = P \end{aligned}$$

Επίσης, $P_{11}^{3k} > 0$ ενώ για κάθε άλλη δύναμη η αντίστοιχη πιθανότητα είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι καταστάσεις είναι περιοδικές με περίοδο 3. Οι οριακές πιθανότητες προκύπτουν εύκολα με την παρατήρηση ότι ο πίνακας επαναλαμβάνεται ανά τρεις δυνάμεις.
Για να υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς εργαζόμαστε στον πίνακα P^3 και θα χρησιμοποιήσουμε το πόρισμα 365. Κατασκευάζουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 1 και έχουμε $C_0 = \{1, 2\}$, $C_1 = \{4\}$ και $C_2 = \{3\}$. Συνεπώς, οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς των καταστάσεων $3, 4$ είναι $m_3 = m_4 = 3$. Για τις καταστάσεις $1, 2$ κατασκευάζουμε τον πίνακα P_{C_0} και υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή η οποία είναι (p, q). Συνεπώς, οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς είναι $m_1 = \frac{3}{p}$ και $m_2 = \frac{3}{q}$.
2ος τρόπος. Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού των μέσων χρόνων επαναφοράς είναι η εύρεση της μοναδικής στάσιμης κατανομής, η οποία είναι

$$\pi = \left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Στην συνέχεια, για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 348. Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της πρώτης γραμμής, δηλαδή τις $P_{11}^n, P_{12}^n, P_{13}^n, P_{14}^n$ κατασκευάζουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 1. Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες της δεύτερης γραμμής κατασκευάζουμε τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 2 κ.τ.λ. Σημειώστε ότι τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 1 και τα σύνολα με βάση την κατάσταση 2 είναι στην πραγματικότητα τα ίδια με την μόνη διαφορά ότι οι δείκτες των συνόλων έχουν μετακινηθεί μια θέση πίσω. Δηλαδή, η C_1 γίνεται C_0, η C_0 γίνεται C_2 κ.τ.λ.

3ος τρόπος. Εφόσον η αλυσίδα είναι περιοδική με περίοδο 3 μπορούμε να εργαστούμε στην αλυσίδα Y_n με πίνακα μετάβασης τον P^3, δηλαδή τον

$$\begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Στην νέα αυτή αλυσίδα, οι καταστάσεις 1 και 2 ορίζουν ένα κλειστό και αδιαχώριστο σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων, ενώ οι 3 και 4 είναι απορροφητικές. Υπολογίζουμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των 1 και 2 στην αλυσίδα Y_n εργαζόμενοι στην υποαλυσίδα με πίνακα μετάβασης αυτόν που θα προκύψει αν διαγράψουμε τις γραμμές και στήλες που περιέχουν τις καταστάσεις 3 και 4. Διαπιστώνουμε ότι η στάσιμη κατανομή της υποαλυσίδας αυτής είναι $\pi = (\pi_1, \pi_2) = (p, 1-p)$. Επομένως ο πίνακας των οριακών πιθανοτήτων $P^{3\infty} = \lim_{n\to\infty} P^{3n}$ είναι

$$P^{3\infty} = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Επίσης θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P^{3n+1} = P^{3\infty} \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} P^{3n+2} = P^{3\infty} \cdot P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p & 1-p & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 396 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με*

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

και πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 4/5 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθούν τα όρια των πιθανοτήτων $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$, *οι πιθανότητες απορρόφησης και οι χρόνοι πρώτης εισόδου.*

Λυση. Η αλυσίδα χωρίζεται ως εξής,

$$\begin{aligned} S &= \{1,2,3,4,5,6\} \\ &= \underbrace{\overbrace{\{5,6\}}^{T}}_{\text{σύνολο μεταβατικών}} \bigcup \underbrace{\overbrace{\{1,2\}}^{C_1} \cup \overbrace{\{3,4\}}^{C_2}}_{\text{ένωση κλειστών συνόλων επαναληπτικών}} \end{aligned}$$

Κοιτώντας τις αλυσίδες με πίνακες μετάβασης C_1, C_2 εύκολα υπολογίζουμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς m_1, m_2, m_3, m_4 υπολογίζοντας τις στάσιμες κατανομές για τις υποαλυσίδες, δηλαδή $m_j = \frac{1}{\pi_j}$, $j = 1,2,3,4$.
Οι οριακές πιθανότητες $P_{i5}^n, P_{i6}^n \to 0$ για $i = 1, \cdots, 6$ διότι οι καταστάσεις $5, 6$ είναι μεταβατικές. Οι πιθανότητες h_i^j υπολογίζονται χρησιμοποιώντας το θεώρημα 316 και οι χρόνοι πρώτης εισόδου από το θεώρημα 320. Για να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες P_{ij}^n για $j = 1,2,3,4$ θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 346, δηλαδή

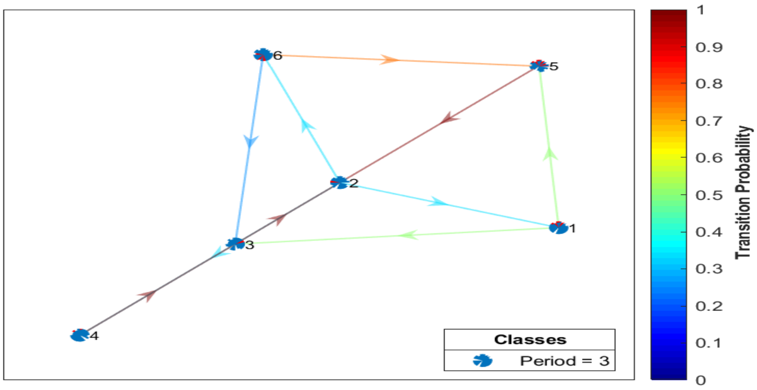
$$\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \frac{h_i^j}{m_j}, \quad i = 1, \cdots, 6, \quad j = 1,2,3,4$$

□

Παραδειγμα 397 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Αποδείξτε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και περιοδική με περίοδο 3. Υπολογίστε στην συνέχεια τους μέσους χρόνους επαναφοράς.



Σχήμα 8.16: Το γράφημα της αλυσίδας του παραδείγματος397

Λυση. Εύκολα βλέπουμε ότι η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη. Υπολογίζουμε τους πίνακες P^2 και P^3 και με την βοήθεια αυτών τους πίνακες P^4, P^5 διαπιστώνοντας ότι $P^2 = P^5$. Επίσης, βλέπουμε ότι $P^2_{11} = 0$, $P^3_{11} = 1/3$ και $P^4_{11} = 0$. 'ρα, επαγωγικά αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\begin{aligned}
P^{3k+2} &= P^2, \quad k = 1, 2, \cdots \\
P^{3k} &= P^3, \quad k = 2, 3, \cdots \\
P^{3k+1} &= P^4, \quad k = 2, 3, \cdots
\end{aligned}$$

Πράγματι, η πρώτη ισότητα ισχύει για $k = 2$ αφού $P^6 = P^5P = P^2P = P^3$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο k και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k+1$. Έχουμε $P^{3k+3} = P^{3k}P^3 = P^3P^3 = P^6 = P^3$. Η δεύτερη ισότητα ισχύει για $k = 2$ αφού $P^7 = P^5P^2 = P^2P^2 = P^4$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο k και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k+1$. Έχουμε $P^{3k+4} = P^{3k+1}P^3 = P^4P^3 = P^7 = P^4$. Η τρίτη ισότητα ισχύει για $k = 1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο k και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $k+1$. Έχουμε $P^{3k+5} = P^{3k+2}P^3 = P^2P^3 = P^5 = P^2$. Βλέπουμε ότι η αλυσίδα είναι περιοδική με περίοδο 3. Το ίδιο αποτέλεσμα παίρνουμε μελετώντας τα σύνολα κυκλικής μετάβασης.

Τα σύνολα κυκλικής μετάβασης με βάση την κατάσταση 1 είναι τα επόμενα

$$\begin{aligned}
C_0 &= \{1, 4, 6\} \\
C_1 &= \{3, 5\} \\
C_2 &= \{2\}
\end{aligned}$$

επομένως η περιοδικότητα είναι ίση με 3.

Το σύνολο $C_2 = \{2\}$ είναι μονοσύνολο επομένως η κατάσταση 2 έχει μέσο χρόνο επαναφοράς ίσο με την περίοδο, δηλαδή 3. Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τον μέσο χρόνο επαναφοράς των 3 και 5. Θα κατασκευάσουμε τον πίνακα P_{C_1} αφού υπολογίσουμε τον P^3 και διαγράψουμε γραμμές και στήλες που δεν ανήκουν οι καταστάσεις

3 και 5. Έτσι σχηματίζεται ο πίνακας

$$P_{C_1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

και υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή της Μαρκοβιανής αλυσίδας με πίνακα μετάβασης τον P_{C_1}, η οποία είναι $\left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$. Αυτό σημαίνει ότι $m_3 = \frac{3}{\frac{7}{12}} = \frac{36}{7}$ και $m_5 = \frac{3}{\frac{5}{12}} = \frac{36}{5}$. Παρομοίως, για να υπολογίσουμε τους μέσους χρόνους επαναφοράς των 1,4 και 6.
Η αρχική αλυσίδα έχει μοναδική στάσιμη κατανομή σύμφωνα με το 368. Ποια είναι η σχέση της με τους μέσους χρόνους επαναφοράς; □

Παραδειγμα 398 *Θα υπολογίσουμε τα* $\lim_{n\to\infty} P^n_{43}$ *και* $\lim_{n\to\infty} P^n_{45}$ *της Μαρκοβιανής αλυσίδας με πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και σύνολο καταστάσεων το $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
Είναι φανερό ότι

$$S = \underbrace{\{4\}}_{\text{μεταβατική κατάσταση}} \cup \underbrace{\{1,2,3\}\bigcup\{5\}}_{\text{ένωση κλειστών συνόλων επαναληπτικών καταστάσεων}}$$

Το σύνολο $\{1, 2, 3\}$ *είναι ένα κλειστό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων το οποίο είναι περιοδικό με περίοδο 2. Πράγματι, κατασκευάζοντας τα σύνολα κυκλικής μετάβασης ως προς την κατάσταση 1 έχουμε ότι* $C_0 = \{1, 2\}$ *και* $C_1 = \{3\}$. *Λόγω του ότι το ένα σύνολο είναι μονοσύνολο σημαίνει ότι η περίοδος είναι 2 αλλά επίσης και ο μέσος χρόνος επαναφοράς της κατάστασης 3 είναι ο* $m_3 = 2$. *Το σύνολο* $\{1, 2, 3\}$ *είναι κλειστό επομένως αν η αλυσίδα επισκεφθεί μια κατάσταση του συνόλου τότε θα απορροφηθεί στο σύνολο αυτό για πάντα. Από κει και μετά μπορούμε να την σκεφτούμε σαν μια νέα Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης αυτόν που προκύπτει αν διαγράψουμε γραμμές και στήλες των καταστάσεων οι οποίες δεν ανήκουν στο σύνολο αυτό. Έτσι προκύπτει ο πίνακας*

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Η μοναδική στάσιμη κατανομή της νέας αλυσίδας είναι η

$$\pi = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

το οποίο σημαίνει ότι $m_1 = m_2 = 4$.
Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο όριο θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 351. Για τον λόγο αυτό πρέπει να υπολογίσουμε τα $f_{2k+1}(4|3)$ *και* $f_{2k}(4|3)$. *Βλέπουμε ότι* $f_1(4|3) = \frac{2}{5}$ *και* $f_2(4|3) = \frac{1}{5}$. *Επίσης* $f_m(4|3) = 0$ *για* $m \geq 3$. *Συνεπώς έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P_{43}^{2k+1} &= \frac{d}{m_3}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(4|3)\right) = \frac{2}{5} \\
\lim_{n\to\infty} P_{43}^{2k} &= \frac{d}{m_3}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}(4|3)\right) = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} P_{42}^{n}$. *Έχουμε ότι*

$$\begin{aligned}
f_1(4|2) &= \frac{1}{5} \quad (4 \to 2) \\
f_2(4|2) &= \frac{1}{5} \quad (4 \to 3 \to 2) \\
f_3(4|2) &= f_{2k+1}(4|2) = 0 \\
f_{2k}(4|2) &= \frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}(4|2) = \frac{2}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2}{5}$$

Αρα

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P_{42}^{2k+1} &= \frac{d}{m_2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k+1}(4|2)\right) = \frac{1}{10} \\
\lim_{n\to\infty} P_{42}^{2k} &= \frac{d}{m_2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}(4|2)\right) = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P_{41}^{2k+1} &= \frac{1}{10} \\
\lim_{n\to\infty} P_{41}^{2k} &= \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

λόγω του ότι η γραμμή πρέπει να αθροίζει στην μονάδα.

Για να υπολογίσουμε το όριο $\lim_{n\to\infty} P^n_{45}$ *θα εφαρμόσουμε το θεώρημα 346. Επειδή*

$$f_{45} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(4|5) = f_1(4|5) = \frac{2}{5}$$

ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P^n_{45} = \frac{f_{45}}{m_5} = \frac{2/5}{1}$$

Σημειώστε ότι $m_5 = 1$ *λόγω του ότι η 5 είναι απορροφητική.*
Μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι στην προκειμένη περίπτωση ισχύει $P^2 = P^4$ *και* $P^3 = P^5$ *επομένως επαγωγικά έχουμε ότι* $P^{2k+1} = P^3$ *και* $P^{2k} = P^2$ *για* $k = 1, 2, \cdots$. *Με αυτό το αποτέλεσμα έχουμε όλες τις οριακές πιθανότητες.* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 399 *Ας μελετήσουμε την Μαρκοβιανή αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων το* $S = \{0, 1, 2, \cdots, \}$ *και πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & r_0 & 0 & \cdots & \cdots \\ q_1 & p_1 & r_1 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & p_2 & r_2 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

όπου $q_i r_i > 0$. *Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη άρα όλες οι καταστάσεις χαρακτηρίζονται το ίδιο ως προς την επαναληπτικότητα και περιοδικότητα.*
Επειδή η αλυσίδα είναι γεννήσεως - θανάτου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ανάστροφες εξισώσεις ισορροπίας 8.39 για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή αν υπάρχει.
Θα έχουμε λοιπόν

$$\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i}, \quad i = 0, 1, \cdots,$$

Αντικαθιστώντας τις πιθανότητες έχουμε ότι

$$\pi_i r_i = \pi_{i+1} q_{i+1}, \quad i = 0, 1, \cdots,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\pi_{i+1} = \left(\frac{r_i}{q_{i+1}}\right) \pi_i, \quad i = 0, 1, \cdots,$$

Συνεπώς

$$\pi_i = \left(\frac{r_0 r_1 \cdots r_{i-1}}{q_1 q_2 \cdots q_i}\right) \pi_0, \quad i = 1, 2, \cdots,$$

Προκειμένου το διάνυσμα $\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots,)$ να είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή θα πρέπει να ισχύει και η εξίσωση κανονικοποίησης, δηλαδή $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$. Από την εξίσωση κανονικοποίησης προκύπτει ότι

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{r_0}{q_1} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_0 \cdots r_i}{q_1 \cdots q_{i+1}}}$$

Αν

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_0 \cdots r_i}{q_1 \cdots q_{i+1}} < \infty$$

τότε το διάνυσμα π θα είναι η μοναδική στάσιμη κατανομή επομένως σε αυτή την περίπτωση η αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική λόγω του πορίσματος 368.
Έστω ότι ισχύει

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_0 \cdots r_i}{q_1 \cdots q_{i+1}} < \infty$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να απαντήσουμε το εξής ερώτημα: Ποια είναι η πιθανότητα μετά από n βήματα η αλυσίδα να βρεθεί στην κατάσταση j, ανεξάρτητα από την κατάσταση εκκίνησης της αλυσίδας; Σε αυτό μας βοηθά το πόρισμα (εργοδικό θεώρημα) 357 και επομένως η πιθανότητα είναι ίση με π_j (σημειώστε ότι $f_{ij} = 1$ αφού η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και $\pi_j = \frac{1}{m_j}$).
Στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε τις οριακές πιθανότητες θα πρέπει να εξετάσουμε την περίπτωση που η αλυσίδα είναι περιοδική. Αν για παράδειγμα $p_0 = p_1 = \cdots = 0$ τότε η αλυσίδα είναι περιοδική και επομένως ο υπολογισμός των οριακών πιθανοτήτων θέλει ιδιαίτερη προσοχή. □

Ασκηση 400 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με $S = \{1, 2\}$ και πίνακα μετάβασης*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθούν οι οριακές πιθανότητες και οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς.

Ασκηση 401 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με $S = \{1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα μετάβασης,*

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθούν οι οριακές πιθανότητες.

Άσκηση 402 *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα με $S = \{1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα μετάβασης,*

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/9 & 1/3 & 4/9 & 1/9 \\ 1/4 & 1/8 & 1/8 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Να υπολογισθούν οι μέσοι χρόνοι επαναφοράς και οι οριακές πιθανότητες.

Άσκηση 403 *Να μελετηθεί η Μαρκοβιανή αλυσίδα με πιθανούς πίνακες μετάβασης*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 2/6 & 1/12 & 1/12 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \quad P_8 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Κεφάλαιο 9

Η Στοχαστική Διαδικασία Poisson

Υποθέστε ότι μελετούμε την άφιξη πελατών σε ένα κατάστημα καταγράφοντας τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δυο αφίξεων. Ο χρόνος αυτός είναι προφανώς μια τυχαία μεταβλητή η τιμή της οποίας εξαρτάται από πολλούς παράγοντες τους οποίους δεν μπορούμε να καταγράψουμε και να αξιολογήσουμε. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουν έρθει 10 πελάτες στο κατάστημα μετά από 30 λεπτά παρατήρησης;
Γενικά υπάρχουν πολλά φαινόμενα (φυσική, οικονομικά κ.α.) τα όποια έχουν παρόμοια συμπεριφορά. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το μαθηματικό πρόβλημα που προκύπτει από τα φαινόμενα αυτά. Θα περιγράψουμε την κατασκευή της στοχαστικής διαδικασίας Poisson και θα μελετήσουμε βασικές της ιδιότητες. Πρόκειται για την απλούστερη διαδικασία συνεχούς χρόνου με άπειρες καταστάσεις η οποία φαίνεται να μοντελοποιεί καλά τέτοιου είδους φαινόμενα.
Στην επόμενη ενότητα θα μελετήσουμε την εκθετική κατανομή η οποία διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην κατασκευή της διαδικασίας Poisson.

9.1 Η Εκθετική κατανομή

Ορισμος 404 (Εκθετική Κατανομή) *Θα λέμε ότι μια απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την* ***εκθετική κατανομή παραμέτρου*** $\lambda > 0$ *αν η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από*

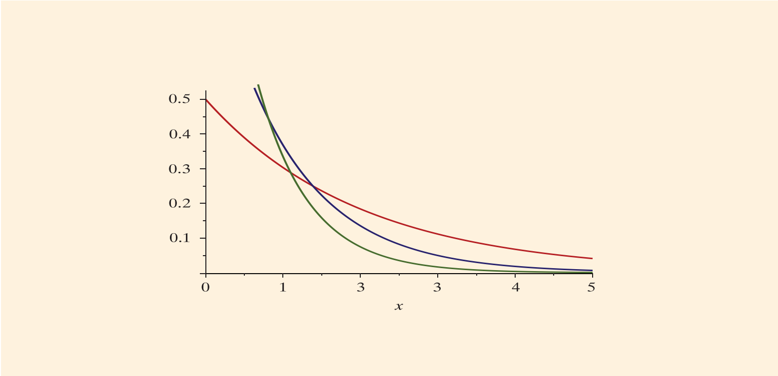
$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ 0, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

Όταν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή τότε η συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$ δίνεται από την

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{όταν } x \geq 0 \\ 0, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε την μέση τιμή μιας τέτοιας τυχαίας μεταβλητής. Πράγματι,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$



Σχήμα 9.1: Τα γραφήματα της συνάρτησης πυκνότητας μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Με κόκκινο είναι για $\lambda = 0.5$ με μπλε για $\lambda = 1$ και με πράσινο για $\lambda = 1.5$.

Παρόμοια, η μέση τιμή του τετραγώνου είναι

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}$$

και συνεπώς $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.
Στην συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό των **χωρίς μνήμη** τυχαίων μεταβλητών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 405 *Θα λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή X έχει την ιδιότητα* **έλλειψης μνήμης** *αν*

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s), \qquad \text{για κάθε } s, t \geq 0 \tag{9.1}$$

Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 406 *Η απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή X με $P(X > 0) = 1$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda > 0$* **ανν** *είναι τυχαία μεταβλητή με την ιδιότητα έλλειψης μνήμης.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η σχέση 9.1 είναι ισοδύναμη με την

$$P(X > s + t) = P(X > s) \cdot P(X > t), \qquad \text{για κάθε } s, t \geq 0$$

. (**Ευθύ**) Έστω ότι η X ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Θα αποδείξουμε τότε ότι έχει την ιδιότητα έλλειψης μνήμης ή αλλιώς ικανοποιεί την παραπάνω ισότητα.
Έχουμε ότι, για $s, t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
P(X > t) &= 1 - P(X \leq t) = e^{-\lambda t} \\
P(X > s) &= 1 - P(X \leq s) = e^{-\lambda s} \\
P(X > s + t) &= 1 - P(X \leq s + t) = e^{-\lambda(s+t)}
\end{aligned}$$

άρα

$$P(X > s) \cdot P(X > t) = e^{-\lambda(s+t)} = P(X > s + t)$$

και επομένως είναι μια τυχαία μεταβλητή που έχει την ιδιότητα έλλειψης μνήμης.
. (**Αντίστροφο**) Έστω X μια απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή η οποία έχει την ιδιότητα έλλειψης μνήμης ή αλλιώς ικανοποιεί την σχέση

$$P(X > s+t) = P(X > s) \cdot P(X > t), \quad \text{για κάθε } s, t \geq 0$$

Θα αποδείξουμε καταρχάς ότι δεν υπάρχει $s \geq 0$ τ.ω. $P(X > s) = 0$. Αν υπάρχει συμβολίζουμε με s^* το μικρότερο από αυτά και επιπλέον συμπεραίνουμε ότι $P(X > s) = 0$ για κάθε $s \geq s^*$. Όμως $P(X > s)P(X > t) > 0$ για κάθε $s, t \in (0, s^*)$. Διαλέγοντας κατάλληλα τα s, t έτσι ώστε $s, t \in (0, s^*)$ και $s + t > s^*$ προκύπτει άτοπο με την υπόθεση ότι ικανοποιεί την ιδιότητα της έλλειψης μνήμης.
Θέτουμε $g(x) = P(X > x)$ η οποία είναι συνεχής συνάρτηση (δες άσκηση 156). Η παραπάνω σχέση γίνεται

$$g(s+t) = g(s) \cdot g(t)$$

Από την άσκηση ;;, και εφόσον η g είναι πάντοτε θετική ως πιθανότητα, γνωρίζουμε ότι υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$g(x) = e^{cx}$$

Επειδή όμως η συνάρτηση $g(x) = P(X > x)$ είναι φθίνουσα έπεται ότι η σταθερά c πρέπει να είναι αρνητική ή αλλιώς

$$g(x) = e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

δηλαδή η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda > 0$.
□

'ΣΚΗΣΗ 407 *Έστω $x_1, \cdots, x_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ. Αποδείξτε ότι η $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους n και λ, δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας της S_n είναι η*

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{όταν } t \geq 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

ΛΥΣΗ. Θα χρησιμοποιήσουμε την πρόταση 167 καθώς και επαγωγή. Για $n = 1$ είναι προφανές ότι ισχύει αφού

$$f_{S_1} = f_{x_1}$$

ενώ η x_1 εκ κατασκευής ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο n και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n + 1$. Έχουμε ότι, λόγω ανεξαρτησίας των S_n και x_{n+1} (δες παρατήρηση 47),

$$\begin{aligned}
f_{S_{n+1}}(z) &= f_{S_n+x_{n+1}}(z) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_{n+1}}(x) f_{S_n}(z-x)dx \\
&= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} f_{S_n}(z-x)dx \\
&= \int_0^{z} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}dx \\
&= \lambda^{n+1} e^{-\lambda z} \int_0^z \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}dx \\
&= \lambda^{n+1} e^{-\lambda z} \frac{z^n}{n!}
\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Παραδειγμα 408 *Σε ένα παιχνίδι ποδοσφαίρου έχει μετρηθεί ότι οι χρόνοι που σημειώνονται τέρματα ακολουθούν μια διαδικασία Poisson και κατά μέσο όρο σημειώνεται ένα τέρμα κάθε 15 λεπτά (δηλαδή $\lambda = \frac{1}{15}$).*
Σε 90 λεπτά, ποια είναι η πιθανότητα να σημειωθεί τέταρτο τέρμα στα τελευταία πέντε λεπτά του αγώνα; Η πιθανότητα αυτή είναι η $P(85 < S_4 \leq 90) = \int_{85}^{90} f_{S_4}(t)dt = \int_{85}^{90} \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^3}{3!}dt$.
Δεδομένου ότι σημειώνονται τουλάχιστον τρία τέρματα, ποιος είναι , κατά μέσο όρο, ο χρόνος που σημειώνεται το τρίτο τέρμα; Η ποσότητα που ψάχνουμε είναι η $\mathbb{E}(S_3 | S_3 < 90) = \frac{\mathbb{E}(S_3 \mathbb{I}_{\{S_3<90\}})}{P(S_3<90)} = \frac{\int_0^{90} t f_{S_3}(t)dt}{\int_0^{90} f_{S_3}(t)dt}$. □

9.2 Κατασκευή της Διαδικασίας Poisson

Έστω $x_1, x_2, \cdots$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες αναπαριστούν τον χρόνο που μεσολαβεί μεταξύ δυο γεγονότων. Είναι συνηθισμένο στην πράξη οι τυχαίες αυτές μεταβλητές να ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ επομένως είναι λογικό να κάνουμε αυτή την υπόθεση και στην μαθηματική μας μελέτη.
Συμβολίζουμε με

$$S_n = x_1 + \cdots + x_n$$

τον συνολικό χρόνο μέχρι το n-οστό γεγονός. Θέτουμε επίσης $S_0 = 0$.

Ορισμός 409 *Θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ με $t \geq 0$ είναι μια διαδικασία Poisson αν*

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$$

όπου $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ όπου $x_1, \cdots, x_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ.

Διαπιστώνουμε ότι ο ρόλος της $N(t)$ είναι να μετρά το πλήθος των γεγονότων που έχουν συμβεί μέχρι τον χρόνο t (και στην βιβλιογραφία είναι γνωστή ως απαριθμήτρια). Είναι προφανές ότι για κάθε t πρόκειται για μια τυχαία μεταβλητή (εξαρτάται από πολλούς παράγοντες τους οποίους δεν μπορούμε να αξιολογήσουμε) συνεπώς έχουμε να κάνουμε με μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών με δείκτη το t ο οποίος «τρέχει» σε όλο το $\mathbb{R}^+$.
Στην συνέχεια θα μελετήσουμε την στοχαστική αυτή διαδικασία και θα εξηγήσουμε γιατί την ονομάσαμε διαδικασία Poisson.

Ορισμός 410 *Μια τυχαία μεταβλητή X θα λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή Poisson παραμέτρου $a > 0$ αν*

$$P(X = n) = e^{-a}\frac{a^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \cdots,$$

Το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε είναι το επόμενο.

Θεώρημα 411 *Η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson παραμέτρου λt, δηλαδή*

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι τα ενδεχόμενα $\{N(t) < n\}$ και $\{S_n > t\}$ είναι ίσα. Έτσι έχουμε ότι

$$P(N(t) = n) = P(N(t) < n+1) - P(N(t) < n) = P(S_{n+1} > t) - P(S_n > t)$$

Χρησιμοποιώντας την άσκηση 407 και έπειτα ολοκλήρωση κατά παράγοντες προκύπτει ότι

$$P(S_{n+1} > t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}ds = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_t^\infty e^{-\lambda s}s^n ds$$

Θέτουμε

$$I_n = \int_t^\infty e^{-\lambda s}s^n ds$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_n &= \int_t^{\infty} e^{-\lambda s} s^n ds \\ &= \int_t^{\infty} \left(-\frac{e^{-\lambda s}}{\lambda}\right)' s^n ds \\ &= \left[-\frac{e^{-\lambda s} s^n}{\lambda}\right]_t^{\infty} + \frac{n}{\lambda} I_{n-1} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} t^n}{\lambda} + \frac{n}{\lambda} I_{n-1} \end{aligned}$$

Εύκολα υπολογίζουμε το I_0 το οποίο είναι $I_0 = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$. Θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$I_n = \frac{n!}{\lambda^{n+1}} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Για $n = 1$ διαπιστώνουμε ότι ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n-1$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για n. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{e^{-\lambda t} t^n}{\lambda} + \frac{n}{\lambda} I_{n-1} \\ &= \frac{e^{-\lambda t} t^n}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\left(\frac{(n-1)!}{\lambda^n} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}\right) \\ &= \frac{n!}{\lambda^{n+1}} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \end{aligned}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$P(S_{n+1} > t) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \tag{9.2}$$

Εφόσον $P(N(t) = n) = P(S_{n+1} > t) - P(S_n > t)$ εύκολα καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα. □

'ΣΚΗΣΗ 412 *Υπολογίστε την μέση τιμή της $N(t)$.*

ΛΥΣΗ. Γνωρίζουμε ότι η τυχαία μεταβλητή $N(t)$ ακολουθεί την κατανομή Poisson παραμέτρου λt. Συνεπώς ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N(t)) &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(N(t)=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \\
&= \lambda t e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \lambda t e^{-\lambda t}e^{\lambda t} \\
&= \lambda t
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$. □

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε υψηλότερες ροπές θα είναι βολικότερο να γίνει μέσω της πιθανογεννήτριας.

Προταση 413 *Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της $N(t)$ είναι η*

$$G_{N(t)}(s) = e^{\lambda t(s-1)}$$

Αποδειξη. Η πιθανογεννήτρια είναι

$$G_{N(t)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(N(t)=k)s^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}s^k = e^{\lambda t(s-1)}$$

□

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι $\mathbb{E}(N(t)) = G'_{N(t)}(1) = \lambda t$ και $\mathrm{Var}(N(t)) = G''_{N(t)}(1) + G'_{N(t)}(1) - (G'_{N(t)}(1))^2 = \lambda t$.

9.2.1 Η διαδικασία Poisson έχει στάσιμες προσαυξήσεις

Θα μελετήσουμε τις προσαυξήσεις $N(t+s)-N(t)$ δηλαδή την στοχαστική διαδικασία $M(s) = N(t+s) - N(t)$ για δεδομένο και σταθερό $t > 0$. Θέτουμε

$$x_1^t = S_{N(t)+1} - t, \quad x_n^t = x_{N(t)+n}, \quad n = 2, 3, \cdots,$$

Επειδή η $N(t)$ μετρά το πλήθος των αλμάτων μέχρι τον χρόνο t έπεται ότι ο χρόνος $S_{N(t)}$ είναι μικρότερος ή ίσος από τον χρόνο t αλλά και ο χρόνος $S_{N(t)+1}$ είναι μεγαλύτερος του t. Στην συνέχεια θέτουμε

$$\begin{aligned}
S_n^t &= x_1^t + \cdots + x_n^t \\
N^t(s) &= \max\{n : S_n^t \le s\}
\end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 414 *Ισχύει ότι*

$$N^t(s) = N(t+s) - N(t)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} S_n^t &= x_1^t + \cdots + x_n^t \\ &= S_{N(t)+1} - t + x_{N(t)+2} + \cdots + x_{N(t)+n} \\ &= S_{N(t)+n} - t \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} N^t(s) &= \max\{n : S_n^t \leq s\} \\ &= \max\{n : S_{N(t)+n} \leq t+s\} \\ &= \max\{n : S_n \leq t+s\} - N(t) \\ &= N(t+s) - N(t) \end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 415 (Ανανέωση της διαδικασίας Poisson) *Οι τυχαίες μεταβλητές x_i^t για $i = 1, \cdots, n$ ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ ανεξάρτητα της επιλογής του χρόνου t. Επιπλέον είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Συνεπώς η στοχαστική διαδικασία $N^t(s)$ είναι επίσης μια διαδικασία Poisson.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα εξετάσουμε πρώτα την τυχαία μεταβλητή x_1^t. Το ενδεχόμενο $\{x_1^t > s\}$ γράφεται ως εξής

$$\{x_1^t > s\} = \{x_1 > t+s\} \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\{S_n < t\} \cap \{S_{n+1} > t+s\}\Big)\right) \tag{9.3}$$

όπου όλα τα ενδεχόμενα στο δεξί μέλος είναι ανά δύο ξένα. Πράγματι, υπάρχουν αρχικά δυο περιπτώσεις. Η μια περίπτωση είναι το x_1 να βρίσκεται δεξιά του t. Σε αυτή την περίπτωση

$$\{x_1^t > s\} = \{x_1 > t+s\}$$

Η δεύτερη περίπτωση είναι το x_1 να βρίσκεται αριστερά του t. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν δυο περιπτώσεις. Η μια είναι το $x_1 + x_2$ να είναι δεξιά του t και η άλλη αριστερά του t. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$\{x_1^t > s\} = \{x_1 < t\} \cap \{x_1 + x_2 > t+s\}$$

Σημειώστε ότι τα ενδεχόμενα

$$\{x_1 > t+s\} \quad \text{και} \quad \{x_1 < t\} \cap \{x_1 + x_2 > t+s\}$$

είναι ξένα μεταξύ τους. Συνεχίζοντας το σκεπτικό αυτό λαμβάνουμε την ισότητα 9.3. 'ρα έχουμε ότι

$$P\left(x_1^t > s\right) = P(x_1 > t+s) + \sum_{n=1}^{\infty} P\Big(\{S_n < t\} \cap \{S_{n+1} > t+s\}\Big)$$

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P\Big(\{S_n < t\} \cap \{S_{n+1} > t+s\}\Big)$ θα χρησιμοποιήσουμε την παρατήρηση 132 δεσμεύοντας ως προς τις τιμές της S_n. Θα έχουμε

$$\begin{aligned} & P\Big(\{S_n < t\} \cap \{S_{n+1} > t+s\}\Big) \\ = & \int_0^t P(S_{n+1} > t+s | S_n = y) \lambda^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} dy \\ = & \int_0^t P(x_{n+1} > t+s-y) \lambda^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} dy \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή x_{n+1} είναι ανεξάρτητη της S_n. Για τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας $P(A|Y = y)$ όταν η Y είναι απόλυτα συνεχής δείτε το [57].
Τελικά θα έχουμε

$$\begin{aligned} P\left(x_1^t > s\right) &= e^{-\lambda(t+x)} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda(t+x-y)} \lambda^n \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda y} dy \\ &= e^{-\lambda(t+x)} + \int_0^t e^{-\lambda(t+x-y)} dy \\ &= e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε το ίδιο για τις τυχαίες μεταβλητές x_k^t με $k = 2, 3, \cdots ,$. Δεσμεύοντας ως προς τις τιμές της $N(t)$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(x_k^t > s) &= \sum_{i=0}^{\infty} P(x_k^t > s | N(t) = i) P(N(t) = i) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} P(x_{i+2} > s | N(t) = i) P(N(t) = i) \end{aligned}$$

Το ενδεχόμενο $\{N(t) = i\} = \{S_i \leq t\} \cap \{S_{i+1} > t\}$ ανήκει στην σ-άλγεβρα που παράγουν οι $x_1, \cdots, x_{i+1}$ τυχαίες μεταβλητές. Όμως η $\sigma(x_1, \cdots, x_{i+1})$ και η $\sigma(x_{i+2})$ είναι ανεξάρτητες σ-άλγεβρες συνεπώς $P(x_{i+2} > s | N(t) = i) = P(x_{i+2} > s) = e^{-\lambda s}$. Αρα

$$P(x_k^t > s) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda s} P(N(t) = i) = e^{-\lambda s}$$

Μένει να αποδείξουμε ότι οι $x_1^t, \cdots, x_n^t$ είναι ανεξάρτητες. Ξεκινάμε με τις x_1^t και x_2^t. Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& P(\{x_1^t > s_1\} \cap \{x_2^t > s_2\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{x_1^t > s_1\} \cap \{x_2^t > s_2\} \cap \{N(t) = i)\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{S_{N(t)+1} - t > s_1\} \cap \{x_{N(t)+2} > s_2\} \cap \{N(t) = i)\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{S_{i+1} > t + s_1\} \cap \{x_{i+2} > s_2\} \cap \{N(t) = i)\})
\end{aligned}
$$

Το ενδεχόμενο $\{S_{i+1} > t+s_1\} \cap \{N(t) = i)\}$ ανήκει στην σ-άλγεβρα που παράγουν οι $x_1, \cdots, x_{i+1}$ συνεπώς είναι ανεξάρτητο του ενδεχομένου $\{x_{i+2} > s_2\}$. Αυτό σημαίνει ότι

$$
\begin{aligned}
& P(\{x_1^t > s_1\} \cap \{x_2^t > s_2\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{S_{i+1} > t + s_1\} \cap \{N(t) = i)\}) P(\{x_{i+2} > s_2\}) \\
= & e^{-\lambda s_2} \sum_{i=0}^{\infty} P(\{S_{i+1} > t + s_1\} \cap \{N(t) = i)\})
\end{aligned}
$$

Όμως

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\infty} P(\{S_{i+1} > t + s_1\} \cap \{N(t) = i)\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{S_{N(t)+1} - t > s_1\} \cap \{N(t) = i\}) \\
= & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{x_1^t > s_1\} \cap \{N(t) = i\}) \\
= & e^{-\lambda s_1}
\end{aligned}
$$

Τελικά

$$
P(\{x_1^t > s_1\} \cap \{x_2^t > s_2\}) = P(\{x_1^t > s_1\}) P(\{x_2^t > s_2\})
$$

δηλαδή οι x_1^t και x_2^t είναι ανεξάρτητες.
Υποθέτουμε ότι οι $x_1^t, \cdots, x_k^t$ είναι ανεξάρτητες και θα αποδείξουμε ότι και οι $x_1^t, \cdots, x_{k+1}^t$ είναι ανεξάρτητες.

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1}\{x_i^t > s_i\}\right) \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{k+1}\{x_i^t > s_i\} \cap \{N(t) = n\}\right) \\ = & \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{S_{n+1} > t + s_1\} \bigcap_{i=2}^{k+1}\{x_{n+i} > s_i\} \cap \{N(t) = n\}\right) \end{aligned}$$

Το ενδεχόμενο

$$\{S_{n+1} > t + s_1\} \bigcap_{i=2}^{k}\{x_{n+i} > s_i\} \cap \{N(t) = n\}$$

ανήκει στην σ-άλγεβρα που παράγουν οι $x_1, \cdots, x_{k+n}$ τυχαίες μεταβλητές. Επειδή οι $x_1, \cdots, x_{k+1+n}$ είναι ανεξάρτητες έπεται ότι

$$\begin{aligned} & P\left(\{S_{n+1} > t + s_1\} \bigcap_{i=2}^{k+1}\{x_{n+i} > s_i\} \cap \{N(t) = n\}\right) \\ = & P\left(\{S_{n+1} > t + s_1\} \bigcap_{i=2}^{k}\{x_{n+i} > s_i\} \cap \{N(t) = n\}\right) P(x_{k+1+n} > s_{k+1}) \\ = & e^{-\lambda s_{k+1}} P\left(\{S_{n+1} > t + s_1\} \bigcap_{i=2}^{k}\{x_{n+i} > s_i\} \cap \{N(t) = n\}\right) \end{aligned}$$

Όμως, λόγω της υπόθεσης της επαγωγής έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & P\left(\{S_{n+1} > t + s_1\} \bigcap_{i=2}^{k}\{x_{n+i} > s_i\} \cap \{N(t) = n\}\right) \\ = & P\left(\bigcap_{i=1}^{k}\{x_i^t > s_i\}\right) \\ = & \prod_{i=1}^{k} P(\{x_i^t > s_i\}) \end{aligned}$$

επομένως έχουμε αποδείξει ότι οι $x_1^t, \cdots, x_{k+1}^t$ είναι ανεξάρτητες.
Η στοχαστική διαδικασία $N^t(s)$ είναι τέτοια ώστε

$$N^t(s) = \max\{n : S_n^t \leq s\}$$

όπου $S_n^t = x_1^t + \cdots + x_n^t$. Έχουμε ήδη αποδείξει ότι οι $x_1^t, \cdots, x_n^t$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες οι οποίες ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ. Επομένως η $N^t(s)$ ικανοποιεί τον ορισμό 409 και συνεπώς πρόκειται για διαδικασία Poisson. □

Με ακριβώς το ίδιο σκεπτικό με το θεώρημα 411 λαμβάνουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πορισμα 416 *Η διαδικασία Poisson $N^t(s)$ είναι τέτοια ώστε*

$$P(N^t(s) = n) = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}$$

Συνεπώς κάθε προσαύξηση $N(t_{n+1}) - N(t_n)$ ακολουθεί την ίδια κατανομή όπως και η $N(t_{n+1} - t_n)$.

Ορισμος 417 *Θα λέμε ότι μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$ έχει* ***στάσιμες προσαυξήσεις*** *όταν*

$$P(X(t+s) - X(t) = k) = p_k(s) \qquad \text{για κάθε } t, s \geq 0$$

όπου η ποσότητα $p_k(s)$ δεν εξαρτάται από το t.

Πορισμα 418 *Η διαδικασία Poisson έχει στάσιμες προσαυξήσεις.*

9.2.2 Η διαδικασία Poisson έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Προταση 419 *Οι τυχαίες μεταβλητές S_n^t για $n = 1, 2, \cdots$, και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς η προσαύξηση $N(t+s) - N(t)$ είναι ανεξάρτητη της $N(t)$ όταν $s > 0$.*

Αποδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι οι τυχαίες μεταβλητές x_1^t και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες. Έχουμε ότι

$$P(\{x_1^t > s\} \cap \{N(t) > k\}) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(\{x_1^t > s\} \cap \{N(t) = i\})$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\{x_1^t > s\} \cap \{N(t) = i\} &= \{S_{i+1} > t + s\} \cap \{S_i \leq t\} \cap \{S_{i+1} > t\} \\
&= \{S_i \leq t\} \cap \{S_{i+1} > t + s\} \\
&= \{S_i \leq t\} \cap \{x_{i+1} > t + s - S_i\}
\end{aligned}$$

Επομένως, δεσμεύοντας στις τιμές της S_i έχουμε

$$\begin{aligned}
P(\{x_1^t > s\} \cap \{N(t) > k\}) &= \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_{-\infty}^{t} P(x_{i+1} > t + s - y) f_{S_i}(y) dy \\
&= e^{-\lambda(t+s)} \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_0^t e^{\lambda y} \lambda e^{-\lambda y} \frac{(\lambda y)^{i-1}}{(i-1)!} dy \\
&= e^{-\lambda s} e^{-\lambda t} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!}
\end{aligned}$$

Όμως

$$P(\{N(t) > k\}) = \sum_{i=k+1}^{\infty} P(N(t) = i) = e^{-\lambda t} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!}$$

επομένως προκύπτει ότι

$$P(\{x_1^t > s\} \cap \{N(t) > k\}) = P(\{x_1^t > s\})P(\{N(t) > k\})$$

Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές S_n^t και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες και θα αποδείξουμε ότι και οι S_{n+1}^t και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες.
Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & P(\{S_{n+1}^t > s\} \cap \{N(t) > k\}) \\ = & \sum_{i=k+1}^{\infty} P(\{S_{i+n+1} > t + s\} \cap \{N(t) = i\} \\ = & \sum_{i=k+1}^{\infty} P(\{S_{i+n} > t + s - x_{i+n+1}\} \cap \{N(t) = i\}) \\ = & \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_0^{\infty} P(\{S_{i+n} > t + s - y\} \cap \{N(t) = i\} | x_{i+n+1} = y) \lambda e^{-\lambda y} dy \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} & P(\{S_{i+n} > t + s - y\} \cap \{N(t) = i\} | x_{i+n+1} = y) \\ = & P(\{S_{i+n} > t + s - y\} \cap \{N(t) = i\}) \end{aligned}$$

Αυτό ισχύει επειδή το ενδεχόμενο $\{S_{i+n} > t + s - y\} \cap \{N(t) = i\}$ ανήκει στην σ-άλγεβρα των $x_1, \cdots, x_{i+n}$ τυχαίων μεταβλητών η οποία είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας της x_{i+n+1}. Επίσης λόγω της υπόθεσης της επαγωγής έχουμε ότι

$$P(\{S_n^t > s\} \cap \{N(t) = i\}) = P(\{S_n^t > s\})P(\{N(t) = i\})$$

αλλά και

$$P(\{S_n^t > s\} \cap \{N(t) = i\}) = P(\{S_{i+n} > t + s\} \cap \{N(t) = i\})$$

άρα

$$P(\{S_{i+n} > t + s\} \cap \{N(t) = i\}) = P(\{S_n^t > s\})P(\{N(t) = i\})$$

Επομένως

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=k+1}^{\infty}\int_0^{\infty} P(\{S_{i+n} > t+s-y\}\cap\{N(t)=i\}|x_{i+n+1}=y)\lambda e^{-\lambda y}dy \\
=& \sum_{i=k+1}^{\infty}\int_0^{\infty} P(\{S_n^t > s-y\})P(\{N(t)=i\})\lambda e^{-\lambda y}dy \\
=& \sum_{i=k+1}^{\infty}\int_0^{\infty} P(\{S_n^t > s-y\}|x_{n+1}^t=y)P(\{N(t)=i\})\lambda e^{-\lambda y}dy \\
=& \sum_{i=k+1}^{\infty} P(\{N(t)=i\})\int_0^{\infty} P(\{S_{n+1}^t > s\}|x_{n+1}^t=y)\lambda e^{-\lambda y}dy \\
=& \sum_{i=k+1}^{\infty} P(\{N(t)=i\})P(\{S_{n+1}^t > s\}) \\
=& P(\{S_{n+1}^t > s\})P(\{N(t) > k\})
\end{aligned}
$$

Τώρα είναι εύκολο να δούμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $N^t(s)$ και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες. Το ενδεχόμενο $\{N^t(s)\le l\}$ ανήκει στην σ-άλγεβρα που παράγει η S_{l+1}^t η οποία είναι ανεξάρτητη από την σ-άλγεβρα που παράγει η $N(t)$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 420 *Έστω $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$ και έστω $N(t)$ μια διαδικασία Poisson. Τότε οι προσαυξήσεις*

$$N(t_n)-N(t_{n-1}), N(t_{n-1})-N(t_{n-2}),\cdots,N(t_1)$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές για οποιαδήποτε επιλογή χρόνων $t_1,\cdots,t_n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $n=2$ πρέπει να αποδείξουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές

$$N(t_2)-N(t_1) \quad \text{και} \quad N(t_1)$$

είναι ανεξάρτητες. Όμως $N^{t_1}(t_2-t_1)=N(t_2)-N(t_1)$ η οποία είναι ανεξάρτητη της $N(t_1)$ (δες πρόταση 419). Υποθέτουμε ότι ισχύει για οποιαδήποτε $n-1$ σημεία. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για n σημεία. Σχηματίζουμε την πιθανότητα

$$P\left(\{N(t_n)-N(t_{n-1})\ge l_n\}\cap\cdots\cap\{N(t_1)\ge l_1\}\right)$$

Παρατηρήστε ότι, εφόσον

$$N(t_{n-1})=\underbrace{N(t_1)}_{Z_1}+\underbrace{N(t_2)-N(t_1)}_{Z_2}+\cdots+\underbrace{N(t_{n-1})-N(t_{n-2})}_{Z_{n-1}}$$

έχουμε ότι

$$\{N(t_{n-1})-N(t_{n-2})\ge l_{n-1}\}\cap\cdots\cap\{N(t_1)\ge l_1\}\in\sigma(N(t_{n-1}))$$

δείτε σχετικά λήμμα 48 και παρατήρηση 41. Επειδή $\{N(t_n) - N(t_{n-1}) \geq l_n\} \in \sigma(N^{t_{n-1}}(t_n - t_{n-1}))$ και επειδή οι $N^{t_{n-1}}(t_n - t_{n-1})$ και $N(t_{n-1})$ είναι ανεξάρτητες έπεται ότι

$$\begin{aligned} & P\left(\{N(t_n) - N(t_{n-1}) \geq l_n\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) \geq l_1\}\right) \\ = \; & P(\{N(t_n) - N(t_{n-1}) \geq l_n\}) \\ & \times P(\{N(t_{n-1}) - N(t_{n-2}) \geq l_{n-1}\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) \geq l_1\}) \end{aligned}$$

Το ζητούμενο προκύπτει τώρα από την υπόθεση της επαγωγής. □

9.2.3 Η διαδικασία Poisson είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα

Προταση 421 *Έστω $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. Τότε*

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_n) = k_n\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ = \; & p(t_1, k_1) \cdot p(t_2 - t_1, k_2 - k_1) \cdots p(t_n - t_{n-1}, k_n - k_{n-1}) \end{aligned}$$

όπου $p(t,k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$.

Αποδειξη. Για δυο χρόνους, τους $0 < t_1 < t_2$, έχουμε

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_2) = k_2\} \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ = \; & P(\{N(t_2) = k_2\} | \{N(t_1) = k_1\}) \cdot P(\{N(t_1) = k_1\}) \\ = \; & P(\{N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1\} | \{N(t_1) = k_1\}) \cdot P(\{N(t_1) = k_1\}) \\ = \; & P(\{N(t_2) - N(t_1) = k_2 - k_1\}) \cdot P(\{N(t_1) = k_1\}) \\ = \; & p(t_2 - t_1, k_2 - k_1) \cdot p(t_1, k_1) \end{aligned}$$

Έστω ότι ισχύει για τους χρόνους $0 < t_1 < \cdots < t_n$, δηλαδή

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_n) = k_n\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ = \; & p(t_1, k_1) \cdot p(t_2 - t_1, k_2 - k_1) \cdots p(t_n - t_{n-1}, k_n - k_{n-1}) \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για τους χρόνους $0 < t_1 < \cdots < t_{n+1}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_{n+1}) = k_{n+1}\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ = \; & P(\{N(t_{n+1}) = k_{n+1}\} | \{N(t_n) = k_n\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ & \times P(\{N(t_n) = k_n\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_{n+1}) = k_{n+1}\} | \{N(t_n) = k_n\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ = \; & P(B_{n+1} | B_n \cap \cdots \cap B_1) \\ = \; & P(\{N(t_{n+1} - N(t_n) = k_{n+1} - k_n\}) \\ = \; & p(t_{n+1} - t_n, k_{n+1} - k_n) \end{aligned}$$

όπου $B_i = \{N(t_i) - N(t_{i-1}) = k_i - k_{i-1}\}$ για $i = 1, 2, \cdots, n+1$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Με το επόμενο πόρισμα αποδεικνύουμε στην πραγματικότητα ότι η διαδικασία Poisson είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ 422 *Έστω οι χρόνοι* $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$. *Τότε*

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_n) = k_n\}|\{N(t_{n-1} = k_{n-1}\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ = \; & P(\{N(t_n) = k_n\}|\{N(t_{n-1} = k_{n-1}\}) \end{aligned}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_n) = k_n\}|\{N(t_{n-1} = k_{n-1}\} \cap \cdots \cap \{N(t_1) = k_1\}) \\ = \; & \frac{p(t_1, k_1) \cdot p(t_2 - t_1, k_2 - k_1) \cdots p(t_n - t_{n-1}, k_n - k_{n-1})}{p(t_1, k_1) \cdot p(t_2 - t_1, k_2 - k_1) \cdots p(t_{n-1} - t_{n-2}, k_{n-1} - k_{n-2})} \\ = \; & p(t_n - t_{n-1}, k_n - k_{n-1}) \\ = \; & P(\{N(t_n) = k_n\}|\{N(t_{n-1} = k_{n-1}\}) \end{aligned}$$

□

Σε πλήρη αντιστοιχία με τον ορισμό της διακριτής Μαρκοβιανής αλυσίδας (ορισμός 226) δίνουμε τον επόμενο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 423 *Έστω μια στοχαστική διαδικασία* $X(t)$ *συνεχούς χρόνου με διακριτό σύνολο καταστάσεων. Θα λέμε ότι είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα όταν*

$$\begin{aligned} & P(\{X(t_n) = k_n\}|\{X(t_{n-1} = k_{n-1}\} \cap \cdots \cap \{X(t_1) = k_1\}) \\ = \; & P(\{X(t_n) = k_n\}|\{X(t_{n-1} = k_{n-1}\}) \end{aligned}$$

για $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ *ένα οποιοδήποτε σύνολο χρόνων και* $k_1, \cdots, k_n$ *οποιεσδήποτε καταστάσεις της διαδικασίας.*

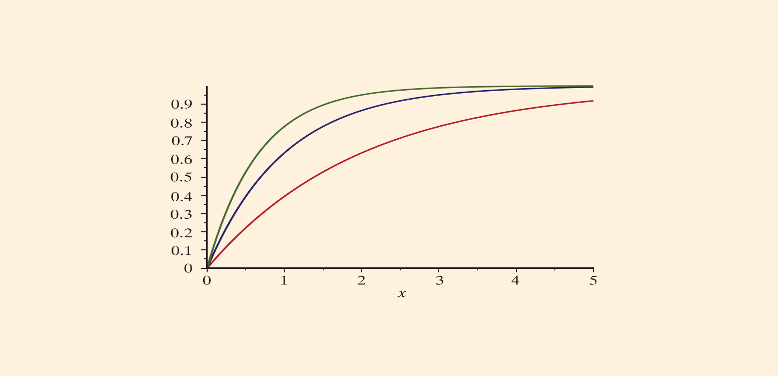
ΠΟΡΙΣΜΑ 424 *Η διαδικασία Poisson είναι μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης*

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!} & \cdots \\ 0 & e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Τα στοιχεία του πίνακα $P(t)$ *είναι τέτοια ώστε*

$$P_{ij}(t) = P(\{N(t_0 + t) = j\}|\{N(t_0) = i\}) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & \textit{όταν } i \le j \\ 0, & \textit{αλλιώς} \end{cases}$$

για οποιαδήποτε $t, t_0 \geq 0$.



Σχήμα 9.2: Τα γραφήματα της συνάρτησης κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Με κόκκινο είναι για $\lambda = 0.5$ με μπλε για $\lambda = 1$ και με πράσινο για $\lambda = 1.5$.

$\square$

Παρατηρηση 425 (Περί Περιοδικότητας) *Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι δεν έχει νόημα να ορίσουμε την έννοια της περιόδου σε μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου.*

9.2.4 Η διαδικασία Poisson είναι martingale

Κάθε τυχαία μεταβλητή $N(t)$ παράγει μια σ-άλγεβρα, την $\sigma(N(t))$ την οποία συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_t$. Είναι φανερό ότι $\sigma(N(s)) \subseteq \sigma(N(t) = N(s) + N(t) - N(s))$ για $0 < s \leq t$. Κάθε οικογένεια σ-αλγεβρών η οποία είναι τέτοια ώστε $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ όταν $s < t$ ονομάζεται φίλτρο. Επίσης, αν μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη, όπου $\mathcal{F}_t$ φίλτρο, τότε λέμε ότι η $X(t)$ είναι προσαρμοσμένη στο φίλτρο $\mathcal{F}_t$. Επειδή οι τυχαίες μεταβλητές $N(t) - N(s)$ και $N(s)$ είναι ανεξάρτητες έπεται ότι η $N(t) - N(s)$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_s$.

Ορισμος 426 *Μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία στο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$ είναι martingale αν $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ και για κάθε $s < t$ έχουμε ότι $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$.*

Θεωρημα 427 *Η στοχαστική διαδικασία $N(t) - \lambda t$ είναι martingale ως προς το φίλτρο που παράγει η διαδικασία Poisson.*

Αποδειξη. Το φίλτρο $\mathcal{F}_t = \sigma(N(t))$ είναι (εκ κατασκευής) τέτοιο ώστε η $N(t)$ να είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη. Επίσης

$$\mathbb{E}(N(t)) = \lambda t < \infty$$

Μένει να αποδείξουμε ότι

$$\mathbb{E}(N(t) - \lambda t|\mathcal{F}_s) = N(s) - \lambda s$$

όταν $s \le t$.
Όμως

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N(t) - \lambda t | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(N(t) - N(s) + N(s) - \lambda t | \mathcal{F}_t) \\
&= \mathbb{E}(N(t) - N(s) | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(N(s) - \lambda t | \mathcal{F}_s) \\
&= \mathbb{E}(N(t) - N(s)) + N(s) - \lambda t \\
&= \lambda(t - s) + N(s) - \lambda t \\
&= N(s) - \lambda s
\end{aligned}$$

□

9.3 Ισοδύναμοι ορισμοί της διαδικασίας Poisson

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τρεις ακόμη ορισμούς της διαδικασίας Poisson που εμφανίζονται συχνά στην βιβλιογραφία. Θα αποδείξουμε ότι και οι τέσσερις ορισμοί είναι ισοδύναμοι. Έτσι, σε εφαρμογές μπορούμε να χρησιμοποιούμε όποιον από τους ορισμούς θέλουμε ανάλογα με το τι είναι βολικότερο κάθε φορά.

Ορισμος 428 (Δεύτερος ορισμός διαδικασίας Poisson) *Η στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \ge 0\}$ λέγεται στοχαστική διαδικασία Poisson παραμέτρου $\lambda > 0$ αν*

(i) $N(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *για κάθε* $t \ge 0$ *και* $N(0) = 0$,

(ii) *η διαδικασία έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις,*

(iii) $P(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$,

(iv) $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda h + o(h)$

όπου $o(h)$ *είναι μια ποσότητα τέτοια ώστε* $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

Ορισμος 429 (Τρίτος ορισμός διαδικασίας Poisson) *Η στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \ge 0\}$ λέγεται στοχαστική διαδικασία Poisson παραμέτρου $\lambda > 0$ αν*

(i) $N(t) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *για κάθε* $t \ge 0$ *και* $N(0) = 0$,

(ii) *η διαδικασία έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις,*

(iii) $P(N(t+s) - N(t) = n) = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}$ *για* $n = 0, 1, \cdots$, *για κάθε* $s, t \ge 0$.

Ορισμος 430 (Τέταρτος ορισμός διαδικασίας Poisson) *Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου $\{N(t), t \geq 0\}$ με $N(0) = 0$ θα λέγεται διαδικασία Poisson παραμέτρου λ αν το σύνολο καταστάσεων είναι το $\mathbb{N} \cup \{0\}$ και ο πίνακας μετάβασης είναι ο*

$$P(t) = \begin{pmatrix} e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2!} & \cdots \\ 0 & e^{-\lambda t} & e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)}{1!} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Τα στοιχεία του πίνακα $P(t)$ είναι τέτοια ώστε

$$P_{ij}(t) = P(\{N(t_0 + t) = j\} | \{N(t_0) = i\}) = \begin{cases} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}, & \textit{όταν } i \leq j \\ 0, & \textit{αλλιώς} \end{cases}$$

για οποιαδήποτε $t, t_0 \geq 0$.

Θεωρημα 431 *Οι ορισμοί 428 και 429 είναι ισοδύναμοι.*

Αποδειξη. Έστω ότι η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 428. Θέτουμε $M(s) = N(t+s) - N(t)$ για $s, t \geq 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της τυχαίας μεταβλητής $M(s+h)$ για $s, h \geq 0$ (δες ορισμό 171). Ο μετασχηματισμός είναι η συνάρτηση

$$\phi_{M(s+h)}(u) = \mathbb{E}\left(e^{iuM(s+h)}\right)$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την συνάρτηση $\phi_{M(s)}(u)$ (χαρακτηριστική συνάρτηση).
Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_{M(s+h)}(u) &= \mathbb{E}\left(e^{iuM(s+h)}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(e^{iuM(s)}\right) \cdot \mathbb{E}\left(e^{iu(M(s+h)-M(s))}\right) \\ &= \phi_{M(s)}(u) \cdot \phi_{M(s+h)-M(s)}(u) \end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{\phi_{M(s+h)}(u) - \phi_{M(s)}(u)}{h} = \phi_{M(s)}(u)\frac{\phi_{M(s+h)-M(s)} - 1}{h}$$

Όμως

$$\begin{aligned}
& \phi_{M(s+h)-M(s)} - 1 \\
= \;& \mathbb{E}\left(e^{iu(M(s+h)-M(s))}\right) - 1 \\
= \;& \mathbb{E}\left(e^{iu(M(s+h)-M(s))}\mathbb{I}_{M(s+h)-M(s)=0}\right) \\
& +\mathbb{E}\left(e^{iu(M(s+h)-M(s))}\mathbb{I}_{M(s+h)-M(s)=1}\right) - 1 \\
= \;& P(M(s+h)-M(s)=0) + e^{iu}P(M(s+h)-M(s)=1) - 1 \\
= \;& \lambda h(e^{iu}-1)
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\frac{\left(\phi_{M(s)}(u)\right)'_s}{\phi_{M(s)}(u)} = \lambda(e^{iu}-1)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς s (δείτε την ποσότητα $\phi_{M(s)}(u)$ ως συνάρτηση δυο μεταβλητών, των u, s) έχουμε ότι

$$\phi_{M(s)}(u) = e^{\lambda s(e^{iu}-1)}$$

Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής $M(s)$ από το θεώρημα 174. Όμως θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέσο λs και θα διαπιστώσουμε ότι συμπίπτουν. Έχουμε

$$\phi_X(u) = \mathbb{E}(e^{iuX}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk}P(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iuk}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda s e^{iu})^k}{k!} = e^{\lambda s(e^{iu}-1)}$$

Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι αντιστρέψιμος προκύπτει τελικά ότι η $M(s)$ είναι τέτοια ώστε

$$P(M(s) = N(t+s) - N(t) = n) = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}, \quad \text{για} \quad n = 0, 1, \cdots,$$

Αυτό σημαίνει ότι αν η $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 428 τότε θα ικανοποιεί και τον ορισμό 429.
Αντίστροφα, αν η $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 429 τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
P(N(t+h)-N(t)=0) = &\quad e^{-\lambda h} &= 1 - \lambda h + o(h) \\
P(N(t+h)-N(h)=1) = &\; \lambda h e^{-\lambda h} &= \lambda h + o(h)
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σειρά Taylor της εκθετικής συνάρτησης. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 432 *Οι ορισμοί 429 και 409 είναι ισοδύναμοι.*

Αποδειξη. Αν μια στοχαστική διαδικασία ικανοποιεί τον ορισμό 409 έχουμε ήδη αποδείξει ότι ικανοποιεί και τον ορισμό 429.
Αντίστροφα, αν μια στοχαστική διαδικασία ικανοποιεί τον ορισμό 429 θα αποδείξουμε ότι ικανοποιεί και τον ορισμό 409. Ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $x_1, x_2, \cdots$, οι οποίες παριστούν τους χρόνους μεταξύ δυο αλμάτων της στοχαστικής διαδικασίας $N(t)$. Προφανώς ισχύει ότι

$$\{N(t) = n\} = \{x_1 + \cdots + x_n \leq t\} \cap \{x_1 + \cdots + x_{n+1} > t\}$$

Επίσης ισχύει ότι

$$N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$$

όπου $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Για να ικανοποιεί η $N(t)$ τον ορισμό 409 θα πρέπει να αποδείξουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $x_1, x_2, \cdots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ.
Προφανώς ισχύει

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1 \\ S_2 &= x_1 + x_2 \\ &\vdots \\ S_n &= x_1 + \cdots + x_n \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι αν η από κοινού πυκνότητα των $S_1, \cdots, S_n$ είναι η $f_S(s_1, \cdots, s_n)$ τότε η από κοινού πυκνότητα των $x_1, \cdots, x_n$ είναι η

$$f_X(t_1, \cdots, t_n) = f_S(t_1, t_1 + t_2, \cdots, t_1 + \cdots + t_n)$$

αφού η Ιακωβιανή ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι ίση με την μονάδα.
Επομένως μένει να υπολογίσουμε την από κοινού πυκνότητα των $S_1, \cdots, S_n$. Αν $F_S(s_1, \cdots, s_n)$ είναι η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $S_1, \cdots, S_n$ τότε η μεικτή παράγωγος $\frac{\partial F_S(s_1, \cdots, s_n)}{\partial s_1, \cdots, s_n}$ θα είναι ίση με την από κοινού πυκνότητα $f_S(s_1, \cdots, s_n)$.
Αρα, θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο

$$\lim_{h_1, \cdots, h_n \to 0} \frac{F_S(s_1 + h_1, \cdots, s_n + h_n) - F_S(s_1, \cdots, s_n)}{h_1 \cdot h_2 \cdots h_n}$$

Για $0 < t_1 < \cdots < t_n$ σχηματίζουμε το ενδεχόμενο

$$\bigcap_{n=1}^{n} \{S_i \in (t_i, t_i + h_i)\}$$

Το ενδεχόμενο αυτό είναι ίσο με

$$\{N(t_1) = 0\} \bigcap_{i=1}^{n-1} (\{N(h_i) = 1\} \cap \{N(t_{i+1} - t_i + h_i) = 0\}) \cap \{N(h_n) \geq 1\}$$

'ρα

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{n}\{S_i \in (t_i, t_i + h_i)\}\right) = \lambda^{n-1}e^{-\lambda t_n}h_1 \cdots h_{n-1}(1 - e^{-\lambda h_n})$$

Η πυκνότητα f_S θα είναι το όριο

$$\lim_{h_1,\cdots,h_n \to 0} \frac{\lambda^{n-1}e^{-\lambda t_n}h_1 \cdots h_{n-1}(1 - e^{-\lambda h_n})}{h_1 \cdot h_2 \cdots h_n}$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι είναι ίσο με $f_S = \lambda^n e^{-\lambda t_n}$.
'ρα τελικά

$$f_X(t_1, \cdots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda e^{-\lambda t_i}\mathbb{I}_{\{t_i > 0\}}\right)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι τυχαίες μεταβλητές $x_1, \cdots, x_n$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 433 *Οι ορισμοί 430 και 429 είναι ισοδύναμοι.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω ότι η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 429. Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ήδη αποδείξει ότι ικανοποιεί και τον ορισμό 430.
Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 430. Θα αποδείξουμε ότι ικανοποιεί και τον ορισμό 429.
Σημειώστε ότι, εφόσον $N(0) = 0$,

$$P(\{N(t_0 + t) = i\}) = P(\{N(t_0 + t) = i\}|N(0) = 0) = e^{-\lambda(t+t_0)}\frac{(\lambda(t + t_0))^i}{i!}$$

για κάθε $t, t_0 \geq 0$.
Θα μελετήσουμε την πιθανότητα

$$P(\{N(t_0 + t) - N(t_0) > k\} \cap \{N(t_0) > l\})$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_0 + t) - N(t_0) > k\} \cap \{N(t_0) > l\}) \\ = & \sum_{i=l+1}^{\infty} P(\{N(t_0 + t) - N(t_0) > k\} \cap \{N(t_0) = i\}) \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} & P(\{N(t_0 + t) - N(t_0) > k\} \cap \{N(t_0) = l\}) \\ = & \sum_{j=k+1}^{\infty} P(\{N(t_0 + t) - N(t_0) = j\} \cap \{N(t_0) = i\}) \end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}
& P(\{N(t_0+t) - N(t_0) = j\} \cap \{N(t_0) = i\}) \\
= \; & P(\{N(t_0+t) = j+i\} | \{N(t_0) = i\}) \cdot P(\{N(t_0) = i\}) \\
= \; & e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \cdot e^{-\lambda t_0} \frac{(\lambda t_0)^i}{i!}
\end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά έχουμε

$$\begin{aligned}
& P(\{N(t_0+t) - N(t_0) = j\}) \\
= \; & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{N(t_0+t) - N(t_0) = j\} | N(t_0) = i) \cdot P(\{N(t_0) = i\}) \\
= \; & \sum_{i=0}^{\infty} P(\{N(t_0+t) = j+i\} | N(t_0) = i) \cdot P(\{N(t_0) = i\}) \\
= \; & \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \cdot P(\{N(t_0) = i\}) \\
= \; & e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^j}{j!}
\end{aligned}$$

Τελικά

$$\begin{aligned}
& P(\{N(t_0+t) - N(t_0) > k\} \cap \{N(t_0) > l\}) \\
= \; & \sum_{i=l+1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} P(\{N(t_0+t) - N(t_0) = j\}) \cdot P(\{N(t_0) = i\}) \\
= \; & P(\{N(t_0+t) - N(t_0) > k\}) \cdot P(\{N(t_0) > l\})
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι, για $0 \leq s < t$ ισχύει ότι

$$P(N(t) - N(s) = k) = P(N(t-s) = k)$$

Με ακριβώς τα ίδια επιχειρήματα με το θεώρημα 420 αποδεικνύουμε ότι έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Εύκολα παρατηρούμε από τα παραπάνω ότι έχει και στάσιμες προσαυξήσεις και μάλιστα

$$P(N(t+s) - N(t) = n) = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!} \quad \text{για} \quad n = 0, 1, \cdots,$$

για κάθε $s, t \geq 0$. Δηλαδή η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 429.

$\square$

9.4 Μερικές ιδιότητες της διαδικασίας Poisson

Πρόταση 434 *Ισχύει ότι*

$$P(S_0 < S_1 < \cdots < S_n < \cdots) = 1$$

Επιπλέον

$$P\left(\{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\frac{1}{\lambda}<\}\right)=1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού $S_n - S_{n-1} = x_n$ και $P(\{x_n > 0\}) = e^{-\lambda\cdot 0} = 1$ βλέπουμε ότι

$$P(S_0 < S_1 < \cdots < S_n < \cdots) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x_n > 0\}\right) = 1$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε την άσκηση 14.
Εφόσον $\mathbb{E}(x_n) = \frac{1}{\lambda}$ τότε από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών προκύπτει ότι

$$P\left(\{\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\frac{1}{\lambda}<\}\right)=1$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ **435** *Ισχύει ότι*

$$P\left(\{\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\lambda\}\right)=1$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε ότι

$$N(n) = N(1) + (N(2) - N(1)) + \cdots + (N(n) - N(n-1))$$

όπου $N(1), N(2) - N(1), \cdots, N(n) - N(n-1)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή λ. Επομένως, από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}=\lambda\right)$$

Για $n \le t \le n+1$ έχουμε ότι $N(n) \le N(t) \le N(n+1)$ επομένως

$$\frac{N(n)}{n+1} \le \frac{N(t)}{t} \le \frac{N(n+1)}{n}$$

Τότε καθώς $n \to \infty$ έχουμε ότι και $t \to \infty$ και επιπλέον

$$P\left(\{\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\lambda\}\right)=1$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ **436** (Ισχυρή Μαρκοβιανή Ιδιότητα) *Για κάθε $l \in \mathbb{N}$ η στοχαστική διαδικασία $N^l(t) = N(S_l + t) - l$ είναι επίσης διαδικασία Poisson παραμέτρου λ και η τυχαία μεταβλητή $N^l(t)$ είναι ανεξάρτητη των $x_1, \cdots, x_l$.*

Αποδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} N(S_l+t) &= \max\{n\in\mathbb{N} : S_n \le S_l + t\} \\ &= \max\{n\in\mathbb{N} : \sum_{j=l+1}^{n} x_j \le t\} \\ &= \max\{n\in\mathbb{N} : \sum_{j=1}^{n-l} x_{j+l} \le t\} \\ &= l + \max\{k\in\mathbb{N} : \sum_{j=1}^{k} x_{j+m} \le t\} \end{aligned}$$

'ρα

$$N^l(t) = \max\{k\in\mathbb{N} : \sum_{j=1}^{k} x_{j+l} \le t\}$$

Επομένως η $N^l(t)$ ικανοποιεί τον πρώτο ορισμό της διαδικασίας Poisson παραμέτρου λ. Είναι επίσης προφανές ότι η τυχαία μεταβλητή $N^l(t)$ είναι ανεξάρτητη των $x_1, \cdots, x_l$. □

Θεωρημα 437 *Έστω $N^1(t)$ και $N^2(t)$ δυο ανεξάρτητες μεταξύ τους διαδικασίες Poisson παραμέτρων λ και μ αντίστοιχα. Τότε η στοχαστική διαδικασία $N(t) = N^1(t) + N^2(t)$ είναι επίσης διαδικασία Poisson παραμέτρου $\lambda + \mu$.*

Αποδειξη. Θα αποδείξουμε ότι η $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 428. Είναι προφανές ότι $N(0) = 0$ και ότι έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις δεδομένου ότι οι N^1 και N^2 είναι ανεξάρτητες.
Έχουμε επίσης ότι

$$\begin{aligned} & P(N(t+h) - N(t) = 0) \\ =\ & P(\{N^1(t+h) - N^1(t) = 0\} \cap \{N^2(t+h) - N^2(t) = 0\}) \\ =\ & P(N^1(t+h) - N^1(t) = 0) \cdot P(N^2(t+h) - N^2(t) = 0) \\ =\ & (1 - \lambda h + o(h)) \cdot (1 - \mu h + o(h)) \\ =\ & 1 - (\lambda+\mu)h + o(h) \end{aligned}$$

'ρα η $N(t)$ ικανοποιεί τον ορισμό 428 με παράμετρο $\lambda + \mu$. □

Θεωρημα 438 *Έστω $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παραμέτρους $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ αντίστοιχα. Έστω $M = \min\{x_1, \cdots, x_n\}$. Τότε*

(i) *Για $t > 0$ ισχύει ότι $P(M > t) = e^{-t(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)}$*

(ii) Για $k = 1, \cdots, n$ ισχύει ότι $P(M = x_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για την πρώτη σχέση έχουμε

$$P(M > t) = P(x_1 > t, \cdots, x_n > t) = P(x_1 > t)\cdots P(x_n > t) = e^{-t(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}$$

Για την δεύτερη ιδιότητα έχουμε όταν $1 \le k \le n$,

$$\begin{aligned} P(M = x_k) &= P(x_1 \ge x_k, \cdots, x_n \ge x_k) \\ &= \int_0^\infty P(x_1 \ge t, \cdots, x_n \ge t | x_k = t)\lambda_k e^{-\lambda_k t} dt \\ &= \int_0^\infty P(x_1 \ge t)\cdots P(x_{k-1} \ge t)P(x_{k+1} \ge t)\cdots P(x_n \ge t)\lambda_k e^{-\lambda_k t} dt \\ &= \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} \end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 439 *Σε μια στάση λεωφορείων περνούν τρία διαφορετικά λεωφορεία με διαφορετικούς προορισμούς. Το λεωφορείο A περνά κατά μέση τιμή μια φορά στα 10 λεπτά, το B μια φορά στα 15 λεπτά και το Γ μια φορά στα 20 λεπτά.*
Όταν κανείς φτάνει στην στάση, ποια είναι η πιθανότητα να έρθει πρώτο το λεωφορείο B; Αν συμβολίσουμε με x_A, x_B, x_Γ τους χρόνους για την πρώτη άφιξη των A,B,Γ λεωφορείων, τότε η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι η $P(\min\{x_A, x_B, x_\Gamma\} = x_B)$. Υποθέτοντας ότι οι χρόνοι αυτοί ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παραμέτρους $\lambda_A = 1/10$, $\lambda_B = 1/15$ και $\lambda_\Gamma = 1/20$ τότε θα ισχύει

$$P(\min\{x_A, x_B, x_\Gamma\} = x_B) = \frac{1/15}{1/10 + 1/15 + 1/20}$$

Φτάνοντας στην στάση πόσο χρόνο, κατά μέσο όρο, θα περιμένει κάποιος μέχρι να έρθει κάποιο από τα λεωφορεία; Η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι η μέση τιμή της $\min\{x_A, x_B, x_\Gamma\}$. Η τυχαία αυτή μεταβλητή ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $(\lambda_A + \lambda_B + \lambda_\Gamma) = 1/10 + 1/15 + 1/20 = \frac{13}{60}$ και επομένως η μέση τιμή είναι η $\frac{60}{13}$. □

Έστω ότι σε ένα φαινόμενο το οποίο μοντελοποιείται από μια διαδικασία Poisson $N(t)$ παραμέτρου λ τα γεγονότα διακρίνονται σε δυο διαφορετικά είδη. Το γεγονός τύπου I συμβαίνει με πιθανότητα $p > 0$ και άρα το γεγονός τύπου II συμβαίνει με πιθανότητα $1 - p$. Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ότι η διαδικασία $M(t)$ η οποία μετρά το πλήθος των γεγονότων τύπου I είναι επίσης μια διαδικασία Poisson παραμέτρου $p\lambda$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 440 *Έστω $N(t)$ μια διαδικασία Poisson παραμέτρου λ και $p \in (0, 1)$ της οποίας τα γεγονότα διακρίνονται σε δυο τύπους, τους τύπους I και II. Η στοχαστική διαδικασία που μετρά τα γεγονότα τύπου I είναι μια διαδικασία Poisson παραμέτρου $p\lambda$ όταν η πιθανότητα να συμβεί γεγονός τύπου I είναι ίση με p και είναι ανεξάρτητο από το προηγούμενο γεγονός.*

Αποδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τον πρώτο ορισμό της διαδικασίας Poisson, δηλαδή τον ορισμό 409.
Εφόσον η $N(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson παραμέτρου λ οι ενδιάμεσοι χρόνοι $x_1, x_2, \cdots$, μεταξύ δυο γεγονότων ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ. Συμβολίζουμε τους ενδιάμεσους χρόνους της διαδικασίας $M(t)$ με $x_1^M, x_2^M, \cdots$, Από τις υποθέσεις προκύπτει ότι πρόκειται για μια ανεξάρτητη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και μένει να αποδείξουμε ότι ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου $p\lambda$. Παρατηρήστε ότι κάθε τέτοια τυχαία μεταβλητή είναι της μορφής $x^M = x_{l+1} + x_{l+2} + \cdots + x_{l+k} + x_{l+k+1}$ όταν τα $l, l+k+1$ γεγονότα είναι τύπου I και τα γεγονότα $l+1, l+2, \cdots, l+k$ είναι γεγονότα τύπου II.
Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier μιας από τις τυχαίες μεταβλητές $x_1^M, x_2^M, \cdots$, Συμβολίζουμε με B_k το ενδεχόμενο

$$B_k = \{k \text{ το πλήθος γεγονότα τύπου II και έπειτα γεγονός τύπου I}\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(e^{isx^M}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p \mathbb{E}\left(e^{isx^M}|B_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p \mathbb{E}\left(e^{isx_{l+1}} \cdots e^{isx_{l+k+1}}|B_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p \left(\mathbb{E}(e^{isx_1})\right)^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k p \left(\frac{\lambda}{\lambda - is}\right)^{k+1} \\
&= \frac{p\lambda}{p\lambda - is}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ είναι $\frac{\lambda}{\lambda - is}$. Πράγματι, αν x ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda > 0$ θα έχουμε

$$\mathbb{E}(e^{isx}) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{isx} dx = \frac{\lambda}{\lambda - is}$$

Αφού ο μετασχηματισμός Fourier ενός στοιχείου της ακολουθίας $x_1^M, x_2^M, \cdots$, είναι ίσος με $\frac{p\lambda}{p\lambda - is}$ και επειδή ο μετασχηματισμός Fourier είναι αντιστρέψιμος έπεται ότι οι τυχαίες μεταβλητές $x_1^M, x_2^M, \cdots$, ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου $p\lambda$. Αυτό σημαίνει ότι η $M(t)$ είναι διαδικασία Poisson παραμέτρου $p\lambda$. □

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την δεσμευμένη πυκνότητα των $S_1, \cdots, S_m$ δεδομένου ότι έχουν γίνει m άλματα στο χρονικό διάστημα $(s, s+t)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 441 *Έστω $N(t)$ μια διαδικασία Poisson παραμέτρου λ. Για κάθε $s, t > 0$ και $m = 1, 2, \cdots$, η δεσμευμένη πυκνότητα των $S_1, \cdots, S_m$ δεδομένου ότι $N(t+s) - N(s) = m$ είναι ίση με*

$$
\begin{aligned}
& f_{S_1,\cdots,S_m}(t_1, \cdots, t_m | m \text{ άλματα στο διάστημα } (s, s+t)) \\
= & \left(\frac{m!}{t^m}\right) \mathbb{I}_{\{s<t_1<\cdots<t_m<t+s\}}
\end{aligned}
$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό 428. Για οποιαδήποτε $s < t_1 < \cdots < t_m < (t+s)$ έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
& P(\{t_i < S_i < t_i + h_i, 1 \leq i \leq m\} \cap \{m \text{ άλματα στο διάστημα } (s, s+t)\}) \\
= & P(\{N(t_k) - N(t_{k-1} + h_{k-1}) = 0\} \cap \{N(t_k + h_k) - N(t_k) = 1\} \\
& \cap \{N(t+s) - N(t_m + h_m) = 0\}, 1 \leq k \leq m) \\
= & \left(\prod_{i=1}^{m} e^{-\lambda(t_i - t_{i-1} - h_{i-1})}(\lambda h_i)\right) \cdot e^{-\lambda(t+s-t_m-h_m)}
\end{aligned}
$$

Όμως

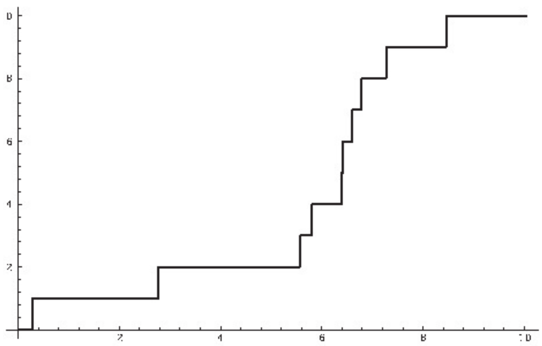
$$
P(N(t+s) - N(s) = m) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!}
$$

Διαιρώντας με την πιθανότητα αυτή και το γινόμενο $h_1 \cdot h_2 \cdots h_m$ και λαμβάνοντας το όριο καθώς $h_1, \cdots, h_m \to 0$ προκύπτει το ζητούμενο. Παρατηρήστε ότι αν $m = 1$ τότε η δεσμευμένη πυκνότητα της S_1 δεδομένου ενός μόνο άλματος στο $(s, s+t)$ είναι αυτή της ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα $(s, s+t)$. □

Με το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί κάποιος για παράδειγμα να υπολογίσει μια μέση τιμή της μορφής

$$
\mathbb{E}(g(S_1, S_2) | N(t+s) - N(s) = 2)
$$

για μια συνάρτηση $g(x, y)$. Σημειώστε ότι η διαδικασία Poisson έχει στάσιμες προσαυξήσεις 416 και αυτό σημαίνει ότι από τον χρόνο s και μετά μπορείς να την βλέπεις σαν μια νέα διαδικασία με την ίδια κατανομή. Δηλαδή το πρώτο και δεύτερο άλμα μπορεί να έχουν συμβεί πριν τον χρόνο s αλλά εδώ μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την παραπάνω μέση τιμή δεδομένου ότι θα συμβούν δυο άλματα στο χρονικό διάστημα $(s, t+s)$.



Σχήμα 9.3: Πιθανό μονοπάτι της Poisson

Στο επόμενο παράδειγμα θα δώσουμε μερικές εφαρμογές της θεωρίας (αν και όχι ρεαλιστικές) για την καλύτερη κατανόηση της.

Παραδειγμα 442 *Το μάθημα του Απειροστικού Λογισμού Ι ξεκινά στις 15:15 με περισσότερους από 500 εγγεγραμμένους φοιτητές. Έχει παρατηρηθεί ότι, στο χρονικό διάστημα 15:00-15:20, οι φοιτητές εισέρχονται στην αίθουσα με ρυθμό αφίξεων 30 φοιτητές ανά λεπτό. Θα μετρήσουμε την πιθανότητα να έρθουν περισσότεροι από 100 φοιτητές μεταξύ 15:15-15:20.*
Θα υποθέσουμε ότι αν $N(t)$ είναι ο αριθμός των φοιτητών που έχει αφιχθεί στην αίθουσα την χρονική στιγμή $t \in [15:00 - 15:20]$ τότε η $N(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson παραμέτρου λt. Έχουμε υπολογίσει την μέση τιμή μιας τέτοιας διαδικασίας και είναι ίση με λt. Δηλαδή, κατά μέσο όρο, περιμένουμε να έχουν αφιχθεί λt φοιτητές κατά το t λεπτό μετά τις 15:00 (χρόνος μηδέν). Επομένως, ο ρυθμός αφίξεων παριστάνεται από την παράμετρο λ.
Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα $P(N(15:20) - N(15:15) > 100)$. Λόγω του ότι η διαδικασία Poisson έχει στάσιμες προσαυξήσεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} P(N(15:20) - N(15:15) > 100) &= P(N(15:05) > 100) \\ &= 1 - P(N(15:05) \leq 100) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{100} e^{-30\cdot 5} \frac{(30\cdot 5)^k}{k!} \\ &\approx 0.99 \end{aligned}$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την πιθανότητα να έχουν αφιχθεί ακριβώς 100 φοιτητές μέχρι τις 15:10 και 250 μέχρι τις 15:15. Δηλαδή μας ενδιαφέρει η πιθανότητα

$$P(N(15:10)=100, N(15:15)=250)$$

Όμως

$$\begin{aligned} & P(N(15:10)=100, N(15:15)=250) \\ = & P(N(15:10)=100, N(15:15)-N(15:10)=150) \\ = & P(N(15:10)=100)\cdot P(N(15:15)-N(15:10)=150) \text{ (ανεξάρτητες προσαυξήσεις)} \\ = & P(N(15:10)=100)\cdot P(N(15:05)=150) \text{ (στάσιμες προσαυξήσεις)} \\ = & \left(\frac{e^{-30\cdot 10}(30\cdot 10)^{100}}{100!}\right)\cdot\left(\frac{e^{-30\cdot 5}(30\cdot 5)^{150}}{150!}\right) \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι δεν είναι σωστό να γράψουμε $P(N(15:10)=100, N(15:15)-N(15:10)=150) = P(N(15:10)=100, N(15:05)=150) = P(N(15:10)=100)\cdot P(N(15:05)=150)$.

Ας υποθέσουμε στην συνέχεια ότι φθάνουν 100 φοιτητές στα πρώτα 5 λεπτά. Δεδομένου αυτού, ποια είναι η πιθανότητα να έρθουν 200 φοιτητές το πολύ μέχρι και τα 10 πρώτα λεπτά; Η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι η

$$\begin{aligned} & P(N(15:10)\leq 200|N(15:05)=100) \\ = & P(N(15:10)-100\leq 100|N(15:05)=100) \\ = & P(N(15:10)-N(15:05)\leq 100) \\ = & P(N(15:05)\leq 100) \\ = & \sum_{k=0}^{100}\frac{e^{-30\cdot 5}(30\cdot 5)^k}{k!} \end{aligned}$$

□

Περισσότερα στο αντικείμενο αυτό μπορεί να δει κανείς στα βιβλία [12], [32], [34] καθώς και στην ξενόγλωσση βιβλιογραφία.

9.5 Η σύνθετη διαδικασία Poisson

Μια στοχαστική διαδικασία $X(t)$ ονομάζεται σύνθετη διαδικασία Poisson αν

$$X(t)=\sum_{i=0}^{N(t)} Y_i$$

όπου $N(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ και οι τυχαίες μεταβλητές Y_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και επίσης ανεξάρτητες από την $N(t)$ ενώ θεωρούμε ότι $Y_0=0$.

Θεωρημα 443 *Η χαρακτηριστική συνάρτηση της σύνθετης διαδικασίας Poisson είναι η*

$$\Psi_{X(t)}(s) = G_{N(t)}(\Psi_{Y_1}(s)) = e^{\lambda t(\Psi_{Y_1}(s)-1)}$$

όπου $G_{N(t)}(s) = e^{\lambda t(s-1)}$, δηλαδή η πιθανογεννήτρια της $N(t)$ ενώ $\Psi_{Y_1}(s)$ είναι η κοινή χαρακτηριστική συνάρτηση των Y_i.

Αποδειξη. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\Psi_{X(t)}(s) &= \mathbb{E}(e^{isX(t)}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}(e^{is\sum_{j=0}^{k} Y_j}\mathbb{I}_{\{N(t)=k\}}) \text{ (απόλυτη σύγκλιση)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t)=k)\prod_{j=0}^{k}\mathbb{E}(e^{isY_j}) \text{ (ανεξαρτησία)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N(t)=k)(\Psi_{Y_1}(s))^k \text{ (αφού } Y_0 = 0) \\
&= e^{\lambda t(\Psi_{Y_1}(s)-1)}
\end{aligned}$$

□

Εύκολα προκύπτει το επόμενο αποτέλεσμα.

Προταση 444 *Η μέση τιμή και η διακύμανση της σύνθετης διαδικασίας Poisson είναι*

$$\mathbb{E}(X(t)) = \lambda t\mathbb{E}(Y_1) \quad \text{και} \quad \mathrm{Var}(X(t)) = \lambda t\mathbb{E}(Y_1^2)$$

Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα η επόμενη σχέση

$$\Psi_{X(t)}(s) = e^{\lambda t(\Psi_{Y_1}(s)-1)} = [G_V(\Psi_{Y_1})]^k$$

για οποιοδήποτε $k \in \mathbb{N}$, όπου G_V είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της V η οποία ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\frac{\lambda t}{k}$. Η ιδιότητα αυτή είναι γνωστή ως Infinite Divisibility.

9.5.1 Εφαρμογή στον Αναλογισμό

Θα περιγράψουμε ένα παράδειγμα χρήσης της σύνθετης διαδικασίας Poisson στα Αναλογιστικά Μαθηματικά.
Σε έναν ασφαλιστικό φορέα υποβάλλονται αιτήματα αποζημιώσεων όπου υποθέτουμε ότι ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δυο αιτημάτων ακολουθεί την εκθετική κατανομή

παραμέτρου λ. Τα ποσά $Y_1, Y_2, \cdots$ των αποζημιώσεων υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους αλλά ότι ακολουθούν την ίδια κατανομή. Τότε το συνολικό ποσό που απαιτούν οι πελάτες κατά τον χρόνο t θα είναι ίσο με

$$X(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} Y_i$$

όπου θέτουμε $Y_0 = 0$. Εδώ, τα Y_i είναι τα ποσά των αποζημιώσεων ενώ το $N(t)$ είναι το πλήθος των αιτημάτων μέχρι τον χρόνο t. Υποθέτουμε ότι τα Y_i είναι ανεξάρτητα από το $N(t)$. Επομένως έχουμε μια σύνθετη διαδικασία Poisson δεδομένου των υποθέσεων που έχουμε κάνει.

Το ερώτημα των Αναλογιστών σε αυτό πρόβλημα είναι ποιο είναι ένα σχετικά ασφαλές ποσό το οποίο θα πρέπει να έχουν στην κατοχή τους κατά το χρόνο t έτσι ώστε να είναι σε θέση να αποπληρώσουν τους πελάτες.

Συμβολίζουμε με $L(t)$ την ζημιά του φορέα κατά τον χρόνο t, δηλαδή

$$L(t) = X(t) - ct$$

όπου υποθέτουμε ότι το ποσό που έχει στην κατοχή του ο φορέας κατά το χρόνο t είναι ίσο με ct για κάποια σταθερά c. Κάτω από αυτή την υπόθεση μπορούμε να γράψουμε την σταθερά c ως εξής

$$c = (1+\theta)\lambda\mathbb{E}(Y_1)$$

Επομένως, σύμφωνα με τις παραπάνω υποθέσεις, ο φορέας θα έχει στη κατοχή του το ποσό

$$ct = (1+\theta)\mathbb{E}(X(t))$$

Ποιο είναι το κατάλληλο θ έτσι ώστε η πιθανότητα ζημιάς κατά τον χρόνο t είναι για παράδειγμα $p = 0.05$;

Με άλλα λόγια, ποιο είναι το κατάλληλο θ έτσι ώστε

$$\mathbb{P}(L(t) > 0) = 0.05$$

Την τελευταία ισότητα μπορούμε να την γράψουμε στη μορφή

$$\mathbb{P}\left(\frac{X(t) - \mathbb{E}(X(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(X(t))}} > \theta \frac{\lambda t\mathbb{E}(Y_1)}{\sqrt{\lambda t\mathbb{E}(Y_1)}}\right) = 0.05$$

Υποθέτοντας ότι το λ είναι αρκετά μεγάλο μπορούμε να εφαρμόσουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα και να πούμε ότι η τυχαία μεταβλητή Z η οποία είναι τέτοια ώστε

$$Z = \frac{X(t) - \mathbb{E}(X(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(X(t))}}$$

ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Τελικά θα πρέπει να υπολογίσουμε το κατάλληλο θ έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\mathbb{P}\left(Z > \theta \frac{\lambda t \mathbb{E}(Y_1)}{\sqrt{\lambda t \mathbb{E}(Y_1)}} \right) = 0.05$$

όταν $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
Υποθέσαμε ότι ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δυο αιτημάτων ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ. Όντως αυτό θα συμβεί στο μέλλον; Μήπως πρέπει να υποθέσουμε ότι η παράμετρος είναι μεταβαλλόμενη;
Υποθέσαμε ότι οι χρόνοι που μεσολαβούν είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Θα ισχύει αυτό στο μέλλον;
Υποθέσαμε ότι τα ποσά των αιτημάτων είναι ανεξάρτητα και ότι ακολουθούν την ίδια κατανομή. Θα ισχύει αυτό στο μέλλον;
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το φαινόμενο αυτό περιγράφεται από ένα πιο περίπλοκο μοντέλο. Θα ισχύει όμως στο μέλλον;
Για να μελετήσεις ένα πραγματικό φαινόμενο η ιδέα είναι να το μετατρέψεις σε μαθηματικό πρόβλημα μέσω ενός μαθηματικού μοντέλου. Προφανώς αυτό θα πρέπει να είναι ρεαλιστικό αλλά και σχετικά απλό έτσι ώστε οι μαθηματικοί υπολογισμοί να είναι εφικτοί. Ούτως ή άλλως το μέλλον θα είναι κατά πάσα πιθανότητα διαφορετικό, έστω και λίγο. Το όλο πρόβλημα δημιουργείται από την προσπάθεια μας να μελετήσουμε ένα μελλοντικό φαινόμενο και επειδή το μέλλον μας είναι άγνωστο το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε είναι να μαντέψουμε.
Δείτε τον παρακάτω σύνδεσμο!

`All models are wrong!`

Τι σημαίνει ρεαλιστικό μοντέλο; Για παράδειγμα μπορεί να υποθέσει κάποιος ότι στο επόμενο τρίμηνο θα υπάρξουν 10 αιτήματα αποζημίωσης με ποσά $Y_1, \cdots, Y_{10}$ και μάλιστα συγκεκριμένα. Αυτό είναι ένα μοντέλο το οποίο μπορεί πράγματι να βγει αληθινό κατά γράμμα! Όμως δεν είναι ρεαλιστικό!
Είναι διαισθητικά κατανοητό ότι όσο πιο περίπλοκο μοντέλο επιλέξει κανείς τόσο λιγότερα μαθηματικά αποτελέσματα θα είναι εύκολο να αποδειχθούν ή αντίστροφα όσο πιο απλό είναι ένα μοντέλο τόσο περισσότερα μαθηματικά αποτελέσματα θα είναι διαθέσιμα. Συχνά, η έρευνα κινείται στο εντελώς αντίθετο ρεύμα! Δηλαδή πολλοί ερευνητές προσπαθούν να βρουν το πιο περίπλοκο μοντέλο αντί για το απλούστερο από τα ρεαλιστικά.

`Everything should be made as simple as possible, but not simpler`

Κεφάλαιο 10

Στοχαστικές Διαδικασίες Συνεχούς Χρόνου

10.1 Εισαγωγή

Έχουμε μελετήσει την στοχαστική διαδικασία Poisson η οποία είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου και διακριτού πλήθους καταστάσεων. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε σε γενικότερο πλαίσιο τις συνεχείς στοχαστικές διαδικασίες με διακριτό σύνολο καταστάσεων.

Ορισμος 445 *Μια συνεχούς χρόνου στοχαστική διαδικασία $X(t)$ με καταστάσεις στο σύνολο S (πεπερασμένου ή αριθμήσιμου πλήθους) θα λέμε ότι έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα αν για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι*

$$P(X(t) = j|X(s) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \cdots, X(t_1) = i_1) = P(X(t) = j|X(s) = i)$$

όπου $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq s \leq t$ και $i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}, j \in S$ οποιεσδήποτε καταστάσεις του συνόλου S. Στην περίπτωση αυτή θα ονομάζεται συνεχούς χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα. Επιπλέον θα λέμε ότι πρόκειται για χρονικά ομοιογενής συνεχούς χρόνου Μαρκοβιανή αλυσίδα αν για κάθε $s \leq t$ και οποιεσδήποτε καταστάσεις $i, j \in S$ ισχύει ότι

$$P(X(t) = j|X(s) = i) = P(X(t-s) = j|X(0) = i) = p_{ij}(t-s)$$

Η χρονική ομοιογένεια είναι μια ιδιότητα η οποία απλουστεύει τα πράγματα αρκετά. Η αλυσίδα συμπεριφέρεται το ίδιο ανεξάρτητα του πότε ξεκίνησε και σε ποια κατάσταση βρίσκεται την παρούσα χρονική στιγμή.

Υπόθεση 1: Υποθέτουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ είναι χρονικά ομοιογενής.

Αν η αλυσίδα βρεθεί στην κατάσταση $i \in S$ τότε συμβολίζουμε με T_i τον χρόνο (αναμονής) μέχρι το επόμενο άλμα, δηλαδή μέχρι η αλυσίδα να αλλάξει κατάσταση. Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ότι η τυχαία μεταβλητή T_i ακολουθεί (υποχρεωτικά) την εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda_i \geq 0$ δεδομένου του ορισμού 445 και της υπόθεσης 1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 446 *Η τυχαία μεταβλητή T_i ακολουθεί την εκθετική κατανομή.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση $i \in S$. Για $s \geq 0$ το ενδεχόμενο $\{T_i > s\}$ είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο $\{X(u) = i \text{ για } 0 \leq u \leq s\}$. Παρομοίως, για $s, t \geq 0$ το ενδεχόμενο $\{T_i > s + t\}$ είναι το ίδιο με το ενδεχόμενο $\{X(u) = i \text{ για } 0 \leq u \leq s + t\}$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
& P(T_i > s + t | T_i > s) \\
= \; & P(X(u) = i \text{ για } 0 \leq u \leq s + t | X(u) = i \text{ για } 0 \leq u \leq s) \\
= \; & P(X(u) = i \text{ για } s \leq u \leq s + t | X(u) = i \text{ για } 0 \leq u \leq s) \\
= \; & P(X(u) = i \text{ για } s \leq u \leq s + t | X(s) = i) \text{ (Μαρκοβιανή ιδιότητα)} \\
= \; & P(X(u) = i \text{ για } 0 \leq u \leq t | X(0) = i) \text{ (χρονική ομοιογένεια)} \\
= \; & P(T_i > t)
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει (δες θεώρημα 406) ότι υπάρχει μια σταθερά $\lambda_i \geq 0$ τ.ω.

$$P(T_i > t) = e^{-\lambda_i t}$$

επομένως η T_i ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου $\lambda_i \geq 0$. □

Σε μια στοχαστική διαδικασία σε χρόνο συνεχή εκτός από τους χρόνους αναμονής T_i σημαντικό ρόλο διαδραματίζει και η πιθανότητα μετάβασης r_{ij} από την κατάσταση i στην j δεδομένου ότι η αλυσίδα θα κάνει κάποια στιγμή άλμα. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα αυτή είναι ανεξάρτητη από τον χρόνο παραμονής στην κατάσταση i. Επομένως, σε μια αλυσίδα συνεχούς χρόνου, αντιστοιχεί και μια αλυσίδα διακριτού χρόνου με πίνακα μετάβασης τον $R = r_{ij}$ η οποία ονομάζεται ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα στην αλυσίδα συνεχούς χρόνου.

10.2 Ακολουθίες Πινάκων

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις ακολουθίες πινάκων και θα δώσουμε την έννοια της σύγκλισης. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να ορίσουμε ένα μέτρο (νόρμα) με το οποίο θα μετράμε την απόσταση μεταξύ δυο τετραγωνικών πινάκων. Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας M, πιθανόν απειροδιάστατος. Ορίζουμε την παρακάτω νόρμα

$$\|M\|_{u,v} := \sup_{i \in S} \sum_{j \in S} |M_{ij}|$$

όπου S είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο. Θα συμβολίζουμε τον χώρο των πινάκων M για τους οποίους η παραπάνω νόρμα είναι πεπερασμένη με $M_{u,v}(S)$. Ο χώρος αυτός είναι ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον

$$\begin{aligned} \|M\|_{u,v} &= 0 \quad \text{αν και μόνο αν } M = 0 \\ \|aM\|_{u,v} &= |a|\|M\|_{u,v} \quad \text{για } a \in \mathbb{R} \\ \|A+B\|_{u,v} &\leq \|A\|_{u,v} + \|B\|_{u,v} \end{aligned}$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν $A, B \in M_{u,v}(S)$ τότε και ο $AB \in M_{u,v}(S)$ και μάλιστα

$$\|AB\|_{u,v} \leq \|A\|_{u,v}\|B\|_{u,v}$$

Έστω τώρα μια ακολουθία πινάκων $M_n \in M_{u,v}(S)$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν η ακολουθία είναι μια ακολουθία Cauchy, δηλαδή αν ισχύει ότι

$$\lim_{m\to\infty} \sup_{n>m} \|M_n - M_m\|_{u,v} = 0$$

τότε θα ισχύει ότι

$$\|M - M_m\|_{u,v} \to 0$$

για κάποιον πίνακα $M \in M_{u,v}(S)$.

10.3 Ύπαρξη Στοχαστικής Διαδικασίας

Συνήθως στις εφαρμογές οι οποίες μοντελοποιούνται μέσω στοχαστικών διαδικασιών σε χρόνο συνεχή θα μας δίνονται οι παράμετροι $\lambda_i \geq 0$ και ο στοχαστικός πίνακας $R = r_{ij}$. Σε όλα τα επόμενα υποθέτουμε ότι $\sup_{i\in S} \lambda_i < \infty$. Για την γενικότερη περίπτωση μπορεί κανείς να μελετήσει το [108].
Σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα υπάρχει μοναδική στοχαστική διαδικασία σε χρόνο συνεχή η οποία έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα και ταυτόχρονα ικανοποιεί ιδιότητες που συνήθως απαιτούνται στις εφαρμογές. Συμβολίζουμε με δ_{ij} την επόμενη απεικόνιση

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{όταν } i = j \\ 0, & \text{όταν } i \neq j \end{cases}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 447 (Θεώρημα Ύπαρξης) *Έστω $S = \{1, 2, \cdots,\}$ το σύνολο καταστάσεων και έστω $\mu = \{\mu_1, \mu_2, \cdots,\}$ τ.ω. $\sum_{i\in S} \mu_i = 1$ και $\mu_i \geq 0$. Αν $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots,)$ με $\sup_{i\in S} \lambda_i < \infty$ και $\lambda_i \geq 0$ τότε υπάρχει στοχαστική διαδικασία $X(t)$ με $t \geq 0$ τ.ω.*

(i) $t \to X(t)$ είναι δεξιά συνεχής και κατά τμήματα σταθερή,

(ii) $P(X(0) = i) = \mu_i$ για κάθε $i \in S$ και για $t \geq 0$ ισχύει ότι

$$\lim_{h\downarrow 0} \sup_{\substack{j\in S\\ t\geq 0}} \frac{1}{h} \left| P(X(t+h) = j | X(\tau), \tau \in [0,t]) - (1 - h\Lambda_{X(t)})\delta_{\{X(t),j\}} - h\Lambda_{X(t)} R_{\{X(t),j\}} \right| =$$

Η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα και είναι η μοναδική η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii) με την έννοια ότι οποιαδήποτε άλλη στοχαστική διαδικασία έχει τις ίδιες ιδιότητες θα έχει και την ίδια κατανομή. Αν $(P(t))_{ij} = P(X(t) = j|X(0) = i)$ τότε ισχύει ότι

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n$$

με $Q = \hat{\Lambda}(R - \mathbb{I})$ όπου $\hat{\Lambda}$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας τέτοιος ώστε στην διαγώνιο του να βρίσκονται τα στοιχεία του Λ. Ο $P(t)$ είναι στοχαστικός πίνακας για κάθε $t \geq 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $\lambda = \sup_{i\in S} \lambda_i < +\infty$. Θα χρειαστούμε την έννοια της νόρμας ενός πίνακα. Αν $Q_{S\times S}$ ένας τετραγωνικός πίνακας τότε ορίζουμε την επόμενη νόρμα

$$\|Q\|_{u,v} = \sup_{i\in S} \sum_{j\in S} |Q_{ij}|$$

Παρατηρήστε ότι αν Q είναι τετραγωνικός πίνακας τέτοιος ώστε $Q_{ii} \leq 0$ και $\sum_{j\in S} Q_{ij} = 0$ τότε $\|Q\|_{u,v} \leq 2\lambda$. Χρησιμοποιώντας την νόρμα είναι εύκολο να δούμε ότι το άπειρο άθροισμα

$$\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n \|_{u,v} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|Q\|_{u,v}^n \leq e^{2\lambda t}$$

χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της νόρμας $\|A \cdot B\|_{u,v} \leq \|A\|_{u,v} \|B\|_{u,v}$. Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι ο πίνακας συνάρτηση $P(t)$ ικανοποιεί την σχέση

$$P(t + s) = P(t)P(s), \quad t, s \in [0, \infty)$$

Θα αποδείξουμε στην συνέχεια ότι ο $P(t)$ είναι ένας πίνακας μετάβασης για κάθε $t \geq 0$. Στην περίπτωση που $\lambda = 0$ είναι προφανές αφού τότε πρόκειται για τον μοναδιαίο πίνακα. Αν $\lambda > 0$ ορίζουμε

$$\hat{R} = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}(1 - R_{ii}), & \text{όταν } i = j \\ \frac{\lambda_i}{\lambda} R_{ij}, & \text{όταν } i \neq j \end{cases}$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ο πίνακας $\hat{R}$ είναι ένας πίνακας μετάβασης ή αλλιώς στοχαστικός πίνακας και μάλιστα ισχύει ότι $Q = \lambda(\hat{R} - \mathbb{I})$. Δηλαδή ο πίνακας Q μπορεί να γραφεί με τουλάχιστο δυο τρόπους. Επομένως ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!} \sum_{m=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} (-1)^{n-m} \hat{R}^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!} \hat{R}^m \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-t\lambda)^{n-m}}{(n-m)!} \\ &= e^{-t\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!} \hat{R}^m \end{aligned}$$

Τώρα είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι ο $P(t)$ είναι στοχαστικός πίνακας.
Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι αν η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii) τότε θα ικανοποιεί και την

$$P((X(t_k) = j_k : 0 \le k \le K) = \mu_{j_0} \prod_{1 \le k \le K} (P(t_k - t_{k-1}))_{j_{k-1}, j_k}$$

Θέτουμε $A = \{X(t_k) = j_k\}$ και ορίζουμε την συνάρτηση $u(t, j) = P(X(t_{k-1} + t) = j, A)$. Τότε θα ισχύει ότι

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{\substack{j \in S \\ t \ge 0}} \frac{1}{h} |u(t+h, j) - u(t, j) - h(Qu(t, \cdot))_j| = 0$$

όπου $u(t, \cdot)$ είναι το διάνυσμα που περιέχει τα στοιχεία $u(t, j)$. Αυτό σημαίνει ότι η $t \to u(t, j)$ είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση της οποίας η παράγωγος είναι η $(Qu(t, \cdot))_j$. Επίσης, $u(0, j) = \delta_{j, j_{K-1}} P(A)$. Επομένως, η $(t, j) \to u(t, j)$ είναι μια φραγμένη λύση της

$$u_t(t, j) = (Qu(t \cdot))_j$$

Αυτό σημαίνει αναγκαστικά ότι $u(t, j) = (u(0, \cdot) P(t))_j$.
Στην συνέχεια θα αποδείξουμε ότι υπάρχει στοχαστική διαδικασία η οποία να ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii). Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου με πίνακα μετάβασης τον $\hat{R}$ και με αρχική κατανομή την μ. Έστω επίσης η $N(t)$ μια διαδικασία Poisson παραμέτρου 1 η οποία είναι ανεξάρτητη της X_n. Θεωρούμε την στοχαστική διαδικασία

$$X(t) = X_{N(\lambda T)}$$

Θα αποδείξουμε ότι η στοχαστική αυτή διαδικασία ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii).

□

10.3.1 Σχόλια στο Θεώρημα Ύπαρξης

Το θεώρημα 447 είναι εξαιρετικά σημαντικό περιέχοντας «συμπυκνωμένη» και σημαντική πληροφορία.

(i) Συχνά, για ένα φαινόμενο το οποίο μοντελοποιείται μέσω μιας στοχαστικής διαδικασίας σε συνεχή χρόνο, έχουμε ως δεδομένο το διάνυσμα Λ και τον πίνακα R. Η πληροφορία αυτή μας δίνεται με τον παρακάτω τρόπο.

Να μελετηθεί η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ η οποία ικανοποιεί τα παρακάτω: Για $t_1, t_2, \cdots, \in [0, t)$ ισχύουν τα εξής όταν $h > 0$ αρκετά μικρό,

$$P(X(t+h) = j | X(t) = i, X(t_1) = s_1, X(t_2) = s_2, \cdots) \cong h\lambda_i r_{ij} + o(h), \quad i$$
$$P(X(t+h) = j | X(t) = i, X(t_1) = s_1, X(t_2) = s_2, \cdots) \cong 1 + h\lambda_i (r_{ii} - 1) + o(h), \quad i$$

όπου $o(h)$ είναι μια ποσότητα τέτοια ώστε $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h} = 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα 447 υπάρχει μοναδική στοχαστική διαδικασία με τις παραπάνω ιδιότητες η οποία μάλιστα έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα, είναι δεξιά συνεχής και κατά τμήματα σταθερή. Επιπλέον, ο πίνακας μετάβασης της είναι ως εξής

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n \tag{10.1}$$

όπου $Q = q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i(r_{ii} - 1), & \text{όταν } i = j \\ \lambda_i r_{ij}, & \text{όταν } i \neq j \end{cases}$ και r_{ij} είναι τα στοιχεία του πίνακα R.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι ο πίνακας Q χαρακτηρίζει πλήρως την στοχαστική διαδικασία $X(t)$ μιας και «γεννάει» (για αυτό και ονομάζεται **γεννήτορας** της $X(t)$) την κατανομή της, δηλαδή ουσιαστικά τον πίνακα μετάβασης $P(t)$ μέσω της σχέσης 10.1 (σημειώστε ότι $P(X(t) = j) = (\mu \cdot P(t))_j$). Ο πίνακας Q όμως παράγεται από τα λ_i και r_{ij}. Αυτό που πρέπει να σημειώσουμε είναι ότι με διαφορετική επιλογή των λ_i και r_{ij} μπορούμε να φτάσουμε στον ίδιο πίνακα Q και άρα στην ίδια στοχαστική διαδικασία $X(t)$. Αν $\sup_{i\in S}\lambda_i \leq \lambda < +\infty$ τότε μπορούμε να έχουμε τον ίδιο πίνακα Q επιλέγοντας $\lambda_i = \lambda$ για κάθε $i \in S$ και διαφοροποιώντας κατάλληλα τα στοιχεία του πίνακα R, δηλαδή τα r_{ij}. Συγκεκριμένα, θέτουμε $\lambda_i = \lambda$ για κάθε $i \in S$ και $\hat{R}_{ij} = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda_i}{\lambda}(1 - R_{ii}), & \text{όταν } i = j \\ \frac{\lambda_i}{\lambda}, & \text{όταν } i \neq j \end{cases}$ για να έχουμε τον ίδιο πίνακα Q. Η μέθοδος αυτή (δηλαδή η συγκεκριμένη επιλογή των λ_i και ο νέος πίνακας $\hat{R}$) ονομάζεται **ομογενοποίηση** (uniformization method) και είναι πολύ βολική σε πολλές περιπτώσεις (δείτε παρατήρηση 451 παρακάτω).

Έχοντας τον πίνακα $P(t)$ συνήθως μπορούμε να υπολογίσουμε ότι μας ζητούν. Πως όμως υπολογίζουμε τον πίνακα $P(t)$; Αν το σύνολο καταστάσεων S είναι πεπερασμένο τότε $P(t) = e^{tQ}$ οπότε ο τρόπος υπολογισμού είναι γνωστός από την γραμμική άλγεβρα. Στην περίπτωση όμως που το σύνολο καταστάσεων είναι άπειρο τότε θα πρέπει να εργαστούμε διαφορετικά, συνήθως μέσω των οπισθοδρομικών εξισώσεων Kolmogorov που θα δούμε παρακάτω. Παρατηρήστε επίσης ότι στον πίνακα μετάβασης R αντιστοιχεί μια Μαρκοβιανή αλυσίδα διακριτού χρόνου, η ενσωματωμένη αλυσίδα, η οποία κινείται παράλληλα με την αντίστοιχη διαδικασία συνεχούς χρόνου. Επομένως, ανάλογα το ερώτημα στο οποίο θέλουμε να απαντήσουμε, μπορούμε να μελετήσουμε την διακριτή διαδικασία προκειμένου να βγάλουμε κατάλληλα συμπεράσματα.

(*ii*) Ενδεχομένως, σε μια εφαρμογή να μας δίνουν τα παρακάτω: Να μελετηθεί η στοχαστική διαδικασία $X(t)$ για την οποία ισχύουν τα επόμενα. Για $t_1, t_2, \cdots, \in$

$[0, t)$ ισχύουν τα εξής όταν $h > 0$ αρκετά μικρό,

$$P(X(t+h) = j|X(t) = i, X(t_1) = s_1, X(t_2) = s_2, \cdots) \cong hq_{ij} + o(h), \quad i \neq j$$
$$P(X(t+h) = j|X(t) = i, X(t_1) = s_1, X(t_2) = s_2, \cdots) \cong 1 - q_{ii}h + o(h), \quad i = j$$

Δηλαδή μας δίνουν έναν πίνακα Q ο οποίος περιέχει τα q_{ij} αλλά είναι τέτοιος ώστε $\sup_{i \in S} |q_{ii}| < \infty$ και ταυτόχρονα για $i \neq j$ ισχύει ότι $q_{ij} \geq 0$. Επίσης $q_{ii} = -\sum_{k \neq i} q_{ik}$. Τότε θέτουμε $\Lambda_i = -Q_{ii}$ και $\hat{\Lambda}_{ij} = \delta_{ij}\Lambda_i$ δηλαδή ο πίνακας $\hat{\Lambda}$ είναι ο διαγώνιος πίνακας ο οποίος περιέχει στην διαγώνιο τα στοιχεία $-q_{ii}$. Επίσης, κατασκευάζουμε τον πίνακα R ως εξής

$$R_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{όταν } \Lambda_i = 0 \\ 0, & \text{όταν } \Lambda > 0 \end{cases} \qquad \text{ενώ για } \ i \neq j \text{ θέτουμε } R_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{όταν } \Lambda_i = 0 \\ \frac{Q_{ij}}{\Lambda_i}, & \text{όταν } \Lambda_i > 0 \end{cases}$$

10.4 Η Ενσωματωμένη Αλυσίδα

Ο πίνακας Q ορίζει μια Μαρκοβιανή στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου με πίνακα μετάβασης τον

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n$$

Ισχύει το επόμενο θεώρημα το οποίο περιγράφει την κατασκευή της ενσωματωμένης αλυσίδας και παρέχει ιδιότητες της.

ΘΕΩΡΗΜΑ 448 (Η Ενσωματωμένη Αλυσίδα) *Έστω η Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία γεννάται από τον πίνακα Q και έστω Λ και R όπως ορίσθηκαν παραπάνω. Θέτουμε $J_0 = 0$ και*

$$\begin{aligned} J_n &= \inf\{t > J_{n-1} : X(t) \neq X(J_{n-1})\} \text{ για } n \geq 1 \\ X_n &= \begin{cases} X(J_n), & \text{αν } J_n < \infty \\ X_{n-1}, & \text{αν } n \geq 1 \text{ και } J_n = \infty \end{cases} \\ E_n &= \begin{cases} \Lambda_{X_{n-1}}(J_n - J_{n-1}), & \text{αν } J_n < \infty \\ 0, & \text{αν } J_n = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

Επίσης θέτουμε $\zeta = \inf\{n \geq 0 : \Lambda_{X_n} = 0\}$. Τότε η X_n είναι μια (διακριτή) Μαρκοβιανή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον πίνακα R και για κάθε $K \geq 1$ και $\{t_k : 1 \leq k \leq K\} \subseteq (0, +\infty)$ ισχύει ότι

$$P(\{E_k > t_k, 1 \leq k \leq K\} \cap A) = e^{-\sum_{k=1}^{K} t_k} P(A)$$

για κάθε $A \in \sigma(\{X_n : n \geq 0\})$ το οποίο περιέχεται στο $\{\zeta > K\}$.

10.4.1 Σχόλια στην Ενσωματωμένη Αλυσίδα

- Το θεώρημα 447 λέει ότι υπάρχει μοναδική στοχαστική διαδικασία η οποία ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες. Η μοναδικότητα αφορά τον πίνακα μετάβασης, δηλαδή όλες οι στοχαστικές διαδικασίες που ικανοποιούν αυτές τις ιδιότητες έχουν τον ίδιο πίνακα μετάβασης. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι έχουν την ίδια ενσωματωμένη αλυσίδα ή ότι έχουν τους ίδιους χρόνους μεταξύ των αλμάτων. Αυτά μπορεί να διαφέρουν μεταξύ τους ανάλογα με τον τρόπο που κατασκευάζουμε την αλυσίδα.

- Τα άλματα της αλυσίδας πραγματοποιούνται κατά τους χρόνους J_n (τυχαίες μεταβλητές). Αν για παράδειγμα η αλυσίδα ξεκινήσει από την κατάσταση i τότε στον χρόνο J_1 θα μεταβεί σε μια άλλη (διαφορετική) κατάσταση. Η αλυσίδα X_n (η ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα) είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα όπως αποδεικνύεται στο προηγούμενο θεώρημα. Η αλυσίδα αυτή κινείται παράλληλα με την αρχική αλυσίδα συνεχούς χρόνου και μάλιστα $X(J_n) = X_n$ δηλαδή συμπίπτει με την αρχική κατά τους χρόνους J_n. Επομένως, ορισμένα συμπεράσματα για την αρχική αλυσίδα μπορούν να προκύψουν μελετώντας (με τις γνωστές τεχνικές) την ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα X_n.

- Στην περίπτωση που $q_{ii} > 0$ για κάθε $i \in S$ τότε $\zeta = +\infty$ και επομένως $P(A) = 1$ στο παραπάνω θεώρημα. Επομένως, δεδομένου ότι $\Lambda_{X_{n-1}} = i$ (δηλαδή $X_{n-1} = X(J_{n-1}) = i$ και άρα πριν το J_n άλμα η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i), προκύπτει από το παραπάνω θεώρημα ότι ο χρόνος αναμονής $J_n - J_{n-1}$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή παραμέτρου Λ_i, το οποίο έχουμε ήδη δει στο θεώρημα 446.

- Στην περίπτωση που $\sup_{i\in S} \lambda_i \leq \lambda < +\infty$ μπορούμε να κατασκευάσουμε την ίδια στοχαστική διαδικασία μέσω μιας στοχαστικής διαδικασίας Poisson παραμέτρου λ και μιας διακριτής Μαρκοβιανής αλυσίδας Y_n με πίνακα μετάβασης τον $\hat{R}$ όπως τον ορίσαμε προηγούμενα, δηλαδή με την μέθοδο της ομογενοποίησης. Τότε η στοχαστική διαδικασία $X(t) = Y_{N(t)}$ ικανοποιεί τις απαιτούμενες ιδιότητες και ο πίνακας μετάβασης της δίνεται από τον πίνακα $P(t)$ όπως ορίσθηκε στην 10.1. Σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε ότι οι χρόνοι αναμονής $J_n - J_{n-1}$ ακολουθούν την εκθετική κατανομή παραμέτρου λ και ότι η ενσωματωμένη αλυσίδα είναι η Y_n η οποία είναι Μαρκοβιανή εκ κατασκευής. Δηλαδή, στην περίπτωση που κατασκευάσουμε με τον τρόπο αυτό την στοχαστική διαδικασία $X(t)$ τότε το θεώρημα 448 μας είναι πρακτικά άχρηστο αφού, εκ κατασκευής, γνωρίζουμε όλες τις ζητούμενες πληροφορίες. Σημειώστε όμως ότι είναι δυνατό να κατασκευάσουμε την στοχαστική διαδικασία $X(t)$ με τον τρόπο αυτό μονάχα όταν $\lambda < +\infty$.

10.5 Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\begin{aligned} P'(t) &= P(t)Q = QP(t) \\ P(0) &= \mathbb{I} \end{aligned}$$

οι οποίες ονομάζονται εξισώσεις Chapman-Kolmogorov. Στην περίπτωση που το σύνολο καταστάσεων είναι άπειρο τότε ένας τρόπος υπολογισμού του πίνακα $P(t)$ είναι μέσω των εξισώσεων αυτών, χρησιμοποιώντας ίσως πιθανογεννήτριες συναρτήσεις.

10.6 Στάσιμη Κατανομή - Οριακές Πιθανότητες

Όπως και στις αλυσίδες διακριτού χρόνου, θα πρέπει να κατηγοριοποιήσουμε τις καταστάσεις σε δυο βασικές κλάσεις, επαναληπτικές και μεταβατικές. Επειδή σε μια στοχαστική διαδικασία αντιστοιχεί μια διακριτή αλυσίδα με πίνακα μετάβασης τον R οι ορισμοί επαναληπτικότητας και μεταβατικότητας μπορούν να δοθούν σε σχέση με την ενσωματωμένη αλυσίδα.

(*i*) Αν $\lambda_i = 0$ τότε προφανώς η κατάσταση i είναι απορροφητική και επομένως επαναληπτική.

(*ii*) Έστω $i \in S$ τέτοια ώστε $\lambda_i > 0$. Θα λέμε ότι είναι επαναληπτική αν είναι επαναληπτική στην ενσωματωμένη αλυσίδα X_n ως προς τον πίνακα R. Αντίστοιχα θα λέμε ότι είναι μεταβατική.

(*iii*) Έστω $i, j \in S$ τ.ω. $\lambda_i > 0$ και $\lambda_j > 0$. Θα λέμε ότι η i επικοινωνεί με την j και θα γράφουμε $i \to j$ αν αυτό συμβαίνει στην ενσωματωμένη αλυσίδα X_n. Αντίστοιχα θα λέμε ότι συνεπικοινωνούν και θα γράφουμε $i \leftrightarrow j$. Αν i επαναληπτική και $i \to j$ τότε και η j επαναληπτική. Αυτό προκύπτει από το αντίστοιχο αποτέλεσμα στην ενσωματωμένη αλυσίδα.

(*iv*) Θα ορίσουμε τον χρόνο πρώτης επίσκεψης στην κατάσταση i ως εξής

$$\sigma_i = \inf\{t \geq J_1 : X(t) = i\}$$

(*v*) Μια κατάσταση $i \in S$ είναι επαναληπτική ανν $P(\sigma_i < \infty | X(0) = i) = 1$. Σημειώστε επίσης ότι αν $P(\sigma_i = +\infty | X(0) = i) > 0$ (δηλαδή είναι μεταβατική) τότε $\mathbb{E}(\sigma_i | X(0) = i) = +\infty$. Αν i επαναληπτική και j μεταβατική τότε $i \nrightarrow j$ και επομένως $P(\sigma_j < \infty | X(0) = i) = 0$.

(*vi*) Αν η i είναι επαναληπτική και $\mathbb{E}(\sigma_i | X(0) = i) < \infty$ τότε θα λέμε ότι η i είναι θετικά επαναληπτική αλλιώς μηδενικά επαναληπτική.

ΘΕΩΡΗΜΑ 449 *Για οποιαδήποτε κατάσταση $i \in S$ τ.ω. $\Lambda_i > 0$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(i) *Η κατάσταση i είναι επαναληπτική.*

(ii) *Υπάρχει $t \in (0, +\infty)$ τ.ω. η κατάσταση i είναι επαναληπτική ως προς τον πίνακα μετάβασης $P(t)$.*

(iii) *Η κατάσταση i είναι επαναληπτική ως προς τον πίνακα μετάβασης $P(t)$ για όλα τα $t \in (0, +\infty)$.*

Στο επόμενο θεώρημα περιγράφουμε τις οριακές πιθανότητες και πως αυτές σχετίζονται με τις στάσιμες κατανομές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 450 *Για κάθε $j \in S$ το όριο*

$$\lim_{t\to\infty}(P(t))_{jj} = \pi_{jj}$$

υπάρχει και επίσης

$$\lim_{t\to\infty}(P(t))_{ij} = \pi_{ij} = P(\sigma_j < \infty | X(0) = i)\pi_{jj} \text{ όταν } i \neq j$$

Επιπλέον, αν $\pi_{jj} > 0$ τότε και $\pi_{ii} > 0$ για όλα τα $i \in C = \{i : i \leftrightarrow j\}$. Επίσης, αν $\pi_i^C = \mathbb{I}_C(i)\pi_{ii}$, τότε το π^C είναι για κάθε $s > 0$ η μοναδική στάσιμη κατανομή μ για τον πίνακα $P(s)$ η οποία είναι τέτοια ώστε $\mu_k = 0$ για $k \notin C$ και $\sum_{i\in S}\mu_i = 1$. Ακόμη, ισχύουν τα παρακάτω

$$\pi_{ii} = \begin{cases} 1, & \text{όταν } \Lambda_i = 0 \\ \frac{1}{\Lambda_i \mathbb{E}(\sigma_i | X(0)=i)}, & \text{όταν } \Lambda_i > 0 \end{cases}$$

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \delta_{i,j} + (1-\delta_{i,j})P(\sigma_j < \infty | X(0) = i), & \text{όταν } \Lambda_j = 0 \\ \pi_{jj}P(\sigma_j < \infty | X(0) = i), & \text{όταν } \Lambda_j > 0 \end{cases}$$

Τέλος, αν $\sup_{i\in S}\Lambda_i < \infty$ τότε

$$\pi P(t) = \pi \iff \pi Q = 0 \text{ για όλα τα } t > 0$$

10.6.1 Σχόλια στο θεώρημα 450

(i) Διαπιστώνουμε ότι δεν υπάρχει το πρόβλημα της περιοδικότητας όπως έχουμε δει στην περίπτωση της διακριτής αλυσίδας. Επομένως, αν έχουμε μια διακριτή και περιοδική αλυσίδα, θα μπορούσαμε να επιχειρήσουμε να την μετατρέψουμε σε συνεχή και να μελετήσουμε τις οριακές πιθανότητες με το παραπάνω θεώρημα. Τα συμπεράσματα όμως θα αφορούν την συνεχή αλυσίδα και επομένως μπορεί να διαφέρουν με αυτά της διακριτής αλυσίδας (δείτε το παράδειγμα 452 παρακάτω). Ένας λόγος είναι διότι οι αντίστοιχες στάσιμες κατανομές είναι διαφορετικές, εν γένει.

(*ii*) Αν η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή ως προς τον πίνακα $P(s)$ για οποιοδήποτε $s > 0$ με τον ίδιο τρόπο όπως στις διακριτές Μαρκοβιανές αλυσίδες (δείτε όμως και το επόμενο σχόλιο για αυτό το θέμα). Σε αυτή την περίπτωση είτε π_i για όλα τα $i \in S$ είτε $\pi_i = 0$ για όλα τα $i \in S$. Αν δεν είναι αδιαχώριστη τότε θα έχει ένα, δυο ή και περισσότερα κλειστά υποσύνολα επαναληπτικών καταστάσεων και ενδεχομένως κάποιες μεταβατικές. Εργαζόμαστε σε κάθε κλειστό σύνολο χωριστά για να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή που του αντιστοιχεί. Αν η αλυσίδα έχει μεταβατικές καταστάσεις τότε θα πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα η αλυσίδα να επισκεφθεί το κλειστό υποσύνολο C ξεκινώντας από την μεταβατική κατάσταση i. Αυτό μπορεί να γίνει κάνοντας τους ανάλογους υπολογισμούς στην ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα, δηλαδή να υπολογίσουμε την πιθανότητα h_i^C όταν i μεταβατική και C κλειστό σύνολο επαναληπτικών. Τότε θα ισχύει

$$P(\sigma_j < \infty | X(0) = i) = h_i^C \quad \text{για κάθε } j \in C$$

Αν j μεταβατική κατάσταση τότε προκύπτει ότι $\pi_{jj} = 0$ και άρα $\pi_{ij} = 0$ για κάθε $i \in S$.

(*iii*) Μπορούμε να υπολογίσουμε την στάσιμη κατανομή από την σχέση $\pi Q = 0$ απαιτώντας βέβαια το π να είναι κατανομή πιθανότητας. Με τον τρόπο αυτό, αν γνωρίζουμε τον πίνακα Q και όχι τον $P(t)$, αποφεύγουμε να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα e^{tQ} ο οποίος είναι ίσος με τον $P(t)$. Επειδή η αλυσίδα μπορεί να έχει δυο ή και παραπάνω κλειστά σύνολα επαναληπτικών καταστάσεων και ίσως κάποιες μεταβατικές, τότε θα πρέπει να αναδιατάξουμε τις καταστάσεις έτσι ώστε αυτές που ανήκουν στο ίδιο κλειστό σύνολο να είναι δίπλα-δίπλα. Τελευταίες αφήνουμε τις μεταβατικές καταστάσεις. Τότε ο πίνακας Q θα είναι κάτω τριγωνικός σε μορφή Block. Την ίδια μορφή επίσης θα έχει και οποιαδήποτε δύναμη του πίνακα Q και επομένως και ο πίνακας $P(t)$ (δείτε και την άσκηση ;; για πεπερασμένο πίνακα). Επομένως, υπολογίζουμε την στάσιμη κατανομή που αντιστοιχεί σε κάθε κλειστό σύνολο εργαζόμενοι στον αντίστοιχο υποπίνακα του Q.

(*iv*) Αν η κατάσταση j είναι μεταβατική τότε

$$\mathbb{E}(\sigma_j | X(0) = j) = +\infty$$

Επειδή η ποσότητα αυτή εμφανίζεται στον παρονομαστή κλάσματος έπεται ότι σε αυτή την περίπτωση το κλάσμα θα είναι ίσο με το μηδέν, δηλαδή $\pi_{jj} = 0$. Αντίστροφα, αν $\pi_{jj} = 0$ για κάποια επαναληπτική κατάσταση j τότε υποχρεωτικά η κατάσταση j είναι μηδενικά επαναληπτική και επομένως $\mathbb{E}(\sigma_j | X(0) = j) = +\infty$.

(*v*) Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(X(t) = j | X(0) = i)$ θα πρέπει να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα e^{tQ} και τότε η ζητούμενη πιθανότητα θα βρίσκεται στην θέση (i,j) του πίνακα αυτού.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 451 **(Μέσος χρόνος απορρόφησης ή πρώτης επίσκεψης)** *Έστω $C \subseteq S$ υποσύνολο του συνόλου καταστάσεων. Συμβολίζουμε με τ^C τον χρόνο πρώτης επίσκεψης της συνεχούς χρόνου αλυσίδας $X(t)$ στο σύνολο C ξεκινώντας από την κατάσταση i και ο μέσος χρόνος είναι*

$$k_i^C := \mathbb{E}(\tau^C | X(0) = i)$$

Υποθέτουμε ότι $P(\tau^C < \infty | X(0) = i) = 1$. Παρόμοια, ο χρόνος πρώτης επίσκεψης της ενσωματωμένης αλυσίδας στο σύνολο C ξεκινώντας από την κατάσταση i είναι ο H^C ενώ ο μέσος χρόνος είναι

$$\hat{k}_i^C := \sum_{n=0}^{\infty} nP(H^C = n | Y_0 = i)$$

όπου Y_n η ενσωματωμένη αλυσίδα. Μπορεί να αποδειχθεί ότι (δείτε [45])

$$k_i^C = \frac{\hat{k}_i^C}{\lambda}, \qquad \text{με } \lambda = \sup_{i \in S} \lambda_i$$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει κανείς να προσέξει το γεγονός ότι υποθέτουμε ότι $\lambda < +\infty$.
Προκειμένου να υπολογίσουμε τους k_i^C στην περίπτωση όπου $\lambda = +\infty$ θα πρέπει να επιλύσουμε το σύστημα (δείτε [98])

$$\begin{aligned} k_i^C &= 0, \qquad \text{όταν } i \in C \\ \sum_{j \in S} q_{ij} k_j^C + 1 &= 0, \qquad \text{όταν } S \setminus C \end{aligned}$$

όπου q_{ij} είναι τα στοιχεία του πίνακα Q. Οι μέσοι χρόνοι k_i^C θα είναι η ελάχιστη μη αρνητική λύση του παραπάνω συστήματος. Σε αυτή τη περίπτωση η θεωρία απαιτεί την εφαρμογή της λεγόμενης **ισχυρής Μαρκοβιανής ιδιότητας** *(strong Markov property).* □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 452 *Έστω η διακριτή Μαρκοβιανή αλυσίδα X_n με πίνακα μετάβασης τον*

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Η αλυσίδα είναι αδιαχώριστη και περιοδική με περίοδο 2. Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$R^{2k} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad R^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \cdots,$$

Θα επιχειρήσουμε να μετατρέψουμε την διακριτή αυτή αλυσίδα σε αλυσίδα συνεχούς χρόνου. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να επιλέξουμε ένα διάνυσμα $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. *Για ευκολία επιλέγουμε* $\Lambda = (1, 1, 1)$ *οπότε ο πίνακας* Q *θα είναι ο*

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & -1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε κατά τα γνωστά τον εκθετικό πίνακα και έχουμε

$$P(t) = e^{tQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} \\ \frac{1}{4} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{4} + \frac{e^{-t}}{2} + \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} \\ \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{e^{-2t}}{4} & \frac{1}{2} + \frac{e^{-2t}}{2} \end{pmatrix}$$

Οι οριακές πιθανότητες (δηλαδή ο πίνακας $\lim_{t\to\infty} P(t)$ *θα είναι τέτοιος ώστε στις δυο πρώτες στήλες τα στοιχεία θα είναι ίσα με* $\frac{1}{4}$ *και η τελευταία στήλη ίση με* $\frac{1}{2}$. *Η στάσιμη κατανομή της αλυσίδας συνεχούς χρόνου είναι τέτοια ώστε* $\pi Q = 0$ *και* $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$ *και βλέπουμε ότι* $\pi = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ *επομένως οι οριακές πιθανότητες που υπολογίσαμε συμπίπτουν με αυτές που υπολογίζουμε μέσω της στάσιμης κατανομής χωρίς να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα.*

Διαπιστώνουμε ότι οι οριακές πιθανότητες της αρχικής αλυσίδας είναι διαφορετικές από αυτές της αντίστοιχης συνεχούς χρόνου αλυσίδας και επομένως τα αντίστοιχα συμπεράσματα διαφέρουν. Στην διακριτή αλυσίδα, οι οριακές πιθανότητες, $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$, *δίνουν την πιθανότητα η αλυσίδα να μεταβεί από την* i *στην* j *μετά από ένα μεγάλο αριθμό αλμάτων χωρίς όμως να μας ενδιαφέρει ο χρόνος μεταξύ των αλμάτων. Στην αλυσίδα συνεχούς χρόνου, οι αντίστοιχες οριακές πιθανότητες, δίνουν την πιθανότητα να μεταβεί η αλυσίδα από την* i *στην* j *μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα. Παρατηρήστε επίσης ότι για να μετατρέψουμε την διακριτή αλυσίδα σε αλυσίδα συνεχούς χρόνου έπρεπε να εισάγουμε το διάνυσμα* Λ *το οποίο περιέχει τις παραμέτρους* λ_i *οι οποίες μετρούν θα λέγαμε την χρονική διάρκεια μεταξύ των αλμάτων. Εδώ επιλέξαμε τυχαία αυτό το διάνυσμα αλλά σε ένα πραγματικό φαινόμενο θα πρέπει να γίνουν οι αντίστοιχες μετρήσεις και πειράματα για να πάρουμε αυτές τις παραμέτρους. Αν μπορούμε να το κάνουμε αυτό τότε μπορούμε να εργαστούμε σε συνεχή χρόνο προκειμένου να αποφύγουμε τα τεχνικά προβλήματα που δημιουργεί η περιοδικότητα, αν υπάρχει. Αν όμως δεν μπορούμε να έχουμε αυτές τις παραμέτρους τότε παραμένουμε στην μελέτη της αλυσίδας σε διακριτό χρόνο. Σημειώστε ότι πολλά φαινόμενα μοντελοποιούνται ως αλυσίδες με μετρήσεις σε ετήσια βάση ή μηνιαία κ.τ.λ. κάτι το οποίο δεν δίνει την δυνατότητα μετατροπής σε διαδικασία συνεχούς χρόνου (δείτε για παράδειγμα το [84]).* □

Παραδειγμα 453 *Έστω η στοχαστική διαδικασία με γεννήτορα τον πίνακα Q ο οποίος είναι τέτοιος ώστε*

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & -2 \end{pmatrix}$$

και σύνολο καταστάσεων το $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Προκειμένου να μελετήσουμε την αλυσίδα θα χρειαστούμε τον πίνακα μετάβασης R της ενσωματωμένης αλυσίδας. Οπότε από τον πίνακα Q θα κατασκευάσουμε το διάνυσμα Λ και τον πίνακα R. Θα έχουμε ότι

$$\Lambda = (1, 2, 3, 1, 2, 2) \text{ και } R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

'ρα η ενσωματωμένη διακριτή αλυσίδα έχει πίνακα μετάβασης τον R και μάλιστα οι καταστάσεις $C_1 = \{1, 2\}$ αποτελούν ένα κλειστό σύνολο επαναληπτικών καταστάσεων στην ενσωματωμένη αλυσίδα και επομένως και στην αρχική αλυσίδα. Παρομοίως, οι καταστάσεις $C_2 = \{3, 4, 5\}$ αποτελούν κλειστό σύνολο επαναληπτικών τόσο για την ενσωματωμένη όσο και για την συνεχούς χρόνου. Η κατάσταση $\{6\}$ είναι μεταβατική κατάσταση. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα $h_6^{C_1}$, δηλαδή την πιθανότητα να ξεκινήσει από την 6 και να απορροφηθεί στο κλειστό σύνολο C_1. Σημειώστε ότι

$$P(\sigma_1 < \infty | X(0) = 6) = P(\sigma_2 < \infty | X(0) = 6) = h_6^{C_1}$$

Προκύπτει ότι $h_6^{C_1} = \frac{3}{4}$ και $h_6^{C_2} = \frac{1}{4}$.
Για να βρούμε τις οριακές πιθανότητες της αρχικής αλυσίδας συνεχούς χρόνου θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον εκθετικό πίνακα $P(t) = e^{tQ}$ και στην συνέχεια να υπολογίζαμε το όριο του κάθε στοιχείου καθώς $t \to \infty$. Όμως, λόγω του θεωρήματος 450 αρκεί να υπολογίσουμε τις στάσιμες κατανομές των δυο υποαλυσίδων που προκύπτουν από τα δυο κλειστά σύνολα C_1, C_2. Συμβολίζουμε με

$$Q_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ και } Q_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

τους γεννήτορες των δυο υποαλυσίδων. Θα υπολογίσουμε τις στάσιμες κατανομές από τις εξισώσεις $\pi Q_1 = 0$ και $\pi Q_2 = 0$. Θα έχουμε

$$\pi_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \text{ και } \pi_2 = \left(\frac{3}{16}, \frac{8}{16}, \frac{5}{16}\right)$$

Λόγω του ότι η κατάσταση 6 είναι μεταβατική έπεται ότι $\lim_{t\to\infty}(P(t))_{i6} = 0$ *για κάθε* $i \in S$. *Αρα οι οριακές πιθανότητες θα είναι ως εξής*

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{8}{16} & \frac{5}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{8}{16} & \frac{5}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{16} & \frac{8}{16} & \frac{5}{16} & 0 \\ \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4} & \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} & \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{4} & \frac{8}{16}\cdot\frac{1}{4} & \frac{5}{16}\cdot\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 454 (Η διαδικασία Poisson) *Σε αυτό το παράδειγμα θα μελετήσουμε την διαδικασία Poisson, η οποία είναι στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου με διακριτό πλήθος καταστάσεων, κάτω από το πρίσμα της γενικής θεωρίας που παρουσιάσαμε προηγούμενα.*
Αν ένα φαινόμενο μοντελοποιηθεί μέσω της διαδικασίας Poisson θα μας δίνονται τα παρακάτω στοιχεία (δες ορισμό 428).
Να μελετηθεί η στοχαστική διαδικασία $N(t)$ *με πεδίο τιμών το σύνολο καταστάσεων* $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$ *και η οποία ικανοποιεί τα εξής*

$$\begin{aligned} P(N(t+h) - N(t) = 0) &= 1 - \lambda h + o(h) \\ P(N(t+h) - N(t) = 1) &= \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

Στην ουσία μας πληροφορούν ότι η στοχαστική διαδικασία κάνει άλματα μονάχα προς την επόμενη κατάσταση, δηλαδή αν βρεθεί στην κατάσταση i *θα μεταβεί (όταν θα κάνει άλμα) στην κατάσταση* $i+1$.
Με αυτό τον τρόπο μας έχουν δώσει τον πίνακα Q *ο οποίος έχει παντού μηδενικά εκτός από την διαγώνιο όπου έχει το* $-\lambda$ *και την υπερ-διαγώνιο που έχει το* λ. *Από τον πίνακα* Q *μπορούμε να κατασκευάσουμε το διάνυσμα* Λ *και τον πίνακα μετάβασης* R *της ενσωματωμένης διακριτής αλυσίδας. Βλέπουμε ότι* $\Lambda = (\lambda, \lambda, \cdots,)$ *ενώ ο πίνακας* R *έχει παντού μηδενικά εκτός από την υπερ-διαγώνιο όπου έχει μονάδες. Φαίνεται λοιπόν από την διακριτή αλυσίδα ότι τα άλματα πραγματοποιούνται μονάχα στην επόμενη κατάσταση. Συνεπώς, αν η αλυσίδα μεταπηδήσει από την κατάσταση* i *στην* $i+1$ *δεν πρόκειται ποτέ να επιστρέψει στην* i. *Μάλιστα, η πιθανότητα μεταπήδησης είναι αυστηρά θετική (αφού* $\lambda > 0$ *τότε* $P(T_i < k) = 1 - e^{-\lambda k} > 0$*) και επομένως η πιθανότητα παραμονής είναι αυστηρά μικρότερη από την μονάδα. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές και επομένως ο πίνακας οριακών πιθανοτήτων είναι ο μηδενικός. Στον ορισμό 430 έχουμε υπολογίσει τον πίνακα* $P(t)$ *της διαδικασίας Poisson και εύκολα βλέπουμε ότι τα στοιχεία του πίνακα συγκλίνουν στο μηδέν καθώς* $t \to \infty$. □

Παρατηρηση 455 *Είναι φανερή η αναγκαιότητα της μελέτης Μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου προκειμένου να μελετήσει κάποιος αλυσίδες συνεχούς χρόνου. Πρωτίστως, διότι σε κάθε αλυσίδα συνεχούς χρόνου αντιστοιχεί και μια αλυσίδα διακριτού χρόνου (η ενσωματωμένη αλυσίδα) και μέσω αυτής προκύπτουν τα περισσότερα αποτελέσματα και συμπεράσματα για την διαδικασία συνεχούς χρόνου. Επιπλέον, είναι ευκολότερο να αποκτήσει κάποιος την απαιτούμενη μαθηματική διαίσθηση μέσω της μελέτης του σε διακριτό χρόνο προκειμένου να συνεχίσει επιτυχώς την μελέτη του σε χρόνο συνεχή. Επίσης, δεν είναι δυνατό πάντοτε να μετατρέψουμε μια διαδικασία διακριτού χρόνου σε συνεχή διότι αφενός μπορεί να μην έχουμε τα κατάλληλα δεδομένα (δηλαδή το διάνυσμα Λ) και αφετέρου τα συμπεράσματα διαφέρουν. Τέλος, να σημειώσουμε ότι πολλά φαινόμενα μοντελοποιούνται μονάχα σε διακριτό χρόνο εκ κατασκευής.* □

10.7 Έκρηξη της στοχαστικής διαδικασίας

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου $\sup_{i\in S}\lambda_i = +\infty$. Στην περίπτωση αυτή η στοχαστική διαδικασία μπορεί να πάρει την τιμή άπειρο σε πεπερασμένο χρονικό διάστημα όπως θα δούμε παρακάτω.

10.8 Στοχαστικές Διαδικασίες Διακριτού Χρόνου

Θα εργαζόμαστε σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Έστω X_n ακολουθία τ.μ.

Ορισμος 456 *Έστω $\omega \in \Omega$. Η ακολουθία αριθμών $X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega), \cdots$ ονομάζεται τροχιά.*

Ορισμος 457 *Μια ακολουθία σ-αλγεβρών $\mathcal{F}_i$ στο Ω τ.ω. $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1} \subseteq \mathcal{F}$ για κάθε i ονομάζεται φιλτράρισμα.*

Ορισμος 458 *Έστω X_i μια ακολουθία τ.μ. και $\mathcal{F}_i$ ένα φιλτράρισμα. Θα λέμε ότι η X_i είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_i$ όταν η X_i είναι $\mathcal{F}_i$ μετρήσιμη ή αλλιώς είναι τ.μ. στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}_i, P)$.*

Όπως είδαμε, αν μια απεικόνιση είναι τ.μ. σε μια σ-άλγεβρα τότε είναι σίγουρα και για μια που είναι υπερσύνολο. Για μια όμως που είναι υποσύνολο δεν ισχύει κατά ανάγκη. Η μικρότερη σ-άλγεβρα που ισχύει αυτό είναι η $\sigma(X)$. Από κει και κάτω παύει να είναι τ.μ.

Έστω τώρα μια ακολουθία τ.μ. X_i. Η X_1 είναι $\sigma(X_1)$ μετρήσιμη και η X_2 είναι $\sigma(X_2)$ μετρήσιμη. Όμως, δεν έχουμε κατά ανάγκη $\sigma(X_1) \subseteq \sigma(X_2)$ άρα η X_1 δεν είναι κατά ανάγκη $\sigma(X_2)$ μετρήσιμη. Μπορούμε όμως να κατασκευάσουμε μια τρίτη σ-άλγεβρα την $\sigma(X_1, X_2)$ η οποία είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα τ.ω. οι X_1, X_2 να είναι τ.μ. σε αυτή και ταυτόχρονα $\sigma(X_1) \subseteq \sigma(X_1, X_2)$. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε ένα φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$ τ.ω. η X_n να είναι προσαρμοσμένη σε αυτή. Αυτό το φιλτράρισμα είναι το μικρότερο δυνατό όπως εξηγήσαμε παραπάνω.

ΟΡΙΣΜΟΣ 459 *Έστω X_i μια ακολουθία τ.μ. Θα λέμε ότι είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, ...$ αν ισχύουν τα παρακάτω,*

1) $X_n \in L^1$ για κάθε n $(\mathbb{E}|X_n| < \infty)$,

2) η X_n είναι προσαρμοσμένη στο $\mathcal{F}_n$,

3) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ σβ. για κάθε n.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 460 *Μια ακολουθία τ.μ. είναι martingale αν ισχύει*

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n.$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής,

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A X_{n+1}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A X_n) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{F}_n.$$

Πράγματι, αν ξεκινήσουμε με τον πρώτο ορισμό τότε η δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ έχει την εξής ιδιότητα (από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής),

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A X_{n+1}) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{F}_n.$$

Το πρώτο μέλος όμως είναι ίσο με $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A X_n)$. Αρα δείξαμε το ευθύ. Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A X_{n+1}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A X_n)$ για κάθε $A \in \mathcal{F}_n$. Το αριστερό μέλος όμως είναι ίσο (από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής) με $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))$. Διαλέγοντας

$$A = \{\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n \geq 0\}$$

και έπειτα την αντίστροφη ανισότητα έχουμε ότι $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$. Επομένως, ισχύει και το αντίστροφο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 461 *Θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία τ.μ. X_n και ένα φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n$ τ.ω. να είναι martingale σε αυτό το φιλτράρισμα. Έστω $X_1,...,X_n,..$ ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με $\mathbb{E}(X_n) = 0$ για κάθε n και $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$. Θέτουμε, $S_n = X_1 + ... + X_n$ και $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$. Θα δείξουμε ότι η S_n είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_n$. Η $S_1 = X_1$ και είναι $\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1)$-μετρήσιμη. Η $S_2 = X_1 + X_2$ είναι $\mathcal{F}_2$-μετρήσιμη, διότι οι X_1, X_2 είναι $\mathcal{F}_2$-μετρήσιμες (η κάθε μια χωριστά) άρα και το άθροισμά τους (δείτε προγενέστερο θεώρημα). Επίσης, ανήκει στον L^1 διότι $\mathbb{E}(|S_n|) \leq \mathbb{E}(|X_1|) + ... + \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$. Θα δείξουμε ότι είναι martingale.*
Έχουμε δείξει ότι αν $X_1, X_2, ..., X_{n+1}$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. τότε οι $\sigma(X_1, X_2, ..., X_n)$, $\sigma(X_{n+1})$ είναι ανεξάρτητες (Παρατήρηση ;;) και θα το χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε ότι είναι martingale. Έχουμε λοιπόν,

$$\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n + \mathbb{E}(X_{n+1}) = 0.$$

'ρα, η S_n είναι martingale ανν $\mathbb{E}(X_n) = S_n$ για κάθε n.

Άσκηση 462 *Έστω $X \in L^1$ τ.μ. και έστω $\mathcal{F}_1, ..., \mathcal{F}_n, ...$ ένα φιλτράρισμα. Θέτουμε $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$. Δείξτε ότι είναι martingale.*

Απόδειξη. Εκ κατασκευής, η X_n είναι $\mathcal{F}_n$ μετρήσιμη. Επίσης, $|X_n| = |\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{F}_n)$, οπότε $\mathbb{E}(|X_n|) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X||\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(|X|) < \infty$. Τέλος έχουμε ότι $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) = X_n$. Δείξτε σε κάθε βήμα ποιες ακριβώς ιδιότητες έχουμε χρησιμοποιήσει. □

Άσκηση 463 *Έστω X_n martingale ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n$. Δείξτε ότι $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)$ για κάθε n.*

Απόδειξη. Ξεκινάμε με την ισότητα $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ και παίρνουμε τη μέση τιμή κατά μέλη, $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X_{n+1})$ για κάθε n. Εξηγήστε κάθε βήμα. □

Άσκηση 464 *Έστω X_n martingale ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n$. Δείξτε ότι η X_n είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{G}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$.*

Απόδειξη. Η X_n είναι $\mathcal{F}_n$ μετρήσιμη αλλά και $\mathcal{G}_n$ μετρήσιμη, άρα $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ διότι $\mathcal{G}_1 = \sigma(X_1) \subseteq \mathcal{F}_1$ αφού η $\sigma(X_1)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα στην οποία η X_1 είναι τ.μ. Επίσης, $\mathcal{G}_2 = \sigma(X_1, X_2)$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα στην οποία οι X_1, X_2 είναι τ.μ. Όμως είναι τ.μ. και στην $\mathcal{F}_2$ άρα $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}_2$. Με το ίδιο σκεπτικό δείχνουμε ότι $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$. Αυτό ακριβώς θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Έχουμε λοιπόν,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)|\mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}_n) = X_n.$$

Εξηγήστε κάθε βήμα. □

Παράδειγμα 465 *Θεωρούμε την S_n η οποία υποθέτουμε ότι είναι ένας συμμετρικός τυχαίος περίπατος, δηλαδή, $S_n = X_1 + ... + X_n$ όπου $X_1, X_2, ...$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων (δηλαδή με την ίδια κατανομή) τ.μ. τ.ω.*

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι $S_n^2 - n$ είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, ...X_n)$. Πράγματι, αφού $S_n^2 - n = (X_1 + ... + X_n)^2 - n$ δηλαδή είναι συνάρτηση της ακολουθίας τ.μ. $X_1, ..., X_n$ οι οποίες είναι $\mathcal{F}_n$ μετρήσιμες τότε και η $S_n^2 - n$ είναι $\mathcal{F}_n$ μετρήσιμη, δηλαδή είναι προσαρμοσμένη στο δοθέν φιλτράρισμα. Επίσης, $|S_n| \leq n$ και επομένως $\mathbb{E}(|S_n^2 - n|) \leq \mathbb{E}(S_n^2) + n \leq n^2 + n < \infty$, άρα $S_n \in L^1$ για κάθε n. Επίσης, αφού S_n είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη το ίδιο συμβαίνει και με την S_n^2 αφού η $f(x) = x^2$ είναι συνάρτηση Borel. Τέλος, να σημειώσουμε ότι $\mathbb{E}(X_n) = 0$ και $\mathbb{E}(X_n^2) = 1$ αφού οι X_n, X_n^2 είναι απλές τ.μ. και έχουμε $\mathbb{E}(X_n) = 1 \cdot P(\{X_n = 1\}) + (-1) \cdot P(\{X_n = -1\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Παρόμοια για την X_n^2 με τη διαφορά ότι παίρνει την τιμή 1 σβ, οπότε $\mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = 1$ αφού οι $\sigma(X_{n+1}^2), \mathcal{F}_n$ είναι ανεξάρτητες καθότι $\sigma(X_{n+1}^2) \subseteq \sigma(X_{n+1})$. Αρα,

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) + 2\mathbb{E}(X_{n+1}S_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(S_n^2|\mathcal{F}_n) = 1 + S_n^2.$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει τη γραμμικότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής, ότι S_n^2 είναι $\mathcal{F}_n$ μετρήσιμη, ότι $\mathbb{E}(X_n) = 0$ και $\mathbb{E}(X_n^2) = 1$. Επίσης, όπως σε προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε ότι $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = 0$ διότι $X_1, ..., X_{n+1}$ ανεξάρτητες.
Οπότε αυτό σημαίνει ότι $\mathbb{E}(S_{n+1}^2 - n - 1|\mathcal{F}_n) = S_n^2 - n$ άρα $S_n^2 - n$ είναι martingale.

ΟΡΙΣΜΟΣ 466 *Λέμε ότι η ακολουθία $X_1, X_2, ...$ είναι supermartingale (submartingale) ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n$ αν*

1) $X_n \in L^1$ για κάθε n,

2) η X_n είναι προσαρμοσμένη στο $\mathcal{F}_n$,

3) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \leq X_n$ ($\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) \geq X_n$) σβ. για κάθε n.

ΑΣΚΗΣΗ 467 *Έστω $X_n \in L^2$ ακολουθία τ.μ. Δείξτε ότι αν η X_n είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n$ τότε η X_n^2 είναι submartingale ως προς το ίδιο φιλτράρισμα.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού η X_n είναι προσαρμοσμένη στο $\mathcal{F}_n$ τότε και η X_n^2 είναι. Επίσης, αφού $X_n \in L^2$ τότε και $X_n^2 \in L^1$. Για την τρίτη ιδιότητα θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Jensen. Η $\phi(x) = x^2$ είναι κυρτή οπότε έχουμε,

$$X_n^2 = (\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))^2 \leq \mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n).$$

Επομένως, η X_n^2 ικανοποιεί και τις τρεις ιδιότητες του ορισμού του submartingale □

10.8.1 Τυχερά παιχνίδια

Ας δούμε μια εφαρμογή των παραπάνω σε ένα τυχερό παιχνίδι (π.χ. ρουλέτα ή ζάρια ή κάτι άλλο). Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε παιχνίδι αντιστοιχούμε μια τ.μ. X_n η οποία μας πληροφορεί για το αν κέρδισε ή έχασε ο παίκτης, δηλαδή π.χ. παίρνει την τιμή 1 αν κερδίσει και την τιμή -1 αν χάσει. Υποθέτουμε αρχικά ότι ποντάρει το ίδιο σε κάθε παιχνίδι. Τότε, έπειτα από n παιχνίδια θα έχει το εξής κέρδος, $S_n = X_1 + ... + X_n$, το οποίο βέβαια μπορεί να είναι και αρνητικό. Θεωρούμε το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ και θέτουμε $S_0 = 0$ και $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Τότε, κατά το τέλος του n παιχνιδιού η $\mathcal{F}_n$ μπορεί να θεωρηθεί ως η πληροφορία που έχει μαζέψει ο παίκτης μέχρι αυτή την στιγμή. Θα θεωρούμε ότι το παιχνίδι είναι δίκαιο, όταν η γνώση των προηγουμένων παιχνιδιών δεν μπορεί να παίξει κάποιο ρόλο και αυτό, μαθηματικά, μπορεί να αποτυπωθεί με την εξής ισότητα, $\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_{n-1}) = S_{n-1}$, δηλαδή

η μέση τιμή της S_n δεδομένου της πληροφορίας των προηγούμενων παιχνιδιών θα πρέπει να είναι ίση με την προηγούμενη. Αν όμως ισχύει ότι $\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq S_{n-1}$ τότε το παιχνίδι είναι υπέρ του παίκτη αλλιώς στην αντίστροφη ανισότητα είναι κατά του παίκτη.
Ας υποθέσουμε τώρα ότι σε κάθε παιχνίδι ο παίκτης αποφασίζει να ποντάρει διαφορετικά, όχι το ίδιο, και ας συμβολίσουμε με a_n το κάθε ποντάρισμα. Σε κάθε παιχνίδι, π.χ. στο n ο παίκτης γνωρίζει τι έχει κερδίσει στα $n-1$ παιχνίδια και με βάση αυτήν τη γνώση μπορεί να αποφασίσει το επόμενο ποντάρισμα. Μαθηματικά αυτό μπορεί να αποτυπωθεί με το ότι η a_n είναι $\mathcal{F}_{n-1}$ μετρήσιμη.
Έτσι μπορούμε να δώσουμε τον επόμενο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 468 *Μια στρατηγική παιχνιδιού (ή αλλιώς προβλέψιμη ακολουθία) $a_1, a_2, ...$ ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n$ είναι μια ακολουθία τ.μ. τ.ω. a_n είναι $\mathcal{F}_{n-1}$ μετρήσιμη.*

Αν λοιπόν κάποιος παίκτης ακολουθήσει μια στρατηγική $a_1, a_2, ...$ τότε το κέρδος θα είναι $D_n = a_1(S_1 - S_0) + ... + a_n(S_n - S_{n-1})$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι όταν η $a_1, a_2, ...$ είναι φραγμένη ακολουθία και όταν η S_n είναι martingale τότε και η D_n είναι martingale.

ΘΕΩΡΗΜΑ 469 *Έστω $a_1, a_2, ...$ μια στρατηγική παιχνιδιού.*

1) Αν $a_1, a_2, ...$ είναι φραγμένη ακολουθία και S_n είναι martingale τότε και η D_n είναι martingale,

2) Αν $a_1, a_2, ...$ είναι φραγμένη ακολουθία θετικών όρων και S_n είναι supermartingale τότε και η D_n είναι supermartingale,

3) Αν $a_1, a_2, ...$ είναι φραγμένη ακολουθία θετικών όρων και S_n είναι submartingale τότε και η D_n είναι submartingale.

Αυτό σημαίνει ότι αν το παιχνίδι είναι δίκαιο στην περίπτωση που ο παίκτης ποντάρει ισόποσα τότε είναι δίκαιο ακόμη και αν ποντάρει διαφορετικά κάθε φορά. Επίσης, ένα μη δίκαιο παιχνίδι παραμένει μη δίκαιο κάτω από οποιαδήποτε στρατηγική παιχνιδιού. Ας δούμε την απόδειξή του.
ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα δείξουμε το 1, τα υπόλοιπα αφήνονται ως άσκηση. Παρατηρούμε ότι a_n, D_{n-1} είναι $\mathcal{F}_{n-1}$ μετρήσιμες. Οπότε έχουμε,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(D_{n-1} + a_n(S_n - S_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= D_{n-1} + a_n(\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_{n-1}) - S_{n-1}).\end{aligned}$$

Αν λοιπόν S_n είναι martingale τότε $a_n(\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_{n-1}) - S_{n-1}) = 0$ άρα και η D_n είναι martingale □

Σημείωση Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι $a_n, S_n \in L^2$ για κάθε n.

10.8.2 Χρόνος Στάσης

Ορισμος 470 *Μια τ.μ. r με τιμές στο $\{1,2,...\}\cup\{\infty\}$ ονομάζεται χρόνος στάσης ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n$ αν για κάθε n, $\{r=n\}\in\mathcal{F}_n$.*

Στον παραπάνω ορισμό είναι το ίδιο με το να υποθέσουμε ότι $\{r\le n\}\in\mathcal{F}_n$. Πράγματι, έστω $\{r=n\}\in\mathcal{F}_n$ τότε $\{r\le n\}=\bigcup_{k=1}^n\{r=k\}\in\mathcal{F}_k\subseteq\mathcal{F}_n$. Αντίστροφα, αν $\{r\le n\}\in\mathcal{F}_n$ τότε και $\{r\le n-1\}\in\mathcal{F}_{n-1}\subseteq\mathcal{F}_n$ άρα και $\{r\le n\}\setminus\{r\le n-1\}=\{r=n\}\in\mathcal{F}_n$.

Παραδειγμα 471 *Ας υποθέσουμε ότι στρίβουμε ένα νόμισμα συνεχώς και ότι κερδίζουμε 1 μονάδα όταν έρχεται Γράμματα ενώ χάνουμε μια μονάδα όταν έρχεται Κορώνα. Έστω ότι ξεκινάμε με 5 μονάδες και αποφασίζουμε εκ των προτέρων ότι θα σταματήσουμε το παιχνίδι μόνον όταν γίνουν 10 μονάδες ή τα χάσουμε όλα. Αν X_n είναι η ποσότητα των μονάδων που έχουμε στο βήμα n τότε ο χρόνος που θα σταματήσουμε το παιχνίδι θα είναι $r=\min\{n:X_n=10 \text{ ή } 0\}$ και ονομάζεται ο χρόνος πρώτης επιτυχίας. Μπορεί να δείξει κανείς ότι είναι ένας χρόνος στάσης ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,...,X_n)$. Πράγματι, έχουμε το εξής,*

$$\{r=n\}=\{0<X_1<10\}\cap...\cap\{0<X_{n-1}<10\}\cap\{X_n=10 \text{ ή } 0\}.$$

Κάθε ενδεχόμενο στο δεξί μέλος ανήκει στην $\mathcal{F}_n$ άρα και η τομή τους. Επομένως η r ικανοποιεί τον ορισμό του χρόνου στάσης.

Ασκηση 472 *Έστω μια ακολουθία X_n προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n$ και έστω $B\subseteq\mathbb{R}$ ένα σύνολο Borel. Δείξτε ότι ο χρόνος πρώτης εισόδου της X_n στο B, δηλαδή $r=\min\{n:X_n\in B\}$ είναι χρόνος στάσης.*

Αποδειξη. Θα πρέπει να δείξουμε ότι το ενδεχόμενο $\{r=n\}\in\mathcal{F}_n$ για κάθε n. Πράγματι,

$$\{r=n\}=\{X_1\notin B\}\cap...\cap\{X_{n-1}\notin B\}\cap\{X_n\in B\}.$$

Το κάθε ενδεχόμενο στο δεξί μέλος ανήκει στην $\mathcal{F}_n$ γιατί η X_n είναι προσαρμοσμένη στο $\mathcal{F}_n$, άρα και η τομή αυτών ανήκει στην $\mathcal{F}_n$ το οποίο σημαίνει ότι η r ικανοποιεί τον ορισμό του χρόνου στάσης. □

Αν έχουμε μια ακολουθία X_n τ.μ. και r ένα χρόνο στάσης, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια άλλη ακολουθία τ.μ. 'σταματημένη' στο r με τον εξής τρόπο, $X_n^r=X_{n\wedge r(\omega)}(\omega)$.

Ασκηση 473 *Έστω X_n μια ακολουθία τ.μ. προσαρμοσμένης στο $\mathcal{F}_n$ και έστω r χρόνος στάσης. Τότε και η X_n^r είναι προσαρμοσμένη.*

Αποδειξη. Έστω B σύνολο Borel. Θα δείξουμε ότι $\{X_{n\wedge r}\in B\}\in\mathcal{F}_n$. Πράγματι,

$$\{X_{n\wedge r}\in B\}=\{X_n\in B,r>n\}\cup\bigcup_{k=1}^n\{X_k\in B,r=k\}.$$

Όμως $\{X_n \in B, r > n\} = \{X_n \in B\} \cap \{r > n\} \in \mathcal{F}_n$, διότι $\{r \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Επίσης, $\{X_k \in B, r = k\} = \{X_k \in B\} \cap \{r = k\} \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$. Αρα $\{X_{n\wedge r} \in B\} \in \mathcal{F}_n$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 474 *Έστω r ένας χρόνος στάσης. Η οικογένεια υποσυνόλων*

$$\mathcal{F}_r = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{r \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

είναι σ-άλγεβρα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς $\Omega \in \mathcal{F}_r$. Αν $A \in \mathcal{F}_r$ τότε $A^c \cap \{r \leq n\} = \{r \leq n\} \setminus (A \cap \{r \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$. Τέλος αν $A_i \in \mathcal{F}_r$ τότε $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap \{r \leq n\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap \{r \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$. □

ΑΣΚΗΣΗ 475 *Έστω s, r χρόνοι στάσης τ.ω. $s < r$. Δείξτε ότι $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_r$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πράγματι, αφού $s < r$ τότε και $\{r \leq n\} \subseteq \{s \leq n\}$. Αν $A \in \mathcal{F}_s$ τότε $A \cap \{r \leq n\} = A \cap \{s \leq n\} \cap \{r \leq n\}$. Όμως, $A \cap \{s \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ αλλά και $\{r \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ οπότε και η τομή τους δηλαδή $A \in \mathcal{F}_r$. □

ΑΣΚΗΣΗ 476 *Δείξτε ότι η X_r είναι $\mathcal{F}_r$-μετρήσιμη όταν r είναι χρόνος στάσης.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πρέπει να δείξουμε ότι αν B είναι σύνολο Borel τότε $\{X_r \in B\} \in \mathcal{F}_r$. Δηλαδή, $\{X_r \in B\} \cap \{r \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \{X_r \in B\} \cap \{r \leq n\} &= \bigcup_{k=1}^{n} \{X_r \in B\} \cap \{r = k\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} \{X_k \in B\} \cap \{r = k\}. \end{aligned}$$

Όμως $\{X_k \in B\} \in \mathcal{F}_k$ αλλά και $\{r = k\} \in \mathcal{F}_k$ επομένως και η τομή τους. □

Μπορεί να αποδείξει κάποιος ότι αν r, s είναι χρόνοι στάσης τότε και οι $r \wedge s, r \vee s, r + s$ είναι χρόνοι στάσης.
Ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα για σταματημένες στοχαστικές διαδικασίες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 477 *Έστω r ένας χρόνος στάσης.*

1) Αν η X_n είναι martingale τότε το ίδιο ισχύει για την X_n^r,

2) Αν η X_n είναι supermartingale τότε το ίδιο ισχύει για την X_n^r,

3) Αν η X_n είναι submartingale τότε το ίδιο ισχύει για την X_n^r.

Στις εφαρμογές αυτό σημαίνει ότι ένα δίκαιο παιχνίδι τύχης δεν αλλάζει με κατάλληλη επιλογή χρόνου στάσης (χρόνου εξόδου από το παιχνίδι). Το ίδιο συμβαίνει και για μη δίκαιο παιχνίδι.
Θα δώσουμε παρακάτω το Θεώρημα Επιλεκτικής Στάσης.

Θεωρημα 478 *Έστω X_n μια martingale και r ένας χρόνος στάσης. Έστω ότι ι-σχύουν τα ακόλουθα,*

1) $r < \infty$ *σβ.*

2) $X_r \in L^1$,

3) $\mathbb{E}(X_n \mathbb{I}_{\{r>n\}}) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$.

Τότε $\mathbb{E}(X_r) = \mathbb{E}(X_1)$.

Παραδειγμα 479 *Έστω X_n ένας συμμετρικός τυχαίος περίπατος και έστω $K > 0$ ακέραιος αριθμός. Ορίζουμε το χρόνο πρώτης επιτυχίας (του K από την X_n) να είναι $r = \min\{n : |X_n| = K\}$. Από προηγούμενη άσκηση η r είναι χρόνος στάσης. Επίσης γνωρίζουμε ότι $X_n^2 - n$ είναι martingale άρα και η $X_{n\wedge r}^2 - (n \wedge r)$. Αν ισχύει το θεώρημα επιλεκτικής στάσης για την $X_n^2 - n$ τότε $\mathbb{E}(X_r^2 - r) = \mathbb{E}(X_1^2 - 1) = 0$. Οπότε, με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή $\mathbb{E}(r) = \mathbb{E}(X_r^2) = K^2$ αφού $|X_r| = K$.*
Μπορεί να αποδειχθεί ότι πράγματι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης. Ας το αποδείξουμε. Αρχικά θα πρέπει να δείξουμε ότι $P(\{r = \infty\}) = 0$. Όμως,

$$\begin{aligned}
P(\{r=\infty\}) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{n\wedge r = n\}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(\{n\wedge r = n\}) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(n\wedge r)}{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(X_{n\wedge r}^2)}{n} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

αφού $\mathbb{E}(X_{n\wedge r}^2) \leq K^2$. Χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 13 αφού η ακολουθία ενδεχομένων $\{n\wedge r = n\}$ είναι φθίνουσα για να πάρουμε την δεύτερη ισότητα. Επίσης την Πρόταση 136 (Ανισότητα Chebysev) για να πάρουμε την τρίτη ανισότητα. Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $X_{n\wedge r}^2 - n\wedge r$ είναι martingale οπότε $\mathbb{E}(X_{n\wedge r}^2 - n\wedge r) = \mathbb{E}(X_1^2 - 1) = 0$. Θα δείξουμε τώρα ότι $\mathbb{E}(|X_r^2 - r|) < \infty$. Πράγματι,

$$\mathbb{E}(|X_r^2 - r|) \leq \mathbb{E}(|X_r^2|) + \mathbb{E}(r) \leq K^2 + \mathbb{E}(r).$$

Γνωρίζουμε ότι $\mathbb{E}(n\wedge r) = \mathbb{E}(X_{n\wedge r}^2) \leq K^2$. Δηλαδή η ακολουθία αριθμών $\mathbb{E}(n\wedge r)$ είναι αύξουσα και φραγμένη και αφού $n\wedge r \to r$ σημειακά τότε συγκλίνει στο $\mathbb{E}(r)$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης (δείτε το θεώρημα 105), το οποίο βέβαια θα είναι επίσης φραγμένο.

Τέλος θα πρέπει να δείξουμε ότι $\mathbb{E}((X_n^2 - n)\mathbb{I}_{\{r>n\}}) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$. *Αφού* $X_n^2 \leq K^2$ *στο* $\{r > n\}$ *τότε* $\mathbb{E}(X_n^2\mathbb{I}_{\{r>n\}}) \leq K^2P(\{r > n\}) \to 0$. *Επίσης, έχουμε ότι* $r\mathbb{I}_{\{r>n\}} \to 0$ *σβ. και χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι* $\mathbb{E}(r\mathbb{I}_{\{r>n\}}) \to 0$ *καθώς* $n \to \infty$. *Οπότε* $\mathbb{E}(n\mathbb{I}_{\{r>n\}}) \leq \mathbb{E}(r\mathbb{I}_{\{r>n\}}) \to 0$. *Τελικά,* $\mathbb{E}((X_n^2 - n)\mathbb{I}_{\{r>n\}}) \to 0$. *Δηλαδή η* $X_n^2 - n$ *ικανοποιεί το θεώρημα επιλεκτικής στάσης.*

10.8.3 Ανισότητες και Σύγκλιση

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε και θα μελετήσουμε διάφορες ανισότητες που ισχύουν για τις martingale.

Θεωρημα 480 (Ανισότητα Doob) *Έστω* X_n *μια μη αρνητική submartingale ως προς το φιλτράρισμα* $\mathcal{F}_n$. *Τότε για κάθε* $\lambda > 0$, *έχουμε ότι*

$$\lambda P\left(\max_{k\leq n} X_k \geq \lambda\right) \leq \mathbb{E}\left(X_n\mathbb{I}_{\{\max_{k\leq n} X_k \geq \lambda\}}\right).$$

Επίσης ισχύει και η παρακάτω ανισότητα.

Θεωρημα 481 (L^2 Ανισότητα Doob) *Έστω* X_n *μια μη αρνητική submartingale ως προς το φιλτράρισμα* $\mathcal{F}_n$. *Τότε*

$$\mathbb{E}|\max_{k\leq n} X_k|^2 \leq 4\mathbb{E}|X_n|^2.$$

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα σύγκλισης των martingale.

Θεωρημα 482 *Έστω* X_n *μια supermartingale ως προς το φιλτράρισμα* $\mathcal{F}_n$ *τ.ω* $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$. *Τότε υπάρχει μια ολοκληρώσιμη τ.μ.* X *τ.ω.*

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X \text{ σβ.}$$

Το θεώρημα αυτό ισχύει προφανώς και για μια martingale αφού είναι πάντοτε και supermartingale. Ισχύει όμως και για μια submartingale αφού η $-X_n$ τότε θα είναι supermartingale. Επίσης, αν πρόκειται για μια μη αρνητική supermartingale τότε δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ αφού $\mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_1) < \infty$. Τέλος να σημειώσουμε ότι η σβ. σύγκλιση δεν σημαίνει ότι συγκλίνει και στον L^1. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρειαστούμε την έννοια της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας.

Ορισμος 483 *Μια ακολουθία τ.μ.* X_n *ονομάζεται ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει κάποιο* $M > 0$ *τ.ω.*

$$\int_{\{|X_n|>M\}} |X_n| dP < \varepsilon,$$

για κάθε n.

Παραδειγμα 484 *Έστω ο χώρος πιθανότητας $([0,1], \mathcal{B}, Leb)$ και θεωρούμε την ακολουθία τ.μ. $X_n = n\mathbb{I}_{(0,\frac{1}{n})}$. Θα δείξουμε ότι δεν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Πράγματι, για κάθε $M > 0$ και κάθε $n > M$ έχουμε,*

$$\left(0, \frac{1}{n}\right) = \big\{X_n > M\big\},$$

οπότε

$$\int_{\{X_n > M\}} X_n dP = \int_{(0,\frac{1}{n})} n dP = 1.$$

Αυτό σημαίνει όμως ότι δεν υπάρχει $M > 0$ τ.ω. για όλα τα n να έχουμε $\int_{\{X_n>M\}} X_n dP < \frac{1}{2}$.

Παραδειγμα 485 *Έστω X μια ολοκληρώσιμη τ.μ. και $\mathcal{F}_n$ ένα φιλτράρισμα. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Για να το κάνουμε αυτό θα θεωρήσουμε γνωστό ότι για μια ολοκληρώσιμη τ.μ. X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |X| dP < \varepsilon$.*
Έχουμε δείξει ότι η X_n είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |X| dP < \varepsilon$.
Όμως $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ οπότε $|X_n| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{F}_n)$ σβ. Παίρνοντας μέση τιμή κατά μέλη έχουμε

$$\mathbb{E}(|X|) \geq \mathbb{E}(|X_n|) \geq \int_{\{|X_n|>M\}} |X_n| dP \geq MP(\{|X_n| > M\}).$$

Διαλέγοντας $M > \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\delta}$ έχουμε ότι

$$P(\{|X_n| > M\}) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{M} < \delta.$$

Όμως,

$$\mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}\right) \leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(|X||\mathcal{F}_n)\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}\right).$$

Το ενδεχόμενο $\{|X_n| > M\} \in \mathcal{F}_n$ οπότε

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(|X||\mathcal{F}_n)\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}|\mathcal{F}_n\right)$$

Οπότε

$$\mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}\right) \leq \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}|\mathcal{F}_n\right)$$

και παίρνοντας μέση τιμή κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}\left(|X_n|\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}\right) \leq \mathbb{E}(|X|\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}) < \varepsilon.$$

Η ιδιότητα της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας είναι χρήσιμη για την σύγκλιση στον L^1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 486 *Κάθε ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη supermartingale X_n συγκλίνει στον L^1.*

Τέλος, ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 487 *Έστω X_n μια ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale. Τότε $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$, όπου $X = \lim_n X_n$ στον L^1 και $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$.*

Στην περίπτωση που η ακολουθία τ.μ. είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale και το όριο $X \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι σταθερός αριθμός, τότε $X_n = X$ σβ. Αυτό προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα αφού στην περίπτωση αυτή έχουμε $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) = X$ σβ. αφού $X \in \mathbb{R}$.
Παρακάτω δίνουμε έναν πολύ χρήσιμο χαρακτηρισμό των ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων martingale.

ΘΕΩΡΗΜΑ 488 *Η X_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n$ ανν υπάρχει μια ολοκληρώσιμη τ.μ. Y τ.ω. $X_n = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι $X_n \to \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty)$ σβ. και στον L^1 όπου $\mathcal{F}_\infty$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια υποσυνόλων $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$.*

Για σύγκλιση στον L^p (ας σημειώσουμε ότι $L^p \subseteq L^q$ όταν $p < q$), έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 489 *Έστω ότι η X_n είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_n$ τ.ω. $\mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$. Τότε η X_n συγκλίνει σε μια τ.μ. X_∞ σβ. αλλά και στον L^p.*

Παρακάτω θα δώσουμε το νόμο 0-1 του Kolmogorov.

ΘΕΩΡΗΜΑ 490 *Έστω X_n μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. Ορίζουμε την σ-άλγεβρα ουρά $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \cap ...$ όπου $\mathcal{T}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, ..)$. Τότε $P(A) = 0$ ή 1 όταν $A \in \mathcal{T}$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 491 (Ανάλυση Doob) *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_n))$ χώρος πιθανότητας με φίλτρο. Κάθε προσαρμοσμένη και ολοκληρώσιμη στοχαστική διαδικασία X_n αναλύεται μοναδικά ως εξής,*

$$X_n = M_n + A_n,$$

όπου M_n είναι μια martingale τ.ω. $M_0 = X_0$ και A_n είναι μια προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία τ.ω. $A_0 = 0$. Επίσης, η X_n είναι supermartingale (submartingale) ανν η A_n είναι φθίνουσα (αύξουσα).

10.9 Στοχαστικές Διαδικασίες Συνεχούς Χρόνου

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε στις στοχαστικές διαδικασίες σε συνεχή χρόνο. Έστω λοιπόν ένας μετρήσιμος χώρος $(\Omega, \mathcal{F})$. Θα λέμε ότι η οικογένεια τ.μ. $X = \{X_t : 0 \leq t < \infty\}$ είναι μια στοχαστική διαδικασία. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο στοχαστικές διαδικασίες ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Ένα ερώτημα είναι με ποια έννοια θα λέμε ότι ταυτίζονται οι δυο στοχαστικές διαδικασίες. Όπως παρατηρεί κανείς μια στοχαστική διαδικασία είναι στην πραγματικότητα συνάρτηση δυο μεταβλητών, των t, ω. Αρα αν $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ για κάθε $(t,\omega) \in [(0,\infty), \Omega]$ μπορούμε να πούμε ότι είναι ίσες. Όμως, μπορούμε να δώσουμε και ασθενέστερους ορισμούς ισότητας χρησιμοποιώντας το μέτρο πιθανότητας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 492 *Δυο στοχαστικές διαδικασίες X_t, Y_t θα λέγονται εκδοχή η μια της άλλης όταν για κάθε t έχουμε $P(\{X_t = Y_t\}) = 1$. Θα λέμε ότι είναι μη διακρινόμενες αν $P(\{X_t = Y_t, 0 \leq t < \infty\}) = 1$. Τέλος, θα λέμε ότι δυο στοχαστικές διαδικασίες είναι ισοδύναμες αν για οποιαδήποτε $t_1, t_2, ..., t_n \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $P_{X_{t_i}} = P_{Y_{t_i}}$.*

Η πρώτη είναι η ισχυρότερη ενώ η τρίτη η ασθενέστερη.
Με το παρακάτω θεώρημα κανείς μπορεί να δείξει ότι υπάρχει μια συνεχής εκδοχή για μια στοχαστική διαδικασία, κάτω από προυποθέσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ 493 *Έστω X_t μια στοχαστική διαδικασία. Αν υπάρχει $a > 0$ και $\varepsilon > 0$ τ.ω. για κάθε $0 \leq u \leq t \leq T$,*

$$\mathbb{E}|X_t - X_u|^a \leq C(t-u)^{1+\varepsilon},$$

για κάποια σταθερά C, τότε υπάρχει μια εκδοχή της X με συνεχείς τροχιές και οι οποίες είναι Holder συνεχής τάξης $h < \varepsilon/a$.

Όπως και στη διακριτή περίπτωση, μια στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο παράγει μια σ-άλγεβρα, την $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t) = \sigma(\{X_s^{-1}(A) : 0 \leq s \leq t, A \in \mathcal{B}\})$ και είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα κάτω από την οποία η X_s είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη για κάθε $s \in [0,t]$.
Επίσης, φιλτράρισμα ονομάζουμε μια οικογένεια σ-αλγεβρών $\mathcal{F}_t$ τ.ω. $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ και θα λέμε ότι μια στοχαστική διαδικασία X_t είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_t$ όταν η X_t είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη.
Θα ορίσουμε παρακάτω τη λεγόμενη κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener. Συμβολίζουμε με

$$\Gamma(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Για κάθε $m \in \mathbb{R}$ και $\sigma > 0$ η κατανομή $N(m,\sigma^2)$ με πυκνότητα $g(x) = \Gamma(\sigma^2, x-m)$ ονομάζεται κανονική κατανομή με παραμέτρους m, σ. Δηλαδή,

$$N(m,\sigma^2)(A) = \int_A \Gamma(\sigma^2, x-m)dx, A \in \mathcal{B}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 494 (Κίνηση Brown) *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ ένας χώρος πιθανότητας με φίλτρο. Υπάρχει στοχαστική διαδικασία W_t (η οποία ονομάζεται κίνηση Brown με τις εξής ιδιότητες,*

(i) $W_0 = 0$ σβ.

(ii) η W_t είναι $\mathcal{F}_t$ προσαρμοσμένη και συνεχής,

(iii) για $0 \le s < t$ η τ.μ. $W_t - W_s$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0, t-s)$ και είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$.

Η ύπαρξη μιας στοχαστικής διαδικασίας που ικανοποιεί τα παραπάνω αποδεικνύεται (και μπορεί να βρει τη απόδειξη κανείς στην βιβλιογραφία). Παρατηρούμε ότι η W_t ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0, t)$ οπότε και $\mathbb{E}(W_t) = 0$ και $\mathbb{E}(W_t^2) = t$.
Ο παρακάτω ορισμός είναι η ιδιότητα Markov η οποία στην ουσία λέει ότι αν μια στοχαστική διαδικασία την ικανοποιεί τότε στο χρόνο t η μέση τιμή της σε επόμενη χρονική στιγμή δεν εξαρτάται από προηγούμενες τιμές αλλά μόνο από την τωρινή. Η ιδιότητα αυτή αποτυπώνεται μαθηματικά στον επόμενο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 495 (Ιδιότητα Markov) *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ ένας χώρος πιθανότητας με φίλτρο. Μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία X_t λέμε ότι έχει την ιδιότητα Markov αν για κάθε φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση ϕ έχουμε ότι*

$$\mathbb{E}(\phi(X_T)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\phi(X_T)|X_t), \quad T \ge t.$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η παραπάνω ιδιότητα είναι ισοδύναμη με το να ισχύει ότι για κάθε σύνολο Borel A έχουμε,

$$\mathbb{E}(X_T \in A|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_T \in A|X_t), \quad T \ge t.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 496 *Έστω W_t μια κίνηση Brown σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ με φίλτρο. Για δεδομένο $x \in \mathbb{R}$ και $t \ge 0$ η στοχαστική διαδικασία $W_s^{t,x} = x + W_s - W_t$ με $s \ge t$ ονομάζεται κίνηση Brown που ξεκινάει από το x τη χρονική στιγμή t.*

Οπότε έχουμε ότι $W_t^{t,x} = x$ και επίσης $W_s^{t,x}$ είναι προσαρμοσμένη και συνεχής. Τέλος, για $t \le s \le s+h$ η τ.μ. $W_{s+h}^{t,x} - W_s^{t,x}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0, h)$ και είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$. Οπότε η $W_s^{t,x}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(x, s-t)$ για $s \ge t$, δηλαδή η πυκνότητα της $W_s^{t,x}$ είναι η

$$g(y) = \Gamma^*(t, x, s, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(s-t)}}.$$

Η συνάρτηση αυτή παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία μερικών διαφορικών εξισώσεων. Επίσης, ονομάζεται πυκνότητα μετάβασης της κίνησης Brown από το αρχικό σημείο (t, x) στο τελικό σημείο τη χρονική στιγμή $s \ge t$.

Έστω μια ϕ φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι $\mathbb{E}(\phi(W_s)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\phi(W_s - W_t + W_t)|\mathcal{F}_t) = u(t, W_t)$ με $u(t,x) = \mathbb{E}(\phi(W_s - W_t + x)) = \mathbb{E}(W_s^{t,x})$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 497 *Μια κίνηση Brown W_t στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ έχει την ιδιότητα Markov ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$.*

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\mathbb{E}(\phi(W_s)|\mathcal{F}_t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(y)}{\sqrt{2\pi(s-t)}} e^{-\frac{(y-W_t)^2}{2(s-t)}} dy.$$

Ας θεωρήσουμε την παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v_{xx}(t,x) - v_t(t,x) &= 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}, \\ v(T,x) &= \phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

με $\phi(x)$ συνεχή συνάρτηση και φραγμένη.
Το πρόβλημα αυτό έχει λύση, $v(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^*(t,x,T,y)\phi(y)dy$ με $t < T$ και $x \in \mathbb{R}$. Η κίνηση Brown είναι λοιπόν στενά συνδεδεμένη με την εξίσωση θερμότητας (την παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση). Η λύση $v(t,x)$ έχει την εξής γραφή, $v(t,x) = \mathbb{E}(\phi(W_s^{t,x}))$ με $x \in \mathbb{R}$ και $t \in [0,s]$. Επίσης, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Markov έχουμε ότι $\mathbb{E}(\phi(W_s)|\mathcal{F}_t) = v(t, W_t)$ για $s \geq t$. Οι λύσεις, ορισμένων, μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι προτιμότερο να προσεγγίζονται χρησιμοποιώντας τέτοιου είδους αναπαραστάσεις καθώς και εργαλεία στοχαστικής ανάλυσης. Στις εφαρμογές, πάντως, συχνά και οι δυο τρόποι (θεωρία μερικών διαφορικών εξισώσεων και στοχαστική ανάλυση) βοηθούν, με διαφορετικό τρόπο, να περιγράψουμε και να χαρακτηρίσουμε ένα φαινόμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 498 *Η διαδικασία Brown (ή διαδικασία Wiener) σε ένα χώρο πιθανότητας με φίλτρο $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ ικανοποιεί τα παρακάτω,*

(i) η W_t έχει ανεξάρτητες και στάσιμες μεταβολές, δηλαδή, για $0 \leq t \leq s$ η τ.μ. $W_s - W_t$ ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(0, s-t)$ και οι τ.μ.

$$W_{t_2} - W_{t_1}, ..., W_{t_N} - W_{t_{N-1}},$$

είναι ανεξάρτητες για κάθε σύνολο σημείων $t_1, ..., t_n$ με $t_1 < t_2 < ... < t_N$

(ii) για οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία $0 < t_1 < t_2 < ... < t_N$ και για κάθε Borel σύνολα $A_1, A_2, ..., A_N \subseteq \mathbb{R}$ έχουμε

$$P(\{W(t_1) \in A_1, ..., W(t_N) \in A_N\}) = \int_{A_1} ... \int_{A_N} \Gamma^*(0,0,t_1,y_1)\Gamma^*(t_1,y_1,t_2,y_2)...\Gamma^*(t_{N-1},y_{N-1},t_N,y_N) \, dy_1...dy_N.$$

Αντίστροφα, αν W_t είναι μια συνεχής στοχαστική διαδικασία στον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ τ.ω. $W_0 = 0$ σβ. και ικανοποιεί τις παραπάνω δυο ιδιότητες τότε είναι κίνηση Brown ως προς το φυσικό φιλτράρισμα $\mathcal{F}^W$.

Ασκηση 499 *Δείξτε ότι $\mathbb{E}(W(s)W(t)) = \min\{s,t\}$.*

Αποδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα διαπιστώνουμε ότι η από κοινού πυκνότητα των $W(s), W(t)$ (αν υποθέσουμε ότι $t < s$) είναι $f_{W(s),W(t)}(x,y) = \Gamma^*(0,0,t,x)\Gamma^*(t,x,s,y)$. Αρα

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W(s)W(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 \Gamma^*(0,0,t,y_1)\Gamma^*(t,y_1,s,y_2)dy_1 dy_2 \\ &= \cdots = t \end{aligned}$$

'ρα για οποιαδήποτε s,t έχουμε ότι $\mathbb{E}(W(s)W(t)) = \min\{s,t\}$.
Μια συντομότερη απόδειξη είναι η εξής, όταν $s < t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W(t)W(s)) &= \mathbb{E}\left(W(s)(W(t) - W(s) + W(s))\right) \\ &= \mathbb{E}(W(s)^2) + \mathbb{E}\left(W(s)(W(t) - W(s))\right) \\ &= s, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\mathbb{E}(W(s)^2) = s$ και ότι $W(s), W(t) - W(s)$ είναι ανεξάρτητες. □

Θεωρημα 500 *Ισχύει ότι $\mathbb{E}(e^{i\lambda W(t)}) = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} = \phi_{W(t)}(\lambda)$.*

Αποδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi_{W(t)}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda x)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\lambda x)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}dx \end{aligned}$$

Όμως το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι μηδέν επομένως θα υπολογίσουμε το πρώτο. Παραγωγίζουμε ως προς λ κατά μέλη και έχουμε

$$\phi'_{W(t)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} -x\sin(\lambda x)e^{-\frac{x^2}{2t}}dx.$$

Έπειτα με ολοκλήρωση κατά μέρη (γράφοντας τον όρο $e^{-\frac{x^2}{2t}}$ ως παράγωγο μιας συνάρτησης) προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\phi'_{W(t)}(\lambda) = -\lambda t \phi_{W(t)}(\lambda).$$

Λύνοντας και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\phi_{W(t)}(0) = 1$ προκύπτει το αποτέλεσμα. □

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση της $W(t)$ και συμβολίζεται με $\phi_{W(t)}(\lambda)$. Αποδεικνύεται (αν $\mathbb{E}(|W(t)|^n) < \infty$ το οποίο θα δείξουμε αργότερα με μια τεχνική που δουλεύει και στην περίπτωση που δεν γνωρίζουμε την πυκνότητα της τ.μ.) τότε ότι $\mathbb{E}(W(t)^n)i^n = \phi^{(n)}_{W(t)}(0)$. Δηλαδή για να υπολογίσει κανείς ροπές της $W(t)$ αρκεί να παραγωγίσει τη χαρακτηριστική συνάρτηση τόσες φορές όσο και η δύναμη της ροπής. Για παράδειγμα $\mathbb{E}(W(t)^4) = 3t^2$.
Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε για οποιαδήποτε τ.μ. X. Αν $X = W(t) - W(s)$ με $s < t$, βρείτε τη χαρακτηριστική συνάρτηση και υπολογίστε τη μέση τιμή της τέταρτης δύναμης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 501 *Μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία στο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$ είναι martingale αν $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ και για κάθε $s < t$ έχουμε ότι $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$. Ανάλογα ορίζουμε τις submartingale, supermartingale.*

Έστω Y μια ολοκληρώσιμη τ.μ. Τότε $M_t = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)$ είναι martingale. Πράγματι, εξ ορισμού η M_t είναι προσαρμοσμένη στο $\mathcal{F}_t$ και ολοκληρώσιμη (δείξτε το). Επίσης, $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_s) = M_s$. Στην πρώτη ισότητα αντικαταστήσαμε την M_t ενώ στη δεύτερη ισότητα κατάλληλη ιδιότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής, αφού $s < t$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 502 (Ανισότητα Doob) *Έστω X_t μια δεξιά συνεχής martingale και $p > 1$. Τότε για κάθε T,*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t|^p\right) \leq q^p \mathbb{E}\left(|X_T|^p\right),$$

όπου $q = \frac{p}{p-1}$.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Doob στην martingale $M_t = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)$ βρίσκουμε ότι

$$\mathbb{E}(\sup_{t\in[0,T]} |M_t|^2) \leq 4\mathbb{E}(|M_T|^2) \leq 4\mathbb{E}(|Y|^2).$$

Στο επόμενο θεώρημα θα δείξουμε ότι η διαδικασία Wiener καθώς και άλλες δυο που σχετίζονται με αυτή είναι martingales στο $\mathcal{F}_t$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 503 *Οι στοχαστικές διαδικασίες $W(t)$, $W(t)^2 - t$ και $e^{W(t)}e^{-\frac{t}{2}}$ είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$ που παράγει η διαδικασία Wiener.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Προφανώς η W_t ανήκει στον L^1 διότι $\mathbb{E}|W_t| \leq \sqrt{\mathbb{E}|W_t^2|}$ και αφού η W_t^2 ανήκει στον L^1 το ίδιο συμβαίνει και με την $|W_t|$.

Πράγματι, για κάθε $0 \leq s < t$ έχουμε

$$\mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s) + W_s = W_s.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $W_t - W_s$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$, ότι η W_s είναι προσαρμοσμένη και ότι $\mathbb{E}(W_t) = \mathbb{E}(W_s) = 0$. Δηλαδή, η W_t είναι martingale στο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$.
Θα δούμε τώρα την $W_t^2 - t$. Για $0 \leq s < t$ έχουμε,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W_t^2|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}\left((W_t - W_s)^2|\mathcal{F}_s\right) + 2\mathbb{E}\left((W_t - W_s)W_s|\mathcal{F}_s\right) \\
&\quad -\mathbb{E}(W_s^2|\mathcal{F}_s) \\
&= t - s + W_s^2.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $W_t - W_s$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$, δηλαδή οι $\sigma(W_t - W_s), \mathcal{F}_s$ είναι ανεξάρτητες και αφού $\sigma((W_t - W_s)^2) \subseteq \sigma(W_t - W_s)$ τότε και $\sigma((W_t - W_s)^2), \mathcal{F}_s$ ανεξάρτητες. Επίσης χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση $t - s$, ότι η W_s είναι προσαρμοσμένη στην $\mathcal{F}_s$ και ότι η W_t είναι martingale. Επομένως, $\mathbb{E}(W_t^2 - t|\mathcal{F}_s) = W_s^2 - s$.
Τέλος, θα δείξουμε ότι η $e^{W(t)}e^{-\frac{t}{2}}$ είναι martingale. Είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$ ως συνάρτηση της W_t η οποία είναι προσαρμοσμένη. Για $0 \leq s < t$ έχουμε,

$$\mathbb{E}(e^{W_t}|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(e^{W_t - W_s}e^{W_s}|\mathcal{F}_s) = e^{W_s}\mathbb{E}(e^{W_t - W_s}|\mathcal{F}_s) = e^{W_s}\mathbb{E}(e^{W_t - W_s}).$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $W_t - W_s$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_s$ και ότι η W_t είναι προσαρμοσμένη. Αφού η μεταβολή $W_t - W_s$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση $t - s$, μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή της $e^{W_t - W_s}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{W_t - W_s}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx \\
&= e^{\frac{t-s}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(t-s))^2}{2(t-s)}} dx \\
&= e^{\frac{t-s}{2}}
\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι η εν λόγω στοχαστική διαδικασία είναι και ολοκληρώσιμη. Τελικά $\mathbb{E}(e^{W_t}e^{-\frac{t}{2}}|\mathcal{F}_s) = e^{W_s}e^{-\frac{s}{2}}$. □

Υπολογίστε και τη μέση τιμή

$$\mathbb{E}(e^{\sigma(W_t - W_s)})$$

χρησιμοποιώντας παρόμοιο συλλογισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 504 *Μια στοχαστική διαδικασία X_t ονομάζεται προοδευτικά μετρήσιμη ως προς το φιλτράρισμα $(\mathcal{F}_t)$ αν για κάθε $t \geq 0$, έχουμε ότι $(s, \omega) \to X_s(\omega)$ είναι μετρήσιμη στον $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B} \times \mathcal{F}_t)$.*

Μπορεί να αποδείξει κανείς ότι μια δεξιά συνεχής και προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία είναι προοδευτικά μετρήσιμη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 505 *Έστω $T > 0$. Με $\mathcal{M}^2$ ορίζουμε το χώρο των δεξιά συνεχών $\mathcal{F}_t$ martingales X_t τ.ω. $X_0 = 0$ και*

$$\|X\|_T = \sqrt{\mathbb{E}(\sup_{0\le t\le T} |X_t|^2)} < \infty.$$

Με $\mathcal{M}_c^2$ συμβολίζουμε τον υποχώρο των συνεχών martingales του $\mathcal{M}^2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 506 *Ο χώρος $(M^2, \|\cdot\|_T)$ είναι πλήρης, δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy του M^2 συγκλίνει και έχει όριο στον ίδιο χώρο. Επίσης, αν η ακολουθία ανήκει στον M_c^2 τότε και το όριο θα ανήκει εκεί.*

Οι χώροι αυτοί και το προηγούμενο θεώρημα θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα αργότερα στον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος.
Έστω ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Συμβολίζουμε με $N = \{F \in \mathcal{F} | P(F) = 0\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 507 *Θα λέμε ότι το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$ ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες ως προς το P, αν η $\mathcal{F}_0$ και άρα και η $\mathcal{F}_t$ για κάθε t, περιέχει το N. Επίσης, αν το φιλτράρισμα είναι δεξιά συνεχές, δηλαδή για κάθε $t > 0$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.*

Οι δυο υποθέσεις αυτές για το φιλτράρισμα είναι καθαρά για τεχνικούς λόγους. Αν $X_t = Y_t$ σβ. και X_t είναι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμη τότε θα θέλαμε να έχουμε ως αποτέλεσμα ότι και η Y_t είναι $\mathcal{F}_t$ μετρήσιμη.

ΟΡΙΣΜΟΣ 508 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ χώρος πιθανότητας και X_t μια στοχαστική διαδικασία. Τότε θέτουμε,*

$$\mathcal{F}_t^X = \bigcap_{\varepsilon>0} \hat{\mathcal{F}}_{t+\varepsilon}^X,$$

με $\hat{\mathcal{F}}_t^X = \sigma\left(\sigma(X_t) \cup N\right)$. Διαπιστώνουμε ότι η $\mathcal{F}_t^X$ ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες.

Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε και την σ-άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown και τη συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_t^W$. Αποδεικνύεται ότι η W_t είναι κίνηση Brown στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t^W)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 509 *Μια τ.μ. $r : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ονομάζεται χρόνος στάσης ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$ αν $\{r \le t\} \in \mathcal{F}_t$.*

ΠΡΟΤΑΣΗ 510 *Η τ.μ. r είναι χρόνος στάσης ανν $\{r < t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t > 0$.*

Απόδειξη. Αν r είναι χρόνος στάσης τότε

$$\{r < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r \leq t - \frac{1}{n}\}$$

με

$$\{r \leq t - \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t-\frac{1}{n}} \subseteq \mathcal{F}_t$$

Αντίστροφα, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\{r \leq t\} = \bigcap_{0<\delta<\varepsilon} \{r < t + \delta\}$$

οπότε $\{r \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$. Χρησιμοποιώντας τις συνήθεις συνθήκες έχουμε,

$$\{r \leq t\} \in \mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$$

□

Μπορεί να αποδείξει κανείς ότι αν r_1, r_2 χρόνοι στάσης τότε και $r_1 \wedge r_2, r_1 \vee r_2$ χρόνοι στάσης.

Προταση 511 *Έστω X_t μια στοχαστική διαδικασία, δεξιά συνεχής και προσαρμοσμένη και έστω B ανοικτό σύνολο του $\mathbb{R}$. Θέτουμε $I(\omega) = \{t \geq 0 | X_t(\omega) \in B\}$ και $r(\omega) = \inf I(\omega)$ αν $I(\omega) \neq \emptyset$ και $+\infty$ αλλιώς. Τότε η r είναι χρόνος στάσης και ονομάζεται χρόνος πρώτης εισόδου της X στο B.*

Έστω r χρόνος στάσης ο οποίος είναι πεπερασμένος στο $\Omega \backslash N$ με $P(N) = 0$ και έστω X_t μια στοχαστική διαδικασία. Θέτουμε, $X_r(\omega) = X_{r(\omega)}(\omega)$ και επίσης ορίζουμε την σ-άλγεβρα

$$\mathcal{F}_r = \{F \in \mathcal{F} | F \cap \{r \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

για κάθε t.

Προταση 512 (Θεώρημα Επιλεκτικής Στάσης του Doob) *Αν M_t είναι μια δεξιά συνεχής martingale και r_1, r_2 χρόνοι στάσης τ.ω. $r_1 \leq r_2 \leq T$ σβ. με $T > 0$, τότε $M_{r_1} = \mathbb{E}(M_{r_2} | \mathcal{F}_{r_1})$. Συγκεκριμένα, για κάθε σβ. φραγμένο χρόνο στάσης r έχουμε $\mathbb{E}(M_r) = \mathbb{E}(M_0)$.*

Προταση 513 *Έστω X_t μια στοχαστική διαδικασία στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ και r ένας φραγμένος χρόνος στάσης. Θεωρούμε τη 'σταματημένη' στοχαστική διαδικασία X_t^r η οποία ορίζεται ως εξής,*

$$X_t^r(\omega) = X_{t \wedge r(\omega)}(\omega), \quad t \geq 0, \omega \in \Omega.$$

Αν X_t είναι προοδευτικά μετρήσιμη τότε και η X_t^r είναι προοδευτικά μετρήσιμη και η τ.μ. X_r είναι $\mathcal{F}_r$-μετρήσιμη. Τέλος, αν X_t είναι δεξιά συνεχής και martingale τότε $X_{t \wedge r} = \mathbb{E}(X_r | \mathcal{F}_t)$ οπότε και η X_t^r είναι δεξιά συνεχής και martingale.

Το παρακάτω θεώρημα δίνει ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό της κίνησης Brown.

ΘΕΩΡΗΜΑ 514 *Μια στοχαστική διαδικασία $W(t), t \geq 0$ είναι διαδικασία Wiener ανν ισχύουν τα επόμενα,*

(i) *$W(0) = 0$ σβ,*

(ii) *οι τροχιές $t \to W(t)$ είναι συνεχείς σβ.*

(iii) *η $W(t)$ είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$,*

(iv) *η $W(t)^2 - t$ είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 515 *Θα λέμε ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Holder συνεχής τάξης a με $a \in (0,1)$ αν υπάρχει μια σταθερά $K > 0$ τ.ω. για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε $|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|^a$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 516 *Για κάθε $a < \frac{1}{2}$ σχεδόν όλες οι τροχιές της κίνησης Brown είναι Holder συνεχείς, τάξης a, σε κάθε φραγμένο διάστημα του t. Επίσης, για κάθε $a > \frac{1}{2}$ σχεδόν όλες οι τροχιές της κίνησης Brown δεν είναι Holder συνεχείς πουθενά.*

Έστω $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T$ μια διαμέριση του $[0, T]$. Ορίζουμε την τετραγωνική κύμανση της κίνησης Brown να είναι

$$[W, W](t) = [W, W]([0, t]) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |W(t_i^n) - W(t_{i-1}^n)|^2$$

όπου η σύγκλιση είναι στον L^2. Το όριο είναι πάνω σε όλες τις διαμερίσεις τ.ω. $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Αποδεικνύεται, ότι παρόλο που τα παραπάνω αθροίσματα είναι τ.μ. το όριο είναι σταθερός αριθμός (ανεξάρτητος του ω).

ΘΕΩΡΗΜΑ 517 *Η τετραγωνική κύμανση της κίνησης Brown πάνω στο $[0, T]$ είναι ίση με T.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας σημειώσουμε ότι οι μεταβολές $W(t_i) - W(t_{i-1})$ είναι ανεξάρτητες και ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(W(t_i) - W(t_{i-1})) &= 0, \\
\mathbb{E}\left(W(t_i) - W(t_{i-1})\right)^2 &= t_i - t_{i-1}, \\
\mathbb{E}\left(W(t_i) - W(t_{i-1})\right)^4 &= 3(t_i - t_{i-1})^2
\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ότι, συμβολίζοντας με $\Delta_i^n W = W(t_i^n) - W(t_{i-1}^n)$,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i^n W)^2 - T\right)^2 \\
= \; & \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\left((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\right)\right)^2 \\
= \; & \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n}\left((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\right)^2 \\
& +\mathbb{E}\sum_{i\neq j}\left((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\right)\left((\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})\right) \\
= \; & \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\right)^2 \\
= \; & 2\sum_{i=1}^{n}(t_i - t_{i-1})^2 \to 0.
\end{aligned}$$

Θα εξηγήσουμε τώρα γιατί

$$\mathbb{E}\sum_{i\neq j}\left((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\right)\left((\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})\right) = 0$$

Λόγω ανεξαρτησίας των $\Delta_i^n W$, $\Delta_j^n W$ για $i \neq j$ έχουμε, ότι και $(\Delta_i^n W)^2$, $(\Delta_j^n W)^2$ ανεξάρτητες για $i \neq j$ αφού $\sigma((\Delta_i^n W)^2) \subseteq \sigma(\Delta_i^n W)$ και το ίδιο για την $\Delta_j^n W$. Τέλος, ανεξάρτητες θα είναι και οι

$$(\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1}), \quad (\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})$$

αφού η οικογένεια συνόλων $\mathcal{I} = \{(\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1}) \leq x\}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ παράγει την ίδια σ-άλγεβρα με την $\mathcal{J} = \{(\Delta_i^n W)^2 \leq x\}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αρα,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\sum_{i\neq j}\left((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\right)\left((\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})\right) \\
= \; & \sum_{i\neq j}\mathbb{E}\left((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})\right)\mathbb{E}\left((\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})\right) \\
= \; & 0.
\end{aligned}$$

□

Ορισμος 518 *Η κύμανση μιας συνάρτησης $f : [0,T] \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως το όριο,*

$$\limsup_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}|f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

όπου $(t_0, t_1, ..., t_n)$ είναι μια διαμέριση του $[0,T]$.

Θεωρημα 519 *Η κύμανση των τροχιών της $W(t)$ είναι άπειρη σβ.*

Αυτό έχει σημαντικό αντίκτυπο στη θεωρία ολοκλήρωσης ως προς την κίνηση Brown. Ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεωρημα 520 *Έστω $\delta_n = \max_i(t_i^n - t_{i-1}^n)$. Αν το όριο*

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1}^n)(g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n))$$

υπάρχει για κάθε συνεχή συνάρτηση f τότε αναγκαστικά η g είναι φραγμένης κύμανσης στο $[0,t]$.

'ρα, δεν μπορούμε να ορίσουμε ως Riemann-Stieltjes το ολοκλήρωμα $\int_0^t X_s dW_s$ όπου X_s μια συνεχής στοχαστική διαδικασία, διότι η W_t δεν είναι φραγμένης κύμανσης. Αυτό επίσης σημαίνει ότι δεν υπάρχει διάστημα $[0,t]$ τ.ω. η W_t να είναι μονότονη διότι αυτό θα σήμαινε ότι είναι και φραγμένης κύμανσης εκεί.

Θεωρημα 521 *Για κάθε $t > 0$ σχεδόν όλες οι τροχιές της κίνησης Brown είναι μη διαφορίσιμες στο t.*

Μερικά αποτελέσματα για τη συμπεριφορά της κίνησης Brown.

Θεωρημα 522 *Αν W_t είναι μια κίνηση Brown τότε,*

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \downarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln\ln(1/t)}} &= 1, \ \sigma\beta., \\
\limsup_{t \uparrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln\ln(t)}} &= 1, \ \sigma\beta., \\
\liminf_{t \downarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln\ln(1/t)}} &= -1, \ \sigma\beta., \\
\liminf_{t \uparrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln\ln(t)}} &= -1, \ \sigma\beta.
\end{aligned}$$

Προταση 523 (Rescaling) *Έστω $W(t)$ κίνηση Brown και $a \in \mathbb{R}$. Τότε η $W(at)$ και η $\sqrt{a}W(t)$ ακολουθούν την ίδια κατανομή.*

Αποδειξη. Η $W(at)$ ακολουθεί την $\mathcal{N}(0, at)$ αφού η $W(t) \backsim \mathcal{N}(0,t)$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι και $\sqrt{a}W(t) \backsim \mathcal{N}(0,t)$ αφού $\mathrm{Var}(aX) = a^2 \mathrm{Var}(X)$ και $\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$. □

Προταση 524 (Distribution of hitting time) *Έστω $a > 0$ και $T_a = \min\{t > 0 : W(t) = a\}$. Η συνάρτηση πιθανότητας της T_a δίνεται από την*

$$F_{T_a} = 2\left(1 - \Phi(a/\sqrt{t})\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \le s \le t} W(s) > a\right)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η συνάρτηση σφάλματος.

Ορισμος 525 *Θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία X_t είναι μια Brownian Brigde στο διάστημα $[0, T]$ αν*

(i) *η X_t ακολουθεί την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, t(1 - t/T))$*

(ii) $X_0 = X_T = 0$

(iii) $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) = \min(s, t) - st/T$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\mathbb{E}(W(t)W(s)) = \min(s, t)$ προκύπτει εύκολα η παρακάτω πρόταση.

Προταση 526 *Έστω $W(t)$ μια κίνηση Brown και έστω η $X(t) = W(t) - tW(1)$ για $t \in [0, 1]$. Τότε η $X(t)$ είναι μια Brownian Bridge.*

10.9.1 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε και θα κατασκευάσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Ένας από τους στόχους μας θα είναι να ορίσουμε τελικά τις λεγόμενες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις οι οποίες μοντελοποιούν καλύτερα από τις ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις διάφορα φαινόμενα (π.χ. χρηματοοικονομικά φαινόμενα) στα οποία εμφανίζονται και παίζουν σημαντικό ρόλο παράγοντες που δεν μπορούν εύκολα να συμπεριληφθούν στο μοντέλο.
Στόχος μας είναι να ορίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_0^t f(s)dW_s$. Αυτό μοιάζει με Riemann-Stieltjes αλλά όπως είπαμε παραπάνω δεν γίνεται να το ορίσουμε έτσι διότι η W_t δεν είναι φραγμένης κύμανσης. Ας δούμε αρχικά έναν απλούστερο ορισμό όπου η ολοκληρωτέα ποσότητα $f(t)$ δεν είναι συνάρτηση του $\omega \in \Omega$ αλλά συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση του χρόνου. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $f(0) = f(1) = 0$. Ορίζουμε λοιπόν το ολοκλήρωμα ως εξής, $\int_0^1 f(s)dW_s = -\int_0^1 f'(s)W_s ds$. Αυτό το ολοκλήρωμα είναι μια τ.μ. και ικανοποιεί τις ιδιότητες, $\mathbb{E}(\int_0^1 f(s)dW_s) = 0$ και $\mathbb{E}(\int_0^1 f(s)dW_s)^2 = \int_0^1 f^2(s)ds$. Πράγματι,

$$\mathbb{E}(\int_0^1 f'(s)W_s ds) = \int_0^1 f'(s)\mathbb{E}(W_s)ds = 0.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\mathbb{E}(W_t W_s) = t \wedge s$ μπορούμε να δείξουμε και την άλλη ιδιότητα. Τέλος, μπορούμε να γενικεύσουμε το ολοκλήρωμα αυτό και σε μεγαλύτερη κλάση συναρτήσεων αλλά ανεξάρτητων του ω.
Αν θελήσουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^T W_s dW_s$ ως ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes θα είχαμε πρόβλημα όπως είπαμε και προηγούμενα. Ας δούμε ακριβώς τι γίνεται.

Έστω $0 = t_0^n < t_1^n < ... < t_n^n = T$ μια διαμέριση του $[0, T]$. Μπορεί να δείξει κανείς ότι τα παρακάτω αθροίσματα οδηγούν σε διαφορετικά όρια,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} W(t_{j+1}^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)).$$

Πράγματι, έχουμε το εξής,

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}^n}^2 - W_{t_i^n}^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2 \\ &= \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2.\end{aligned}$$

Στο όριο λοιπόν έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n}(W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}) = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{1}{2}T$$

Παρόμοια, για το άλλο όριο έχουμε ως αποτέλεσμα

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1} W(t_{j+1}^n)(W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) = \frac{1}{2}W_T^2 + \frac{1}{2}T.$$

Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ χώρος πιθανότητας με φίλτρο και έστω μια κίνηση Brown ορισμένη στο χώρο αυτό.

Ορισμος 527 *Θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία X_t ανήκει στην κλάση $\mathbb{L}^p$ ($p \geq 1$) αν*

(i) η X_t είναι προοδευτικά μετρήσιμη ως προς το φίλτρο $(\mathcal{F}_t)$,

(ii) η $X_t \in L^p([0, T] \times \Omega)$ δηλαδή

$$\int_0^T \mathbb{E}(X_t)^p dt < \infty.$$

Ορισμος 528 *Μια στοχαστική διαδικασία $X_t \in \mathbb{L}^2$ ονομάζεται απλή αν μπορεί να γραφεί στη μορφή*

$$X_t = \sum_{k=1}^{N} e_k \mathbb{I}_{(t_{k-1}, t_k]}(t), \quad t \in [0, T],$$

όπου $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_N = T$ και e_k τ.μ. στον $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα για τις απλές στοχαστικές διαδικασίες και έπειτα θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα για μεγαλύτερη κλάση στοχαστικών διαδικασιών οριακά.

Ορισμος 529 *Έστω $X_t \in \mathbb{L}^2$ μια απλή στοχαστική διαδικασία. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Ito ως εξής,*

$$\int X_t dW_t = \sum_{k=1}^{N} e_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}),$$

ενώ για $0 \leq a \leq b \leq T$ ορίζουμε $\int_a^b X_t dW_t = \int X_t \mathbb{I}_{(a,b]} dW_t$ και $\int_a^a X_t dW_t = 0$.

Σημειώστε ότι μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη στοχαστική διαδικασία $X_t = \mathbb{I}_{(0,t]}$ και έχουμε ότι $\int \mathbb{I}_{(0,t]} dW_t = W_t - W_0 = W_t$.
Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα για να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα σε μεγαλύτερη κλάση στοχαστικών διαδικασιών από τις απλές στοχαστικές διαδικασίες.

Λημμα 530 *Για κάθε $X_t \in \mathbb{L}^2$ υπάρχει ακολουθία $X_t^n \in \mathbb{L}^2$ απλών στοχαστικών διαδικασιών τ.ω.*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T (X_t - X_t^n)^2 dt\right] = 0.$$

Ορισμος 531 *Το στοχαστικό ολοκλήρωμα της $X_t \in \mathbb{L}^2$ ορίζεται ως εξής,*

$$\int_0^t X_s dW_s = \lim_{n\to\infty} \int_0^t X_s^n dW_s,$$

και το όριο είναι υπό την έννοια του $\mathcal{M}_c^2$ και X_t^n είναι μια ακολουθία απλών στοχαστικών διαδικασιών που προσεγγίζουν την $X_t \in \mathbb{L}^2$.

Οι παρακάτω ιδιότητες ισχύουν για το στοχαστικό ολοκλήρωμα για απλές στοχαστικές διαδικασίες. Για στοχαστικές διαδικασίες που δεν είναι κατά ανάγκη απλές μπορεί να δείξει κανείς ότι ικανοποιούν τις ίδιες ιδιότητες χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι προσεγγίζονται από απλές.

Θεωρημα 532 *Αν $X_t, Y_t \in \mathbb{L}^2$ απλές στοχαστικές διαδικασίες και $0 \leq a < b < c$ και $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε,*

(i) *(Γραμμικότητα)* $\int_0^t (c_1 X_s + c_2 Y_s) dW_s = c_1 \int_0^t X_s dW_s + c_2 \int_0^t Y_s dW_s$,

(ii) *(Προσθετικότητα)* $\int_a^c X_t dW_t = \int_a^b X_t dW_t + \int_b^c X_t dW_t$,

(iii) *(Ισομετρία)* $\mathbb{E}[\int_a^b X_s dW_s \int_a^b Y_s dW_s | \mathcal{F}_a] = \mathbb{E}[\int_a^b X_s Y_s ds | \mathcal{F}_a]$,

(iv) *(Μηδενική Μέση Τιμή)* $\mathbb{E}[\int_a^b X_t dW_t|\mathcal{F}_a] = 0$ *και*

$$\mathbb{E}[\int_a^b X_t dW_t \int_b^c X_t dW_t|\mathcal{F}_a] = 0,$$

(v) *(Ιδιότητα martingale)* $\mathbb{E}(\int_0^t X_r dW_r|\mathcal{F}_s) = \int_0^s X_r dW_r$. *Επιπλέον, η* $Y_t = \int_0^t X_s dW_s \in \mathcal{M}_c^2$ *δηλαδή είναι συνεχής martingale.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα συζητήσουμε την τέταρτη ιδιότητα μόνο, δηλαδή της μηδενικής μέσης τιμής του στοχαστικού ολοκληρώματος, διότι παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η απόδειξή της. Οι αποδείξεις των υπολοίπων ιδιοτήτων απαιτούν, εν ολίγοις, τους ίδιους ισχυρισμούς.
Έχουμε υποθέσει ότι η $X_t \in \mathbb{L}^2$ δηλαδή είναι και προοδευτικά μετρήσιμη ως προς το φίλτρο $(\mathcal{F}_t)$ ενώ τα e_k είναι $\mathcal{F}$-μετρήσιμες. Αν $t \in (t_{k-1}, t_k]$ τότε $X_t = e_k$ και επομένως το e_k είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμο για κάθε $t \in (t_{k-1}, t_k]$ ή αλλιώς το e_k είναι $\mathcal{F}_{t_{k-1}+\varepsilon}$-μετρήσιμο για κάθε $\varepsilon > 0$. Δηλαδή οι αντίστροφες εικόνες $\{e_k \in B\}$ με $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ανήκουν στην $\mathcal{F}_{t_{k-1}+\varepsilon}$ για κάθε $\varepsilon > 0$ άρα και στην τομή $\cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t_{k-1}+\varepsilon}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το φίλτρο ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες έχουμε ότι η e_k είναι $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$-μετρήσιμη.
Θα δείξουμε τώρα την ιδιότητα της μηδενικής μέσης τιμής. Παρατηρούμε ότι

$$X_t\mathbb{I}_{(a,b]} = \sum_{k=1}^N e_k \mathbb{I}_{(t_{k-1},t_k]\cap(a,b]} = \sum_{k=1}^N e_k \mathbb{I}_{(\hat{t}_{k-1},\hat{t}_k]},$$

με $\hat{t}_{k-1} = \max(t_{k-1}, a)$ και $\hat{t}_k = \max(\min(t_k, b), \hat{t}_{k-1})$.
Οπότε,

$$\mathbb{E}\left(\int_a^b X_t dW_t|\mathcal{F}_a\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^N e_k(W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}})|\mathcal{F}_a\right).$$

Αφού η $W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{\hat{t}_{k-1}}$ τότε θα είναι και από την $\mathcal{F}_a$. Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ιδιότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής.

Αν X, Y τ.μ. και η Y είναι ανεξάρτητη από την $\sigma(\sigma(X), G)$ τότε $\mathbb{E}(XY|G) = \mathbb{E}(X|G)\mathbb{E}(Y)$.
ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $A \in G$ έχουμε,

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A\mathbb{E}(X|G)\mathbb{E}(Y)) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A XY) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A\mathbb{E}(XY|G)).$$

Παρατηρήστε ότι $\sigma(\mathbb{I}_A X) \subseteq \sigma(\sigma(X), G)$ και άρα η Y είναι ανεξάρτητη και της $\sigma(\mathbb{I}_A X)$ το οποίο το χρησιμοποιήσαμε στη δεύτερη ισότητα. Λόγω της μοναδικότητας της δεσμευμένης μέσης τιμής παίρνουμε το αποτέλεσμα. □

Στην προκειμένη περίπτωση λοιπόν έχουμε,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{N} e_k(W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}})|\mathcal{F}_a) &= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(e_k(W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}})|\mathcal{F}_a) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(e_k|\mathcal{F}_a)\mathbb{E}(W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

αφού $W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_{\hat{t}_{k-1}}$ και εύκολα βλέπουμε ότι

$$\sigma(\sigma(e_k), \mathcal{F}_a) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_{\hat{t}_{k-1}}, \mathcal{F}_a) = \mathcal{F}_{\hat{t}_{k-1}},$$

οπότε η $W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}$ είναι ανεξάρτητη και της $\sigma(\sigma(e_k), \mathcal{F}_a)$. □

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν και χωρίς δέσμευση, δηλαδή για την απλή μέση τιμή και αυτό προκύπτει παίρνοντας μέση τιμή κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ιδιότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής.
Μπορούμε να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα με όρια τα οποία είναι χρόνοι στάσης.

Προταση 533 *Έστω $X_t \in \mathbb{L}^2$ και $Y_t = \int_0^t X_s dW_s$, $t \in [0,T]$. Αν r είναι χρόνος στάσης ως προς το φίλτρο $(\mathcal{F}_t)$ τ.ω. $0 \le r \le T$ σβ. τότε και $X_t \mathbb{I}_{\{r \le t\}} \in \mathbb{L}^2$ και*

$$Y_r = \int_0^r X_s dW_s = \int_0^T X_s \mathbb{I}_{\{s \le r\}} dW_s.$$

Παρόμοιες ιδιότητες ικανοποιεί και το στοχαστικό ολοκλήρωμα με χρόνο στάσης ως όριο.

Προταση 534 *Έστω $t_0 \in [0,T]$ και $r \in [t_0,T]$ χρόνος στάσης. Αν $X_t, Y_t \in \mathbb{L}^2$ τότε*

(i) *(Μηδενική Μέση Τιμή)*

$$\mathbb{E}[\int_{t_0}^r X_t dW_t|\mathcal{F}_{t_0}] = 0 \text{ και } \mathbb{E}[\int_{t_0}^r X_t dW_t \int_r^T X_t dW_t|\mathcal{F}_{t_0}] = 0,$$

(ii) *(Ισομετρία)*

$$\mathbb{E}[\int_{t_0}^r X_s dW_s \int_{t_0}^r Y_s dW_s|\mathcal{F}_{t_0}] = \mathbb{E}[\int_{t_0}^r X_s Y_s ds|\mathcal{F}_{t_0}].$$

Θα ορίσουμε τώρα την τετραγωνική κύμανση του στοχαστικού ολοκληρώματος.

Προταση 535 *Έστω $X_t \in \mathbb{L}^2$ και $Y_t = \int_0^t X_s dW_s \in \mathcal{M}_c^2$. Για κάθε $t > 0$ το όριο*

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}|^2 = \int_0^t X_s^2 ds,$$

υπό την έννοια του L^2. Ορίζουμε ως τετραγωνική κύμανση της Y_t την ποσότητα $[Y,Y](t) = \int_0^t X_s^2 ds$. Τέλος, η $Y_t^2 - [Y,Y](t)$ είναι martingale.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα δείξουμε μόνο ότι η $Y_t^2 - [Y,Y](t)$ είναι martingale. Γράφουμε,

$$Y_t^2 - [Y,Y](t) = (Y_t - Y_s)^2 + Y_s^2 + 2Y_s(Y_t - Y_s) - [Y,Y](t),$$

για $0 \leq s < t$. Παίρνοντας δεσμευμένη μέση τιμή (δεδομένου της $\mathcal{F}_s$) κατά μέλη και χρησιμοποιώντας κατάλληλες ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής αλλά και του στοχαστικού ολοκληρώματος, συγκεκριμένα, την ισομετρία του Ito και την ιδιότητα της μηδενικής μέσης τιμής (δηλαδή το ότι $\mathbb{E}(Y_t - Y_s|\mathcal{F}_s) = 0$ αφού η Y_t είναι στοχαστικό ολοκλήρωμα), έχουμε ότι η $Y_t^2 - [Y,Y](t)$ είναι martingale. Σημειώστε ότι χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το $\int_0^t X_s^2 ds$ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμο το οποίο προκύπτει από τη θεωρία μέτρου και του ολοκληρώματος Lebesgue και συγκεκριμένα από το θεώρημα Fubini και τη θεωρία πίσω από αυτό, καθότι η X_t είναι στην πραγματικότητα συνάρτηση δυο μεταβλητών, των (t, ω). □

10.9.2 Στοχαστικό Ανάπτυγμα Taylor

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με το στοχαστικό ανάπτυγμα Taylor ή αλλιώς τη φόρμουλα του Ito.

ΟΡΙΣΜΟΣ 536 *Μια στοχαστική διαδικασία X_t ονομάζεται διαδικασία Ito αν έχει τη μορφή,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW_s,$$

όπου $b(t) \in \mathbb{L}^2, a(s) \in \mathbb{L}^1$ και X_0 είναι $\mathcal{F}_0$-μετρήσιμη.

Συχνά χρησιμοποιούμε (μόνο συμβολικά) τη διαφορική μορφή μιας στοχαστικής διαδικασίας Ito, δηλαδή γράφουμε $dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$ και εννοούμε στην πραγματικότητα την ολοκληρωτική μορφή την οποία έχουμε ορίσει αυστηρά.
Εξαιρετικά χρήσιμο στις εφαρμογές αλλά και στην εύρεση λύσης στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (που θα ορίσουμε παρακάτω) είναι το στοχαστικό ανάπτυγμα Taylor ή αλλιώς η φόρμουλα του Ito. Θα δώσουμε την απλή μορφή και κάποια παραδείγματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 537 *Έστω $f(x)$ μια πραγματική συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους f', f'' για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε και η $f(W(t))$ είναι μια διαδικασία Ito η οποία έχει τη μορφή,*

$$f(W(t)) - f(W(0)) = \frac{1}{2}\int_0^t f''(W(s))ds + \int_0^t f'(W(s))dW_s.$$

Σε διαφορική μορφή γράφεται $df(W(t)) = \frac{1}{2}f''(W(t))dt + f'(W(t))dW_t$.
Αν διαλέξουμε $f(x) = x^2$ τότε $f' = 2x$ και $f'' = 2$. Οπότε εφαρμόζοντας το

προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι και η W_t^2 είναι μια διαδικασία Ito με διαφορική μορφή $d(W_t^2) = dt + 2W_t dW_t$. Επομένως, έχουμε το αποτέλεσμα ότι

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t).$$

Παρόμοια, διαλέγοντας $f(x) = x^3$ διαπιστώνουμε ότι το στοχαστικό διαφορικό της W_t^3 είναι $d(W_t^3) = 3W_t dt + 3W_t^2 dW_t$.

ΛΗΜΜΑ 538 (Gronwall) *Έστω $T > 0$ και $c \geq 0$. Έστω $u(\cdot)$ μια συνάρτηση Borel μη αρνητική στο $[0,T]$ και έστω $v(\cdot)$ μια μη αρνητική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0,T]$. Αν*

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [0,T]$$

τότε
$$u(t) \leq c e^{\int_0^t v(s)ds}.$$

Θα δώσουμε τώρα ένα γενικότερο θεώρημα στοχαστικού αναπτύγματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 539 *Έστω X_t μια διαδικασία Ito με συντελεστές $a(t), b(t)$ και έστω $f(t,x)$ μια πραγματική συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους f_t, f_x, f_{xx} για κάθε $t \geq 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Τότε και η $f(t, X_t)$ είναι μια διαδικασία Ito τ.ω.*

$$\begin{aligned} f(t,X_t) = \; & f(0,X_0) \\ & + \int_0^t \left(f_t(s,X_s) + f_x(s,X_s)a(s) + \frac{1}{2} f_{xx}(s,X_s)b^2(s) \right) ds \\ & + \int_0^t f_x(s,X_s)b(s)dW_s. \end{aligned}$$

Μπορείτε να δείτε μια συζήτηση στο Wikipedia που αφορά την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος η οποία όμως δεν είναι μαθηματικά αυστηρή. Μια αυστηρή απόδειξη μπορεί να βρει κανείς σε βιβλία όπως το Elements of Stochastic Calculus and Analysis.

Θα εφαρμόσουμε την έννοια του χρόνου στάσης καθώς και την φόρμουλα του Ito για να αποδείξουμε ότι η απόλυτη τιμή της κίνησης Brown έχει φραγμένες ροπές όλων των τάξεων.

ΛΗΜΜΑ 540 *Για κάθε $p > 0$ υπάρχει κάποια σταθερά $C(p)$, εξαρτώμενη από το p μόνο τ.ω.*

$$\mathbb{E}|W_t|^p < C(p)$$

για κάθε $t \in [0,T]$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε την ακολουθία χρόνων στάσης

$$r_n = \inf\{t \in [0,T] : |W_t| > n\}$$

Σχηματίζουμε τη σταματημένη στοχαστική διαδικασία $W_{t\wedge r_n}$ η οποία ικανοποιεί

$$W_{t\wedge r_n} = \int_0^{t\wedge r_n} dW_s$$

Θα εφαρμόσουμε τη φόρμουλα του Ito στην $|W_{t\wedge r_n}|^p$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} |W_{t\wedge r_n}|^p &= \frac{(p-1)p}{2}\int_0^t |W_{s\wedge r_n}|^{p-2} ds \\ &\quad + p\int_0^t |W_{s\wedge r_n}|^{p-2} W_{s\wedge r_n} dW_s. \end{aligned}$$

Παίρνουμε μέση τιμή κατά μέλη και έχουμε

$$\mathbb{E}|W_{t\wedge r_n}|^p \leq \frac{(p-1)p}{2}\int_0^t \mathbb{E}|W_{s\wedge r_n}|^{p-2} ds.$$

Επαγωγικά, και ξεκινώντας για $p=2$ για άρτιες δυνάμεις αποδεικνύουμε ότι $\mathbb{E}(|W_{t\wedge r_n}|^p) \leq C(p)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\mathbb{E}(|W_{t\wedge r_n}|) = \mathbb{E}(\sqrt{|W_{t\wedge r_n}|^2}) \leq \sqrt{\mathbb{E}(|W_{t\wedge r_n}|^2)} \leq C$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι και οι περιττές δυνάμεις είναι επίσης φραγμένες από μια σταθερά που εξαρτάται μονάχα από το p και όχι από το n όπου έχει ορισθεί ο χρόνος στάσης. Δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathbb{E}|W_{t\wedge r_n}|^p \leq C(p).$$

Όμως

$$\mathbb{E}|W_{t\wedge r_n}|^p = \mathbb{E}\big|W_{t\wedge r_n}\big|^p \mathbb{I}_{\{r_n \geq t\}} + n^p P(\{r_n < t\}).$$

'ρα προκύπτει ότι

$$P(\{t\wedge r_n < t\}) = P(\{r_n < t\}) \to 0$$

καθώς $n\to\infty$ και έτσι μπορούμε να δείξουμε ότι $t\wedge r_n \to t$ σχεδόν βέβαια καθώς $n\to\infty$. Χρησιμοποιώντας και το λήμμα Fatou παίρνουμε

$$\mathbb{E}|W_t|^p \leq C(p)$$

□

Γενικά για να υπολογίσουμε ή να φράξουμε ροπές μιας στοχαστικής διαδικασίας θα ήταν χρήσιμη η γνώση της πυκνότητάς της (όπως για παράδειγμα στην κίνηση Brown, δες θεωρήματα 225 και 229) αλλά αυτό συμβαίνει σπάνια οπότε η παραπάνω τεχνική είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

Παραδειγμα 541 *Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή* $\mathbb{E}(W_t^4)$. *Θα χρησιμοποιήσουμε τη φόρμουλα του Ito για να βρούμε τη μορφή της* W_t^4.

$$W_t^4 = \int_0^t 4W_s^3 dW_s + \int_0^t 6W_s^2 ds.$$

Παίρνουμε μέση τιμή κατά μέλη και έχουμε

$$\mathbb{E}(W_t^4) = \int_0^t 6\mathbb{E}(W_s^2) ds = \int_0^t 6s ds = 3t^2.$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει το θεώρημα του $Fubini$, *το ότι η μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι μηδέν και το γεγονός ότι η διακύμανση της κίνησης Brown είναι ίση με* t.

Παραδειγμα 542 *Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή της* W_t^6. *Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του Ito έχουμε,*

$$W_t^6 = 6\int_0^t W_s^5 dW_s + 15\int_0^t W_s^4 ds.$$

Παίρνουμε μέση τιμή κατά μέλη και έχουμε,

$$\mathbb{E}(W_t^6) = 15t^3.$$

Στην πραγματικότητα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τη μέση τιμή όλων των δυνάμεων της W_t. *Από προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι* $\mathbb{E}(W_t^3) = 0$. *Θα δείξουμε, με επαγωγή, ότι* $\mathbb{E}(W_t^{2k+1}) = 0$ *και* $\mathbb{E}(W_t^{2k}) = (\frac{t}{2})^k \frac{(2k)!}{k!}$.
Ας ξεκινήσουμε με τις περιττές δυνάμεις. Έχουμε δείξει ότι ισχύει για $k = 1$. *Υποθέτουμε ότι ισχύει για* $k = n$. *Θα δείξουμε ότι ισχύει για* $k = n+1$. *Εφαρμόζουμε λοιπόν τη φόρμουλα του Ito στην* $f(W_t) = W_t^{2n+3}$. *Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η μέση τιμή είναι μηδέν αφού η μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι πάντοτε μηδέν.*
Συνεχίζουμε με τις άρτιες δυνάμεις. Έχουμε δείξει ότι για $k = 1$ *η μέση τιμή είναι* $\mathbb{E}(W_t^2) = (\frac{t}{2})^1 \frac{2!}{1!} = t$. *Υποθέτουμε ότι ισχύει για* $k = 2n$ *και θα δείξουμε ότι ισχύει για* $k = 2n+2$. *Εφαρμόζοντας τη φόρμουλα του Ito στην* $f(W_t) = W_t^{2n+2}$ *παίρνουμε το αποτέλεσμα.*

Παραδειγμα 543 *Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία* $X_t = e^{\sigma W_t}$ *με* $\sigma \in \mathbb{R}$. *Θα βρούμε το στοχαστικό διαφορικό της* X_t *ή αλλιώς θα εφαρμόσουμε τη φόρμουλα του Ito στην* $f(W_t)$ *με* $f(x) = e^{\sigma x}$ *η οποία βέβαια ικανοποιεί τις απαιτούμενες προϋποθέσεις. Πράγματι,*

$$dX_t = \sigma X_t dW_t + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t dt, \quad X_0 = 1.$$

Τώρα θα υπολογίσουμε και τη μέση τιμή της X_t χρησιμοποιώντας το παραπάνω (αφού δείξετε ότι έχει φραγμένη ροπή κατάλληλης τάξης με χρόνους στάσης και ίσως το λήμμα του Gronwall). Έχουμε λοιπόν,

$$\mathbb{E}(X_t) = \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t \mathbb{E}(X_s)ds + 1.$$

Θέτουμε $y(t) = \mathbb{E}(X_t)$ και διαπιστώνουμε ότι η $y(t)$ θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνήθη διαφορική εξίσωση,

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{\sigma^2}{2}y(t), \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Εξηγήστε γιατί. Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι $y(t) = e^{\frac{\sigma^2}{2}t}$. Αρα $\mathbb{E}(e^{\sigma W_t}) = e^{\frac{\sigma^2}{2}t}$.

Παραδειγμα 544 *Έστω $f(t,x) = tx$. Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τις απαιτήσεις της φόρμουλας του Ito επομένως προκύπτει ότι $tW_t = \int_0^t W_s ds + \int_0^t s dW_s$.*

Παραδειγμα 545 (Γεωμετρική κίνηση Brown) *Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία,*

$$X_t = X_0 + a\int_0^t X_s ds + b\int_0^t X_s dW_s, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι η X_t είναι της μορφής $X_t = f(t, W_t)$ για μια κατάλληλη συνάρτηση $f(t,x)$ την οποία θα πρέπει να υπολογίσουμε. Γενικά αυτό δεν είναι σωστό όπως θα δούμε σε επόμενο παράδειγμα. Όμως, μπορούμε πάντοτε να κάνουμε μια τέτοια υπόθεση (ή παρόμοια) και αν μας οδηγήσει σε κάποιο αποτέλεσμα τότε αυτό που θα πρέπει να κάνουμε είναι να το επαληθεύσουμε χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του Ito. Εφαρμόζουμε λοιπόν τη φόρμουλα του Ito στην άγνωστη $f(t,x)$ και έχουμε,

$$\begin{aligned} f(t,W_t) = \quad & f(0,W_0) \\ + & \int_0^t \left(f_t(s,W_s) + f_x(s,W_s)\cdot 0 + \frac{1}{2}f_{xx}(s,W_s)\cdot 1^2 \right) ds \\ + & \int_0^t f_x(s,W_s)\cdot 1 dW_s, \end{aligned}$$

αφού $W_t = W_0 + \int_0^t 0ds + \int_0^t 1dW_s$. Λόγω της μοναδικότητας της αναπαράστασης μιας διαδικασίας Ito έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(t,x) &= bf(t,x) \\ f_t(t,x) + \frac{1}{2}f_{xx}(t,x) &= af(t,x). \end{aligned}$$

Λύνοντας την πρώτη έχουμε ότι $f(t,x) = g(t)e^{bx}$ για κάποια $g(t)$ και χρησιμοποιώντας και τη δεύτερη έχουμε ότι $g(t) = Ce^{a-\frac{b^2}{2}t}$ για κάποια σταθερά C την οποία υπολογίζουμε από τη σχέση $f(0,0) = X_0$, δηλαδή $C = X_0$. Τελικά,

$$X_t = X_0 e^{bW_t + (a-\frac{b^2}{2})t}$$

Όπως είπαμε, θα πρέπει τώρα να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του Ito στην $f(t, W_t)$ με

$$f(t,x) = X_0 e^{bx + (a-\frac{b^2}{2})t}$$

Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας χρόνους στάσης, ότι η $|X_t$ έχει φραγμένες ροπές όλων των τάξεων όταν αντίστοιχα η αρχική τιμή $|X_0|$ έχει φραγμένες ροπές.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **546** *Θα δούμε τώρα την $X_t = e^{W_t}e^{-\frac{t}{2}}$. Χρησιμοποιούμε τη φόρμουλα του Ito στην $f(t, W_t)$ με $f(t,x) = e^x e^{-\frac{t}{2}}$ και έχουμε $X_t = X_0 + \int_0^t X_s dW_s$.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **547 (Διαδικασία Ornstein – Uhlenbeck)** *Θα εξετάσουμε τη στοχαστική διαδικασία $Y_t = be^{-at}\int_0^t e^{as}dW_s$ όπου $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ και θα δείξουμε ότι $Y_t = -a\int_0^t Y_s ds + \int_0^t b dW_s$. Αν το δούμε αντίστροφα, διαπιστώνουμε ότι η Y_t δεν γράφεται στη μορφή $Y_t = f(t, W_t)$ για μια συνάρτηση $f(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπως είπαμε σε προηγούμενο παράδειγμα αλλά στη μορφή $Y_t = f(t, X_t)$ για κατάλληλα επιλεγμένες $f(t,x)$ και X_t.*
Εφαρμόζουμε τη φόρμουλα του Ito στην $f(t, X_t)$ με $f(t,x) = e^{-at}x$ και $X_t = b\int_0^t e^{as}dW_s$ (εφαρμόστε τη και δείξτε το αποτέλεσμα).

10.9.3 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Θα δώσουμε παρακάτω ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα ολοκλήρωσης κατά μέρη το οποίο θα το χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τη λύση των γραμμικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ **548** (Ολοκλήρωση κατά μέρη) *Έστω*

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_1(s)ds + \int_0^t b_1(s)dW_s$$

και

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t a_2(s)ds + \int_0^t b_2(s)dW_s$$

διαδικασίες Ito. Τότε,

$$\begin{aligned} X_tY_t = X_0Y_0 &+ \int_0^t X_s a_2(s)ds + \int_0^t X_s b_2(s)dW_s \\ &+ \int_0^t Y_s a_1(s)ds + \int_0^t Y_s b_1(s)dW_s \\ &+ \int_0^t b_1(s)b_2(s)ds. \end{aligned}$$

Δίνουμε τώρα τον ορισμό της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης.

ΟΡΙΣΜΟΣ 549 *Έστω W_t μια κίνηση Brown ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας με φίλτρο $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$. Μια εξίσωση της μορφής,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dW_s,$$

ονομάζεται στοχαστική διαφορική εξίσωση. Η άγνωστη ποσότητα είναι η στοχαστική διαδικασία X_t ενώ οι συναρτήσεις $f(t,x), g(t,x)$ και η τ.μ. X_0 είναι δοσμένα.

Θα δώσουμε το βασικό θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για την παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση, δηλαδή τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες το πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Πριν το κάνουμε αυτό όμως θα δώσουμε τον ορισμό της ισχυρής λύσης καθότι υπάρχει και η έννοια της ασθενούς λύσης με την οποία δεν θα ασχοληθούμε εδώ.

ΟΡΙΣΜΟΣ 550 *Μια στοχαστική διαδικασία X_t θα λέμε ότι είναι ισχυρή λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης αν είναι προσαρμοσμένη και τ.ω. $f(t, X_t) \in \mathbb{L}^1$ και $g(t, X_t) \in \mathbb{L}^2$ και τέλος να ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση σβ.*

Το βασικό θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας είναι το επόμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 551 *Έστω ότι οι παρακάτω συνθήκες ικανοποιούνται.*

(i) (Συνθήκη Lipschitz) Για κάθε T, N υπάρχει σταθερά $K(T,N)$ τ.ω. για κάθε $|x|, |y| \leq N$ και για όλα τα $0 \leq t \leq T$,

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |g(t,x) - g(t,y)| \leq K|x-y|.$$

(ii) (Γραμμικά αυξητική συνθήκη) Υπάρχει σταθερά $C > 0$ τ.ω. $|f(t,x)| + |g(t,x)| \leq C(1+|x|)$.

(iii) Η X_0 είναι ανεξάρτητη από την $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$ και $\mathbb{E}(X_0^2) < \infty$.

Τότε η στοχαστική διαφορική εξίσωση έχει μοναδική ισχυρή λύση X_t η οποία είναι συνεχής και

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2) \leq \hat{C}(1 + \mathbb{E}(X_0^2)),$$

με $\hat{C}$ να εξαρτάται μόνο από τα C, T.

Επίσης έχουμε και το επόμενο θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας.

Θεωρημα 552 (Yamada – Watanabe) *Έστω ότι η $f(x)$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz και η $g(x)$ είναι Holder συνεχής τάξης $a \in (0,1)$. Τότε υπάρχει μοναδική λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης,*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dW_s.$$

Σημειώστε ότι η $g(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι Lipschitz συνεχής αλλά Holder συνεχής τάξης $\frac{1}{2}$.

Παραδειγμα 553 *Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση,*

$$X_t = 1 + a\int_0^t X_s ds + b\int_0^t X_s dW_s, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας. Πράγματι, είναι εύκολο να δούμε ότι ικανοποιεί τις δυο πρώτες συνθήκες (Lipschitz και γραμμικά αυξητική συνθήκη). Θα δούμε μόνο την τελευταία για την οποία θα πρέπει να δείξουμε ότι η αρχική συνθήκη $X_0 = 1$ είναι ανεξάρτητη της $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$. Για να ισχύει αυτό όπως γνωρίζουμε θα πρέπει οι $\sigma(X_0)$ και η $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$ να είναι ανεξάρτητες, δηλαδή αν $A \in \sigma(X_0)$ και $B \in \sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$ τότε $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Θα μελετήσουμε την σ-άλγεβρα που παράγει η σταθερή τ.μ. $X_0 = 1$. Όπως γνωρίζουμε η $\sigma(X_0) = (\{\omega \in \Omega : X_0 \in C\}, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Εδώ είναι ιδιαίτερα χρήσιμο το γεγονός ότι η X_0 είναι σταθερή, διότι μόνο δυο είναι οι αντίστροφες εικόνες και αυτές προκύπτουν από το αν το $1 \in C$ ή όχι. Όταν λοιπόν το C περιέχει το 1 τότε η αντίστροφη εικόνα είναι το Ω ενώ όταν δεν το περιέχει η αντίστροφη εικόνα είναι το κενό. Αρα, $\sigma(X_0) = \{\emptyset, \Omega\}$ η οποία είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που μπορεί να κατασκευάσει κανείς. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητη από την $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$).

Γραμμικές Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε γραμμικές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και θα καταγράψουμε τη μοναδική λύση τους.

Ορισμος 554 *Έστω $X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dW_s$ διαδικασία Ito και έστω $U_t = 1 + \int_0^t U_s a_s ds + \int_0^t U_s b_s dW_s$. Ονομάζουμε την U_t στοχαστικό εκθετικό της X_t.*

Στο επόμενο θεώρημα θα καταγράψουμε τη μορφή μιας τέτοιας U_t.

Θεωρημα 555 *Αν U_t είναι το στοχαστικό εκθετικό της X_t η οποία είναι διαδικασία Ito τότε*

$$U_t = e^{X_t - X_0 - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $K(t) = X_t - X_0 - \frac{1}{2}\int_0^t b_s^2 ds = \int_0^t (a_s - \frac{1}{2}b_s^2)ds + \int_0^t b_s dW_s$ η οποία είναι διαδικασία Ito. Επίσης, θέτουμε $f(x) = e^x$ και εφαρμόζουμε τη φόρμουλα του Ito στην $f(K(t))$ και προκύπτει το αποτέλεσμα. □

Θα εξετάσουμε τώρα τη γενική μορφή της γραμμικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή,

$$X_t = X_0 + \int_0^t (a_s + b_s X_s)ds + \int_0^t (c_s + d_s X_s)dW_s,$$

με κατάλληλες στοχαστικές διαδικασίες a_t, b_t, c_t, d_t έτσι ώστε να έχει μοναδική λύση. Θα υπολογίσουμε τη λύση θεωρώντας ότι έχει τη μορφή $X_t = U_t V_t$ με U_t τ.ω.

$$U_t = 1 + \int_0^t U_s b_s ds + \int_0^t U_s d_s dW_s,$$

δηλαδή η U_t είναι το στοχαστικό εκθετικό της $Y_t = Y_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t d_s dW_s$ και επομένως είναι γνωστή, ενώ η $V_t = X_0 + \int_0^t k_1(s)ds + \int_0^t k_2(s)dW_s$ με $k_1(t), k_2(t)$ στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες πρέπει να υπολογιστούν κατάλληλα.
Θα εφαρμόσουμε την ολοκλήρωση κατά μέρη για να υπολογίσουμε το γινόμενο $U_t V_t$ το οποίο θα εξισώσουμε με την X_t και έτσι να ορίσουμε κατάλληλα τις $k_1(t), k_2(t)$ για να ισχύει η ισότητα. Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned}
U_t V_t &= X_0 + \int_0^t U_s k_1(s)ds + \int_0^t U_s k_2(s)dW_s \\
&\quad + \int_0^t U_s V_s b_s ds + \int_0^t V_s U_s d_s dW_s + \int_0^t k_2(s) d_s U_s ds \\
&= U_0 V_0 + \int_0^t b_s X_s ds + \int_0^t d_s X_s dW_s \\
&\quad + \int_0^t (U_s k_1(s) + k_2(s) d_s U_s)ds + \int_0^t U_s k_2(s)dW_s,
\end{aligned}$$

έχοντας αντικαταστήσει το γινόμενο $U_s V_s$ με την X_s. Εξισώνοντας με την X_t προκύπτει ότι $k_1(t) = \frac{a_t - c_t d_t}{U_t}$ και $k_2(t) = \frac{c_t}{U_t}$ και επομένως η $X_t = U_t V_t$ είναι γνωστή.

10.9.4 Στοχαστικό θεώρημα Fubini

Το επόμενο θεώρημα είναι το λεγόμενο στοχαστικό θεώρημα Fubini με το οποίο, κάτω από τις κατάλληλες προϋποθέσεις, μπορεί να εναλλάξει κανείς το στοχαστικό ολοκλήρωμα με το ολοκλήρωμα Riemann.

ΘΕΩΡΗΜΑ 556 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ ένας χώρος πιθανότητας με φίλτρο και έστω W_t μια κίνηση Brown στο χώρο αυτό. Έστω ότι $\Phi(t, r, \omega) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ είναι* *μια φραγμένη και $(\mathcal{F}_t)$-προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία. Τότε για κάθε $T > 0$, έχουμε*

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s,r,\omega)\mathbb{I}_{[0,T]}(r)drdW_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \Phi(s,r,\omega)\mathbb{I}_{[0,T]}(r)dW_sdr.$$

Παραδειγμα 557 *Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή και διακύμανση της $Y_t = \int_0^t W_r dr$. Η μέση τιμή υπολογίζεται εύκολα χρησιμοποιώντας το κλασικό θεώρημα Fubini και είναι μηδέν. Θα υπολογίσουμε τώρα την $\mathbb{E}(Y_t^2)$. Έχουμε λοιπόν,*

$$Y_t = \int_0^t W_r dr = \int_0^t \int_0^r 1 dW_s dr = \int_0^t \int_s^t 1 dr dW_s = \int_0^t (t-s) dW_s.$$

'ρα $\mathbb{E}(Y_t^2) = \frac{t^3}{3}$.
Μπορούμε να το υπολογίσουμε και διαφορετικά χωρίς τη χρήση του στοχαστικού θεωρήματος Fubini. Από προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε ότι $tW_t = \int_0^t W_r dr + \int_0^t r dW_r$. Οπότε,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\int_0^t W_r dr\right)^2 &= \mathbb{E}\left(tW_t - \int_0^t r dW_r\right)^2 \\
&= t^3 + \mathbb{E}\left(\int_0^t s dW_s\right)^2 - 2t\mathbb{E}\left(W_t \int_0^t r dW_r\right) \\
&= t^3 + \frac{t^3}{3} - 2t\mathbb{E}\left(\int_0^t dW_r \int_0^t r dW_r\right) \\
&= t^3 + \frac{t^3}{3} - 2t\mathbb{E}\left(\int_0^t r dr\right) \\
&= \frac{t^3}{3}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ισομετρία του Ito δυο φορές, την πρώτη για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του τετραγώνου στοχαστικού ολοκληρώματος και τη δεύτερη για τον υπολογισμό της μέσης τιμής για γινόμενο στοχαστικών ολοκληρωμάτων.

10.9.5 Θεώρημα Girsanov

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την τεχνική αλλαγής μέτρου και αλλαγής κίνησης Brown.

Ορισμος 558 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F})$ μετρήσιμος χώρος και P, Q δυο μέτρα πιθανότητας στον ίδιο χώρο. Το Q θα λέγεται απόλυτα συνεχές ως προς το P και γράφουμε $Q << P$, αν $Q(A) = 0$ όταν $P(A) = 0$. Τα P, Q ονομάζονται ισοδύναμα αν $Q << P$ και $P << Q$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ **559 (Radon-Nikodym)** *Αν $Q << P$ τότε υπάρχει μοναδική τ.μ. L τ.ω. $L \geq 0$, $\mathbb{E}_P L = 1$ και*

$$Q(A) = \mathbb{E}_P(L\mathbb{I}_A), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Η L είναι P-σβ. μοναδική. Αντίστροφα, αν υπάρχει μια τ.μ. L με την παραπάνω ιδιότητα και το Q ορίζεται ως $Q(A) = \mathbb{E}_P(L\mathbb{I}_A)$ τότε το Q είναι μέτρο πιθανότητας και $Q << P$.

Η τ.μ. L ονομάζεται η Radon-Nikodym παράγωγος ή η πυκνότητα του Q ως προς το P και συμβολίζεται με $\frac{dQ}{dP} = L$. Προκύπτει ότι αν $Q << P$ τότε

$$\mathbb{E}_Q(X) = \mathbb{E}_P(LX),$$

για κάθε τ.μ. X ολοκληρώσιμη ως προς το Q.

ΘΕΩΡΗΜΑ **560** *Έστω $L(t)$ μια θετική P-martingale τ.ω. $\mathbb{E}_P(L(T)) = 1$. Ορίζουμε το καινούριο μέτρο πιθανότητας Q ως εξής*

$$Q(A) = \mathbb{E}_P(L(T)\mathbb{I}_A), \forall A \in \mathcal{F}.$$

Τότε το Q είναι απόλυτα συνεχές ως προς το P και για Q-ολοκληρώσιμη τ.μ. X,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(X) &= \mathbb{E}_P(L(T)X), \\ \mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}_P\left(\frac{L(T)}{L(t)}X|\mathcal{F}_t\right), \end{aligned}$$

και αν η X είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη, τότε για $s \leq t$

$$\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_P\left(\frac{L(t)}{L(s)}X|\mathcal{F}_s\right).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ **561** *Μια στοχαστική διαδικασία $M(t)$ είναι μια Q-martingale ανν $L(t)M(t)$ είναι μια P-martingale*

ΘΕΩΡΗΜΑ **562** *Έστω $X_n \to X$ κατά P-πιθανότητα και έστω $Q << P$. Τότε $X_n \to X$ κατά Q-πιθανότητα.*

ΠΡΟΤΑΣΗ **563** *Η τετραγωνική κύμανση μιας στοχαστικής διαδικασίας δεν αλλάζει κάτω από αλλαγή σε άλλο απόλυτα συνεχές μέτρο πιθανότητας.*

ΘΕΩΡΗΜΑ **564 (Girsanov)** *Έστω W_t μια κίνηση Brown κάτω από το μέτρο πιθανότητας P. Έστω η στοχαστική διαδικασία $\hat{W}_t = W_t + mt$. Ορίζουμε το μέτρο Q ως εξής,*

$$\frac{dQ}{dP} = L = e^{-mW_T - \frac{1}{2}m^2T}.$$

Τότε το Q είναι ισοδύναμο με το P και η $\hat{W}(t)$ είναι Q-κίνηση Brown. Επίσης,

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{L} = e^{m\hat{W}_T - \frac{1}{2}m^2T}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 565 *Έστω W_t μια P-κίνηση Brown και $H(t)$ τ.ω. $X_t = \int_0^t H(s)dW_s$ να ορίζονται. Ορίζουμε το μέτρο Q ως εξής,*

$$L = \frac{dQ}{dP} = e^{-\int_0^T H(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T H^2(s)ds}.$$

Τότε τα P, Q είναι ισοδύναμα και η στοχαστική διαδικασία $\hat{W}_t = W_t + \int_0^t H(s)ds$ είναι Q-κίνηση Brown αν η $Z(t) = e^{-\int_0^t H(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t H^2(s)ds}$ είναι martingale.

Μια ικανή συνθήκη για να είναι η $Z(t)$ martingale είναι η επόμενη συνθήκη

$$\boxed{\mathbb{E}(e^{\frac{1}{2}\int_0^T H^2(s)ds}) < \infty \qquad \text{Συνθήκη Novikov}}.$$

Βέβαια, αυτή ικανοποιείται όταν π.χ. η $H(t)$ είναι φραγμένη από μια σταθερά κατά απόλυτη τιμή.

Το τελευταίο θεώρημα είναι το αντίστροφο των προηγούμενων, δηλαδή, αποδεικνύεται ότι όταν εφοδιάσεις το χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με το φιλτράρισμα που παράγει η κίνηση Brown (τροποποιημένο έτσι ώστε να ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες) τότε κάθε ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q έχει πυκνότητα της μορφής που περιγράψαμε παραπάνω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 566 *Έστω ο χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t^W))$ με φίλτρο. Τότε για κάθε μέτρο πιθανότητας Q ισοδύναμο με το P υπάρχει μια στοχαστική διαδικασία H_t η οποία είναι $(\mathcal{F}_t^W)$-προοδευτικά μετρήσιμη τ.ω.*

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\int_0^T H(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T H^2(s)ds}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 567 *Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_1(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dW_s,$$

με $g(t,x) > 0$, ορισμένη στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ και μια κίνηση Brown στο χώρο αυτό. Στόχος μας είναι να αλλάξουμε το μέτρο πιθανότητας Q έτσι ώστε να κατασκευάσουμε μια άλλη κίνηση Brown $\hat{W}_t$ και η λύση της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης να ικανοποιεί και την επόμενη,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_2(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)d\hat{W}_s,$$

για μια δοσμένη συνάρτηση $f_2(t,x)$. Θέτουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{f_1(t, X_t) - f_2(t, X_t)}{g(t, X_t)}, \\ L(T) &= e^{-\int_0^T H(s)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T H^2(s)ds}, \\ \frac{dQ}{dP} &= L(T). \end{aligned}$$

Αν η $L(t)$ είναι martingale τότε η στοχαστική διαδικασία $\hat{W}_t = W_t + \int_0^t H(s)ds$ είναι Q-κίνηση Brown.
Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι

$$\int_0^t g(s, X_s)dW_s = \lim \sum g(t_i, e_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

και το όριο είναι υπό την έννοια του $\mathcal{M}_c^2$. Παρόμοια έχουμε,

$$\begin{aligned}\int_0^t g(s, X_s)d\hat{W}_s &= \lim \sum g(t_i, e_i)(\hat{W}_{t_{i+1}} - \hat{W}_{t_i}) \\ &= \int_0^t g(s, X_s)dW_s + \int_0^t g(s, X_s)d(\int_0^s H_r dr) \\ &= \int_0^t g(s, X_s)dW_s + \int_0^t g(s, X_s)H(s)ds.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η $\int_0^s H_r dr$ είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t g(s, X_s)d(\int_0^s H_r dr)$$

είναι κατά Riemann-Stieltjes και άρα

$$\int_0^t g(s, X_s)d(\int_0^s H_r dr) = \int_0^t g(s, X_s)H(s)ds$$

από ιδιότητα του Riemann-Stieltjes ολοκληρώματος. Όμως για να χρησιμοποιήσει κανείς αυτή την ιδιότητα θα πρέπει η συνάρτηση $\int_0^s H_r dr$ να είναι απόλυτα συνεχής και για να ισχύει αυτό θα πρέπει η H_t να είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0, t]$. Οπότε

$$\begin{aligned}X_t = X_0 \ &+ \ \int_0^t H(s)g(s, X_s)ds + \int_0^t f_2(s, X_s)ds \\ &+ \ \int_0^t g(s, X_s)d\hat{W}_s - \int_0^t H(s)g(s, X_s)ds\end{aligned}$$

δηλαδή η X_t ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_2(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)d\hat{W}_s,$$

Στη βιβλιογραφία εμφανίζεται συχνά η συμβολική γραφή $d\hat{W}_t = dW_t + H_t dt$ και αντικαθιστώντας στη (συμβολική μορφή πάλι) στοχαστική διαφορική έχουμε το αποτέλεσμα.

10.9.6 Μια εφαρμογή στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά

Θα παρουσιάσουμε μια εφαρμογή των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και την φόρμουλας του Ito στα δικαιώματα προαίρεσης.
Ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι ένα συμβόλαιο μεταξύ δυο μερών, του πωλητή και του αγοραστή. Το δικαίωμα προαίρεσης θα αναφέρεται σε ένα υποκείμενο αγαθό, π.χ. την μετοχή μιας εταιρείας, και θα έχει συγκεκριμένο χρόνο λήξης T. Συμβολίζοντας την αξία του υποκείμενου αγαθού με S_t κατά τη χρονική στιγμή t, το λεγόμενο call option πληρώνει τον κάτοχο του συμβολαίου το ποσό $P_T = \max\{S_T - K, 0\}$ όπου $K > 0$ ένα συγκεκριμένο ποσό το οποίο ονομάζεται τιμή εξάσκησης. Το ποσό αυτό το πληρώνει ο πωλητής του συμβολαίου στον αγοραστή. Ένας λόγος που ο αγοραστής θα αγοράσει ένα τέτοιο συμβόλαιο είναι για λόγους εξασφάλισης, δηλαδή για να μεταφέρει το αντίστοιχο ρίσκο στον πωλητή. Για παράδειγμα, ο πωλητής ενός συμβολαίου με ποσό πληρωμής $P_T = \max\{S_1(T)-S_2(T), 0\}$ όπου S_1, S_2 οι τιμές δυο υποκείμενων αγαθών, καλό θα είναι να αγοράσει ένα call option με υποκείμενο αγαθό το S_1 προκειμένου να εξασφαλιστεί έναντι μιας χρεοκοπίας. Δηλαδή ο πωλητής ενός συμβολαίου συχνά είναι και αγοραστής ενός άλλου, είτε για λόγους κερδοσκοπίας είτε για λόγους εξασφάλισης. Αλλος λόγος αγοράς ενός τέτοιου συμβολαίου είναι προφανώς η κερδοσκοπία.
Αν το συμβόλαιο αυτό πωλείται από λίγους πωλητές τότε ο κάθε πωλητής θα υπολογίσει το ποσό που χρειάζεται για να εφαρμόσει μια στρατηγική αντιστάθμισης με την οποία πιστεύει ότι θα έχει καλές πιθανότητες. Οπότε σε αυτή την περίπτωση μιλάμε για **αποτίμηση** του αντίστοιχου συμβολαίου. Αν όμως οι πωλητές είναι πολλοί τότε η τιμή θα προέλθει ουσιαστικά έπειτα από διαπραγμάτευση και θα προκύψει σύμφωνα με την προσφορά και τη ζήτηση. Σε αυτή τη περίπτωση ο πωλητής πουλώντας το συμβόλαιο σε μια τιμή Y θα προβληματιστεί για τον τρόπο αντιστάθμισης χρησιμοποιώντας αυτό το ποσό. Οπότε σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα **αντιστάθμισης** και όχι αποτίμησης.
Θα αναφέρουμε αμέσως τώρα την θεωρία των Black-Scholes πάνω σε αυτό το θέμα. Στη θεωρία αυτή υποθέτει κάποιος ότι η τιμή της μετοχής του υποκείμενου αγαθού ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους m, σ, δηλαδή

$$S_t = S_0 + m \int_0^t S_r dr + \sigma \int_0^t S_r dW_r$$

Σκοπός του πωλητή, κατά τη θεωρία αυτή, είναι να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο κατά τη χρονική στιγμή της πώλησης του συμβολαίου ($t = 0$) έτσι ώστε κατά το χρόνο T το χαρτοφυλάκιο να έχει αξία όσο και το ποσό που πρέπει να δώσει στον αγοραστή. Το χαρτοφυλάκιο θα αποτελείται από πλήθος μετοχών και ποσού σε τραπεζικό λογαριασμό με ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού ίσο με r (δηλαδή 1 ευρώ μετά από χρόνο t θα γίνει e^{rt}). Συμβολίζοντας με $a(t, S_t)$ το πλήθος των μετοχών που πρέπει να έχει στο χαρτοφυλάκιο και με $b(t, S_t)$ το ποσό σε τραπεζικό λογαριασμό, η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με

$$V_t = a(t, S_t)S_t + b_t e^{rt}$$

Σκοπός του πωλητή είναι να βρει την κατάλληλη στρατηγική $(a(t, S_t), b(t, S_t))$ κατασκευής αυτού του χαρτοφυλακίου έτσι ώστε να ισχύει $V_T = P_T$. Εξαργυρώνοντας το χαρτοφυλάκιο θα δώσει τα χρήματα στον αγοραστή.
Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο ονομάζεται και στρατηγική αντιστάθμισης. Θα λέμε ότι είναι αυτοχρηματοδοτούμενη αν ισχύει το παρακάτω.

$$V_t = V_0 + \int_0^t (ma(s, S_s)S_s + rb(s, S_s)B_s)ds + \int_0^t \sigma a(s, S_s)S_s dW_s.$$

Αρνητικά a, b σημαίνει δανεισμό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 568 *Έστω (a, b) μια αυτοχρηματοδοτούμενη Μαρκοβιανή στρατηγική. Τότε, αν υπάρχει $u(t, x) \in C^{1,2}(D)$ (όπου $D = (0, T) \times (0, +\infty)$) τ.ω. $u(t, S_t) = V_t$, η $u(t, x)$ είναι λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης*

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx}(t, x) + rxu_x(t, x) + u_t(t, x) = ru(t, x)$$

με $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$. Επιπλέον, $a(t, x) = u_x(t, x)$. Η παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση ονομάζεται **Black-Scholes.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον η (a, b) είναι αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική έχουμε ότι

$$V_t = V_0 + \int_0^t (ma(s, S_s)S_s + rb(s, S_s)B_s)ds + \int_0^t \sigma a(s, S_s)S_s dW_s.$$

Εφαρμόζουμε τη φόρμουλα του Ito στην $u(t, S_t)$ και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u(t, S_t) = \quad & u(0, S_0) \\ + & \int_0^t (u_t(s, S_s) + mS_s u_x(s, S_s) + \frac{\sigma^2 S_s^2}{2} u_{xx}(s, S_s))ds \\ + & \int_0^t \sigma S_s u_x(s, S_s) dW_s. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν γράψει την V_t ως διαδικασία Ito με δυο διαφορετικούς τρόπους, επομένως χρησιμοποιώντας τη μοναδικότητα της ανάλυσης κατά Doob-Meyer στη διαφορά τους (η οποία είναι μηδέν), προκύπτει ότι και τα δυο ολοκληρώματα είναι μηδέν.
Επομένως παίρνουμε την ισότητα

$$a(t, S_t) = u_x(t, S_t) \text{ και άρα } b(t, S_t)B_t = u(t, S_t) - S_t u_x(t, S_t)$$

Για να μηδενιστεί και το ολοκλήρωμα ως προς ds θα πρέπει αναγκαστικά η $u(t,x)$ να ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx}(t,x) + rxu_x(t,x) + u_t(t,x) = ru(t,x)$$

έχοντας αντικαταστήσει κατάλληλα το $b(t,S_t)B_t$, διότι θέλουμε να μηδενίζεται το ολοκλήρωμα για οποιαδήποτε πιθανή τροχιά της S_t. Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμη και η υπόθεση ότι $u \in C^{1,2}(D)$. □

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση έχει μοναδική λύση

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx}(t,x) + rxu_x(t,x) + u_t(t,x) &= ru(t,x) \\ u(T,x) &= \max\{x-K,0\} \end{aligned}$$

Επομένως ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο είναι τέτοιο ώστε $V_T = P_T$ θα είναι το

$$V_t = a(t,S_t)S_t + b(t,S_t)e^{rt}$$

με τα a, b όπως επιλέχθηκαν στο θεώρημα παραπάνω και $u(t,x)$ η λύση της εξίσωσης των Black-Scholes.

Το μειονέκτημα της θεωρίας αυτής είναι ότι αυτό το χαρτοφυλάκιο δεν μπορεί να κατασκευαστεί στην πραγματικότητα διότι η αναδιάρθρωσή του πρέπει να γίνεται ακαρίαια! Πράγματι, το πλήθος των μετοχών πρέπει να αλλάζει καθώς αλλάζει η μεταβλητή t αλλά αυτό δεν είναι δυνατό στην πράξη διότι κάθε εντολή αγοραπωλησίας παίρνει κάποιο χρόνο μέχρι να διεκπεραιωθεί. Επίσης, τη στιγμή που αλλάζει η αξία της μετοχής από $S(t)$ σε $S(t+h)$ θα πρέπει ακαριαία να γίνει και η αντίστοιχη αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου. Δείτε και αντίστοιχα σχόλια στο Wikipedia.

Ας υποθέσουμε ότι η κατασκευή αυτού το χαρτοφυλακίου ήταν εφικτή. Τι θα είχαμε στην πραγματικότητα στα χέρια μας; Η παράμετρος σ δεν είναι σταθερή και εξαρτάται από το χρόνο. Διαφορετική τιμή θα έχει αν χρησιμοποιήσεις ιστορικά δεδομένα 3 μηνών, 6 μηνών κ.τ.λ. Επομένως, η επιλογή του σ είναι καθαρά προσωπική υπόθεση (είναι μια προσωπική μαντεψιά) και ως εκ τούτου το «αφήγημα» της fair price ή της μιας και μοναδικής no arbitrage price καταρρέει! Η επιλογή του σ μέσω του implied volatility δεν έχει καμία λογική αφού μπορεί κάποιος να κατασκευάσει άπειρα μοντέλα με μια παράμετρο!

Αν όμως αυτό το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο ήταν εφικτό, θα μπορούσε ο πωλητής να μαντέψει ένα εύρος στο οποίο το σ θα κινηθεί στο μέλλον και θα κατασκεύαζε αυτό το χαρτοφυλάκιο βασισμένο σε ένα κατάλληλο για αυτόν σ. Αν μαντέψει σωστά το εύρος του σ θα έχει κέρδος αλλιώς ζημιά. Δηλαδή στην περίπτωση που αυτό το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο ήταν εφικτό θα είχαμε στα χέρια μας ένα τρόπο κατασκευής αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου, δηλαδή μια στρατηγική επένδυσης, αλλά δεν θα είχαμε μια δίκαιη τιμή πώλησης μιας και ο κάθε επενδυτής βλέπει διαφορετικά το μέλλον, εν γένει.

Κάθε προσπάθεια ορισμού μιας δίκαιης τιμής θα είναι λανθασμένη στην πράξη αν αυτή στηρίζεται σε μια υπόθεση για την κίνηση της αξίας του υποκείμενου αγαθού.

Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ των αντισταθμιστικών στρατηγικών υπερτερούν αυτές οι οποίες δεν στηρίζονται σε μια υπόθεση για την κίνηση της τιμής του υποκείμενου αγαθού. Ακόμη χειρότερα, η κατασκευή ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου δεν εξασφαλίζει τον πωλητή έναντι μιας χρεοκοπίας μιας και το σ μπορεί να πάρει οσοδήποτε μεγάλη τιμή. Τελικά, αν η κατασκευή αυτού του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου ήταν εφικτή το μόνο που θα είχαμε στα χέρια μας θα ήταν μια στρατηγική αντιστάθμισης και μάλιστα όχι ικανοποιητική!
Θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τη στρατηγική αυτή κατά προσέγγιση, κάνοντας συχνές αναδιαρθρώσεις του χαρτοφυλακίου. Οι συχνές όμως αναδιαρθρώσεις δεν μας εξασφαλίζουν ότι το αποτέλεσμα θα είναι κοντά στο ζητούμενο, χωρίς καν να λάβουμε υπόψη τα κόστη συναλλαγής. Το αντίθετο, έχει αποδειχθεί στην πράξη ότι μπορεί να οδηγήσει τον πωλητή σε χρεοκοπία.
Όλα τα παραπάνω έχουν ως συνέπεια να μην εφαρμόζεται η θεωρία αυτή από τους επαγγελματίες και επομένως άλλοι τρόποι πρέπει να σχεδιαστούν για την (μερική) επίλυση του προβλήματος.
Ένας τρόπος μερικής επίλυσης του παραπάνω προβλήματος είναι να διαλέξει ο πωλητής κάποια d, u έτσι ώστε $uS_0 > k$ και $dS_0 < K$ και να αγοράσει $a = \frac{uS_0-K}{(u-d)S_0}$ το πλήθος μετοχές και να καταθέσει το ποσό $b = \frac{-(uS_0-K)d}{e^{rt}}$.

Αποδεικνύεται ότι ο πωλητής κατασκευάζοντας ένα χαρτοφυλάκιο με αυτό το τρόπο, στο χρόνο T θα έχει κέρδος αν $S_T \in (dS_0, uS_0)$ και ζημιά διαφορετικά.

Σημειώστε ότι το συμπέρασμα αυτό είναι ανεξάρτητο οποιασδήποτε υπόθεσης που αφορά την κίνηση του υποκείμενου αγαθού! Η κατασκευή αυτού του χαρτοφυλακίου είναι πρακτικά εφικτή διότι μόνο μια φορά στην αρχή αγοράζεις μετοχές και τοποθετείς χρήματα σε τραπεζικό λογαριασμό. Υποθέτοντας ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown με παραμέτρους m, σ μπορεί να υπολογίσει κάποιος την πιθανότητα κέρδους και άλλες παρόμοιες ποσότητες.
Επειδή, συνήθως, η τιμή πώλησης ενός τέτοιου συμβολαίου προκύπτει σύμφωνα με τη προσφορά και τη ζήτηση το ερώτημα για τον πωλητή είναι: με το ποσό Y που θα εισπράξω τι μπορώ να κάνω για να έχω καλές πιθανότητες αφενός για να μην χρεοκοπήσω και αφετέρου να έχω κέρδος; Ένας τρόπος τοποθέτησης του ποσού Y είναι ο παραπάνω και σε αυτή την περίπτωση ο πωλητής ποντάρει στο ενδεχόμενο $S_T \in (dS_0, uS_0)$ στο οποίο θα έχει κέρδος. Υπάρχουν και άλλοι (πρακτικά εφαρμόσιμοι) τρόποι τοποθέτησης του ποσού Y στους οποίους ο πωλητής θα έχει κέρδος σε διαφορετικά ενδεχόμενα. Για παράδειγμα πουλώντας ένα call option στην τιμή Y μπορείς να δανειστείς ένα κατάλληλο ποσό έτσι ώστε να αγοράσεις $\gamma + 1$ πλήθος

μετοχών. Με αυτό τον τρόπο θα έχεις απεριόριστο πιθανό κέρδος και περιορισμένη πιθανή ζημιά και μάλιστα το συμπέρασμα αυτό είναι ανεξάρτητο από την οποιαδήποτε υπόθεση για την κίνηση της μετοχής. Ο πωλητής θα επιλέξει την κατάλληλη στρατηγική επένδυσης του ποσού Y με την οποία (κατά τη γνώμη του) θα έχει περισσότερες πιθανότητες κέρδους. Από την άλλη μεριά ένα ερώτημα για τον αγοραστή είναι: αγοράζοντας το συμβόλαιο αυτό στην τιμή Y ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσω, αν χρειάζομαι το συμβόλαιο για λόγους κερδοσκοπίας;
Μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις.
• Αν η στρατηγική αντιστάθμισης που θα επιλέξουμε περιέχει τόσο δανεισμό όσο και κατάθεση με το ίδιο επιτόκιο καλό είναι να το σκεφτόμαστε ως κατάθεση/δανεισμό σε προσωπικό τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο r το οποίο προφανώς είναι προσωπικό και διαφορετικό από επενδυτή σε επενδυτή.
• Αν το συμβόλαιο έχει χρόνο λήξης T (π.χ. 3 μήνες) και αν σκεφτόμαστε να εφαρμόσουμε μια στρατηγική με συχνές αναδιαρθρώσεις (όπως αυτή του μοντέλου Black-Scholes) καλό είναι να μετατρέψουμε τον χρόνο T σε πλήθος ωρών που το χρηματιστήριο είναι ανοικτό και που επιτρέπονται οι συναλλαγές.
• Έστω ότι πουλήσαμε ένα συμβόλαιο στη τιμή Y και έστω ότι θέλουμε να εφαρμόσουμε προσεγγιστικά τη στρατηγική αντιστάθμισης των Black-Scholes. Η στρατηγική επένδυσης, δηλαδή το πλήθος των μετοχών και η κατάθεση/δανεισμός σε τράπεζα εξαρτώνται από την μεταβλητότητα του υποκείμενου αγαθού. Για να βρούμε αυτή την μεταβλητότητα, και άρα την στρατηγική αντιστάθμισης, θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του implied volatility. Παρομοίως, αν θέλουμε να εφαρμόσουμε μια άλλη στρατηγική επένδυσης η οποία έχει μια παράμετρο.
• Δεν υπάρχει δίκαιη τιμή πώλησης η οποία να είναι αποδεκτή από όλους τους επενδυτές. Υπάρχει όμως ο νόμος της προσφοράς και της ζήτησης καθώς και διάφορες στρατηγικές αντιστάθμισης.
• Αν ο επενδυτής θέλει να κάνει συχνές αναδιαρθρώσεις του χαρτοφυλακίου του θα πρέπει να δίνει σχετικά χαμηλή τιμή πώλησης και σχετικά υψηλή τιμή αγοράς προκειμένου η αγοραπωλησία να διεκπεραιωθεί συντομότερα. Αυτό είναι προφανές ότι δεν είναι προς το συμφέρον του.
Ο επενδυτής θα χρησιμοποιήσει Στατιστική, Στοχαστική Ανάλυση αλλά κυρίως τη διαίσθησή του προκειμένου να επιλέξει την κατάλληλη στρατηγική.

Βιβλιογραφία

[1] Γ. Ακρίβης - Β. Δουγαλής, Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000.

[2] Μ. Ανούσης - Α. Τσολομύτης - Β. Φελουζής, Πραγματική Ανάλυση, 2014.

[3] Ν. Αλικάκος - Γ. Καλογερόπουλος, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Σύγχρονη Εκδοτική, 2003.

[4] Π. Βασιλείου - Χ. Τσακλίδης, Εφαρμοσμένη Θεωρία Πινάκων, Εκδόσεις Ζήτη, 2001.

[5] Π. Βασιλείου, Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά, Εκδόσεις Ζήτη, 2001

[6] Δ. Βάρσος - Δ. Δεριζιώτης - Ι. Εμμανουήλ - Μ. Μαλιάκας - Α. Μελάς - Ο. Ταλέλη, Μια Εισαγωγή στην Γραμμική 'λγεβρα, εκδόσεις Σοφία, 2012.

[7] Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Εισαγωγή στα Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά, σημειώσεις.

[8] Γ. Δάσιος - Κ. Κυριάκη, Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδ. ΑΘΗΝΑ, 1989.

[9] Χ. Δαμιανού - Ν Παπαδάτος - Χ. Χαραλαμπίδης, Εισαγωγή στις Πιθανότητες και τη Στατιστική, Διδακτικές Σημειώσεις, 2003.

[10] Γ. Κοκολάκης - Ι. Σπηλιώτης, Θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστική με Εφαρμογές, Εκδ. Συμεων, 2010.

[11] Μάρκος Κούτρας, Εισαγωγή στην Συνδυαστική, Εκδόσεις Σταμούλης, 2006.

[12] Μ. Λουλάκης, Στοχαστικές Διαδικασίες, Εκδόσεις Κάλλιπος, 2015.

[13] Ιωάννης Μαρουλάς, Γραμμική Αλγεβρα, Σημειώσεις, ΕΜΠ 2005.

[14] Ε. Μαγείρου, Οικονομικά Μαθηματικά και Αξιολόγηση Επενδύσεων, Gutenberg, 2002.

[15] Μ. Μπούτσικας, Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα, σημειώσεις.

[16] Δ. Μπερτσεκάς - Ι. Τσιτσικλής, Εισαγωγή στις Πιθανότητες με Στοιχεία Στατιστικής, εκδόσεις Τζιόλα, 2013.

[17] A. O. Morris, Μια Εισαγωγή στην Γραμμική 'λγεβρα, Εκδόσεις Πνευματικού, 1980

[18] Σ. Νεγρεπόντης - Σ. Γιωτόπουλος - Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός Λογισμός, τόμος I, II_α, II_β, Εκδόσεις Συμμετρία, 1999.

[19] Ν. Οικονομίδης - Χ. Καρυοφύλλης, Ολοκληρωτικός Λογισμός και Διαφορικός Λογισμός, Εκδόσεις Ζήτη, 1985.

[20] Μιχάλης Παπαδημητράκης, Ανάλυση-Πραγματικές Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής, www.kallipos.gr, 2015.

[21] Έφη Παπαγεωργίου, Βιοστατιστική και Εφαρμογές, Εκδ. Νέων Τεχνολογιών, 2014.

[22] Γ. Παντελίδης, Ανάλυση, Εκδ. ΖΗΤΗ, 2000.

[23] Γ. Παντελίδης - Δ. Κραββαρίτης, Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις Μερικών Παραγώγων, Εκδ. ΖΗΤΗ, 2003.

[24] Γ. Παντελίδης - Δ. Κραββαρίτης - Ν. Χατζησάββας, Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Εκδόσεις Ζήτη, 1990.

[25] Γ. Παντελίδης - Δ. Κραββαρίτης - Β. Νασόπουλος - Π. Τσεκρέκος, Γραμμική Αλγεβρα, Αθήνα, 1983.

[26] Μ. Πλεξουσάκης - Π. Χατζηπαντελίδης, Αριθμητική Επίλυση Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων, www.kallipos.gr, 2015.

[27] Θεμιστοκλής Ρασσιάς, Μαθηματική Ανάλυση Ι, ΙΙ και ΙΙΙ, Εκδ. ΣΥΜΕΩΝ, 2009.

[28] Ν. Σταυρακάκης, Εξισώσεις Μερικών Παραγώγων, Αθήνα, 2002.

[29] Νίκος Χαλιδιάς, Απειροστικός Λογισμός, Γραμμική Αλγεβρα και Εφαρμογές, εκδόσεις Broken Hills.

[30] Νίκος Χαλιδιάς, Βασικές Αρχές Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών, έκδοση 2^η, Broken Hill Publishers, 2018.

[31] J. Hull, Βασικές Αρχές των Αγορών Συμβολαίων και Δικαιωμάτων, Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2017.

[32] Θ. Κάκουλλος, Στοχαστικές Ανελίξεις, εκδόσεις Συμμετρία, 1995.

[33] Μ. Κούτρας, Εισαγωγή στην Θεωρία Πιθανοτήτων και Εφαρμογές, Β έκδοση, εκδόσεις Σταμούλη, 2016.

[34] Δ. Φακίνος, Στοχαστικά Μοντέλα στην Επιχειρησιακή Έρευνα, Β έκδοση, εκδόσεις Συμμετρία, 2007.

[35] Α. Φελλούρης, Γραμμική Αλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Εκδόσεις Τσότρα, 2017.

[36] Α. Χρυσάκης, Γραμμική Αλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Αθήνα, 2013.

[37] M. Capinski - E. Kopp, Measure, Integral and Probability, Springer, 2005.

[38] F. Delbaen - W. Schachermayer, The Mathematics of Arbitrage, Springer, 2006.

[39] D. Duffy, Finite Difference Methods in Financial Engineering, Wiley, 2006.

[40] P. Glasserman, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer, 2003.

[41] R. Grubbstrom - J. Yinzhong, *A Survey and Analysis of the Application of the Laplace Transform to Present Value Problems*, In: Spronk J. Matarazzo B. (eds) Modelling for Financial Decisions. Studies in Financial Modelling. Springer, 1991.

[42] N. Halidias, An elementary approach to the option pricing problem, Asian Research Journal of Mathematics, 1 (**1**), 1-18, 2016.

[43] N. Halidias, An explicit and positivity preserving numerical scheme for the mean reverting CEV model, Japan J. Indust. Appl. Math. 2015, 32, 545-552.

[44] N. Halidias - I. Stamatiou, Approximating explicitly the mean - reverting CEV process, Journal of Probability and Statistics, 2015.

[45] N. Halidias, *On the mean first passage times of continuous time Markov processes*, Researchgate.

[46] N. Halidias, On the absorption probabilities and mean time to absorption for discrete Markov chains, Monte Carlo Methods and Applications, 2021.

[47] H. He, Convergence from the discrete to continuous time contingent claim prices, Review of Financial Studies, vol. 3, p. 523-546, 1990.

[48] J. Hull, Options, Futures and Other Derivatives, Prentice Hall, 2010.

[49] L. Jiang - M. Dai, Convergence of binomial tree methods for European/American path-dependent options, SIAM J. Num. Anal, 42, pp. 1094-1109, 2004.

[50] R. Korn - E. Korn, Option Pricing and Portfolio Optimization, AMS, 2000.

[51] I. Karatzas - S. Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, 1991.

[52] M. Musiela - M. Rutkowski, Martingale Methods in Financial Modelling, Springer, 2005.

[53] A. Pascucci-W. Runggaldier, Financial Mathematics, Springer, 2012.

[54] S. Shreve, Stochastic Calculus for Finance I and II, Springer, 2004.

[55] P. Wilmott, Paul Wilmott on Quantitative Finance, Wiley, 2007.

[56] R. Ash, *Basic Probability Theory*, Wiley, 1970.

[57] R. Ash - C. Doleans-Dade, *Probability and Measure Theory*, Elsevier, 2000.

[58] J. Bak - D. J. Newman, *Complex Analysis*, Springer, 1997.

[59] S. Bialas - M. Bialas, *An algorithm for the calculation of the minimal polynomial*, Bulletin Polish Academy Sciences, vol. 56, 2008.

[60] R. J. Beerends-H. G. ter Morsche - J. C. van der Berg - E. M. van de Vrie, *Fourier and Laplace Transforms*, Cambridge University Press, 2003.

[61] P. Billingsley, *Probability and Measure*, Wiley, 1995.

[62] L. Brand, *Advanced Calculus*, Dover, 2006.

[63] L. Brand, *The Companion Matrix and Its Properties*, The American Mathematical Monthly Vol. 71, No. 6 1964, pp. 629-634.

[64] P. Bremaud, *Markov Chains, Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation and Queues*, Springer, 1999.

[65] S. Berberian, Linear Algebra, Oxford Science Publications, 1992.

[66] M. Capinski - E. Kopp, *Measure, Integral and Probability*, Springer, 2005.

[67] S. Cambell - C. Meyer, Generelized Inverses of Linear Trasformations, SIAM, 2009.

[68] P. Collins, *Differential and Integral Equations*, Oxford University Press, 2006.

[69] R. Courant - F. John, *Introduction to Calculus and Analysis I*, Springer, 1989.

[70] P. Davis, *Interpolation and Approximation*, Dover, 1975.

[71] L. Debnath - D. Bhatta, *Integral Transforms and their Applications*, Chapman and Hall/CRC, 2007.

[72] Phil Dyke, *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series*, Springer, 2001.

[73] R. Durrett, *Probabiblity: Theory and Examples*, Cambridge University Press, 2010.

[74] S. Elaydi, *An introduction to Difference Equations*, Springer, 2005.

[75] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. I, Vol. II, Wiley, 1957.

[76] R. Flowe - G. Harris, *A note on genelalized Vandermonde determinants*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. vol. 14, No. 4, pp. 1146-1151, 1983.

[77] R. Grubbstrom - J. Yinzhong, *A Survey and Analysis of the Application of the Laplace Transform to Present Value Problems*, In: Spronk J. Matarazzo B. (eds) Modelling for Financial Decisions. Studies in Financial Modelling. Springer, 1991.

[78] N. Halidias, *A generalization of Laplace and Fourier transforms*, Asian Journal of Mathematics and Computer Research, 24(1), pp. 32-41, 2018.

[79] H. Hamilton, *The partial decomposition of a rational function*, Mathematics Magazine, Vol. 45, No. 3, pp. 117-119, 1972.

[80] J. Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*, Princeton University Press, 2003.

[81] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, 1973.

[82] N. Higham, *Functions of Matrices, Theory and Computation*, SIAM, 2008.

[83] Shui-Hung Hou, A simple proof of the Leverrier - Faddeev characteristic polynomial algorithm, SIAM REV, Vol. 40, No. 3, pp. 706 - 709, 1998.

[84] R. Israel - J. Rosenthal - J. Wei, *Finding generators for markov chains via empirical transition matrices, with applications to credit ratings*, Mathematical Finance, Vol. 11, pp. 245-265, 2001.

[85] E. Gonzalez-Velasco, *Fourier Analysis and Boundary Value Problems*, Academic Press, 1995.

[86] G. Grimmett - D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, Oxford University Press, 2001.

[87] J. Jacod - P. Protter, *Probability Essentials*, Springer, 2004.

[88] A. Israel - T. Grevill, *Genelalized Inverses, Theory and Applications*, Springer, 2003.

[89] R. Larson - D. Falvo, Elementary Linear Algebra, Houghton Mifflin Harcourt Publishing Company, 2009.

[90] E. Landau, *Differential and Integral Calculus*, Chelsea, 1951.

[91] S. Lipschutz-M. Lipson, *Linear Algebra*, McGraw Hill, 2009.

[92] S. Karlin - H. Taylor, *A First Course in Stochastic Processes*, Academic Press, 1975.

[93] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988.

[94] J. Kemeny - J. Snell, *Finite Markov Chains*, Springer, 1976.

[95] M. Keane, *A Very Applied First Course in Partial Differential Equations*, Prentice-Hall, 2002.

[96] E. Mendelson, *3000 Solved Problems in Calculus*, McGraw Hill, 1988.

[97] D. Montgomery-G Runger, *Applied Statistics and Probability for Engineers*, Wiley, 2003.

[98] J. Norris, *Markov Chains*, Cambridge University Press, 1997.

[99] R. Penrose, *A Generalized Inverse for Matrices*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, pp. 406-413, vol. 51, 1955.

[100] M. Protter - C. Morrey, *A First Course in Real Analysis*, Springer, second edition, 1997.

[101] Y. Pinchover - J. Rubinstein, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 2005.

[102] H. Ricardo, *A Modern Introduction to Linear Algebra*, CRC Press, 2010.

[103] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 1976.

[104] W. Rogosinki, *Fourier Series*, Chelsea Publishing Company, 1950.

[105] J. R. Silvester, *Determinants of block matrices*, Math. Gaz. 84 (501) pp. 460-467, (2000).

[106] J. L. Schiff, *The Laplace Transform*, Springer, 1999.

[107] V. Shoup, *Efficient Computation of Minimal Polynomials in Algebraic Extensions of Finite Fields*, 1999.

[108] D. Stroock, *An Introduction to Markov Processes*, Springer, 1999.

[109] K. Stromberg, *Introduction to Classical Real Analysis*, AMS, 2015.

[110] I. Gikhman - A. Skorokhod, *Introduction to the Theory of Random Processes*, 1969.

[111] A. Zygmunt, *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, 2002.