# Πρόχειρες Σημειώσεις Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών - Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Νικόλαος Χαλίδιας

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Μέθοδος των Τριών - Μερισμός

## 1.1 Σχετιζόμενα Ποσά

Θα περιγράψουμε την έννοια των ποσών και την σχέση μεταξύ τους μέσα από δυο βασικά παραδείγματα.
Ένα μέτρο ύφασμα συγκεκριμένης ποιότητας κοστίζει 5 Ευρώ. Σε αυτή την πρόταση αναφερόμαστε σε δυο ποσά. Το ένα είναι τα μέτρα του συγκεκριμένου υφάσματος και το άλλο είναι το κόστος. Τα δυο αυτά ποσά σχετίζονται στα πλαίσια του συγκεκριμένου παραδείγματος.
Ένα χωράφι 2 στρεμμάτων μπορεί να οργωθεί από 10 εργάτες σε 8 ώρες. Σε αυτή την περίπτωση αναφερόμαστε σε τρία ποσά: το πλήθος των στρεμμάτων, το πλήθος των ωρών που χρειάζονται για να οργωθεί και το πλήθος των εργατών. Προφανώς τα ποσά αυτά σχετίζονται μεταξύ τους. Αν διπλασιάσω τα στρέμματα θα πρέπει αντίστοιχα να διπλασιάσω τις απαιτούμενες ώρες ή το πλήθος των εργατών ή να αυξήσω και τα δυο με κάποιον τρόπο.
Το πρώτο παράδειγμα έχει μια ουσιαστική διαφορά από το δεύτερο. Στο πρώτο παράδειγμα μια αλλαγή στο ένα ποσό επιφέρει υποχρεωτικά αλλαγή και στο άλλο ενώ στο δεύτερο παράδειγμα μια αλλαγή στο πλήθος των στρεμμάτων δεν σημαίνει αλλαγή στο πλήθος των εργατών κατ΄ ανάγκη.
Στην συνέχεια παραθέτουμε δυο ορισμούς για τα σχετιζόμενα ποσά. Ο πρώτος ορισμός αναφέρεται σε ένα ζευγάρι ποσών ενώ ο δεύτερος σε μια $n$-άδα ποσών.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 1** *Θα λέμε ότι το ζευγάρι των ποσών $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ είναι* **σχετιζόμενα ποσά** *όταν μια μεταβολή της τιμής του ενός σημαίνει αναγκαστικά και μεταβολή της τιμής του άλλου.*

Θα δώσουμε στην συνέχεια τον κατάλληλο ορισμό για τα σχετιζόμενα ποσά όταν είναι περισσότερα των δυο.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 2** *Έστω η $n$-άδα των ποσών $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ και έστω ότι η μεταβολή του ποσού $\alpha_i$ σημαίνει αναγκαστικά μεταβολή του ποσού $\alpha_l$ όταν όλα τα υπόλοιπα ποσά τα διατηρήσω σταθερά. Αν αυτό συμβαίνει για κάθε $i, l \in \{1, \cdots, n\}$ τότε λέμε ότι η $n$-άδα αυτή παριστά σχετιζόμενα ποσά.*

Στο παράδειγμα με τους εργάτες διαπιστώνουμε ότι τα τρία ποσά που αναφέραμε είναι σχετιζόμενα σύμφωνα με τον ορισμό 2. Σημειώστε όμως ότι τα ποσά {πλήθος εργατών, ώρες εργασίας} δεν είναι σχετιζόμενα. Αν αυξήσουμε το πλήθος των εργατών μπορούμε να διατηρήσουμε το πλήθος των ωρών εργασίας σταθερό αυξάνοντας αντίστοιχα τα στρέμματα του χωραφιού. Δηλαδή μια αύξηση του πλήθους των εργατών δεν σημαίνει κατά ανάγκη μεταβολή του πλήθους των ωρών εργασίας. 'ρα, τα δυο αυτά ποσά δεν είναι σχετιζόμενα σύμφωνα με τον ορισμό 1.

## 1.2 Ποσά Ανάλογα - Μέθοδος των Τριών

Την αρχική τιμή ενός ποσού $\alpha$ την συμβολίζουμε με $\alpha^{(1)}$ και την τιμή του ποσού μετά την μεταβολή την συμβολίζουμε με $\alpha^{(2)}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3 *Έστω $\alpha^{(1)}$ η τιμή του ποσού $\alpha$ και $\alpha^{(2)}$ η τιμή του ίδιου ποσού μετά από μια μεταβολή. Ο λόγος*

$$\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(2)}} \quad (\text{ρυθμός μεταβολής})$$

*ονομάζεται* **ρυθμός μεταβολής**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4 *Δυο σχετιζόμενα ποσά $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ θα λέμε ότι είναι* **ανάλογα** *αν μια συγκεκριμένη μεταβολή στο ένα ποσό αποφέρει τον ίδιο ρυθμό μεταβολής και στο άλλο ποσό ή αλλιώς*

$$\frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_1^{(2)}} = \frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_2^{(2)}}$$

*Παρόμοια, δυο ποσά $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ λέγονται* **αντιστρόφως ανάλογα** *όταν τα $\{\alpha_1, \frac{1}{\alpha_2}\}$ είναι ανάλογα.*

Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως

$$\frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_2^{(1)}} = \frac{\alpha_1^{(2)}}{\alpha_2^{(2)}}$$

Αν τα ποσά μεταβληθούν ακόμη μια φορά, δηλαδή γίνουν $\alpha_1^{(3)}$ και $\alpha_2^{(3)}$ θα ισχύει πάλι ότι

$$\frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_2^{(1)}} = \frac{\alpha_1^{(3)}}{\alpha_2^{(3)}}$$

Αυτό σημαίνει ότι το αριστερό κλάσμα είναι ανεξάρτητο της μεταβολής, δηλαδή υπάρχει μια σταθερά $c$ (η οποία δεν εξαρτάται από την μεταβολή που πρόκειται να γίνει) τέτοια ώστε

$$\alpha_1^{(1)} = c \cdot \alpha_2^{(1)} \tag{1.1}$$

Με βάση τον ορισμό 4 προκύπτει η λεγόμενη **μέθοδος των τριών**. Δηλαδή στην σχέση

$$\frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_1^{(2)}} = \frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_2^{(2)}}$$

γνωρίζουμε τα τρία από τα τέσσερα στοιχεία και ψάχνουμε το τέταρτο.

**'ΣΚΗΣΗ 5** *Έστω ότι ένα αυτοκίνητο διανύει μια απόσταση (με σταθερή ταχύτητα) 10 χιλιομέτρων σε 20 λεπτά. Σε πόση ώρα θα διανύσει μια απόσταση 54 χιλιομέτρων;*

**ΛΥΣΗ.** Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε δυο ποσά, τα χιλιόμετρα και ο χρόνος που χρειάζεται το αυτοκίνητο για να τα διανύσει. Είναι προφανές ότι τα δυο αυτά ποσά είναι σχετιζόμενα σύμφωνα με τον ορισμό 1 και επιπλέον είναι ανάλογα σύμφωνα με τον ορισμό 4 (δεδομένου ότι το αυτοκίνητο κινείται με σταθερή ταχύτητα). 'ρα ισχύει η σχέση

$$\frac{10}{54} = \frac{20}{x}$$

Λύνοντας ως προς $x$ έχουμε ότι το αυτοκίνητο θα χρειαστεί $x = 108$ λεπτά της ώρας για να διανύσει την απόσταση των 54 χιλιομέτρων. □

**'ΣΚΗΣΗ 6** *Έστω ότι 5 εργάτες χρειάζονται 2 ώρες για να οργώσουν ένα χωράφι. Πόσες ώρες θα χρειαστούν οι 2 εργάτες;*

**ΛΥΣΗ.** Στην περίπτωση αυτή έχουμε δυο ποσά, τους εργάτες και τον χρόνο που χρειάζονται για να οργώσουν ένα χωράφι. Τα ποσά αυτά είναι σχετιζόμενα σύμφωνα με τον ορισμό 1. Επιπλέον, είναι αντιστρόφως ανάλογα μιας και περισσότεροι εργάτες θα χρειαστούν λιγότερες ώρες. 'ρα ισχύει η σχέση

$$\frac{5}{2} = \frac{x}{2}$$

Προκύπτει ότι οι δυο εργάτες θα χρειαστούν 5 ώρες. □

## 1.3 Γενικευμένη Μέθοδος των Τριών

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου εμπλέκονται περισσότερα από δυο ποσά.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 7** *Έστω τα $n$ σχετιζόμενα ποσά $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ τα οποία είναι τέτοια ώστε όταν μια συγκεκριμένη μεταβολή στο ποσό $a_1$ αποφέρει τον ίδιο ρυθμό μεταβολής στο ποσό $a_l$ όταν όλα τα υπόλοιπα ποσά είναι σταθερά ή αλλιώς τα ποσά $\{\alpha_1, \alpha_l\}$ είναι ανάλογα όταν θεωρήσω όλα τα υπόλοιπα σταθερά. Αν αυτό ισχύει για κάθε $l \in \{2, \cdots, n\}$ τότε λέμε ότι το ποσό $\alpha_1$ είναι ανάλογο ως προς τα ποσά $\{\alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$.*

**ΘΕΩΡΗΜΑ 8** *Έστω ότι τα σχετιζόμενα ποσά $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ είναι τέτοια ώστε το $\alpha_1$ είναι ανάλογο ως προς τα υπόλοιπα. Τότε υπάρχει σταθερά $c > 0$ (η οποία είναι ανεξάρτητη από τα ποσά $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$) τέτοια ώστε $\alpha_1 = c \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n$.*

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θα συμβολίζουμε τις σταθερές που δεν εξαρτώνται από τα ποσά $\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_k}$ με $b^{\{i_1,\cdots,i_k\}}$.
Εφόσον το ποσό $\alpha_1$ είναι ανάλογο ως προς τα υπόλοιπα τότε κρατώντας σταθερά όλα τα ποσά εκτός των $\alpha_1$ και $\alpha_2$ έχουμε ότι τα ποσά $\alpha_1$ και $\alpha_2$ είναι ανάλογα. Δηλαδή υπάρχει σταθερά $b_1^{\{1,2\}}$ (δεν εξαρτάται από τα ποσά $\alpha_1$ και $\alpha_2$, δες σχέση 1.1) τέτοια ώστε

$$\alpha_1 = b_1^{\{1,2\}} \cdot \alpha_2$$

Παρομοίως, θα υπάρχουν σταθερές $b_3^{\{1,3\}}, b_4^{\{1,4\}}, \cdots$ τέτοιες ώστε

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= b_2^{\{1,3\}} \cdot \alpha_3 \\
\alpha_1 &= b_3^{\{1,4\}} \cdot \alpha_4 \\
&\vdots \\
\alpha_1 &= b_{n-1}^{\{1,n\}} \cdot \alpha_n
\end{aligned}$$

Από τις σχέσεις $a_1 = b_1^{\{1,2\}} \cdot \alpha_2$ και $a_1 = b_2^{\{1,3\}} \cdot \alpha_3$ προκύπτει ότι

$$\frac{b_1^{\{1,2\}}}{\alpha_3} = \frac{b_2^{\{1,3\}}}{\alpha_2}$$

Το αριστερό μέλος εξαρτάται από την ποσότητα $\alpha_3$ αλλά το δεξί μέλος όχι. Επειδή είναι ίσα, αναγκαστικά προκύπτει ότι $\frac{b_1^{\{1,2\}}}{\alpha_3} = \frac{b_2^{\{1,3\}}}{\alpha_2} = b_1^{\{1,2,3\}}$ και άρα $b_1^{\{1,2\}} = b_1^{\{1,2,3\}} \cdot \alpha_3$ όπου $b_1^{\{1,2,3\}}$ είναι μια νέα σταθερά η οποία δεν εξαρτάται από τις ποσότητες $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Παρομοίως προκύπτει ότι $b_2^{\{1,3\}} = b_2^{\{1,3,4\}}$ και γενικότερα $b_k^{\{1,k+1\}} = b_k^{\{1,k+1,k+2\}}$. Επομένως καταλήγουμε στις επόμενες ισότητες

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= b_1^{\{1,2,3\}} \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \\
\alpha_1 &= b_2^{\{1,3,4\}} \cdot \alpha_3 \cdot \alpha_4 \\
&\vdots \\
\alpha_1 &= b_{n-1}^{\{1,2,n\}} \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_n
\end{aligned}$$

Συνεχίζοντας το ίδιο σκεπτικό καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα. □

Στην επόμενη πρόταση θα δούμε πως εφαρμόζουμε στην πράξη το προηγούμενο αποτέλεσμα.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 9 (Γενικευμένη Μέθοδος των Τριών)** *Υποθέτουμε ότι τα ποσά $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ είναι σχετιζόμενα και έστω ότι το $\alpha_1$ είναι ανάλογο ως προς τα υπόλοιπα. Αν $\alpha_i^{(1)}$ για*

*$i = 1, \cdots, n$ είναι η τιμή τους πριν την μεταβολή και $\alpha_i^{(2)}$ μετά την μεταβολή τότε ισχύει ότι*

$$\frac{\alpha_1^{(1)}}{\alpha_1^{(2)}} = \frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_2^{(2)}} \cdot \frac{\alpha_3^{(1)}}{\alpha_3^{(2)}} \cdots \frac{\alpha_n^{(1)}}{\alpha_n^{(2)}}$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Εφόσον υπάρχει σταθερά $c$ ανεξάρτητη των ποσών $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ τέτοια ώστε

$$\alpha_1 = c \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n$$

(δες Θεώρημα 8) τότε η ίδια σχέση ικανοποιείται για οποιεσδήποτε τιμές των ποσών αυτών. Θα ισχύει λοιπόν για τις τιμές $\alpha_i^{(1)}$ αλλά και για τις $\alpha_i^{(2)}$. Διαιρώντας τις σχέσεις αυτές προκύπτει η ζητούμενη ισότητα. □

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10** *Έστω ότι 10 εργάτες μπορούν να οργώσουν ένα χωράφι 2 στρεμμάτων σε 5 ώρες χρησιμοποιώντας 1 τρακτέρ (μαζί με τον οδηγό του). Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε 4 ποσά τα οποία είναι σχετιζόμενα. Έχουμε το πλήθος των εργατών, το πλήθος των στρεμμάτων, οι ώρες που χρειάζονται και το πλήθος των τρακτέρ. Αν αλλάξουμε το πλήθος των εργατών και κρατήσουμε σταθερά τις ώρες και το πλήθος των τρακτέρ τότε αναγκαστικά θα πρέπει να μεταβληθεί το πλήθος των στρεμμάτων. Το ίδιο συμβαίνει μεταβάλλοντας οποιοδήποτε από τα ποσά που έχουμε αναφέρει. Μπορούμε επίσης να μεταβάλλουμε όλα τα υπόλοιπα ποσά κατάλληλα αν μεταβληθεί το πλήθος των εργατών. 'ρα τα ποσά αυτά είναι σχετιζόμενα σύμφωνα με τον ορισμό 2.*
*Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα χωράφι 40 στρεμμάτων για όργωμα. Επίσης, υποθέτουμε ότι ο κάθε εργάτης χρειάζεται 8 Ευρώ την ώρα ενώ ο οδηγός του κάθε τρακτέρ χρειάζεται 20 Ευρώ την ώρα. Πόσους εργάτες και πόσα τρακτέρ μας συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε για να οργώσουμε το χωράφι σε 8 ώρες περίπου;*
*Διαπιστώνουμε ότι το ποσό πλήθος εργατών είναι ανάλογο με τα στρέμματα και αντιστρόφως ανάλογο με τα υπόλοιπα δυο ποσά. Δηλαδή, το ποσό πλήθος εργατών είναι ανάλογο ως προς τα ποσά $\{$στρέμματα, $\frac{1}{\text{πλήθος τρακτέρ}}, \frac{1}{\text{ώρες εργασίας}}\}$. 'ρα ισχύει ότι (δες πρόταση 9)*

$$\frac{10}{x} = \frac{2}{40} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{y}{1}$$

*όπου $x$ είναι το πλήθος των εργατών και $y$ το πλήθος των τρακτέρ. Δηλαδή*

$$xy = 125$$

*Το πρόβλημα αυτό έχει τρεις πιθανές λύσεις. Να χρησιμοποιήσουμε 125 εργάτες και 1 τρακτέρ, 25 εργάτες και 5 τρακτέρ ή 125 τρακτέρ και 1 εργάτη. Για να δούμε τι μας συμφέρει αρκεί να υπολογίσουμε τα χρήματα που θα χρειαστούμε σε κάθε περίπτωση.*

*Στην πρώτη περίπτωση θα πληρώσουμε* $125 \cdot 8 \cdot 8 + 1 \cdot 20 \cdot 8 = 8.160$ *Ευρώ. Στην δεύτερη περίπτωση θα χρειαστούμε* $25 \cdot 8 \cdot 8 + 5 \cdot 20 \cdot 8 = 2.400$ *Ευρώ. Στην τρίτη περίπτωση θα χρειαστούμε* $1 \cdot 8 \cdot 8 + 125 \cdot 20 \cdot 8 = 20.064$ *Ευρώ. Είναι φανερό ότι μας συμφέρει να χρησιμοποιήσουμε 25 εργάτες και 5 τρακτέρ.* □

## 1.4 Ποσοστά - Μερισμός

### 1.4.1 Ποσοστά

**ΟΡΙΣΜΟΣ 11** (*i*) *Λέμε ότι το ποσό* $a^{(1)}$ *αποτελεί το* $a^{(2)}\%$ *(διαβάζεται* $a^{(2)}$ *τοις εκατό) του ποσού* $b^{(1)}$ *όταν* $a^{(1)} = \frac{a^{(2)}}{100} \cdot b^{(1)}$.

(*ii*) *Λέμε ότι το ποσό* $a^{(1)}$ *θα αυξηθεί κατά* $a^{(2)}\%$ *όταν η τελική του τιμή είναι ίση με* $b^{(1)} = a^{(1)} + \frac{a^{(2)}}{100} \cdot a^{(1)}$.

(*iii*) *Λέμε ότι το ποσό* $a^{(1)}$ *θα μειωθεί κατά* $a^{(2)}\%$ *όταν η τελική του τιμή είναι ίση με* $b^{(1)} = a^{(1)} - \frac{a^{(2)}}{100} \cdot a^{(1)}$.

**'ΣΚΗΣΗ 12** *Το κέρδος που αποκομίζει ένας έμπορος πουλώντας τα εμπορεύματά του είναι 14%. Αν πούλησε εμπορεύματα αξίας 26.000 Ευρώ πόσα είναι τα χρήματα που κέρδισε;*

**ΛΥΣΗ.** Το κέρδος του εμπόρου αποτελεί το 14% της αξίας των εμπορευμάτων (δες ορισμό 11(*i*)). Αυτό σημαίνει ότι είναι ίσο με $\frac{14}{100} \cdot 26.000 = 3.640$ Ευρώ. □

**'ΣΚΗΣΗ 13** *Το κράτος επιδοτεί την αγορά του πετρελαίου θέρμανσης σε φτωχές οικογένειες δίνοντας το 30% της αξίας. Μια οικογένεια εισέπραξε το ποσό των 170 Ευρώ από το κράτος ως επιδότηση πετρελαίου. Πόσα χρήματα κόστισε η αγορά του πετρελαίου;*

**ΛΥΣΗ.** Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε ότι η επιδότηση αποτελεί το 30% της αξίας του πετρελαίου (δες ορισμό 11(*i*)). Δηλαδή

$$170 = \frac{30}{100} \cdot b^{(1)}$$

όπου $b^{(1)}$ είναι η αξία του πετρελαίου. Λύνοντας ως προς $b^{(1)}$ προκύπτει ότι $b^{(1)} = 566,6666667$ Ευρώ. □

**'ΣΚΗΣΗ 14** *Έμπορος αγοράζει εμπορεύματα αξίας 12.400 Ευρώ και πουλώντας τα κερδίζει 500 Ευρώ. Ποιο είναι το ποσοστό των κερδών του;*

**ΛΥΣΗ.** Το κέρδος του αποτελεί το $a^{(2)}\%$ του συνολικού κεφαλαίου το οποίο είναι ίσο με $12.400 + 500 = 12.900$ Ευρώ (δες ορισμό 11(*i*)). 'ρα ισχύει ότι

$$500 = \frac{a^{(2)}}{100} \cdot 12.900$$

Προκύπτει ότι το ποσοστό κέρδους του είναι $a^{(2)}\% = 3.875968992\%$. □

**'ΣΚΗΣΗ 15** *Ένας επενδυτής αγόρασε μετοχές αξίας* 14.000 *Ευρώ τις οποίες πούλησε μετά από κάποιο χρονικό διάστημα στην τιμή των 18.500 Ευρώ. Ποιο είναι το ποσοστό της αύξησης των μετοχών; Ποιο είναι το ποσοστό των κερδών του επί της τελικής αξίας των μετοχών;*

**ΛΥΣΗ.** Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε μια αύξηση της αξίας των μετοχών και ψάχνουμε να βρούμε ποια είναι η επί τοις εκατό αύξηση (δες ορισμό $11(ii)$). Δηλαδή η αρχική τιμή είναι η $a^{(1)} = 14.000$, η τελική τιμή είναι η $b^{(1)} = 18.500$ και πρέπει να είναι ίση με $a^{(1)} + \frac{a^{(2)}}{100} \cdot a^{(1)}$. Δηλαδή πρέπει να ισχύει

$$18.500 = 14.000 \cdot \left(1 + \frac{a^{(2)}}{100}\right)$$

από το οποίο προκύπτει ότι $a^{(2)} \backsimeq 32,14$ ή αλλιώς η αύξηση είναι ίση με $32,14\%$ της αρχικής αξίας.
Τα κέρδη του επενδυτή είναι 4.500 Ευρώ. 'ρα αποτελούν το $a^{(2)}\%$ του τελικού ποσού των 18.500 Ευρώ το οποίο είναι τέτοιο ώστε

$$4.500 = \frac{a^{(2)}}{100} \cdot 18.500$$

Προκύπτει ότι $a^{(2)} = 24,32432432$ άρα το ποσοστό των κερδών του είναι ίσο με $24,32432432\%$. □

**'ΣΚΗΣΗ 16** *Έστω ότι ο Φ.Π.Α. για τις ηλεκτρικές συσκευές είναι το 23% της αρχικής αξίας. Μια τηλεόραση τελικής αξίας (μαζί με τον Φ.Π.Α. δηλαδή) κοστίζει 540 Ευρώ. Ποια είναι η αρχική αξία της τηλεόρασης; Ποιο είναι το ποσοστό του φόρου επί της τελικής αξίας;*

**ΛΥΣΗ.** Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε ότι η αρχική αξία $a^{(1)}$ θα αυξηθεί κατά $a^{(2)}\% = 23\%$ με τελική αξία την $b^{(1)} = 540$ Ευρώ (δες ορισμό $11(ii)$). Επομένως ισχύει ότι

$$540 = a^{(1)} + \frac{a^{(2)}}{100} \cdot a^{(1)}$$

Λύνοντας ως προς $a^{(1)}$ προκύπτει ότι η αρχική αξία της τηλεοράσεως είναι ίση με $a^{(1)} = 439,0243902$ Ευρώ.
Ο φόρος είναι η διαφορά της αρχικής αξίας από την τελική, δηλαδή $540 - 439,0243902 = 100,9756098$ Ευρώ. Το ποσό αυτό είναι το $\hat{a}^{(2)}\%$ του τελικού ποσού, δηλαδή ισχύει ότι

$$100,9756098 = \frac{\hat{a}^{(2)}}{100} \cdot 540$$

Λύνοντας ως προς $\hat{a}^{(2)}$ προκύπτει ότι ο φόρος αποτελεί το $18,69918700\%$ της τελικής αξίας της τηλεόρασης. □

**'ΣΚΗΣΗ 17** *Κατά την διάρκεια των εκπτώσεων ένα κατάστημα πουλά ηλεκτρικές συσκευές με έκπτωση 23%. Μια τηλεόραση αξίας 750 Ευρώ πόσο θα κοστίζει μετά την έκπτωση;*

**ΛΥΣΗ.** Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε μια μείωση του αρχικού ποσού κατά ενός δοσμένου ποσοστού (δες ορισμό $11(iii)$). 'ρα η τελική τιμή $b^{(1)}$ θα είναι ίση με $b^{(1)} = a^{(1)} - \frac{a^{(2)}}{100} \cdot a^{(1)}$ δηλαδή

$$b^{(1)} = 750 - \frac{23}{100} \cdot 750 = 577,5 \text{ Ευρώ}$$

□

**'ΣΚΗΣΗ 18** *Έμπορος πούλησε τα εμπορεύματά του με ζημία 18% (επί της αρχικής αξίας) και εισέπραξε 12.400 Ευρώ. Πόσα είναι τα χρήματα που ζημιώθηκε;*

**ΛΥΣΗ.** Το ποσό που έπρεπε να εισπράξει είναι το $a^{(1)}$ το οποίο λόγω μείωσης κατά $a^{(2)}\%$ έγινε $b^{(1)} = 12.400$ (δες ορισμό $11(iii)$). Επομένως ισχύει ότι

$$12.400 = a^{(1)} - \frac{a^{(2)}}{100} \cdot a^{(1)}$$

'ρα προκύπτει ότι $a^{(1)} = 15.121,95122$ Ευρώ. Επομένως τα χρήματα που έχασε είναι ίσα με $15.121,95122 - 12.400 = 2.721,95122$ Ευρώ.
Μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική αξία των εμπορευμάτων και ως εξής. Έστω ότι είναι ίση με $a^{(1)}$. Τότε, εφόσον τα πούλησε με ζημία 18% (επί της αρχικής αξίας) θα ισχύει ότι $a^{(1)} \cdot 0.82 = 12.400$. Λύνοντας ως προς $a^{(1)}$ προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα με πριν. □

### 1.4.2 Μερισμός

Έστω τα ποσά $a_1, \cdots, a_n$. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε ποσά $x_1, \cdots, x_n$ τέτοια ώστε

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}$$

και ταυτόχρονα $x_1 + \cdots + x_n = M$ όπου $M > 0$ δοσμένο. Ο αριθμός $M$ ονομάζεται **μεριστέος** και το παραπάνω πρόβλημα λέγεται **πρόβλημα μερισμού** του ποσού $M$ σε μέρη ανάλογα προς τους αριθμούς $a_1, \cdots, a_n$.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 19** *Έστω τα ποσά $x_1, x_2, \cdots, x_n$ και $a_1, a_2, \cdots, a_n$ τέτοια ώστε*

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}$$

*Τότε ισχύει ότι*

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

*και $x_i = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} \cdot a_i$ για $i = 1, \cdots, n$.*

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Από την σχέση

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n}$$

προκύπτει ότι υπάρχει μια σταθερά $\lambda$ (ανεξάρτητη των ποσών $x_1, \cdots, x_n$ και $a_1, \cdots, a_n$) τέτοια ώστε

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \cdots = \frac{x_n}{a_n} = \lambda$$

Δηλαδή, $x_1 = \lambda a_1$ και γενικότερα $x_k = \lambda a_k$ για $k = 1, \cdots, n$. Επομένως

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \frac{\lambda a_1 + \lambda a_2 + \cdots + \lambda a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = \lambda$$

Επομένως αποδείξαμε την ζητούμενη ισότητα. □

Στο επόμενο παράδειγμα θα συσχετίσουμε το πρόβλημα του μερισμού σε μέρη ανάλογα με την έννοια του ποσοστού.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 20 (Μερισμός και Ποσοστά)** *Ας υποθέσουμε ότι 4 άνθρωποι συνεργάζονται στην σύσταση μιας εταιρείας. Η εταιρεία αυτή χρειάζεται το ποσό των 150.000 Ευρώ ως αρχικό κεφάλαιο. Ο κάθε ένας από τους 4 συνεργάτες μπορεί να συνεισφέρει διαφορετικό ποσό ανάλογα με τις οικονομικές του δυνατότητες. Ο πρώτος μπορεί να συνεισφέρει το ποσό των 30.000 Ευρώ, ο δεύτερος το ποσό των 40.000 Ευρώ ο τρίτος το ποσό των 50.000 Ευρώ και ο τέταρτος το ποσό των 30.000 Ευρώ. Από τα παραπάνω προκύπτει εύκολα ότι ο πρώτος κατέχει το* $20\%$ *της εταιρείας, ο δεύτερος το* $\frac{80}{3}\%$*, ο τρίτος το* $\frac{100}{3}\%$ *και ο τέταρτος το* $20\%$*. Αυτό σημαίνει ότι οποιοδήποτε μελλοντικό κέρδος ή ζημία στο μέλλον θα πρέπει να χωριστεί ανάλογα με τα παραπάνω ποσοστά.*
*Ας υποθέσουμε ότι μετά από ένα χρόνο η εταιρεία έχει αποδώσει 25.000 Ευρώ ως καθαρό κέρδος. Οι 4 συνεργάτες αποφασίζουν να το μοιραστούν. Ο πρώτος θα πάρει το* $20\%$ *των κερδών το οποίο είναι ίσο με 5.000 Ευρώ, ο δεύτερος το* $\frac{80}{3}\%$ *το οποίο είναι ίσο με 6.666,666667 Ευρώ, ο τρίτος το* $\frac{100}{3}\%$ *το οποίο είναι ίσο με 8.333,333333 Ευρώ και ο τέταρτος το* $20\%$ *των κερδών το οποίο είναι ίσο με 5.000 Ευρώ.*
*Διαπιστώνουμε ότι το ποσό των 25.000 Ευρώ διαμερίστηκε σε τέσσερα ποσά ανάλογα με τα ποσοστά του κάθε συνεργάτη, δηλαδή* $25.000 = 5.000 + 6.666,666667 + 8.333,333333 + 5.000$. *Παρατηρούμε ότι αν* $\lambda = \frac{25.000}{150.000} = \frac{1}{6}$ *τότε* $5.000 = \lambda \cdot 30.000$, $6.666,666667 = \lambda \cdot 40.000$, $8.333,3333 = \lambda \cdot 50.000$ *και* $5.000 = \lambda \cdot 30.000$. *Αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα εύρεσης του κάθε ποσού που αντιστοιχεί στον κάθε ένα ανάγεται στον μερισμό του ποσού σε ποσά ανάλογα προς τα ποσά που έχει συνεισφέρει ο καθένας για την σύσταση της εταιρείας.* □

**'ΣΚΗΣΗ 21** *Ένας φιλανθρωπικός σύλλογος σκοπεύει να δώσει το ποσό των 50.000 Ευρώ σε τέσσερις φτωχές οικογένειες. Ο τρόπος ο οποίος θα μοιραστούν τα χρήματα* *εξαρτάται (και είναι ανάλογο) από το πλήθος των παιδιών της κάθε οικογένειας. Η πρώτη οικογένεια έχει 2 παιδιά, η δεύτερη έχει 3, η τρίτη 4 παιδιά και η τέταρτη 6 παιδιά. Να υπολογισθεί το ποσό που θα πάρει η κάθε οικογένεια.*

**ΛΥΣΗ.** Όπως έχουμε αναφέρει το πρόβλημα ανάγεται στον μερισμό του ποσού των 50.000 Ευρώ σε μέρη ανάλογα προς τα ποσά 2,3,4,6. Δηλαδή πρέπει να χωρίσουμε το ποσό των 50.000 σε ποσά $x_1, x_2, x_3, x_4$ τέτοια ώστε $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50.000$ και ταυτόχρονα

$$\frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{4} = \frac{x_4}{6}$$

Θέτοντας $\lambda = \frac{50.000}{2+3+4+6} = \frac{10.000}{3}$ τότε προκύπτει ότι $x_1 = \lambda \cdot 2 = \frac{20.000}{3}$, $x_2 = \lambda \cdot 3 = 10.000$, $x_3 = \lambda \cdot 4 = \frac{40.000}{3}$ και $x_3 = \lambda \cdot 6 = 20.000$. □

# Κεφάλαιο 2

# Παραγωγικό Κεφάλαιο και Χρήμα

## 2.1 Ανταλλαγή Αγαθών-Χρήμα

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με την ανταλλαγή αγαθών και ως εκ τούτου με το **χρήμα** το οποίο είναι ένα ανταλλακτικό μέσο. Η μονάδα μετρήσεως του χρήματος θα ονομάζεται **νομισματική μονάδα**. Το χρήμα είναι στην πραγματικότητα ένα **εικονικό** αγαθό όπως και η χρήση πλαστικού χρήματος. Αυτό καθ΄ αυτό δεν έχει καμία χρησιμότητα αλλά ανταλλάσσεται με οποιοδήποτε άλλο αγαθό. Ας το εξηγήσουμε λιγάκι παρακάτω. Σε παλαιότερους χρόνους η ανταλλαγή αγαθών γίνονταν απλά ανταλλάσσοντας π.χ. σιτάρι με κρέας κ.τ.λ. Ένας γεωργός μπορεί να ανταλλάξει μέρος της σοδειάς του με λίγο κρέας από έναν κυνηγό ή έναν κτηνοτρόφο. Και στους δυο είναι χρήσιμη και αναγκαία αυτή η ανταλλαγή. Το πως θα πραγματοποιηθεί η ανταλλαγή αυτή, δηλαδή πόσο σιτάρι για ένα κιλό κρέας, αφορά τους δυο ενδιαφερόμενους και εξαρτάται από τις εναλλακτικές λύσεις που υπάρχουν. Αν δηλαδή στην περιοχή βρίσκονται πολλοί κτηνοτρόφοι τότε το κρέας θα έχει χαμηλή αξία σε σχέση με το σιτάρι. Όμως, υπάρχουν και άνθρωποι οι οποίοι δεν είναι κτηνοτρόφοι ούτε γεωργοί για να έχουν στην κατοχή τους κάποιο αγαθό για ανταλλαγή όπως ο δάσκαλος του χωριού. Σε αυτές τις περιπτώσεις ήταν συνηθισμένο να δίνουν γάλα, αυγά, κρέας, ψωμί και ότι άλλο είχαν οι κάτοικοι στην κατοχή τους. Όμως, η ανταλλαγή δεν ήταν αρκετή σε πολλές περιπτώσεις. Έπρεπε να βρεθεί ένα «αγαθό» το οποίο να είναι αναγνωρίσιμο από όλους και ταυτόχρονα αναλλοίωτο στον χρόνο. Το κρέας, το γάλα κ.τ.λ. αν δεν καταναλωθεί σύντομα χάνει την αξία του. Από την άλλη μεριά όμως τα μέταλλα (π.χ. διάφορα μεταλλικά εργαλεία) δεν χάνουν την αξία τους και με κατάλληλη συντήρηση διατηρούνται για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Με αυτό τον τρόπο μπορείς να «αποταμιεύσεις» τέτοια αγαθά για δύσκολες περιπτώσεις όπως η ξηρασία, οι αρρώστιες των ζώων κ.τ.λ. Με το καιρό αυτά έγιναν απλά μέταλλα ή ακόμη και χαρτί χωρίς να έχουν αυτά καθ΄ αυτά κάποια χρησιμότητα αλλά συμφωνούσαν όλοι ότι έχουν μια ανταλλακτική δύναμη και συνάμα «αποταμιευτικές» ικανότητες.

Περίπου έτσι διαμορφώθηκε η έννοια του χρήματος. Με το καιρό δημιουργήθηκαν πολύπλοκοι μηχανισμοί (καθώς και περίεργοι με την πρώτη ματιά) όπως αυτός της **ισοτιμίας** δυο νομισμάτων. Το νόμισμα του εκάστοτε κράτους αντικατοπτρίζει κατ΄ κάποιον τρόπο την οικονομική του ευμάρεια και κατ΄ επέκταση μπορεί να είναι πολυτιμότερο από αυτό ενός άλλου κράτους παρόλο που και τα δυο είναι στην πραγματικότητα ένα κομμάτι χαρτί! Προσπαθήστε να εξηγήσετε για ποιο λόγο το δολάριο δεν έχει την ίδια αγοραστική δύναμη με το Ευρώ. Θα διαπιστώσετε ότι δεν είναι καθόλου εύκολο να εξηγήσετε ένα τέτοιο φαινόμενο χωρίς να μελετήσετε (αρκετά) την κατασκευή και τις ιδιότητες της παγκόσμιας οικονομίας. Σε αυτό το βιβλίο δεν θα ασχοληθούμε με τέτοια θέματα αλλά το ενδιαφέρον μας είναι περισσότερο η μαθηματική επεξεργασία χρηματοοικονομικών φαινομένων.

## 2.2 Παραγωγικό Κεφάλαιο

**ΟΡΙΣΜΟΣ 22** ***Παραγωγικό*** *κεφάλαιο θα λέμε ένα αγαθό το οποίο μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα ούτως ώστε να μας αποδώσει κέρδος και ταυτόχρονα εκφράζεται σε νομισματικές μονάδες.*

Ένα συγκεκριμένο ποσό χρημάτων φυλαγμένο σε χρηματοκιβώτιο δεν είναι παραγωγικό ενώ ένα (ενεργό) τρακτέρ είναι παραγωγικό κεφάλαιο για έναν αγρότη. Με αυτό οργώνει το χωράφι του το οποίο παράγει επιπλέον αγαθά.

Ένας διαδεδομένος τρόπος να γίνει ένα κεφάλαιο παραγωγικό είναι ο **δανεισμός**. Ας υποθέσουμε ότι ένας επιχειρηματίας χρειάζεται χρήματα (τα οποία δεν έχει την προκειμένη στιγμή) για να εισάγει πρώτες ύλες. Έτσι, δανείζεται χρήματα (π.χ. από τράπεζα), εισάγει τις πρώτες ύλες που τον ενδιαφέρουν και κατασκευάζει ένα προϊόν, π.χ. αυτοκίνητα. Στην συνέχεια, αν οι υπολογισμοί που είχε κάνει είναι σωστοί, πουλώντας τα αυτοκίνητα αυτά κερδίζει περισσότερα χρήματα από ότι είχε δανειστεί επιστρέφοντας έτσι το ποσό που δανείσθηκε. Στην πραγματικότητα, θα επιστρέψει περισσότερα χρήματα από ότι είχε δανεισθεί. Για ποιο λόγο γίνεται αυτό; Ο δανειστής έχει συνήθως την δυνατότητα να δανείσει τα χρήματά του και σε άλλον ενδιαφερόμενο. Δυο παράμετροι είναι σημαντικοί για να αποφασίσει σε ποιον θα δανείσει. Η μια παράμετρος είναι η ασφάλεια, η σιγουριά δηλαδή επιστροφής του ποσού. Πολλές φορές επιχειρηματίες χρεοκόπησαν κάνοντας λανθασμένες επιλογές με δανεισμένα χρήματα τα οποία δεν επέστρεψαν ποτέ. Ένας επιχειρηματίας ο οποίος κατά το παρελθόν έχει επιδείξει σημαντικές επιχειρηματικές ικανότητες θεωρείται πιο ασφαλής για δανεισμό. Η δεύτερη παράμετρος είναι το ποσό που θα επιστρέψει ο δανειζόμενος. Προφανώς θα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από αυτό που είχε δανεισθεί. Γιατί όμως πρέπει να συμβαίνει αυτό; Διότι πάντοτε υπάρχει η πιθανότητα χρεοκοπίας και δεν έχει νόημα να δανείσεις κάποιον (αφού υπάρχει κίνδυνος) χωρίς κάποιο κέρδος. Ο κίνδυνος λοιπόν χρεοκοπίας καθορίζει κατά κάποιον τρόπο (και είναι ανάλογος με) το κέρδος του δανεισμού το οποίο είναι προσυμφωνημένο μεταξύ των δυο μερών. Όμως υπάρχουν και άλλοι επιχειρηματίες που χρειάζονται δανεικά άρα κατά κάποιο τρόπο θα δανείσει σε αυτόν που θα επιστρέψει περισσότερα. Οι δυο αυτοί παράμετροι (σιγουριά και κέρδος) είναι αυτοί που θα καθορίσουν σε ποιον τελικά θα δανείσει τα χρήματά του ο δανειστής.

Συνήθως δανείζουμε χρήματα διότι αυτά ανταλλάσσονται στην συνέχεια με οτιδήποτε μας ενδιαφέρει. Όμως ένας αγρότης μπορεί να δανειστεί κατάλληλο όχημα για τις αγροτικές εργασίες του και επομένως σε αυτή την περίπτωση το όχημα αποτελεί παραγωγικό αγαθό για τον κάτοχο του (τον δανειστή) μιας και θα του επιφέρει προσυμφωνημένο κέρδος.

## 2.3 Τόκος

**ΟΡΙΣΜΟΣ 23** *Θα ονομάζουμε* **τόκο** *ενός κεφαλαίου σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα την αύξηση του κεφαλαίου η οποία προέρχεται από την παραγωγική του ικανότητα. Δεχόμαστε ότι ο τόκος ενός κεφαλαίου είναι ανάλογος τόσο με το ύψος του κεφαλαίου όσο και με τον τον χρόνο δανεισμού.*

Υποθέστε ότι ο Α δανείζει 100 Ευρώ στον Β για ένα έτος. Η συμφωνία είναι ο Β μετά το τέλος του έτους να επιστρέψει στον Α το ποσό των 100 Ευρώ και επιπλέον 10 Ευρώ. Λέμε σε αυτή την περίπτωση ότι ο τόκος που έχει καταβληθεί είναι το 10% του αρχικού ποσού ή αλλιώς $X \cdot \frac{10}{100}$.
Αν συμβολίσουμε με $I$ (interest) τον τόκο που δίνει ένα κεφάλαιο μετά από $t$ χρονικές μονάδες τότε το άθροισμα $K+I$ (όπου $K$ είναι το κεφάλαιο) θα ονομάζεται η **τελική αξία** του κεφαλαίου και θα συμβολίζεται με $K_t$. Η ενσωμάτωση του τόκου στο αρχικό κεφάλαιο ονομάζεται **κεφαλαιοποίηση**.

## 2.4 Χρόνος

Όπως είδαμε ο χρόνος είναι ιδιαίτερα σημαντικός στους υπολογισμούς. Για ευκολία μπορούμε να θεωρούμε ότι το έτος έχει 360 ημέρες και ο κάθε μήνας 30 ημέρες. Σε αυτή την περίπτωση το έτος καλείται **εμπορικό έτος**. Μερικές χώρες χρησιμοποιούν αυτό τον τρόπο μέτρησης. Ένας άλλος τρόπος μέτρησης είναι να υπολογίζουμε τις ημέρες του κάθε μήνα όπως πραγματικά είναι, δηλαδή 28 ή 29 για τον Φεβρουάριο και 30 ή 31 για τους άλλους μήνες. Σε αυτή την περίπτωση ονομάζεται **πολιτικό έτος** και ο χρόνος θα έχει είτε 365 είτε 366 ημέρες. Ένας τρίτος τρόπος είναι εφαρμόζοντας το λεγόμενο **μικτό έτος** στο οποίο υπολογίζουμε τις ημέρες του μήνα όπως πραγματικά είναι (όπως στο πολιτικό έτος) αλλά υποθέτουμε για ευκολία ότι ο χρόνος έχει 360 ημέρες. Σε αυτό το βιβλίο θα εργαζόμαστε για ευκολία εφαρμόζοντας το εμπορικό έτος όπου υποθέτουμε ότι οι μήνες έχουν 30 ημέρες και ο χρόνος 360 ημέρες.
Όπως εξηγήσαμε νωρίτερα το χρήμα και ο χρόνος είναι στενά συνδεδεμένα. Κατά το πέρασμα του χρόνου μια νομισματική μονάδα έχει διαφορετική αξία. Εύκολα βλέπουμε ότι με ένα Ευρώ σήμερα αγοράζουμε (περισσότερα ή λιγότερα) από ότι με ένα Ευρώ σε ένα χρόνο. Οι αξίες των προϊόντων αλλάζουν σχεδόν καθημερινά με συνέπεια το ίδιο ποσό χρημάτων συχνά να μην είναι αρκετό για την αγορά ενός είδους.

Ένας τρόπος για να δούμε την **σχέση χρόνου-χρήματος** είναι μέσω του τόκου δανεισμού. Ένα χρηματικό ποσό $K$ θα έχει αξία $K + I$ μετά από ένα χρονικό διάστημα κατά το οποίο δανείστηκε. Τα δυο αυτά ποσά λέγεται ότι είναι **οικονομικά ισοδύναμα** μιας και αφορούν το ίδιο ποσό $K$ τοκισμένο σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο.

## 2.5 Επιτόκιο

Για τον υπολογισμό του τόκου ενός κεφαλαίου χρήσιμη είναι η έννοια του επιτοκίου.

Σχήμα 2.1

**ΟΡΙΣΜΟΣ 24** *Ορίζουμε ως* ***επιτόκιο*** *τον τόκο μιας νομισματικής μονάδας (π.χ. ένα Ευρώ) για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο (π.χ ένα έτος) και το συμβολίζουμε με* $i$.

Έστω ότι ο Α δανείζει 100 Ευρώ στον Β για ένα έτος με επιτόκιο $i = 10\%$. Αυτό σημαίνει ότι κάθε Ευρώ αποδίδει τόκο 10 λεπτά του Ευρώ σε ένα χρόνο και επομένως τα 100 Ευρώ αποδίδουν 10 Ευρώ σε ένα χρόνο. Έτσι σε ένα χρόνο ο Β θα επιστρέψει $100 \cdot (1 + i)$ Ευρώ στον Α. Αν ο Α δανείσει το ποσό αυτό για δυο χρόνια τότε ο Β μπορεί να δώσει τον τόκο που αντιστοιχεί στον πρώτο χρόνο στον Α ή μπορεί και όχι. Στην τελευταία αυτή περίπτωση ο τόκος του πρώτου έτους θα αποδώσει και αυτός με τη σειρά του επιπλέον χρήματα στο δεύτερο έτος. Επομένως υπάρχει μεγάλη διαφορά στο αν αποδίδονται στον δανειστή οι τόκοι στο τέλος της κάθε περιόδου ή όχι.
Σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτουν οι δυο επόμενοι ορισμοί.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 25** *Θα λέμε ότι έχουμε* ***απλή κεφαλαιοποίηση*** *όταν η ενσωμάτωση του τόκου στο δανεισμένο κεφάλαιο γίνεται μόνο μια φορά στο τέλος της χρονικής περιόδου του δανεισμού.*

**ΟΡΙΣΜΟΣ 26** *Το σύστημα κεφαλαιοποίησης του τόκου όπου αυτός συμπεριλαμβάνεται στο κεφάλαιο σε τακτά χρονικά υποδιαστήματα του συνολικού χρόνου δανεισμού ονομάζεται* ***σύνθετη κεφαλαιοποίηση*** *ή* ***ανατοκισμός****.*

# Κεφάλαιο 3

# Απλή Κεφαλαιοποίηση

Αν ο Α δανείσει στον Β ένα ποσό Χ με ετήσιο επιτόκιο $i$ για ένα χρόνο τότε ο Β θα επιστρέψει $X \cdot (1 + i)$ στον Α στο τέλος του χρόνου. Έτσι σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι $I = X \cdot i$ δηλαδή ο τόκος του ποσού $X$ σε έναν χρόνο είναι το γινόμενο του ποσού αυτού επί το επιτόκιο. Αν ο Α δανείσει στον Β το ποσό $X$ για $n$ χρόνια με απλή κεφαλαιοποίηση τότε ο τόκος σε κάθε χρόνο θα είναι όπως είπαμε $I = X \cdot i$ άρα ο τόκος μετά από την πάροδο $n$ ετών θα είναι $X \cdot i \cdot n$ και επομένως το τελικό κεφάλαιο θα είναι

$$X_n = X + X \cdot i \cdot n = X \cdot (1 + n \cdot i)$$

Σημειώστε ότι στο τέλος του κάθε έτους υποθέτουμε ότι ο $B$ προσδίδει τον τόκο στον $A$ και δεν τον κρατά για αυτό τον λόγο το ονομάζουμε **απλό τόκο**. Στην περίπτωση που ο τόκος του κάθε έτους δεν αποδίδεται στον Α τότε το ποσό αυτό θεωρείται ως ποσό που δανείσθηκε στον Β και επομένως θα πρέπει να τοκισθεί και αυτό με την σειρά του. Την περίπτωση αυτή θα την εξετάσουμε αργότερα.

Σχήμα 3.1: Το τελικό κεφάλαιο είναι ανάλογο του χρόνου τοκισμού

**'ΣΚΗΣΗ 27** *Να υπολογισθεί ο τόκος του κεφαλαίου 5.000 Ευρώ το οποίο τοκίζϵται μϵ ϵτήσιο ϵπιτόκιο 6% για πέντϵ έτη.*

**ΛΥΣΗ.** Σύμφωνα με την εξίσωση απλού τόκου θα έχουμε

$$I = 5.000 \cdot 5 \cdot 0.06 = 1.500$$

Σημειώστε ότι στον τύπο αντικαθιστούμε όπου το $i$ όχι 6% αλλά $\frac{6}{100} = 0.06$. □

## 3.1 Ονομαστικά Επιτόκια και η Εξίσωση Απλού Τόκου

**ΟΡΙΣΜΟΣ 28** *Έστω $i$ το επιτόκιο το οποίο αναφέρεται σϵ μια χρονική μονάδα $t$ και ας υποθέσουμϵ ότι έχουμϵ τα ϵπιτόκια $i_1, i_2$ που αναφέρονται σϵ άλλϵς χρονικές μονάδες, $t_1 = \frac{t}{n}, t_2 = mt$, $n, m \in \mathbb{N}$. Τα ϵπιτόκια αυτά θα ονομάζονται* **ονομαστικά** *ϵπιτόκια του $i$ για τις αντίστοιχϵς χρονικές μονάδϵς $t_1, t_2$ όταν $\frac{i}{i_1} = \frac{t}{t_1}, \frac{i}{i_2} = \frac{t}{t_2}$.*

Υποθέτοντας ότι έχουμε ετήσιο επιτόκιο $i = 10\%$ τότε το ονομαστικό επιτόκιο εξαμήνου θα είναι $i_1 = \frac{i}{2}$ ενώ αν το τριμηνιαίο επιτόκιο είναι $i = 3\%$ τότε το ονομαστικό ετήσιο επιτόκιο θα είναι $i_1 = i \cdot 4$ (καθότι το έτος αποτελείται από 4 τρίμηνα).
Τα ονομαστικά επιτόκια είναι χρήσιμα στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε τον τόκο για ένα ποσό που τοκίστηκε με επιτόκιο $i$ ανά μονάδα χρόνου (π.χ. ετήσιο επιτόκιο, μηνιαίο επιτόκιο, ημερήσιο επιτόκιο κ.τ.λ.) αλλά ο χρόνος τοκισμού είναι κλάσμα της μονάδας αυτής χρόνου.
Σε αυτή την περίπτωση η εξίσωση απλού τόκου θα είναι

$$X_t = X \cdot (1 + i^{'})$$

όπου $i^{'}$ είναι το ονομαστικό επιτόκιο της περιόδου τοκισμού δεδομένου ότι έχουμε δεχθεί ότι ο τόκος είναι ανάλογος του χρόνου δανεισμού.
Αν το επιτόκιο αναφέρεται σε $k$ χρονικές μονάδες (π.χ. ημέρες, μήνες κ.τ.λ.) και η περίοδος τοκισμού είναι $m$ φορές (όχι κατ΄ ανάγκη ακέραιο πολλαπλάσιο, δηλαδή μπορεί $m \in \mathbb{R}_+$) την χρονική μονάδα $k$ τότε χρησιμοποιώντας την έννοια του ονομαστικού επιτοκίου φτάνουμε στην γενικότερη δυνατή εξίσωση απλού τόκου η οποία είναι

$$X_{\text{τελικό}} = X \cdot (1 + m \cdot i), \quad (\texttt{εξίσωση απλού τόκου}), m \in \mathbb{R}^+ \tag{3.1}$$

όπου $i$ είναι το επιτόκιο για την χρονική μονάδα $k$ και $m$ είναι η χρονική περίοδος τοκισμού υπολογισμένη σε πολλαπλάσια (όχι ακέραια κατ΄ ανάγκη) της χρονικής μονάδας $k$.

**Παραδειγμα 29** *Έστω ότι ο $A$ δάνεισε το ποσό $X$ στον $B$ με ετήσιο (απλό) επιτόκιο $i$ και ο $B$ επέστρεψε το δάνειο σε 4 μήνες. Ποιος είναι ο τόκος που οφείλει ο $B$ στον $A$;*
*Αν το ποσό το επέστρεφε στο τέλος του έτους τότε ο τόκος θα αφορούσε όλο το έτος και επομένως θα ήταν $I = X \cdot i$. Στην περίπτωση μας όμως τα δανεικά επεστράφησαν νωρίτερα, όταν πέρασαν 4 μήνες. Σε αυτή την περίπτωση υπολογίζουμε το ονομαστικό επιτόκιο 4μήνου το οποίο είναι $i_1 = \frac{i}{3}$. Επομένως ο τόκος θα είναι $I_1 = X \cdot i_1 = X \cdot \frac{i}{3}$. Παρόμοια, αν το δανεισμένο κεφάλαιο επιστραφεί σε $m$ μέρες τότε υπολογίζουμε το ονομαστικό επιτόκιο της μιας ημέρας το οποίο είναι $i_2 = \frac{i}{360}$. Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον τόκο για τις $m$ ημέρες χρησιμοποιώντας την εξίσωση απλού τόκου, δηλαδή*

$$I_2 = X \cdot (1 + m \cdot i_2) - X$$

*Εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξίσωση απλού τόκου όπως περιγράψαμε νωρίτερα. Εφόσον το επιτόκιο είναι ετήσιο τότε ο χρόνος τοκισμού είναι $m = \frac{4}{12}$. Σύμφωνα με την εξίσωση απλού τόκου θα έχουμε ότι το τελικό κεφάλαιο είναι $X_t = X \cdot (1 + m \cdot i) = X \cdot \left(1 + \frac{4}{12} \cdot i\right)$. Στην συνέχεια, για να υπολογίσουμε τον τόκο* *αφαιρούμε το αρχικό κεφάλαιο από το τελικό, άρα* $I = X \cdot \left(1 + \frac{4}{12} \cdot i\right) - X = X \cdot \frac{i}{3}$ *το οποίο βεβαίως συμπίπτει με το αποτέλεσμα που υπολογίσαμε με την χρήση των ονομαστικών επιτοκίων.*

**'ΣΚΗΣΗ 30** *Να υπολογισθεί ο τόκος του κεφαλαίου 3.000 Ευρώ το οποίο τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 4% για 7 μήνες.*

**ΛΥΣΗ.** Εδώ μας δίνεται ετήσιο επιτόκιο αλλά το κεφάλαιο τοκίζεται για λιγότερο από έτος, συγκεκριμένα για 7 μήνες. Χρησιμοποιώντας την έννοια του ονομαστικού επιτοκίου θα υπολογίσουμε το ονομαστικό επιτόκιο του μήνα και στην συνέχεια θα βρούμε τον τόκο που αντιστοιχεί στους 7 μήνες.
Το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο είναι

$$i_1 = \frac{i}{12} = \frac{\frac{4}{100}}{12} = \frac{4}{1200}$$

Συνεπώς ο ζητούμενος τόκος είναι

$$I = 3.000 \cdot 7 \cdot \frac{4}{1200} = 70$$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρούμε εφαρμόζοντας την εξίσωση απλού τόκου και αντικαθιστώντας το $m = \frac{7}{12}$. □

**'ΣΚΗΣΗ 31** *Με ποιο ετήσιο επιτόκιο* $i$ *τοκίστηκε κεφάλαιο 3.000 Ευρώ για πέντε έτη και έδωσε τόκο 100 Ευρώ;*

**ΛΥΣΗ.** Σε αυτή την άσκηση μας δίνονται ο τόκος, το κεφάλαιο και ο χρόνος και μας ζητείται το επιτόκιο. Δηλαδή πάλι θα εφαρμόσουμε την ισότητα

$$I = X \cdot n \cdot i$$

αντικαθιστώντας τα γνωστά, δηλαδή $I = 100$, $X = 3.000$ και $n = 5$. Λύνουμε ως προς $i$ και έχουμε

$$i = \frac{I}{X \cdot n} = \frac{100}{3.000 \cdot 5} \simeq 0.0067$$

□

**'ΣΚΗΣΗ 32** *Με ποιο ετήσιο επιτόκιο τοκίστηκε κεφάλαιο 3.000 Ευρώ για 5 χρόνια και το τελικό ποσό ήταν 3.500 Ευρώ;*

**ΛΥΣΗ.** Θα εργαστούμε όπως προηγούμενα. Για το λόγο αυτό θα υπολογίσουμε τον τόκο ο οποίος είναι η διαφορά του τελικού κεφαλαίου από το αρχικό. Δηλαδή έχουμε ότι $I = 500$ Ευρώ. Στην συνέχεια υπολογίζουμε το επιτόκιο αντικαθιστώντας στον τύπο

$$i = \frac{I}{X \cdot n} = \frac{500}{3.000 \cdot 5} \simeq 0.03$$

□

**'ΣΚΗΣΗ 33** *Με ποιο ετήσιο επιτόκιο πρέπει να τοκίσουμε τα χρήματά μας έτσι ώστε να διπλασιαστούν μετά από 10 χρόνια;*

**ΛΥΣΗ.** Αν το κεφάλαιο μας είναι ίσο με $X$ τότε το τελικό κεφάλαιο μετά από 10 χρόνια θα είναι $X_{10} = 2X$ άρα χρησιμοποιώντας την εξίσωση απλού τόκου έχουμε ότι

$$X_{10} = X \cdot (1 + i \cdot 10)$$

Αντικαθιστώντας έχουμε ότι

$$2 \cdot X = X \cdot (1 + i \cdot 10)$$

Λύνοντας ως προς $i$ προκύπτει ότι $i = 0.1$ ή αλλιώς το επιτόκιο πρέπει να είναι 10%. Σημειώστε ότι αυτό ισχύει για οποιοδήποτε ποσό $X$. □

**'ΣΚΗΣΗ 34** *Πόσο χρόνο πρέπει να τοκίσουμε ένα κεφάλαιο 3.000 Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 6% για να έχει τελική αξία 3.500 Ευρώ;*

**ΛΥΣΗ.** Εφαρμόζουμε την εξίσωση απλού τόκου 3.1 και έχουμε

$$3.500 = 3.000 \cdot (1 + m \cdot 0.06)$$

Λύνοντας ως προς το $m$ βρίσκουμε ότι $m \backsimeq 2.77$ έτη. □

**'ΣΚΗΣΗ 35** *Πόσα χρόνια πρέπει να τοκισθεί κεφάλαιο με ετήσιο επιτόκιο 3% έτσι ώστε να διπλασιαστεί;*

**ΛΥΣΗ.** Αν το αρχικό ποσό είναι το $X$ τότε το τελικό θέλουμε να είναι το $2 \cdot X$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση απλού τόκου και έχουμε

$$2 \cdot X = X \cdot (1 + m \cdot 0.03)$$

Λύνοντας ως προς το $m$ βρίσκουμε ότι $m \backsimeq 33.3$ χρόνια. □

**'ΣΚΗΣΗ 36** *Έστω ότι κεφάλαιο 3.000 Ευρώ τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 3% για 3 χρόνια, 5 μήνες και 20 ημέρες. Ποιο θα είναι το τελικό κεφάλαιο;*

**ΛΥΣΗ.** Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση απλού τόκου. Για να το κάνουμε αυτό πρέπει να υπολογίσουμε το $m$. Εδώ η χρονική μονάδα είναι το έτος ενώ η περίοδος τοκισμού είναι τα 3 χρόνια, 5 μήνες και 20 ημέρες. Επομένως πρέπει να μετατρέψουμε την περίοδο αυτή σε πολλαπλάσιο του έτους το οποίο εδώ δεν θα είναι ακέραιο. Οι 5 μήνες είναι το κλάσμα $\frac{5}{12}$ ενώ οι 20 ημέρες είναι το κλάσμα $\frac{20}{360}$. Επομένως η περίοδος τοκισμού είναι $m = 3 + \frac{5}{12} + \frac{20}{360} = \frac{125}{36}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση απλού τόκου έχουμε

$$X_t = 3.000 \cdot \left(1 + \frac{125}{36} \cdot 0.03\right) \backsimeq 3312.5$$

□

## 3.2 Μέσο Επιτόκιο και Μέσος Χρόνος Τοκισμού

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε το εξής πρόβλημα. Έστω ότι έχω δυο κεφάλαια τα οποία τα τοκίζω με ετήσια επιτόκια $i_1, i_2$. Το πρώτο κεφάλαιο το τοκίζω για 2 χρόνια με ετήσιο επιτόκιο $i_1$ ενώ το δεύτερο για 3 χρόνια και 5 μήνες με ετήσιο επιτόκιο $i_2$. Στο τέλος των 3 χρόνων και 5 μηνών θα έχω δυο ποσά που θα προέρχονται από τόκους, τα $I_1$ και $I_2$. Προκύπτει λοιπόν το ερώτημα: Ποιο είναι το επιτόκιο εκείνο με το οποίο θα μπορούσα να τοκίσω τα ίδια ποσά για τα ίδια χρονικά διαστήματα με πριν και να μου αποδώσουν τον ίδιο συνολικά τόκο στο τέλος; Αυτό το επιτόκιο θα το ονομάζουμε **μέσο επιτόκιο**. Έτσι, αν τοκίζουμε τα χρήματα μας σε πολλές διαφορετικές τράπεζες οι οποίες εφαρμόζουν διαφορετικά επιτόκια, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε ποιο είναι το μέσο επιτόκιο. Με αυτό τον τρόπο έχουμε μια καλύτερη εικόνα για τα κεφάλαια μας όταν έχουμε το μέσο επιτόκιο ως δείκτη αναφοράς.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 37 (Μέσο Επιτόκιο)** *Έστω τα κεφάλαια $K_1, K_2, \cdots, K_n$ τα οποία τοκίζονται με επιτόκια $i_1, \cdots, i_n$ τα οποία αναφέρονται στην ίδια χρονική περίοδο τοκισμού (π.χ. είναι όλα ετήσια). Αν τα κεφάλαια τοκίζονται για τους χρόνους $t_1, \cdots, t_n$ τότε συμβολίζουμε με $K_1^{t_1,i_1}, \cdots, K_n^{t_n,i_n}$ τις τελικές αξίες των κεφαλαίων. Θα ονομάζουμε **μέσο επιτόκιο** το επιτόκιο $i$ που είναι τέτοιο ώστε όταν τοκιστούν με αυτό τα κεφάλαια $K_1, K_2, \cdots, K_n$ για $t_1, \cdots, t_n$ χρονικές μονάδες τότε το άθροισμα των τελικών αξιών, δηλαδή $K_1^{t_1,i} + \cdots + K_n^{t_n,i}$, να είναι ίσο με $K_1^{t_1,i_1} + \cdots + K_n^{t_n,i_n}$.*

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 38** *Ας θεωρήσουμε ότι τα κεφάλαια $K_1, \cdots, K_n$ τοκίζονται για τον ίδιο χρόνο $t$ με επιτόκια $i_1, \cdots, i_n$ αντίστοιχα. Ποιο είναι το μέσο επιτόκιο;*

Οι τελικές αξίες θα είναι $K_1^{t,i_1}, \cdots, K_n^{t,i_n}$ οι οποίες ικανοποιούν $K_j^{t,i_j} = K_j \cdot (1 + ti_j)$ για $j = 1, \cdots, n$. 'ρα το τελικό ποσό θα είναι το άθροισμά τους, δηλαδή

$$K^t = \sum_{j=1}^{n} K_j(1 + ti_j)$$

Πώς θα υπολογίσουμε το μέσο επιτόκιο; Σύμφωνα με τον ορισμό θα είναι το επιτόκιο $i$ τέτοιο ώστε αν τοκιστούν τα ποσά $K_1, \cdots, K_n$ για χρόνο $t$ τότε το άθροισμα των τελικών ποσών να παραμένει το ίδιο. Όταν τοκίσουμε το ποσό $K_j$ με επιτόκιο $i$ (το μέσο επιτόκιο) για χρονικό διάστημα $t$ θα έχει τελική αξία $K_j^t = K_j(1 + ti)$ συνεπώς το άθροισμα των τελικών αξιών θα είναι

$$\sum_{j=1}^{n} K_j^t = \sum_{j=1}^{n} K_j(1 + ti)$$

Αυτό το ποσό θα πρέπει να είναι ίσο με το άθροισμα των τελικών ποσών όταν τοκιστούν με διαφορετικό επιτόκιο, δηλαδή

$$\sum_{j=1}^{n} K_j(1 + ti) = \sum_{j=1}^{n} K_j(1 + ti_j)$$

Για να υπολογίσουμε το $i$ γράφουμε

$$\sum_{j=1}^{n} K_j(1+ti) = \sum_{j=1}^{n} K_j + i \cdot \sum_{j=1}^{n} K_j t$$

'ρα

$$i = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_j(1+ti_j) - \sum_{j=1}^{n} K_j}{\sum_{j=1}^{n} K_j t_j} = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_j t i_j}{\sum_{j=1}^{n} K_j t} = \frac{K_1 i_1 + \cdots + K_n i_n}{K_1 + \cdots + K_n}$$

□

**Παραδειγμα 39** *Θεωρούμε ότι τα κεφάλαια $K_1, \cdots, K_n$ τοκίζονται με επιτόκια $i_1, \cdots, i_n$ και για χρόνους $t_1, \cdots, t_n$. Ποιο είναι το μέσο επιτόκιο;*

Τα τελικά κεφάλαια θα είναι της μορφής $K_j(1+t_j i_j)$ και επομένως το άθροισμα των τελικών κεφαλαίων θα είναι

$$\sum_{j=1}^{n} K_j(1+t_j i_j)$$

Για να βρούμε το μέσο επιτόκιο $i$ θα τοκίσουμε τα κεφάλαια $K_1, \cdots, K_n$ για χρόνους $t_1, \cdots, t_n$ με κοινό επιτόκιο το μέσο επιτόκιο $i$ (το οποίο ψάχνουμε). Σε αυτήν την περίπτωση τα τελικά κεφάλαια θα είναι

$$K_j(1+t_j i)$$

και επομένως το άθροισμά τους θα είναι

$$\sum_{j=1}^{n} K_j(1+t_j i)$$

Για να υπολογίσουμε το μέσο επιτόκιο $i$ θα απαιτήσουμε $\sum_{j=1}^{n} K_j(1+t_j i_j) = \sum_{j=1}^{n} K_j(1+t_j i)$ και επομένως

$$K_1(1+t_1 i_1) + \cdots + K_n(1+t_n i_n) = K_1(1+t_1 i) + \cdots + K_n(1+t_n i)$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ότι

$$i = \frac{K_1 t_1 i_1 + \cdots + K_n t_n i_n}{K_1 t_1 + \cdots + K_n t_n} \qquad \text{(τύπος μέσου επιτοκίου)} \qquad (3.2)$$

Επομένως ο τύπος 3.2 μας δίνει την μορφή του μέσου επιτοκίου για $n$ το πλήθος ποσά τα οποία τοκίζονται για $n$ διαφορετικές περιόδους και για $n$ διαφορετικά επιτόκια. □

**'Σκηση 40** *Έστω δυο κεφάλαια $K_1 = 1.000$ Ευρώ και $K_2 = 1.500$ Ευρώ. Το πρώτο κεφάλαιο τοκίζεται για 2 χρόνια με ετήσιο επιτόκιο $i_1 = 0.06$ και το δεύτερο κεφάλαιο τοκίζεται για 3 χρόνια με επιτόκιο $i_2 = 0.05$. Ποιο είναι το μέσο επιτόκιο;*

**Λυση.** Όταν τα κεφάλαια τοκιστούν με διαφορετικά επιτόκια θα έχουν τελικές αξίες

$$K_1^t = 1.000 \cdot (1 + 2 \cdot 0.06) = 1.120$$
$$K_2^t = 1.500 \cdot (1 + 3 \cdot 0.05) = 1.725$$

Όταν τοκιστούν με το ίδιο (μέσο επιτόκιο) θα έχουν τελικές αξίες

$$1.000 \cdot (1 + 2 \cdot i)$$
$$1.500 \cdot (1 + 3 \cdot i)$$

Επομένως, απαιτούμε τα αθροίσματα των τελικών αξιών να είναι ίσα, δηλαδή

$$1.000 \cdot (1 + 2 \cdot i) + 1.500 \cdot (1 + 3 \cdot i) = 1.120 + 1.725$$

Λύνοντας ως προς $i$ έχουμε ότι $i \backsimeq 0.053$. □

Στην συνέχεια θα δώσουμε έναν ορισμό για τον μέσο χρόνο τοκισμού.

**Ορισμος 41 (Μέσος Χρόνος Τοκισμού)** *Έστω τα κεφάλαια $K_1, K_2, \cdots, K_n$ τα οποία τοκίζονται με επιτόκια $i_1, \cdots, i_n$ και για χρόνους $t_1, \cdots, t_n$. Θα ονομάζουμε **μέσο χρόνο τοκισμού** τον χρόνο $t$ ο οποίος δίνεται ως εξής*

$$t = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_j t_j}{\sum_{j=1}^{n} K_j} \quad \text{(μέσος χρόνος τοκισμού)} \tag{3.3}$$

**Παραδειγμα 42** *Έστω τα κεφάλαια $K_1 = 1.000$ Ευρώ, $K_2 = 1.500$ Ευρώ και $K_3 = 2.000$ Ευρώ. Τα ποσά αυτά τοκίζονται για 2, 3 και 5 χρόνια αντίστοιχα με επιτόκια 3%, 4% και 5% αντίστοιχα. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο τοκισμού. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε ότι*

$$t = \frac{1.000 \cdot 2 + 1.500 \cdot 3 + 2.000 \cdot 5}{1.000 + 1.500 + 2.000} \backsimeq 3.66$$

□

**Παρατηρηση 43** *Παρατηρούμε ότι αν τοκίσουμε το μεγαλύτερο μέρος του κεφαλαίο για κάποιο χρονικό διάστημα $t_i$ τότε ο μέσος χρόνος τοκισμού τείνει να εξισωθεί με τον χρόνο $t_i$.*

### 3.2.1 Σχέση μέσου επιτοκίου και μέσου χρόνου τοκισμού

Αν υπάρχει μια τράπεζα η οποία χρησιμοποιεί το μέσο επιτόκιο $i$ τότε για πόσο χρόνο $t$ πρέπει να τοποθετήσω το σύνολο των κεφαλαίων μου σε αυτή την τράπεζα ούτως ώστε να έχω το ίδιο τελικό όφελος με το αν τόκιζα τα επιμέρους ποσά σε διαφορετικό χρόνο και με διαφορετικά επιτόκια;

Το αρχικό κεφάλαιο είναι το $K = \sum_{j=1}^{n} K_j$ και επομένως αν το τοκίσω σε μια τράπεζα με επιτόκιο $i$ και για χρόνο $t$ θα έχω τελική αξία $K(1+ti)$. Εξισώνοντας τις τελικές αξίες προκύπτει η εξίσωση

$$K(1+ti) = \sum_{j=1}^{n} K_j(1+t_j i_j) = \sum_{j=1}^{n} K_j(1+t_j i)$$

Λύνοντας ως προς $t$ έχουμε

$$t = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_j t_j}{\sum_{j=1}^{n} K_j}$$

ο οποίος είναι ο μέσος χρόνος τοκισμού.
Αντίστροφα, αν γνωρίζουμε τον μέσο χρόνο τοκισμού $t$ τότε το $i$ που ικανοποιεί την σχέση

$$K(1+ti) = \sum_{j=1}^{n} K_j(1+t_j i_j) \text{ είναι το } i = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_j t_j i_j}{\sum_{j=1}^{n} K_j t_j}$$

δηλαδή πρόκειται για το μέσο επιτόκιο.

(Σημασια του Μεσου Επιτοκιου και του Μεσου Χρονου Τοκισμου) Η σημασία του μέσου επιτοκίου και του μέσου χρόνου τοκισμού είναι η εξής: Αν τοκίσω τα ποσά $K_1, \cdots, K_n$ για χρονικά διαστήματα $t_1, \cdots, t_n$ και για επιτόκια $i_1, \cdots, i_n$ αντίστοιχα τότε το συνολικό όφελος θα είναι το ίδιο με το να τοκίσω το συνολικό ποσό $\sum_{j=1}^{n} K_j$ με το μέσο επιτόκιο $i$ στον μέσο χρόνο τοκισμού $t$.

Παραδειγμα 44 *Έστω τα κεφάλαια $K_1 = 1.000$ Ευρώ, $K_2 = 1.500$ Ευρώ και $K_3 = 2.000$ Ευρώ. Τα ποσά αυτά τοκίζονται για 2, 3 και 5 χρόνια αντίστοιχα με επιτόκια 3%, 4% και 5% αντίστοιχα. Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το μέσο επιτόκιο και έπειτα τον μέσο χρόνο τοκισμού. Το μέσο επιτόκιο δίνεται ως εξής*

$$i = \frac{1.000 \cdot 2 \cdot 0.03 + 1.500 \cdot 3 \cdot 0.04 + 2.000 \cdot 5 \cdot 0.05}{1.000 \cdot 2 + 1.500 \cdot 3 + 2.000 \cdot 5} \backsimeq 0.04$$

*Επομένως, αν βρω μια τράπεζα η οποία να χρησιμοποιεί επιτόκιο 4% τότε μπορώ να τοποθετήσω τα χρήματα εκεί και να τα τοκίσω για 2,3 και 5 χρόνια αντίστοιχα. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε, με βάση το μέσο επιτόκιο, τον μέσο χρόνο τοκισμού ως προς το μέσο επιτόκιο όλου του κεφαλαίου στην τελευταία αυτή τράπεζα. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα έχουμε*

$$t = \frac{1.000 \cdot 2 + 1.500 \cdot 3 + 2.000 \cdot 5}{4.500} \backsimeq 3.66$$

*Δηλαδή, αν τοκίσω για 3.66 χρόνια όλο το ποσό στην ίδια τράπεζα με επιτόκιο 4% θα έχω το ίδιο αποτέλεσμα με το αν τόκιζα επιμέρους ποσά σε διαφορετικές τράπεζες και για διαφορετικούς χρόνους. Σημειώστε ότι λόγω της αποκοπής δεκαδικών ψηφίων μια επαλήθευση δεν θα δώσει ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα.* □

**Παραδειγμα 45** *Έστω ότι έχουμε στην διάθεση μας το ποσό των 3.000 Ευρώ το οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε σε τράπεζα. Παίρνουμε προσφορά από δυο τράπεζες και έχουμε τα εξής: Η τράπεζα $T_1$ μας δίνει ετήσιο επιτόκιο 4% αλλά τα χρήματα πρέπει να παραμείνουν εκεί για τουλάχιστον δυο έτη. Η τράπεζα $T_2$ μας δίνει επιτόκιο 2% αλλά δεν έχουμε χρονικό περιορισμό στο πότε μπορούμε να εκταμιεύσουμε τα χρήματά μας. Επειδή θα χρειαστούμε τα 1.000 Ευρώ σε ακριβώς ένα έτος δεν μπορούμε να τοποθετήσουμε όλα τα χρήματα στην ίδια τράπεζα η οποία προφανώς θα ήταν η τράπεζα $T_1$.*
*Σε αυτή την περίπτωση θα τοποθετήσουμε τα 1.000 Ευρώ στην τράπεζα $T_2$ και τα 2.000 Ευρώ στην τράπεζα $T_1$. Θα υπολογίσουμε τις τελικές αξίες των κεφαλαίων.*
*Το κεφάλαιο $K_1 = 2.000$ θα έχει τελική αξία μετά από δυο χρόνια ίση με*

$$2.000 \cdot (1 + 2 \cdot 0.04) = 2.160$$

*Από την άλλη μεριά το κεφάλαιο $K_2 = 1.000$ θα έχει τελική αξία μετά από έναν χρόνο ίση με*

$$1.000 \cdot (1 + 1 \cdot 0.02) = 1020$$

*Το συνολικό κεφάλαιο μετά από 2 χρόνια θα είναι 3.180 Ευρώ. Αν τα τοποθετούσαμε στην τράπεζα $T_2$ πόσα χρόνια θα έπρεπε να τα αφήσουμε για να έχουν την ίδια απόδοση; Θα αντικαταστήσουμε στην εξίσωση του απλού τόκου και θα έχουμε*

$$3.180 = 3.000 \cdot (1 + n \cdot 0.02)$$

*Λύνοντας ως προς n προκύπτει ότι θα έπρεπε να αφήσουμε στην τράπεζα $T_2$ όλο το κεφάλαιο για 3 χρόνια.*
*Ποιο είναι το μέσο επιτόκιο στην περίπτωση που τοποθετήσαμε το αρχικό κεφάλαιο σε δυο τράπεζες; Σύμφωνα με τα προηγούμενα είναι*

$$i = \frac{1.000 \cdot 1 \cdot 0.02 + 2.000 \cdot 2 \cdot 0.04}{1.000 \cdot 1 + 2.000 \cdot 2} = 0.036$$

*Το μέσο επιτόκιο λοιπόν είναι 3.6% Παρατηρούμε ότι είναι αρκετά κοντά στο 4% (που είναι το επιτόκιο της τράπεζας $T_1$) διότι εκεί έχουμε τοποθετήσει μεγαλύτερο μέρος του αρχικού ποσού.*
*Τέλος, ο μέσος χρόνος τοκισμού είναι*

$$t = \frac{1.000 \cdot 1 + 2.000 \cdot 2}{3.000} = \frac{5}{3}$$

*Ο μέσος χρόνος τοκισμού $t = \frac{5}{3}$ και το μέσο επιτόκιο $i = 0.036$ έχουν την εξής σημασία εδώ. Αν τοποθετούσα όλο το ποσό σε μια τράπεζα με επιτόκιο $i = 0.036$ και για χρόνο $t = \frac{5}{3}$ θα είχα στο τέλος του χρόνου αυτού την ίδια απόδοση που είχα και με την αρχική μορφή της επένδυσης. Πράγματι,*

$$3.000 \cdot \left(1 + \frac{5}{3} \cdot 0.036\right) = 3.180$$

□

### 3.2.2 Τοκάριθμος και Σταθερός Διαιρέτης

**ΟΡΙΣΜΟΣ 46** *Τοκάριθμος θα ονομάζεται το γινόμενο $Kt$ όπου $K$ είναι το κεφάλαιο που τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο $i$ και $t$ είναι ο χρόνος τοκισμού και θα συμβολίζεται με $N$. Το πηλίκο $\frac{360}{i}$ καλείται* ***σταθερός διαιρέτης*** *και συμβολίζεται με $\Delta$.*

'ρα, αν το ετήσιο επιτόκιο είναι $i$ και τοκίζουμε το ποσό $K$ για $t$ ημέρες τότε ο τόκος $I$ θα είναι

$$I = K\frac{t}{360}i = \frac{N}{\Delta}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 47** *Έστω ότι τοκίζουμε για 30 ημέρες το ποσό των 125 Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 3.5%. Να βρεθούν τα μεγέθη $I, N, \Delta$ και η τελική αξία του κεφαλαίου.*

**Απάντηση.** Εδώ $K = 125, i = 0.035, t = 30$. Επομένως, $N = Kt = 125 * 30 = 3.750$ και $\Delta = \frac{360}{0.035} = 10285.714$. 'ρα ο τόκος $I$ θα είναι $I = \frac{N}{\Delta} = 0.364$ και επομένως το τελικό ποσό θα είναι $K + I = 125 + 0.364 = 125.364$. □

# Κεφάλαιο 4

# Προεξόφληση Τίτλων

## 4.1 Εισαγωγή

Υποθέτουμε ότι ο Α δανείζει στον Β ένα χρηματικό ποσό. Προκειμένου να εξασφαλιστεί ο Α ότι θα εισπράξει το ποσό αυτό (με κάποιο τόκο ίσως) υποχρεώνει τον Β να υπογράψει μια δήλωση της οφειλής του. Μια τέτοια δήλωση ονομάζεται γενικά **τίτλος** και συγκεκριμένα χρησιμοποιούνται οι όροι **γραμμάτια** ή **συναλλαγματικές**.
Θα λέμε **ονομαστική αξία** το ποσό που αναγράφεται στον τίτλο και το οποίο ο οφειλέτης είναι υποχρεωμένος να πληρώσει στο δανειστή ενώ **λήξη** ονομάζουμε την ημέρα εξόφλησης του τίτλου.
Ο δανειστής λαμβάνει στα χέρια του τον τίτλο ονομαστικής αξίας $K$ τον οποίο μπορεί να δώσει πριν τη λήξη του σε μια τράπεζα και να λάβει ένα ποσό $K^{'}$ το οποίο εν γένει είναι μικρότερο του $K$. Η τράπεζα βέβαια στη συνέχεια, μπορεί να κάνει το ίδιο ή να περιμένει μέχρι τη λήξη του τίτλου για να λάβει το ποσό που αναγράφεται στον τίτλο. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **προεξόφληση του τίτλου**. Είναι προφανές ότι η τράπεζα στην ουσία δανείζει τα χρήματα αυτά στον (αρχικό) δανειστή και επομένως το ποσό που θα του καταβληθεί θα είναι μικρότερο της ονομαστικής αξίας του τίτλου διότι θα έχει παρακρατηθεί και ο αντίστοιχος τόκος από την τράπεζα.
Θα ονομάζουμε **χρόνο προεξόφλησης** του τίτλου το χρονικό διάστημα από την ημέρα προεξόφλησης του τίτλου μέχρι την ημέρα της λήξης του. **Επιτόκιο προεξόφλησης** του τίτλου θα λέμε το επιτόκιο με το οποίο η τράπεζα υπολογίζει τον τόκο για τα χρήματα που δίνει για τον τίτλο και το ποσό που παρακρατεί ονομάζεται **προεξόφλημα**.
**Πραγματική ή παρούσα αξία** του τίτλου ονομάζεται το ποσό που δίνει η τράπεζα στον κάτοχο του τίτλου.
Το προεξόφλημα είναι ο τόκος που υπολογίζεται σε κάποιο κεφάλαιο. Αν το κεφάλαιο αυτό (από όπου προκύπτει το προεξόφλημα) είναι η ονομαστική αξία του τίτλου τότε μιλάμε για **εξωτερική προεξόφληση** ενώ αν ο τόκος αναφέρεται στην πραγματική (παρούσα) αξία του τίτλου θα μιλάμε για **εσωτερική προεξόφληση**. Συνήθως, όταν λέμε προεξόφλημα εννοούμε εξωτερικό προεξόφλημα.
Ένας σημαντικός λόγος για τον οποίο ο κάτοχος ενός τίτλου αποφασίζει να προεξοφλήσει τον τίτλο αυτό σε μια τράπεζα είναι για να εισπράξει με σιγουριά ένα ποσό.

Κατά το χρόνο λήξης του τίτλου υπάρχει η πιθανότητα αδυναμίας του οφειλέτη να πληρώσει το αντίστοιχο ποσό πράγμα το οποίο θα οδηγήσει σε δικαστική διαμάχη μεταξύ των δυο μερών. Αντίθετα, αν ο τίτλος προεξοφληθεί στην τράπεζα ο κάτοχος του τίτλου θα εισπράξει ένα ποσό και επιπλέον η όποια δικαστική διαμάχη θα μεταφερθεί μεταξύ τραπέζης και οφειλέτη. Ο κάτοχος ενός τίτλου, για τον παραπάνω λόγο, συνήθως αποφασίζει να προεξοφλήσει τον τίτλο σε μια τράπεζα πολύ κοντά στον χρόνο λήξης του τίτλου. Με αυτό τον τρόπο το ποσό που θα εισπράξει θα είναι πολύ κοντά στην ονομαστική αξία του τίτλου.

Ένας άλλος επίσης σημαντικός λόγος προεξόφλησης είναι ότι ο κάτοχος του τίτλου μπορεί να χρειάζεται επειγόντως ένα ποσό χρημάτων σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

## 4.2 Εσωτερική και Εξωτερική Προεξόφληση

Θέλουμε να υπολογίσουμε το προεξόφλημα και την πραγματική αξία ενός τίτλου όταν γνωρίζουμε την ονομαστική αξία $K$, το χρόνο προεξόφλησης $t$ και το επιτόκιο προεξόφλησης πάνω στο χρόνο $t$ υποθέτοντας απλό τοκισμό.

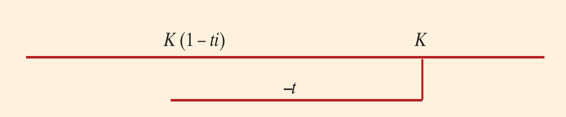
Γενικά, υπάρχουν δυο διαφορετικοί τρόποι υπολογισμού του προεξοφλήματος. Είναι η εσωτερική προεξόφληση και η εξωτερική.

• **Εξωτερική Προεξόφληση.**

Σε αυτή την περίπτωση το προεξόφλημα είναι ο τόκος που αναφέρεται στην ονομαστική αξία του τίτλου και επομένως έχουμε

$$E = Kti \quad \text{(προεξόφλημα εξωτερικής προεξόφλησης)}$$

όπου $E$ είναι το προεξόφλημα, $i$ το επιτόκιο προεξόφλησης και $t$ ο χρόνος προεξόφλησης.




Σχήμα 4.1: Εξωτερική Προεξόφληση

’ς εξηγήσουμε πως προέκυψε αυτή η ισότητα που μας δίνει το εξωτερικό προεξόφλημα. Αν μια τράπεζα μας δανείσει το ποσό $K$ για χρόνο $t$ με επιτόκιο $i$ τότε ο τόκος θα είναι $Kti$. Όταν η τράπεζα προεξοφλεί εξωτερικά έναν τίτλο στην ουσία δανείζει αυτά τα χρήματα στον κάτοχο του τίτλου αλλά για αρνητικό χρόνο, δηλαδή $-t$. Έτσι η τελική αξία (δηλαδή η πραγματική αξία στην προκειμένη περίπτωση) είναι η $K_{-t} = K(1-ti)$

και είναι μικρότερη της αρχικής λόγω του αρνητικού χρόνου. Το προεξόφλημα είναι ο τόκος για το δανεισμό αυτό και είναι η διαφορά της αρχικής αξίας μείον την τελική αξία (πραγματική αξία εδώ), δηλαδή

$$E = K - K_{-t} = Kti$$

• **Εσωτερική Προεξόφληση.**
Για την περίπτωση της εσωτερικής προεξόφλησης σκεφτόμαστε ως εξής. Η τράπεζα προεξοφλώντας εσωτερικά έναν τίτλο δίνει το ποσό Π το οποίο αν τοκιστεί με επιτόκιο $i$ και για χρόνο $t$ να δίνει ως τελικό ποσό την ονομαστική αξία του τίτλου. Δηλαδή

$$\Pi(1 + ti) = K$$

από το οποίο προκύπτει ότι η πραγματική αξία του τίτλου (με εσωτερική προεξόφληση) θα είναι

$$\Pi = \frac{K}{1 + ti}$$

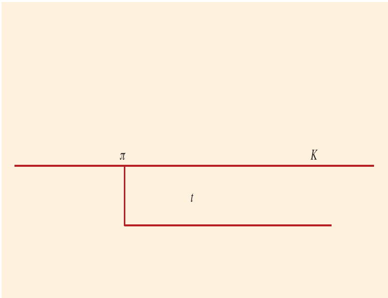
Επιπλέον, το προεξόφλημα θα είναι η διαφορά της πραγματικής αξίας από την ονομαστική, δηλαδή

$$E = K - \Pi$$

οπότε

$$\boxed{E = \frac{Kti}{1 + ti} \qquad \text{(προεξόφλημα εσωτερικής προεξόφλησης)}}$$

Παρατηρούμε ότι το προεξόφλημα στην περίπτωση της εσωτερικής προεξόφλησης είναι μικρότερο από ότι στην εξωτερική προεξόφληση.
Σημειώστε ότι η εσωτερική προεξόφληση είναι ορθολογικότερη έναντι της εξωτερικής από μαθηματικής άποψης. Παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει το $t$ (όσο νωρίτερα δηλαδή προεξοφλήσουμε τον τίτλο) τόσο αυξάνει και το προεξόφλημα. Η βασική διαφορά όμως είναι ότι στην εξωτερική προεξόφληση τείνει στο άπειρο ενώ στην εσωτερική τείνει στην ονομαστική αξία. Δηλαδή, αν προεξοφλήσει κανείς πολύ νωρίς ($t > \frac{1}{i}$) εξωτερικά έναν τίτλο το προεξόφλημα θα υπερβαίνει την ονομαστική αξία του τίτλου το οποίο σημαίνει ότι δεν θα λάβει τίποτε. Αντίθετα, στην εσωτερική προεξόφληση μπορείς να προεξοφλήσεις όσο νωρίς θέλεις και το ποσό που θα πάρεις θα είναι πάντοτε αυστηρά θετικό (αν και κοντά στο μηδέν). Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και στην περίπτωση που το επιτόκιο $i \to \infty$.




Σχήμα 4.2: Εσωτερική Προεξόφληση

**’ΣΚΗΣΗ 48** *Ένα γραμμάτιο με ονομαστική αξία 10.000 Ευρώ προεξοφλείται εξωτερικά 4 μήνες πριν από τη λήξη του. Πόσο είναι το προεξόφλημα και ποια η πραγματική αξία του γραμματίου όταν η προεξόφληση υπολογίζεται με ετήσιο επιτόκιο 12%;*

**Απάντηση.** Εδώ μας δίνεται η ονομαστική αξία $K = 10.000$, το επιτόκιο $i = 0.12$ και ο χρόνος προεξόφλησης που είναι $t = 4/12$. Επομένως, $E = Kti = 10.000 \cdot 4/12 \cdot 0.12 = 400$ Ευρώ. □

**’ΣΚΗΣΗ 49** *Ένα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ προεξοφλείται εξωτερικά 120 ημέρες πριν από τη λήξη του και δίνει πραγματική αξία 9.500 Ευρώ. Να βρεθεί το προεξόφλημα καθώς και το επιτόκιο προεξόφλησης.*

**Απάντηση.** Εδώ μας δίνονται τα $K = 10.000$, $K^{'} = 9.500$ και ο χρόνος προεξόφλησης $t = \frac{120}{360}$. Το προεξόφλημα (σύμφωνα με τον ορισμό) είναι $E = K - K^{'} = 500$. Για να υπολογίσουμε το επιτόκιο προεξόφλησης θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο

$$E = Kti = 10.000 \cdot \frac{120}{360} \cdot i$$

Λύνοντας ως προς $i$ και αντικαθιστώντας το $E$ βρίσκουμε ότι $i = 0.15$. □

**’ΣΚΗΣΗ 50** *Ένα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ προεξοφλείται εξωτερικά και δίνει πραγματική αξία 9.800 Ευρώ. Αν το ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης είναι 10% πόσο χρόνο πριν την λήξη του γραμματίου προεξοφλήθηκε;*

**ΛΥΣΗ.** Μας δίνονται τα $K^{'} = 9.800$, $K = 10.000$ και $i = 0.1$ και μας ζητείται το $t$. Εφαρμόζοντας τον τύπο $E = Kti$ όπου $E = K - K^{'} = 200$ και λύνοντας ως προς $t$ προκύπτει ότι $t = 0.2$ χρόνια. □

**’ΣΚΗΣΗ 51** *Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ προεξοφλείται εσωτερικά 100 ημέρες πριν τη λήξη του. Το ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης είναι 10%. Ποιο είναι το προεξόφλημα;*

**ΛΥΣΗ.** Επειδή η προεξόφληση είναι εσωτερική θα εφαρμόσουμε τον τύπο εσωτερικής προεξόφλησης. ’ρα

$$E = \frac{Kti}{1 + ti} = \frac{10.000 \cdot \frac{100}{360} \cdot 0.1}{1 + \frac{100}{360} \cdot 0.1} \simeq 270.27$$

□

**'ΣΚΗΣΗ 52** *Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ προεξοφλείται εσωτερικά πριν την λήξη του. Αν το ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης είναι 15% και το προεξόφλημα είναι 250 Ευρώ πόσες μέρες πριν την λήξη του γραμματίου προεξοφλήθηκε;*

**ΛΥΣΗ.** Λόγω της εσωτερικής προεξόφλησης θα εφαρμόσουμε τον τύπο

$$E = \frac{Kti}{1+ti}$$

Λύνοντας ως προς το $t$ προκύπτει ότι

$$t = \frac{E}{(K-E)i}$$

'ρα

$$t = \frac{250}{9.750 \cdot 0.15} \simeq 0.17 \text{ χρόνια}$$

□

## 4.3 Ισοδυναμία Τίτλων

Συχνά, μια σειρά τίτλων (π.χ. γραμμάτια) $g_1, \cdots, g_n$ χρειάζεται να αντικατασταθούν από νέους τίτλους $g_1^*, \cdots, g_m^*$ οικονομικά ισοδύναμους με τους παλαιούς την ημέρα της αντικατάστασης. Μια τέτοια περίπτωση είναι όταν ο οφειλέτης θέλει να αντικαταστήσει δυο τίτλους με έναν με διαφορετική ημερομηνία λήξης η οποία τον βολεύει καλύτερα για την εξόφλησή του.

Για να υπάρχει οικονομική ισοδυναμία θα πρέπει το άθροισμα των πραγματικών αξιών (δηλαδή των αξιών κατά την ημέρα της αντικατάστασης) των παλαιών τίτλων να είναι ίσο με το άθροισμα των πραγματικών αξιών των νέων τίτλων, δηλαδή

$$K_1 + K_2 + \cdots + K_n = K_1^* + K_2^* + \cdots + K_m^*$$

όπου $K_i$ είναι η πραγματική αξία του παλαιού τίτλου ενώ $K_i^*$ η πραγματική αξία του νέου τίτλου και οι δυο υπολογισμένες την ημέρα της αντικατάστασης.

Θα υποθέσουμε ότι οι παλαιοί τίτλοι $g_1, \cdots, g_n$ έχουν ονομαστικές αξίες $K_1^0, \cdots, K_n^0$ και λήγουν σε $t_1, \cdots, t_n$ χρονικές μονάδες από την ημέρα της αντικατάστασης (ή αλλιώς **εποχή ισοδυναμίας**) ενώ οι νέοι τίτλοι έχουν ονομαστικές αξίες $K_1^{*0}, \cdots, K_m^{*0}$ και λήγουν σε $t_1^*, \cdots, t_m^*$ χρονικές μονάδες από την εποχή ισοδυναμίας. Δηλαδή, όσα χρήματα θα έπαιρνε ο Α (που έχει δανείσει στον Β) αν προεξοφλούσε τα γραμμάτια (σε μια τράπεζα με επιτόκιο προεξόφλησης $i$) την ημέρα της αντικατάστασης θα πρέπει να πάρει αν προεξοφλήσει τα νέα γραμμάτια την ίδια ημέρα (ημέρα αντικατάστασης). Όταν όλοι οι τίτλοι λήγουν μετά την εποχή ισοδυναμίας οι πραγματικές αξίες με εξωτερική προεξόφληση είναι ως εξής

$$\begin{aligned} K_j &= K_j^0(1 - t_j i), \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ K_j^* &= K_j^{*0}(1 - t_j^* i), \quad j = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}$$

Ενώ με εσωτερική προεξόφληση θα ισχύει

$$\begin{aligned} K_j &= \frac{K_j}{1+t_j i}, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ K_j^* &= \frac{K_j^{*0}}{1+t_j i}, \quad j = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}$$

### 4.3.1 Αντικατάσταση Τίτλων με Εξωτερική Προεξόφληση

Την ημέρα της αντικατάστασης των τίτλων θα πρέπει όπως ήδη είπαμε να ισχύει η σχέση

$$\sum_{j=1}^{n} K_j^0(1 - t_j i) = \sum_{j=1}^{m} K_j^{*0}(1 - t_j^* i) \tag{4.1}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 53** *Έστω ότι έχουμε τρία γραμμάτια*

$g_1$ : *Ονομαστική αξία* 4.000
*ημερομηνία λήξης* 28/05

$g_2$ : *Ονομαστική αξία* 5.000
*ημερομηνία λήξης* 7/06

$g_3$ : *Ονομαστική αξία* 6.000
*ημερομηνία λήξης* 14/07

*και έστω ότι ο οφειλέτης θέλει να τα αντικαταστήσει στις 24/5 με δυο άλλα γραμμάτια έτσι ώστε να είναι*

$g_1^*$ : *Ονομαστική αξία* 8.000
*ημερομηνία λήξης* 16/06

$g_2^*$ : *Ονομαστική αξία* $X$;
*ημερομηνία λήξης* 25/08

*Το επιτόκιο εξωτερικής προεξόφλησης είναι $i = 18\%$. Πρέπει να υπολογίσουμε την ονομαστική αξία του δεύτερου γραμματίου. Για να γίνει αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση ισοδυναμίας (δες 4.1) που πρέπει να ικανοποιείται την ημέρα της αντικατάστασης, οπότε*

$$\begin{aligned} & 4.000 \cdot \left(1 - \frac{4}{360} \cdot 0.18\right) + 5.000 \cdot \left(1 - \frac{13}{360} \cdot 0.18\right) \\ & +6.000 \cdot \left(1 - \frac{50}{360} \cdot 0.18\right) \\ = \; & 8.000 \cdot \left(1 - \frac{22}{360} \cdot 0.18\right) + X \cdot \left(1 - \frac{91}{360} \cdot 0.18\right) \end{aligned}$$

*Λύνουμε ως προς $X$ και παίρνουμε την ονομαστική αξία του δεύτερου γραμματίου η οποία είναι $X \backsimeq 7.232,423$.* □

**Αντικατάσταση τίτλων με έναν**

Αν θέλουμε να αντικαταστήσουμε τους τίτλους $g_1, \cdots, g_n$ με έναν τίτλο $g^*$ τότε η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται

$$\sum_{j=1}^{n} K_j^0(1 - t_j i) = K^{*0}(1 - t^* i)$$

Σε μια τέτοια περίπτωση ο τίτλος $g^*$ ονομάζεται **ενιαίος τίτλος** των $g_1, \cdots, g_n$ ενώ η ονομαστική αξία $K^{*0}$ ονομάζεται **ενιαίο κεφάλαιο** και η ημέρα λήξης του τίτλου $g^*$ ονομάζεται **κοινή λήξη**.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 54** *Έστω ότι έχουμε τα τρία γραμμάτια όπως πριν*

$g_1$ : *Ονομαστική αξία* 4.000
*ημερομηνία λήξης* 28/05

$g_2$ : *Ονομαστική αξία* 5.000
*ημερομηνία λήξης* 7/06

$g_3$ : *Ονομαστική αξία* 6.000
*ημερομηνία λήξης* 14/07

*και θέλουμε να τα αντικαταστήσουμε στις 24/5 με ένα το οποίο να λήγει στις 25/08. Το επιτόκιο προεξόφλησης θεωρούμε ότι είναι $i = 18\%$. Ποιο το ενιαίο κεφάλαιο; Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ισοδυναμίας έχουμε*

$$\begin{aligned} & 4.000 \cdot \left(1 - \frac{5}{360} \cdot 0.18\right) + 5.000 \cdot \left(1 - \frac{15}{360} \cdot 0.18\right) \\ & +6.000 \cdot \left(1 - \frac{52}{360} \cdot 0.18\right) \\ = \; & X \cdot \left(1 - \frac{94}{360} \cdot 0.18\right) \end{aligned}$$

*Λύνοντας ως προς $X$ παίρνουμε το αποτέλεσμα το οποίο είναι $X \backsimeq 15.526,232$.* □

### 4.3.2 Αντικατάσταση Τίτλων με Εσωτερική Προεξόφληση

Όπως έχουμε αναφέρει οι πραγματικές αξίες με εσωτερική προεξόφληση είναι

$$\begin{aligned} K_j &= \frac{K_j}{1 + t_j i}, \quad j = 1, 2, \cdots, n \\ K_j^* &= \frac{K_j^{*0}}{1 + t_j i}, \quad j = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι θα πρέπει να ισχύει

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{K_j}{1+t_j i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{K_j^{*0}}{1+t_j i} \tag{4.2}$$

προκειμένου να έχουμε οικονομική ισοδυναμία.
Στην συνέχεια θα δούμε το ίδιο παράδειγμα με την περίπτωση εξωτερικής προεξόφλησης με την διαφορά ότι οι υπολογισμοί τώρα θα γίνουν υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 55** *Έστω ότι έχουμε τρία γραμμάτια*

$$\begin{aligned} g_1: \quad & \textit{Ονομαστική αξία } 4.000 \\ & \textit{ημερομηνία λήξης } 28/05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2: \quad & \textit{Ονομαστική αξία } 5.000 \\ & \textit{ημερομηνία λήξης } 7/06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3: \quad & \textit{Ονομαστική αξία } 6.000 \\ & \textit{ημερομηνία λήξης } 14/07 \end{aligned}$$

*και έστω ότι ο οφειλέτης θέλει να τα αντικαταστήσει στις 24/5 με δυο άλλα γραμμάτια έτσι ώστε να είναι*

$$\begin{aligned} g_1^*: \quad & \textit{Ονομαστική αξία } 8.000 \\ & \textit{ημερομηνία λήξης } 16/06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2^*: \quad & \textit{Ονομαστική αξία } X; \\ & \textit{ημερομηνία λήξης } 25/08 \end{aligned}$$

*Το επιτόκιο εσωτερικής προεξόφλησης είναι $i = 18\%$. Πρέπει να υπολογίσουμε την ονομαστική αξία του δεύτερου γραμματίου. Για να γίνει αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση ισοδυναμίας (δες 4.2) που πρέπει να ικανοποιείται την ημέρα της αντικατάστασης, οπότε*

$$\begin{aligned} & \frac{4.000}{1+\frac{5}{360}\cdot 0.18} + \frac{5.000}{1+\frac{15}{360}\cdot 0.18} \\ & + \frac{6.000}{1+\frac{52}{360}\cdot 0.18} \\ = \; & \frac{8.000}{1+\frac{24}{360}\cdot 0.18} + \frac{X}{1+\frac{94}{360}\cdot 0.18} \end{aligned}$$

*Λύνουμε ως προς $X$ και παίρνουμε την ονομαστική αξία του δεύτερου γραμματίου η οποία είναι $X \backsimeq 7.219,713$.* □

Συγκρίνοντας τα παραδείγματα 53 και 55 διαπιστώνουμε ότι η αξία του δεύτερου γραμματίου είναι μικρότερη όταν υποθέσουμε εσωτερική προεξόφληση σε σύγκριση με την εξωτερική. Λόγω του ότι τα επιτόκια είναι ίσα αυτό το συμπέρασμα είναι λογικό όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο όπου εξετάζουμε παρόμοια ερωτήματα. Εντελώς παρόμοια με την εξωτερική προεξόφληση έχουμε την επόμενη παράγραφο.

**Αντικατάσταση τίτλων με έναν**

Αν θέλουμε να αντικαταστήσουμε τους τίτλους $g_1, \cdots, g_n$ με έναν τίτλο $g^*$ τότε η εξίσωση ισοδυναμίας γράφεται, υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{K_j^0}{1+t_j i} = \frac{K^{*0}}{1+t^* i}$$

Θα μελετήσουμε στην συνέχεια το ίδιο παράδειγμα με την εξωτερική προεξόφληση.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 56** *Έστω ότι έχουμε τα τρία γραμμάτια όπως πριν*

$$\begin{aligned} g_1 : \quad & \textit{Ονομαστική αξία } 4.000 \\ & \textit{ημερομηνία λήξης } 28/05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_2 : \quad & \textit{Ονομαστική αξία } 5.000 \\ & \textit{ημερομηνία λήξης } 7/06 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3 : \quad & \textit{Ονομαστική αξία } 6.000 \\ & \textit{ημερομηνία λήξης } 14/07 \end{aligned}$$

*και θέλουμε να τα αντικαταστήσουμε στις 24/5 με ένα το οποίο να λήγει στις 25/08. Το επιτόκιο προεξόφλησης θεωρούμε ότι είναι $i = 18\%$. Ποιο το ενιαίο κεφάλαιο; Χρησιμοποιώντας την εξίσωση ισοδυναμίας έχουμε*

$$\begin{aligned} & \frac{4.000}{1+\frac{5}{360}\cdot 0.18} + \frac{5.000}{1+\frac{15}{360}\cdot 0.18} + \frac{6.000}{1+\frac{52}{360}\cdot 0.18} \\ = \ & \frac{X}{1+\frac{94}{360}\cdot 0.18} \end{aligned}$$

*Λύνοντας ως προς $X$ παίρνουμε το αποτέλεσμα το οποίο είναι $X \backsimeq 15.496,392$. Διαπιστώνουμε πάλι ότι η αξία του γραμματίου είναι μικρότερη υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση.* □

### 4.3.3 Ισοδυναμία Εσωτερικής - Εξωτερικής Προεξόφλησης

Όπως παρατηρήσαμε το προεξόφλημα είναι μεγαλύτερο στην εξωτερική προεξόφληση. Συνεπώς προκύπτει το ερώτημα: Αν η τράπεζα $T_1$ προεξοφλεί εξωτερικά με επιτόκιο

$i_1$ και η τράπεζα $T_2$ προεξοφλεί εσωτερικά με επιτόκιο $i_2$ τότε ποια είναι η καλύτερη επιλογή τράπεζας για εξόφληση τίτλων; Προφανώς θα εξετάσουμε τα προεξοφλήματα των δυο τραπεζών και θα διαλέξουμε εκείνη με το μικρότερο προεξόφλημα. Για να έχει νόημα μια τέτοια μελέτη θα υποθέσουμε ότι το επιτόκιο εσωτερικής προεξόφλησης είναι μεγαλύτερο από εκείνο της εξωτερικής (δες ανισότητα 4.4 παρακάτω) αλλιώς είναι πάντοτε προτιμότερη η τράπεζα που προεξοφλεί εσωτερικά.
Τα προεξοφλήματα θα είναι ως εξής

$$\begin{aligned} E^1_{\text{εξωτ.}} &= Kti_1 \quad (\text{εξωτερικό προεξόφλημα}) \\ E^2_{\text{εσωτ.}} &= \frac{Kti_2}{1+ti_2} \quad (\text{εσωτερικό προεξόφλημα}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

'ρα προκύπτει μια σχέση μεταξύ των επιτοκίων όταν απαιτήσουμε τα προεξοφλήματα να είναι ίσα. Συνεπώς προκύπτει ο επόμενος ορισμός.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 57** *Θα λέμε ότι το επιτόκιο εξωτερικής προεξόφλησης $i_1$ είναι ισοδύναμο με το επιτόκιο εσωτερικής προεξόφλησης $i_2$ για τον χρόνο $t$ όταν*

$$i_1 = \frac{i_2}{1+ti_2}$$

Επιπλέον, διαπιστώνουμε εύκολα ότι όταν έχουμε εξωτερική προεξόφληση με επιτόκιο $i_1^{\text{εξωτ.}}$ και εσωτερική προεξόφληση με επιτόκιο $i_2^{\text{εσωτ.}}$ τέτοια ώστε

$$i_1^{\text{εξωτ.}} < i_2^{\text{εσωτ.}} \tag{4.4}$$

υπάρχει συγκεκριμένος χρόνος $t^*$ κατά τον οποίο τα προεξοφλήματα ταυτίζονται. Πράγματι, εξισώνοντας τα προεξοφλήματα (δες 4.3) προκύπτει ότι ο χρόνος αυτός είναι ο

$$t^* = \frac{i_2^{\text{εσωτ.}} - i_1^{\text{εξωτ.}}}{i_2^{\text{εσωτ.}} \cdot i_1^{\text{εξωτ.}}} \quad (\text{ισοδύναμος χρόνος προεξόφλησης})$$

Παρατηρούμε ότι τα προεξοφλήματα συμπίπτουν κατά τον ισοδύναμο χρόνο προεξόφλησης. Κάτω από την υπόθεση 4.4 προκύπτει ότι για χρόνο $t < t^*$ το εσωτερικό προεξόφλημα υπερτερεί του εξωτερικού προεξοφλήματος επομένως για $t < t^*$ συμφέρει να προεξοφλήσουμε εξωτερικά. Για $t > t^*$, αντίστοιχα, διαπιστώνουμε ότι μας συμφέρει να προεξοφλήσουμε εσωτερικά.
'ρα, αν έχουμε να επιλέξουμε μεταξύ δυο τραπεζών (με διαφορετικό τρόπο προεξόφλησης) για να προεξοφλήσουμε ένα τίτλο θα σκεφτούμε ως εξής:

**Επιλογή Τρόπου Προεξόφλησης**

$(i)$ Ελέγχουμε αν ισχύει $i_1^{\text{εξωτ.}} < i_2^{\text{εσωτ.}}$.

$(ii)$ Αν ισχύει η παραπάνω σχέση τότε μας συμφέρει να προεξοφλήσουμε στην τράπεζα $T_1^{\text{εξωτ.}}$ κατά τον χρόνο $t < t^*$ ενώ μας συμφέρει να προεξοφλήσουμε στην τράπεζα $T_2^{\text{εσωτ.}}$ για χρόνο $t > t^*$.

$(iii)$ Στην περίπτωση που δεν ισχύει η παραπάνω ανισότητα τότε μας συμφέρει να προεξοφλήσουμε στην τράπεζα $T_2^{\text{εσωτ.}}$, αυτή δηλαδή που εφαρμόζει εσωτερική προεξόφληση, ανεξαρτήτως του χρόνου προεξοφλήσεως.

Σε αυτό το σημείο δείτε και τα παραδείγματα στις παραγράφους αντικατάστασης τίτλων. Βλέπουμε ότι κάθε φορά είναι προτιμότερο να γίνει υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση και αυτό διότι τα επιτόκια είναι τα ίδια, δηλαδή δεν ισχύει η ανισότητα $i_1^{\text{εξωτ.}} < i_2^{\text{εσωτ.}}$.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 58** *Έστω ότι θέλουμε να προεξοφλήσουμε νωρίτερα γραμμάτιο ονομαστικής αξίας $K$ Ευρώ και να λάβουμε το ποσό $qK$, με $q \in (0,1)$, δηλαδή κλάσμα της ονομαστικής αξίας. Πόσο χρόνο πριν την λήξη του γραμματίου πρέπει να το προεξοφλήσουμε όταν το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 10%;*
*Θα μελετήσουμε το ερώτημα αυτό υποθέτοντας και εσωτερική και εξωτερική προεξόφληση.*
· **Εξωτερική Προεξόφληση.**
*Το προεξόφλημα θα είναι $E = K - K_{\text{παρούσα}} = K - qK = K(1-q)$ και επίσης θα ισχύει ότι*

$$E = Kti$$

*'ρα, πρέπει να ισχύει η ισότητα*

$$K(1-q) = Kti$$

*Λύνοντας ως προς $t$ προκύπτει ότι*

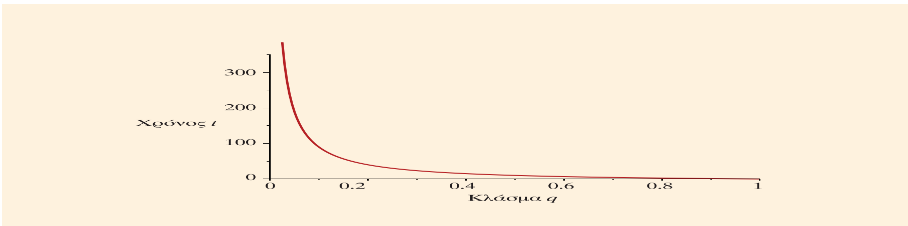
$$t = \frac{1-q}{i} = \frac{1-q}{0.1} = 10 - 10 \cdot q$$

Σχήμα 4.3: Χρόνος πριν τη λήξη του γραμματίου ως προς $q \in (0,1)$ με εξωτερική προεξόφληση

· *Εσωτερική Προεξόφληση.*
*Το προεξόφλημα θα είναι πάλι* $E = K(1-q)$ *και θα πρέπει τώρα να ισχύει ότι*

$$K(1-q) = \frac{Kti}{1+ti}$$

*Λύνοντας ως προς* $t$ *προκύπτει ότι* $t = \frac{1-q}{0.1 \cdot q}$.

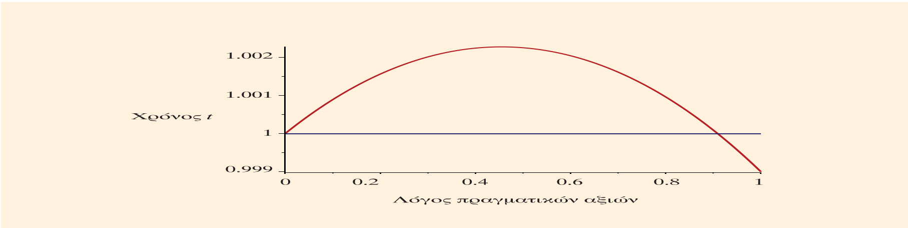



Σχήμα 4.4: Χρόνος πριν τη λήξη του γραμματίου ως προς $q \in (0,1)$ με εσωτερική προεξόφληση

*Αν θέλουμε συγκεκριμένα να λάβουμε το 98% της ονομαστικής αξίας του γραμματίου θα πρέπει να το προεξοφλήσουμε* $t = 0.2$ *χρόνια ή αλλιώς 72 ημέρες πριν την λήξη του με εξωτερική προεξόφληση ενώ με εσωτερική θα είναι* $t = 0.204$ *χρόνια ή αλλιώς περίπου 73 ημέρες πριν. Διαπιστώνουμε ότι για να πάρουμε το ίδιο ποσό μας συμφέρει να προεξοφλήσουμε εσωτερικά μιας και θα το έχουμε στα χέρια μας νωρίτερα. Σημειώστε ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι ανεξάρτητο της ονομαστικής αξίας.*

**Παραδειγμα 59** *Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την επιλογή να προεξοφλήσουμε γραμμάτιο ονομαστικής αξίας* $K$ *Ευρώ σε δυο τράπεζες. Η τράπεζα* $T_1$ *εφαρμόζει επιτόκιο εξωτερικής προεξόφλησης* $i_1 = 10\%$ *και η τράπεζα* $T_2$ *επιτόκιο εσωτερικής προεξόφλησης* $i_2 = 11\%$. *Σε ποια τράπεζα συμφέρει να προεξοφλήσουμε το γραμμάτιο;*
*Τα χρήματα που θα λάβουμε θα είναι* $K - E$ *όπου* $E$ *είναι το προεξόφλημα. Το προεξόφλημα στην περίπτωση εξωτερικής προεξόφλησης είναι* $E = Kti_1$ *ενώ στην εσωτερική προεξόφληση είναι* $E = \frac{Kti_2}{1+ti_2}$. *'ρα το ποσό που θα λάβουμε στην εξωτερική προεξόφληση θα είναι* $K(1-ti_1)$ *ενώ στην εξωτερική θα είναι* $\frac{K}{1+ti_2}$.

*Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε τον λόγο* $\frac{K(1-ti_1)}{\frac{K}{1+ti_2}} = (1-ti_1)(1+ti_2)$ *ως προς τον χρόνο.*




Σχήμα 4.5: Λόγος πραγματικών αξιών (εξωτερικής δια εσωτερικής προεξόφλησης) ως προς τον χρόνο $t$

*Το συμπέρασμα που βγάζουμε είναι ότι συμφέρει να προεξοφλήσουμε στην τράπεζα* $T_1$ *όταν αποφασίσουμε να το κάνουμε σε λιγότερες από 327 ημέρες πριν την λήξη του γραμματίου (σημειώστε ότι ο ισοδύναμος χρόνος προεξόφλησης είναι περίπου 327 ημέρες) αλλιώς συμφέρει να προεξοφλήσουμε στην τράπεζα* $T_2$ *όταν αποφασίσουμε να το κάνουμε σε περισσότερες από 327 ημέρες πριν την λήξη του γραμματίου.*

# Κεφάλαιο 5

# Σύνθετη Κεφαλαιοποίηση

## 5.1 Τύπος Ανατοκισμού

Θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω το λεγόμενο ακέραιο μέρος του $x \in \mathbb{R}$ που συμβολίζεται με $[x]$. Το ακέραιο μέρος ενός αριθμού είναι ο αμέσως προηγούμενος ακέραιος αριθμός που είναι μικρότερος του $x$ και επομένως ισχύει η ανισότητα

$$[x] \leq x \leq [x] + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή το ακέραιο μέρος του 4.6 είναι το 4 ενώ το ακέραιο μέρος του $-5.7$ είναι το $-6$.
Έστω κεφάλαιο $K$ τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο $i$. Αν ο τόκος κεφαλαιοποιείται ανά τρεις μήνες τότε μετά την πάροδο των τριών μηνών η αξία του κεφαλαίου θα είναι

$$K_1 = K \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)$$

Εδώ είναι χρήσιμη η έννοια του ονομαστικού επιτοκίου τριμήνου, δηλαδή $i' = \frac{i}{4}$.
Στη συνέχεια το ποσό $K_1$ είναι το κεφάλαιο το οποίο τοκίζεται με ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου πάλι $i'$ και ούτω κάθε εξής. Δηλαδή, $K_1 = K \cdot (1 + i')$ ενώ στο δεύτερο τρίμηνο το αρχικό κεφάλαιο θα έχει γίνει $K_2 = K_1 \cdot (1 + i') = K \cdot (1 + i')^2$ και γενικότερα έπειτα από $n$ τρίμηνα το κεφάλαιο θα έχει γίνει

$$K_n = K(1 + i')^n \quad \text{(τύπος ανατοκισμού)} \tag{5.1}$$

όπου $i'$ είναι το ονομαστικό επιτόκιο της υπο-περιόδου κατά την οποία κεφαλαιοποιούνται οι τόκοι.
Είναι εύκολο να δούμε ότι $(1 + i)^n > 1 + n \cdot i$ με $n \in \mathbb{N}$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli (δες πρόταση ;; για την απόδειξη). Συνεπώς όπως και διαισθητικά περιμέναμε η σύνθετη κεφαλαιοποίηση αποφέρει μεγαλύτερο κέρδος από την απλή κεφαλαιοποίηση.
Γενικότερα, αν τοκίσουμε 1 Ευρώ για $N$ ημέρες με επιτόκιο $i_1$ που αναφέρεται σε χρονική περίοδο $t_1$ ημερών (π.χ. 2% κάθε 30 ημέρες) τότε το ποσό μετά τις $N$ ημέρες θα είναι

$$(1+i_1)^{[\frac{N}{t_1}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{N}{t_1} - [\frac{N}{t_1}]\right) \cdot i_1\right) \tag{5.2}$$

(γενικευμένος τύπος ανατοκισμού)

Δηλαδή ανάμεσα στα πολλαπλάσια της χρονικής περιόδου $t_1$ υποθέτουμε ότι έχουμε απλή κεφαλαιοποίηση (μικτός τόκος), για αυτό το λόγο προκύπτει ο όρος $\left(1 + \left(\frac{N}{t_1} - [\frac{N}{t_1}]\right) \cdot i_1\right)$.

**’ΣΚΗΣΗ 60** *Έστω $x \in [0,1]$ και $a \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι*

$$(1 + x \cdot a) \geq (1+a)^x$$

**Λυση.** Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = 1 + xa - (1+a)^x$ της οποίας η πρώτη παράγωγος είναι ίση με $f'(x) = a - (1+a)^x \ln(1+a)$. Η πρώτη παράγωγος μηδενίζεται στο σημείο

$$x^* = \frac{\ln a - \ln\ln(1+a)}{\ln(1+a)}$$

το οποίο είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο και μάλιστα ισχύει $x^* \in [0,1]$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί θεωρώντας τις συναρτήσεις

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln x - \ln\ln(1+x) \\ h(x) &= (1+x)\ln(1+x) - x \end{aligned}$$

και αποδεικνύοντας ότι $g(x), h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Η δεύτερη παράγωγος είναι $f''(x) = -(1+a)^x \ln^2(1+a)$ η οποία είναι πάντοτε αρνητική επομένως η $f$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x^*$. Επειδή $f(0) = f(1) = 0$ τότε αναγκαστικά $f(x^*) \geq f(0) = 0$ και αφού δεν έχει τοπικό ελάχιστο στο $(0,1)$ προκύπτει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. □

**Παρατηρηση 61** *Ο όρος*

$$\frac{N}{t_1} - \left[\frac{N}{t_1}\right]$$

*βρίσκεται πάντοτε στο διάστημα $[0,1]$ και εφόσον το επιτόκιο $i_1 \in [0,1]$ τότε σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση ισχύει ότι*

$$\left(1 + \left(\frac{N}{t_1} - \left[\frac{N}{t_1}\right]\right) \cdot i_1\right) \geq (1+i_1)^{\left(\frac{N}{t_1} - [\frac{N}{t_1}]\right)}$$

*Αυτό σημαίνει ότι*

$$(1+i_1)^{\frac{N}{t_1}} \leq (1+i_1)^{[\frac{N}{t_1}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{N}{t_1} - [\frac{N}{t_1}]\right) \cdot i_1\right)$$

*Σε παλαιότερες εποχές όπου δεν υπήρχαν υπολογιστές, αντί του γενικευμένου τύπου του ανατοκισμού εφάρμοζαν το αριστερό μέλος της παραπάνω ανισότητας ως μια προσέγγιση της πραγματικής τιμής ταυτόχρονα με την χρήση πινάκων (τιμές του λογαρίθμου κ.τ.λ.) Σε μικρά ποσά η διαφορά είναι μικρή αλλά σε μεγάλα ποσά η διαφορά μεγαλώνει. Επίσης έχει επίπτωση σε όλους τους υπολογισμούς παρακάτω (ράντες κ.τ.λ.) στους οποίους εμφανίζεται η χρήση του γενικευμένου τύπου ανατοκισμού. Σε αυτό το βιβλίο δεν θα κάνουμε τέτοιου είδους προσεγγίσεις και απλουστεύσεις.*

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 62** *Προσοχή χρειάζεται στην αντικατάσταση των δεδομένων. Το επιτόκιο $i_1$ αναφέρεται στις $t_1$ χρονικές μονάδες. Αν π.χ. μας δίνουν ετήσιο επιτόκιο 3% μηνιαίου ανατοκισμού θα πρέπει να υπολογίσουμε το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο το οποίο είναι $\frac{0.03}{12}$ και έπειτα να αντικαταστήσουμε $i_1 = \frac{0.03}{12}$ και $t_1 = 30$.*

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 63** *Έστω ότι κεφάλαιο 1.500 Ευρώ τοκίζεται για 4 έτη με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3%. Ποιο θα είναι το τελικό κεφάλαιο μετά το τέταρτο έτος;*

**Απάντηση.** Εδώ έχουμε $K = 1.500$, $n = 4$, $i = 0.03$ και οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται στο τέλος κάθε έτους. Επομένως το τελικό κεφάλαιο θα είναι $K_4 = K \cdot (1+i)^4 = 1.500 \cdot (1+0.03)^4$. □

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 64** *Έστω ότι κεφάλαιο 100 Ευρώ τοκίζεται για 3 έτη και πέντε μήνες με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3%. Ποιο είναι το τελικό ποσό;*

**Απάντηση.** Εδώ έχουμε ότι το κεφάλαιο τοκίζεται αρχικά για τρία ολόκληρα χρόνια και οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται στο τέλος του κάθε έτους. Στο τέλος του τρίτου έτους θα έχει γίνει

$$K_3 = K \cdot (1+i)^3 = 100 \cdot (1+0.03)^3$$

Στη συνέχεια το ποσό $K_3$ τοκίζεται για 5 μήνες με ονομαστικό επιτόκιο $i^{'} = \frac{5i}{12}$ επομένως το τελικό ποσό στο τέλος της περιόδου θα είναι

$$\begin{aligned} K_{3+\frac{5}{12}} &= K_3 \cdot (1+i^{'}) \\ &= K_3 \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot 0.03}{12}\right) \\ &= 100 \cdot (1+0.03)^3 \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot 0.03}{12}\right) \\ &\backsimeq 110.63 \end{aligned}$$

Αν το ίδιο ποσό τοκιζόταν με το ίδιο επιτόκιο αλλά με απλή κεφαλαιοποίηση τότε το τελικό ποσό θα ήταν μικρότερο. Για να το υπολογίσουμε μετατρέπουμε την χρονική περίοδο τοκισμού σε μήνες και έχουμε ότι θα τοκισθεί συνολικά για 41 μήνες. Στην συνέχεια βρίσκουμε το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο το οποίο είναι $\frac{0.03}{12}$. 'ρα το τελικό ποσό θα ήταν

$$100 \cdot \left(1 + 41 \cdot \frac{0.03}{12}\right) \backsimeq 110.25$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 65** *Έστω ότι κεφάλαιο 100 Ευρώ τοκίζεται για 3 έτη και 35 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3%. Ποιο είναι το τελικό ποσό;*

**Απάντηση.** Δουλεύοντας παρόμοια έχουμε ότι το τελικό ποσό θα είναι

$$K_{3+\frac{35}{360}} = 100 \cdot (1+0.03)^3 \cdot \left(1 + \frac{35 \cdot 0.03}{360}\right)$$

□

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 66** *Έστω ότι κεφάλαιο ανατοκίζεται για 5 έτη με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3% και έχει τελική αξία 300 Ευρώ. Ποιο ήταν το αρχικό κεφάλαιο;*

**Απάντηση.** Θα ισχύει η παρακάτω σχέση

$$\begin{aligned} K_5 &= K \cdot (1+0.03)^5 \Rightarrow \\ K &= \frac{K_5}{(1+0.03)^5} = \frac{300}{(1+0.03)^5} \end{aligned}$$

□

**'ΣΚΗΣΗ 67** *Έστω ότι κεφάλαιο 100 Ευρώ τοκίζεται για 3 έτη και 2 μήνες με ετήσιο επιτόκιο τριμηνιαίου ανατοκισμού 3%. Ποιο είναι το τελικό ποσό;*

**ΛΥΣΗ.** Εφόσον οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται κάθε τρίμηνο μπορούμε να μετατρέψουμε το χρονικό διάστημα σε τρίμηνα. Έτσι έχουμε ότι ο συνολικός χρόνος είναι 12 τρίμηνα και 2/3 του τριμήνου. Στη συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε το ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου το οποίο είναι το $i' = \frac{0.03}{4}$. 'ρα το τελικό ποσό θα είναι

$$\underbrace{100 \cdot \left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^{12}}_{\text{τύπος ανατοκισμού}} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{0.03}{4}\right) \backsimeq 109.9275932$$

Όπως βλέπουμε χρησιμοποιήσαμε τον τύπο του ανατοκισμού για να υπολογίσουμε το τελικό κεφάλαιο μετά από 12 τρίμηνα. Στην συνέχεια υπολογίζουμε το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο το οποίο είναι $\frac{0.03}{12}$ και μετά εφαρμόζουμε στο κεφάλαιο που προκύπτει έπειτα από 12 τρίμηνα το τύπο απλού τόκου.
Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον γενικευμένο τύπο ανατοκισμού 5.2. Για να γίνει αυτό μετατρέπουμε την χρονική διάρκεια σε ημέρες, δηλαδή $N = 3 \cdot 360 + 2 \cdot 30 = 1.140$ ημέρες. Στην συνέχεια υπολογίζουμε το ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου το οποίο είναι το $\frac{0.03}{4} = 0.0075$. Έπειτα αντικαθιστούμε στον γενικευμένο τύπο ανατοκισμού (ο οποίος αναφέρεται σε αρχικό κεφάλαιο 1 Ευρώ) και έχουμε

$$100 \cdot (1+0.0075)^{[\frac{1140}{90}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{1140}{90} - [\frac{1140}{90}]\right) \cdot 0.0075\right)$$

Όμως $\frac{1140}{90} \backsimeq 12.66666667$ επομένως $[\frac{1140}{90}] = 12$ ενώ $\frac{1140}{90} - [\frac{1140}{90}] \backsimeq 0.66666667$. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$100 \cdot (1 + 0.0075)^{12} \cdot (1 + 0.66666667 \cdot 0.0075) \backsimeq 109,9275932$$

□

## 5.2 Ισοδύναμα Επιτόκια

Ας υποθέσουμε ότι μια τράπεζα χρησιμοποιεί ετήσιο επιτόκιο $i_1$ τριμηνιαίου ανατοκισμού ενώ μια άλλη τράπεζα χρησιμοποιεί ετήσιο επιτόκιο $i_2$ εξαμηνιαίου ανατοκισμού. Αν τα επιτόκια είναι ίσα τότε είναι εύκολο να καταλάβουμε ότι η πρώτη τράπεζα είναι αποδοτικότερη διότι κεφαλαιοποιεί τους τόκους συχνότερα. Αν όμως τα επιτόκια δεν είναι ίσα τότε δεν είναι εύκολο να βγάλουμε συμπέρασμα για το ποια τράπεζα είναι συμφέρουσα έναντι της άλλης. Μάλιστα, εξαρτάται και από το χρονικό διάστημα στο οποίο σκοπεύουμε να τοκίσουμε τα χρήματά μας.
Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι η τράπεζα $T_1$ έχει ετήσιο επιτόκιο τριμηνιαίου ανατοκισμού 2% ενώ η τράπεζα $T_2$ έχει ετήσιο επιτόκιο εξαμηνιαίου ανατοκισμού 2.01% Έχουμε στην διάθεση μας το ποσό των 3.000 Ευρώ το οποίο σκοπεύουμε να τοποθετήσουμε σε μια από τις δυο τράπεζες για 8 μήνες.
Προκειμένου να αποφασίσουμε ποια τράπεζα θα αποδώσει περισσότερα αρκεί να υπολογίσουμε το τελικό ποσό που θα έχουμε και στις δυο τράπεζες.
Αν τοποθετήσω τα χρήματά μου στην τράπεζα $T_1$ μετά από έξι μήνες θα έχουν γίνει

$$3.000 \cdot \left(1 + i'\right)^2 = 3.000 \cdot \left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^2 = 3.030,075$$

Εδώ υπολογίσαμε το ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου το οποίο είναι $i' = \frac{0.02}{4}$. Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το τελικό κεφάλαιο μετά την πάροδο των δυο μηνών και θα έχουμε

$$3.030 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot i'\right) = 3.030 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{0.02}{4}\right) \backsimeq 3.040,175$$

Από την άλλη μεριά, αν τοποθετήσω τα χρήματά μου στην τράπεζα $T_2$ στο τέλος του εξαμήνου θα έχω τελικό κεφάλαιο

$$3.000 \cdot (1 + i') = 3.000 \cdot \left(1 + \frac{0.0201}{2}\right) = 3.031,15$$

Στο τέλος του οκταμήνου θα έχω

$$3.031,15 \cdot \left(1 + \frac{2}{6} \cdot \frac{0.021}{2}\right) \backsimeq 3.041,3$$

'ρα συμφέρει να τοποθετήσω τα χρήματά μου στην τράπεζα $T_2$.

Με ποιο επιτόκιο θα έπρεπε να τοκίζει η τράπεζα $T_2$ για να έχουμε το ίδιο όφελος στο τέλος του εξαμήνου; Έστω ότι αυτό είναι το $i_3$ επομένως το ονομαστικό επιτόκιο θα είναι $i_3' = \frac{i_3}{2}$. 'ρα το τελικό ποσό στην τράπεζα $T_2$ θα είναι

$$3.000 \cdot \left(1 + \frac{i_3}{2}\right)$$

Για να έχω την ίδια απόδοση και στις δυο τράπεζες θα πρέπει να εξισώσω το ποσό αυτό με το ποσό που αποδίδει η τράπεζα $T_1$ στο εξάμηνο, δηλαδή πρέπει να ισχύει $3.000 \cdot (1 + \frac{i_3}{2}) = 3.030, 75$. Λύνοντας ως προς το $i_3$ έχουμε ότι $i_3 = 0.02005$.
Στο τέλος του οκταμήνου τι απόδοση θα έχουν;
Στην τράπεζα $T_2$ με ετήσιο επιτόκιο 0.02005 εξαμηνιαίου ανατοκισμού στο τέλος του οκταμήνου το ποσό θα είναι

$$3.030, 075 \cdot \left(1 + \frac{2}{6} \cdot \frac{0.02005}{2}\right) \backsimeq 3.040, 2$$

Παρατηρούμε ότι στο τέλος του πρώτου εξαμήνου η τράπεζα $T_2$ έχει την ίδια απόδοση με την $T_1$ όταν χρησιμοποιεί το επιτόκιο $i_3$ αλλά παρόλα αυτά στο τέλος του οκταμήνου έχει μεγαλύτερη απόδοση.
Ας υπολογίσουμε τώρα την απόδοση που έχουν οι δυο τράπεζες μετά από $n$ εξάμηνα όταν χρησιμοποιούν 0.02 και 0.02005 ως επιτόκια αντίστοιχα.
Η τράπεζα $T_1$ θα έχει τελικό ποσό μετά από $n$ εξάμηνα

$$3.000 \cdot \left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^{2n}$$

ενώ η τράπεζα $T_2$ θα έχει τελικό ποσό μετά από $n$ εξάμηνα

$$3.000 \cdot \left(1 + \frac{0.02005}{2}\right)^{n}$$

Όμως $3.000 \cdot \left(1 + \frac{0.02}{4}\right)^2 = 3.030, 075 = 3.000 \cdot \left(1 + \frac{0.02005}{2}\right)$ άρα τα ποσά ταυτίζονται μετά από την πάροδο $n$ εξαμήνων.
Με τους παραπάνω υπολογισμούς μπορούμε να πούμε ότι τα ετήσια επιτόκια $i_1 = 0.02$ τριμηνιαίου ανατοκισμού και $i_3 = 0.02005$ εξαμηνιαίου ανατοκισμού είναι ισοδύναμα αφού αποδίδουν τα ίδια χρήματα σε $n$ εξάμηνα. Παρόλα αυτά σε μια (ενδιάμεση) περίοδο 8 μηνών το δεύτερο είναι αποδοτικότερο. Αν σκοπεύουμε να τοποθετήσουμε τα χρήματά μας για μεγάλο χρονικό διάστημα χωρίς να έχουμε προγραμματίσει συγκεκριμένο χρονικό διάστημα εκταμίευσης τότε μπορούμε να επιλέξουμε όποια από τις δυο τράπεζες θέλουμε χρησιμοποιώντας άλλα κριτήρια. Ένα τέτοιο κριτήριο είναι η αξιοπιστία της κάθε τράπεζας.
Σημειώστε ότι όλα τα παραπάνω ισχύουν για οποιοδήποτε ποσό που πρόκειται να τοκισθεί.
Για τους παραπάνω λόγους δίνουμε τον επόμενο ορισμό των ισοδύναμων επιτοκίων.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 68** *Θεωρούμε τα επιτόκια $i_1, i_2, \cdots, i_n$ σε χρονικές περιόδους $t_1, t_2, \cdots, t_n$ εκφρασμένα σε ημέρες. Έστω $k = ΕΚΠ(t_1, t_2, \cdots, t_n)$. Τότε τα επιτόκια $i_1, i_2, \cdots, i_n$ θα λέγονται ισοδύναμα όταν ίσα ποσά που τοκίζονται στις περιόδους $t_1, t_2, \cdots, t_n$ με επιτόκια $i_1, i_2, \cdots, i_n$ έχουν ίσες τελικές αξίες σε πολλαπλάσια της περιόδου $k$.*

Συνήθως τα επιτόκια στα οποία θα εφαρμόζουμε τον παραπάνω ορισμό είναι τα ονομαστικά επιτόκια και οι χρονικές μονάδες $t_1, \cdots, t_n$ θα είναι αυτές που αφορούν τα ονομαστικά επιτόκια.

**'ΣΚΗΣΗ 69** *Έστω ότι η τράπεζα $T_1$ χρησιμοποιεί ετήσιο επιτόκιο 3% τριμηνιαίου ανατοκισμού. Ποιο είναι το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο της τράπεζας $T_2$ μηνιαίου ανατοκισμού;*

**ΛΥΣΗ.** Τα ποσά που τοκίζονται στην τράπεζα $T_1$ ανατοκίζονται κάθε τρίμηνο με ετήσιο επιτόκιο 3%. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να τοκίζονται κάθε τρεις μήνες με επιτόκιο $\frac{3}{4}$% το οποίο είναι στην ουσία το ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου του αρχικού επιτοκίου.
Ας συμβολίσουμε με $i_2$ το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού της τράπεζας $T_2$. Τότε το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο είναι $\frac{i_2}{12}$.
Σε αυτό το πρόβλημα η χρονική μονάδα $t_1$ που αναφέρεται στο πρώτο επιτόκιο είναι το τρίμηνο ή 90 ημέρες. Ενώ η χρονική μονάδα που αναφέρεται στο δεύτερο επιτόκιο είναι οι 30 ημέρες. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το ΕΚΠ(30,90) είναι οι 90 ημέρες (τρεις μήνες). Για να υπολογίσω λοιπόν το ισοδύναμο επιτόκιο της δεύτερης τράπεζας θα πρέπει να τοκίσω 1 Ευρώ για τρεις μήνες με το ονομαστικό επιτόκιο της τράπεζας $T_1$ και 1 Ευρώ για τρεις μήνες με το ονομαστικό επιτόκιο της τράπεζας $T_2$. Στην συνέχεια θα εξισώσω τα ποσά και θα βρω το $i_2$.
Για την τράπεζα $T_1$ θα έχω ότι το 1 Ευρώ μετά από τρεις μήνες θα είναι

$$1 + \frac{0.03}{4} = 1.0075$$

Από την άλλη μεριά αν τοκίσω 1 Ευρώ στην τράπεζα $T_2$ για τρεις μήνες θα έχω

$$\left(1 + \frac{i_2}{12}\right)^3$$

Εξισώνουμε τα δυο παραπάνω ποσά για να πάρουμε την επόμενη ισότητα

$$\left(1 + \frac{i_2}{12}\right)^3 = 1.0075$$

Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση προκύπτει ότι $i_2 \simeq 0.0299$, μικρότερο δηλαδή από 0.03 όπως αναμενόταν αφού η τράπεζα $T_2$ ενσωματώνει τους τόκους συχνότερα. □

**'ΣΚΗΣΗ 70** *Έστω ότι η τράπεζα $T_1$ χρησιμοποιεί ετήσιο επιτόκιο 4μηνιαίου ανατοκισμού το 3% και έστω ότι η τράπεζα $T_2$ χρησιμοποιεί ετήσιο επιτόκιο ημερήσιου ανατοκισμού το 2.8%. Σε ποια τράπεζα συμφέρει να τοποθετήσω τα χρήματά μου;*

**Λυση.** Το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο της τράπεζας $T_1$ είναι το $\frac{0.03}{3}$ ενώ το ονομαστικό επιτόκιο της τράπεζας $T_2$ είναι το $\frac{0.028}{360}$.
Η χρονική μονάδα που αναφέρεται στο ονομαστικό επιτόκιο της τράπεζας $T_1$ είναι οι 30 ημέρες ενώ η χρονική μονάδα που αναφέρεται στο ονομαστικό επιτόκιο της τράπεζας $T_2$ είναι η μια ημέρα. Προφανώς το ΕΚΠ(1,30) είναι οι 30 ημέρες.
Αν τοκίσω 1 Ευρώ στην τράπεζα $T_1$ για 30 ημέρες το τελικό ποσό θα είναι

$$1 + \frac{0.03}{3} = 1.01$$

Αν τοκίσω 1 Ευρώ στην τράπεζα $T_2$ για 30 ημέρες το τελικό ποσό θα είναι

$$\left(1 + \frac{0.028}{360}\right)^{30} = 1.002$$

Αυτό σημαίνει ότι συμφέρει να τοποθετήσω τα χρήματά μου στην τράπεζα $T_1$. □

**'Σκηση 71** *Έστω ότι η τράπεζα $T_1$ χρησιμοποιεί εξαμηνιαίο επιτόκιο 1% μηνιαίου ανατοκισμού. Ποιο είναι το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο εξαμηνιαίου ανατοκισμού;*

**Λυση.** Η τράπεζα $T_1$ χρησιμοποιεί εξαμηνιαίο επιτόκιο 1% μηνιαίου ανατοκισμού. Το ονομαστικό επιτόκιο εβδομάδας θα είναι $\frac{0.01}{6}$. Η χρονική περίοδος που αναφέρεται στο ονομαστικό αυτό επιτόκιο είναι οι 30 ημέρες.
Αν το ετήσιο επιτόκιο εξαμηνιαίου ανατοκισμού είναι το $i_2$ τότε το ονομαστικό επιτόκιο εξαμήνου θα είναι το $\frac{i_2}{2}$ και η χρονική μονάδα θα είναι οι 180 ημέρες.
Το ΕΚΠ(30,180) είναι το 180.
Αν τοκίσω ένα Ευρώ με το εξαμηνιαίο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού για 180 ημέρες τότε θα έχω ως τελικό ποσό

$$\left(1 + \frac{0.01}{6}\right)^{6} \backsimeq 1.01$$

Αν τοκίσω ένα Ευρώ με το ετήσιο επιτόκιο εξαμηνιαίου ανατοκισμού τότε μετά από 180 ημέρες θα έχω τελικό ποσό

$$1 + \frac{i_2}{2}$$

Εξισώνοντας τα δυο αυτά ποσά και λύνοντας ως προς το $i_2$ προκύπτει ότι $i_2 \backsimeq 0.02$ ή αλλιώς $i_2 \backsimeq 2\%$. □

**Παραδειγμα 72** *Έστω κεφάλαιο Κ τοκίζεται για 3 χρόνια και 5 μήνες με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3%. Ποιο είναι το ισοδύναμο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού;*

**Απάντηση.** Εδώ μας ζητείται να υπολογίσουμε το ισοδύναμο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού (δηλαδή $t_2 = 30$ ημέρες) όταν γνωρίζουμε το επιτόκιο ετησίου ανατοκισμού (δηλαδή $t_1 = 360$ ημέρες). Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο εδώ είναι οι 360 ημέρες. Επομένως, η ισοδυναμία θα ισχύει για πολλαπλάσια του ενός έτους.

Θα υποθέσουμε ότι το κεφάλαιο $K$ τοκίζεται για 1 χρόνο με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3%. Το τελικό κεφάλαιο θα είναι

$$K_1 = K \cdot (1 + 0.03)$$

Για να βρω το ισοδύναμο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού θα υποθέσω ότι το κεφάλαιο τοκίζεται για 1 χρόνο με μηνιαίο επιτόκιο ανατοκισμού $i^{'}$. Το τελικό κεφάλαιο θα είναι

$$K_1^{'} = K \cdot (1 + i^{'})^{12}$$

Απαιτώντας τα τελικά ποσά να είναι ίδια λαμβάνω μια εξίσωση με άγνωστο το ισοδύναμο μηνιαίο επιτόκιο ανατοκισμού $i^{'}$. Αυτό θα παραμένει ισοδύναμο για κεφάλαια τοκιζόμενα σε χρονικές διάρκειες πολλαπλάσια του ενός χρόνου. Επομένως, έπειτα από τρία χρόνια τα αντίστοιχα κεφάλαια θα είναι ίσα, δηλαδή

$$K \cdot (1 + i)^3 = K \cdot (1 + i^{'})^{36}$$

Όμως δεν είναι σωστό να συσχετίσω τα επιτόκια για το χρονικό διάστημα 3 χρόνων και πέντε μηνών. $\square$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 73** *Έχουμε δει πως όταν δυο επιτόκια είναι ισοδύναμα τότε τα τοκιζόμενα ποσά έχουν ίδιες αξίες κατά τις χρονικές περιόδους που είναι πολλαπλάσια του ΕΚΠ($t_1, t_2$). Εδώ $t_1, t_2$ είναι οι χρονικές μονάδες των δυο επιτοκίων αντίστοιχα. Μεταξύ των χρονικών αυτών μονάδων τι ακριβώς συμβαίνει;*
*Αν τοκίσουμε ένα Ευρώ με επιτόκιο $i_1$ που αντιστοιχεί σε χρονική μονάδα $t_1$ (σε ημέρες) τότε μετά από $N$ ημέρες θα έχει γίνει*

$$(1 + i_1)^{[\frac{N}{t_1}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{N}{t_1} - [\frac{N}{t_1}]\right) \cdot i_1\right)$$

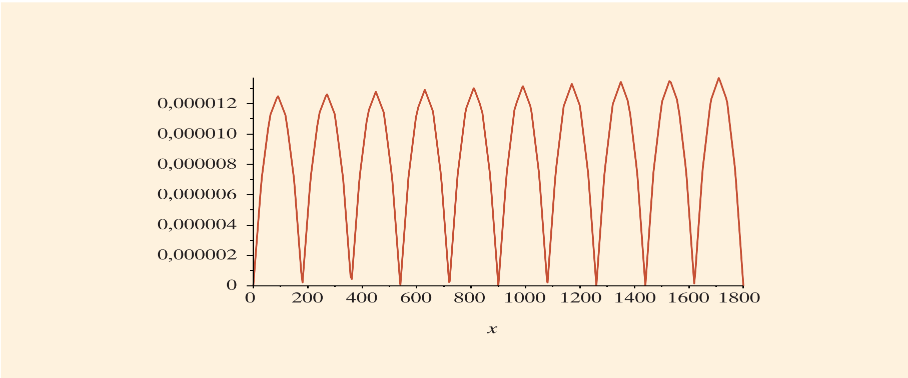
*όπου $[x]$ είναι το ακέραιο μέρος του $x$. Παρόμοια, για το επιτόκιο $i_2$ σε χρονική μονάδα $t_2$.*
*Μας ενδιαφέρει η διαφορά τους καθώς το $N$ αυξάνεται μεταξύ 0 και μιας χρονικής περιόδου $T$, π.χ. 2 χρόνια. Ας το δούμε στα δεδομένα του παραδείγματος 71. Εκεί έχουμε εξαμηνιαίο επιτόκιο $i_1 = 0.01$ μηνιαίου ανατοκισμού και το ισοδύναμό του είναι το ετήσιο επιτόκιο $i_2 \backsimeq 0.02$ εξαμηνιαίου ανατοκισμού.*
*Αν ένα Ευρώ τοκισθεί για $N$ ημέρες με τον πρώτο τρόπο θα δώσει τελικό ποσό*

$$\left(1 + \frac{0.01}{6}\right)^{[\frac{N}{30}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{N}{30} - [\frac{N}{30}]\right) \cdot \frac{0.01}{6}\right)$$

*Αντίστοιχα αν ένα Ευρώ τοκισθεί για $N$ ημέρες με τον δεύτερο τρόπο θα δώσει τελικό ποσό*

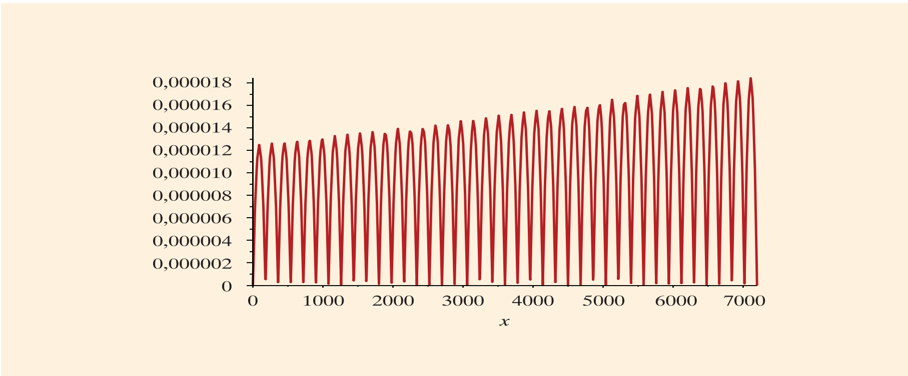
$$\left(1 + \frac{0.02}{2}\right)^{[\frac{N}{180}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{N}{1800} - [\frac{N}{180}]\right) \cdot \frac{0.02}{2}\right)$$

*Αφαιρώντας το πρώτο ποσό από το δεύτερο προκύπτει ότι μεταξύ των πολλαπλασίων των 180 ημερών υπερτερεί ο δεύτερος τρόπος τοκισμού. Αυτό φαίνεται στο σχήμα 5.1.*



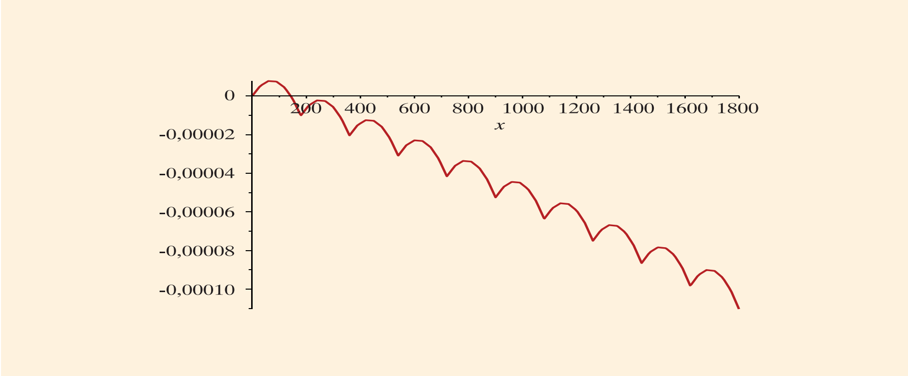

Σχήμα 5.1: Διαφορά των ποσών όταν τοκιστούν για 1800 ημέρες

*Μπορούμε επιπλέον να παρατηρήσουμε ότι σε κάθε ενδιάμεσο χρονικό διάστημα η μέγιστη τιμή της διαφοράς αυξάνεται. Αυτό φαίνεται καλύτερα στο σχήμα 5.2.*




Σχήμα 5.2: Η μέγιστη τιμή της διαφοράς αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου

*Αν τώρα τοκίσουμε ένα Ευρώ με τον πρώτο τρόπο αλλά με ελάχιστα παραπάνω επιτόκιο, δηλαδή π.χ.* $i_1 = 0.01001$ *τότε γνωρίζουμε ότι μετά από κάποιο χρονικό διάστημα ο πρώτος τρόπος υπερτερεί. Μπορούμε να δούμε στο σχήμα 5.3 πως ακριβώς συμβαίνει αυτό.*




Σχήμα 5.3: Διαφορά των ποσών όταν τοκιστούν για 1800 ημέρες αλλά με επιτόκιο 0.01001 στον πρώτο τρόπο

*Βλέπουμε ότι για τις πρώτες ημέρες πάλι υπερτερεί ο δεύτερος τρόπος τοκισμού. Παρόλα αυτά τελικά υπερτερεί ο πρώτος τρόπος αφού τώρα τοκίζουμε με λίγο παραπάνω επιτόκιο από το ισοδύναμο.*

**ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 74** *Από τα προηγούμενα βγάζουμε το συμπέρασμα ότι αν το $i_1$ αναφέρεται σε $t_1$ χρονικές μονάδες τότε για τις χρονικές μονάδες $t_2 \neq t_1$ δεν υπάρχει επιτόκιο $i_2$ τέτοιο ώστε ένα ποσό που τοκίζεται με τον ένα ή τον άλλο τρόπο να έχει την ίδια απόδοση για κάθε μελλοντική χρονική στιγμή. Μπορεί να βρει κανείς επιτόκιο $i_2$ κατά το οποίο ένα ποσό να έχει την ίδια απόδοση σε μια συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή ή μπορεί να υπολογίσει το ισοδύναμο επιτόκιο (δες ορισμό 68) κατά το οποίο το τοκιζόμενο ποσό θα έχει την ίδια απόδοση σε όλες τις μελλοντικές χρονικές στιγμές που είναι όμως πολλαπλάσιες του ΕΚΠ$(t_1, t_2)$. Αν διαταράξουμε λίγο το ισοδύναμο επιτόκιο $i_2$ τότε οι αποδόσεις θα αλλάξουν ακόμη και κατά τις χρονικές στιγμές που είναι πολλαπλάσια του ΕΚΠ$(t_1, t_2)$ και μάλιστα θα είναι σταθερά υπέρ του ενός ή του άλλου επιτοκίου. Δηλαδή το κοντινότερο που μπορούμε να πετύχουμε σε «ισότητα» τοκιζόμενων ποσών σε μελλοντικούς χρόνους επιτυγχάνεται με το ισοδύναμο επιτόκιο όπως ορίσθηκε στον ορισμό 68. Παρακάτω θα ορίσουμε το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού κάτω από το οποίο είναι εφικτός ο ορισμός ισοδύναμων επιτοκίων με την ισχυρή έννοια, δηλαδή ίσα ποσά θα δίνουν ίσες τελικές αξίες σε όλους τους μελλοντικούς χρόνους.*

## 5.3 Εύρεση του χρόνου τοκισμού

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 75** *Έστω ότι κεφάλαιο 500 Ευρώ ανατοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3% και τελική αξία 550 Ευρώ. Πόσο χρόνο ανατοκίστηκε;*

**Απάντηση.** Υποθέτουμε ότι έχει τοκισθεί για $n$ χρόνια και $m < 360$ ημέρες. Επιλέγουμε αυτή τη μορφή διάρκειας διότι η περίοδος ανατοκισμού είναι ετήσια. Αν ήταν τριμηνιαία, μηνιαία κ.τ.λ. θα υποθέταμε ότι έχει τοκισθεί για $n$ τρίμηνα ή μήνες και $m$ ημέρες. Επομένως, το τελικό κεφάλαιο θα έχει τη μορφή

$$K_t = K\,(1+i)^n \cdot \left(1 + \frac{m}{360} \cdot i\right)$$

Εδώ γνωρίζουμε τα $K_t = 550$, $K = 500$, $i = 0.03$ και ψάχνουμε τα $n, m$. Ας υπολογίσουμε πρώτα τα χρόνια που έχει τοκισθεί. Αν το κεφάλαιο $K$ τοκισθεί για $n$ χρόνια (και όχι για $n$ χρόνια **και** $m$ ημέρες) θα έχει τελική αξία μικρότερη του $K_t$, δηλαδή

$$K_t^n = K(1+i)^n \leq K_t$$

Αν τοκισθεί για $n+1$ χρόνια τότε η τελική αξία θα είναι μεγαλύτερη του $K_t$, δηλαδή

$$K_t \leq K_t^{n+1} = K(1+i)^{n+1}$$

Ισχύει λοιπόν η ανισότητα

$$K(1+i)^n \leq K_t \leq K(1+i)^{n+1}$$

Εφαρμόζουμε το λογάριθμο κατά μέλη (και αφού είναι αύξουσα συνάρτηση) έχουμε

$$\begin{aligned} n\ln(1+i) &\leq \ln\frac{K_t}{K} \leq (n+1)\ln(1+i) \Rightarrow \\ n &\leq \frac{\ln\frac{K_t}{K}}{\ln(1+i)} \leq n+1 \end{aligned}$$

Επειδή γνωρίζουμε την ποσότητα $\frac{\ln\frac{K_t}{K}}{\ln(1+i)}$ την υπολογίζουμε και βλέπουμε μεταξύ ποιων ακέραιων βρίσκεται. Οπότε

$$n = \left[\frac{\ln\frac{K_t}{K}}{\ln(1+i)}\right]$$

Ξαναγυρνάμε στη σχέση

$$K_t = K(1+i)^n \left(1 + \frac{m}{360} \cdot i\right)$$

και υπολογίζουμε και το $m$ αφού τώρα όλα τα υπόλοιπα είναι γνωστά. □

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 76** *Έστω κεφάλαιο* 500 *τοκίζεται με μηνιαίο επιτόκιο ανατοκισμού* 1% *και η τελική αξία του είναι 580. Για πόσο διάστημα τοκίστηκε;*

**Απάντηση.** Εδώ το επιτόκιο ανατοκισμού είναι μηνιαίο επομένως θα υποθέσουμε ότι τοκίστηκε για $n$ μήνες και $m$ ημέρες. Το τελικό κεφάλαιο θα ικανοποιεί

$$K_t = K \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + \frac{m}{30} \cdot i\right)$$

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική με το προηγούμενο παράδειγμα υπολογίζουμε πρώτα τους μήνες $n$ και έπειτα τις ημέρες $m$. □

**Παραδειγμα 77** *Έστω κεφάλαιο* 500 *Ευρώ τοκίζεται με τριμηνιαίο επιτόκιο* 2% *και η τελική αξία του είναι 560. Για πόσο διάστημα τοκίστηκε;*

**Απάντηση.** Θα υποθέσουμε ότι τοκίστηκε για $n$ τρίμηνα και $m$ μήνες. Για να γίνει αυτό πρέπει να μετατρέψουμε τους $m$ μήνες σε τρίμηνα. Επομένως το τελικό κεφάλαιο θα έχει τη μορφή

$$K_t = K \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + \frac{m}{3} \cdot i\right)$$

Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι έχει τοκισθεί για $n$ τρίμηνα και $m$ ημέρες. Για να γίνει αυτό θα μετατρέψουμε τις $m$ ημέρες σε τρίμηνα. Τότε το τελικό κεφάλαιο θα έχει τη μορφή

$$K_t = K \cdot (1+i)^n \cdot \left(1 + \frac{m}{90} \cdot i\right)$$

□

**'Σκηση 78** *Έστω ότι 500 Ευρώ τοκίστηκαν για ένα χρονικό διάστημα με εξαμηνιαίο επιτόκιο 2% μηνιαίου ανατοκισμού και το τελικό ποσό είναι 550 Ευρώ. Ποιο είναι το χρονικό διάστημα που τοκίστηκε το αρχικό ποσό;*

**Λυση.** Το ονομαστικό μηνιαίο επιτόκιο είναι $\frac{0.002}{6}$. Το χρονικό διάστημα που ψάχνουμε το χωρίζουμε σε $n$ μήνες και $m$ ημέρες.
Η εξίσωση λοιπόν είναι η εξής

$$550 = 500 \cdot \left(1 + \frac{0.002}{6}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{m}{30} \cdot \frac{0.002}{6}\right)$$

Λύνουμε την εξίσωση κατά τα γνωστά υπολογίζοντας πρώτα το $n$ και έπειτα το $m$.

□

## 5.4 Εύρεση του Επιτοκίου

**Παραδειγμα 79** *Έστω κεφάλαιο* 500 *Ευρώ τοκίζεται για 3 χρόνια 2 μήνες και 20 ημέρες με μηνιαίο επιτόκιο ανατοκισμού $i$ και το τελικό ποσό είναι 550. Να βρεθεί το επιτόκιο.*

**Απάντηση.** Αφού το επιτόκιο ανατοκισμού είναι μηνιαίο τότε θα πρέπει να μετατρέψουμε τη διάρκεια σε μήνες και ημέρες. Προκύπτει λοιπόν ότι έχει τοκισθεί για 38 μήνες και 20 ημέρες. Το τελικό κεφάλαιο θα έχει τη μορφή

$$K_t = K \cdot (1+i)^{38} \cdot \left(1 + \frac{20}{30} \cdot i\right)$$

Αν τοκίσουμε το ίδιο ποσό για χρονική περίοδο 38 μηνών θα έχει τελικό κεφάλαιο

$$K_{38} = 500 \cdot (1+i)^{38} < 550$$

Παρομοίως, αν τοκιστεί για χρονική περίοδο 39 μηνών θα έχει τελικό κεφάλαιο

$$K_{39} = 500 \cdot (1+i)^{39} > 550$$

Λύνοντας τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι

$$0.002446839 < i < 0.002511311$$

Επειδή ο χρόνος τοκισμού είναι πιο κοντά στους 39 μήνες, για την ακρίβεια είναι 38 μήνες και 2/3 του μήνα, μπορούμε να θεωρήσουμε ως μια προσέγγιση του επιτοκίου τον αριθμό

$$\frac{2}{3} \cdot 0.002446839 + \frac{1}{3} \cdot 0.002511311 = 0.002468329667$$

Κάνοντας την επαλήθευση, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} & 500 \cdot (1+0.002468329667)^{38} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot 0.002468329667\right) \\ = \ & 550.0082448 \end{aligned}$$

Δηλαδή η εκτίμησή μας είναι αρκετά καλή. □

Μπορούμε να προσεγγίσουμε καλύτερα το επιτόκιο χρησιμοποιώντας την μέθοδο του Νεύτωνα.

### 5.4.1 Μέθοδος του Νεύτωνα για εύρεση ρίζας συνάρτησης

Θα περιγράψουμε την μέθοδο του Νεύτωνα (δες θεώρημα ;;) η οποία χρησιμοποιείται για την εύρεση της ρίζας μιας συνάρτησης. Έστω $f : I \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός είναι συνεχής. Δημιουργούμε την ακολουθία αριθμών

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{(μέθοδος του Νεύτωνα)}$$

θέτοντας $x_0$ μια αρχική τιμή κοντά στην ρίζα της συνάρτησης. Αποδεικνύεται ότι η ακολουθία αριθμών $x_n$ τείνει στην ρίζα της συνάρτησης $f$.

**'ΣΚΗΣΗ 80** *Έστω ότι το ποσό των 500 Ευρώ τοκίζεται για 5 μήνες και 20 ημέρες και δίνει τελικό ποσό 510 Ευρώ. Ποιο είναι το ετήσιο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού;*

**ΛΥΣΗ.** Αν το ετήσιο επιτόκιο είναι το $i$ τότε το μηνιαίο ονομαστικό επιτόκιο είναι το $\frac{i}{12}$. Συνεπώς ισχύει ότι

$$510 = 500 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^5 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{i}{12}\right)$$

Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο του Νεύτωνα για να προσεγγίσουμε το επιτόκιο αλλά χρειαζόμαστε μια αρχική τιμή. Αν τοκίσουμε το ποσό για 5 μήνες ή για έξι μήνες τότε

$$500 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^5 < 510 < 500 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^6$$

Από τις παραπάνω ανισότητες προκύπτει ότι

$$0.03968379 < i < 0.04762055$$

Θα χρησιμοποιήσουμε ως αρχική τιμή τον αριθμό

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} \cdot 0.03968379 + \frac{1}{3} \cdot 0.04762055 \\ = \; & 0.04232937667 \end{aligned}$$

Πρώτα από όλα θα κατασκευάσουμε την συνάρτηση $f$ για την οποία θα υπολογίσουμε την ρίζα της. Από την ισότητα

$$510 = 500 \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^5 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{i}{12}\right)$$

έχουμε ότι αν $f(x) = 500 \cdot \left(1 + \frac{x}{12}\right)^5 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{12}\right) - 510$ τότε η ρίζα της $f$ θα είναι το ζητούμενο επιτόκιο. Θέτουμε $x_0 = 0.04232937667$ και υπολογίζουμε το $x_1$ το οποίο είναι

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.04200547168$$

Στην συνέχεια δημιουργούμε το $x_2$ ως εξής

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.04200545085$$

Μπορούμε τώρα να κάνουμε μια επαλήθευση δεχόμενοι ως επιτόκιο την τελευταία τιμή $x_2$ διότι διαπιστώνουμε ότι ο $x_2$ όρος δεν διαφέρει πολύ από τον $x_1$. Αντικαθιστώντας όπου $i$ το $x_2$ στην αρχική εξίσωση έχουμε

$$\begin{aligned} & 500 \cdot \left(1 + \frac{0.04200545085}{12}\right)^5 \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{0.04200545085}{12}\right) \\ = \; & 509.9999989 \end{aligned}$$

'ρα το $i \backsimeq 04200545085$. Σε περίπτωση που δεν είμαστε ικανοποιημένοι με την ακρίβεια αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε και άλλους όρους της ακολουθίας της μεθόδου του Νεύτωνα ως ότου φτάσουμε στην επιθυμητή ακρίβεια. □

Όπως έχουμε δει, χρησιμοποιώντας τον γενικευμένο τύπο ανατοκισμού, η σχέση μεταξύ τελικού ποσού και αρχικού θα έχει την μορφή

$$K_t = K \cdot (1+i)^n \cdot (1+q\cdot i)$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $q \in [0,1]$. Έτσι, για να βρούμε το επιτόκιο θέτουμε την συνάρτηση

$$f(x) = K \cdot (1+x)^n \cdot (1+q\cdot x) - K_t$$

Η παράγωγος έχει την μορφή

$$f^{'}(x) = K \cdot n \cdot (1+x)^{n-1} \cdot (1+q\cdot x) + K\cdot q\cdot (1+x)^n$$

οπότε ο λόγος

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{f'(x)} &= \frac{K\cdot(1+x)^n\cdot(1+q\cdot x) - K_t}{K\cdot n\cdot(1+x)^{n-1}\cdot(1+q\cdot x)+K\cdot q\cdot(1+x)^n} \\ &= \frac{(1+x)(1+q\cdot x) - \frac{K_t}{K(1+x)^{n-1}}}{1+2qx+q} \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι στην περίπτωση που μας ενδιαφέρει οι υπολογισμοί απλοποιούνται αρκετά. Όσον αφορά την αρχική τιμή αποδεικνύεται ότι μπορούμε να επιλέξουμε όποια θέλουμε. Επιλέγοντας $x_0 = 0.01$ θα οδηγηθούμε σίγουρα μετά από κάποια βήματα της μεθόδου του Νεύτωνα σε μια καλή προσέγγιση του επιτοκίου. Το πλήθος των βημάτων όμως μπορεί να είναι μεγάλο και για το λόγο αυτό είναι καλό να έχουμε μια καλή αρχική τιμή με το τρόπο που την υπολογίσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα. Έτσι θα προκύψει μια ανισότητα της μορφής

$$a < i < b$$

Μια καλή προσέγγιση είναι ο αριθμός $qa + (1-q)b$.

**'ΣΚΗΣΗ 81** *Έστω ότι το ποσό των 1.500 Ευρώ τοκίζεται για 8 μήνες και 25 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο i τριμηνιαίου ανατοκισμού και δίνει τελικό ποσό 1.600 Ευρώ. Ποιο είναι το επιτόκιο;*

**ΛΥΣΗ.** Το χρονικό διάστημα τοκισμού είναι 8 μήνες και 25 ημέρες. Αυτό πρέπει να μετατραπεί σε τρίμηνα οπότε έχουμε ότι είναι ίσο με 2 τρίμηνα, 2 μήνες και 25 ημέρες. Η χρονική περίοδος 2 μήνες και 25 ημέρες πρέπει να μετατραπούν σε κλάσμα του τριμήνου. Για τον λόγο αυτό μετατρέπουμε τους 2 μήνες και 25 ημέρες σε ημέρες και έχουμε ότι είναι 85 ημέρες. 'ρα το ζητούμενο κλάσμα είναι το $\frac{85}{90}$. Το ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου θα είναι $\frac{i}{4}$. Επομένως η εξίσωση αρχικού και τελικού ποσού είναι

$$1.600 = 1.500 \cdot \left(1+\frac{i}{4}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{85}{90}\cdot\frac{i}{4}\right)$$

Θέτουμε την συνάρτηση

$$f(x) = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{x}{4}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{85}{90} \cdot \frac{x}{4}\right) - 1.600$$

και υπολογίζουμε την παράγωγό της η οποία είναι

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= 1.500 \cdot 2 \cdot \left(1 + \frac{x}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{85}{90} \cdot \frac{x}{4}\right) \\ &\quad + 1.500 \cdot \left(1 + \frac{x}{4}\right)^2 \cdot \frac{85}{4 \cdot 90} \end{aligned}$$

Επομένως το κλάσμα $\frac{f(x)}{f^{'}(x)}$ γίνεται

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(1 + \frac{x}{4}) \cdot (1 + \frac{85}{90} \cdot \frac{x}{4}) - \frac{1.600}{1.500 \cdot (1 + \frac{x}{4})}}{2 \cdot (1 + \frac{85}{90} \cdot \frac{x}{4}) + (1 + \frac{x}{4}) \cdot \frac{85}{4 \cdot 90}}$$

Στην συνέχεια θέτουμε $x_0 = 0.01$ και υπολογίζουμε τον πρώτο όρο της ακολουθίας μέσω της μεθόδου του Νεύτωνα. Οπότε

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.03638485457$$

Έπειτα υπολογίζουμε το $x_2$ ως εξής

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.05380330293$$

Επειδή οι δυο τελευταίοι όροι διαφέρουν αρκετά θα συνεχίσουμε τους υπολογισμούς ως ότου ο τελευταίος δεν διαφέρει πολύ από τον προτελευταίο. Έτσι έχουμε μετά από αρκετές επαναλήψεις ότι το επιτόκιο είναι περίπου ίσο με $i = 0.08862551297$.
Όπως σε προηγούμενη άσκηση μπορούμε να δώσουμε μια αρχική τιμή στην μέθοδο του Νεύτωνα χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$1.500 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^2 < 1.600 < 1.500 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^3$$

Λύνοντας τις παραπάνω δυο ανισότητες προκύπτει ότι

$$0.086983640 < i < 0.131182236$$

Όπως πριν, μπορούμε να διαλέξουμε ως αρχική τιμή τον αριθμό

$$\begin{aligned} &\frac{85}{90} \cdot 0.086983640 + \frac{5}{90} \cdot 0.131182236 \\ = &\ 0.08943911756 \end{aligned}$$

Με αρχική τιμή τον αριθμό αυτό η μέθοδος του Νεύτωνα θα δώσει ως πρώτη προσέγγιση τον

$$x_1 = 0.08862567193$$

και ως δεύτερη προσέγγιση τον αριθμό

$$x_2 = 0.08862551144$$

Με δυο επαναλήψεις είμαστε ήδη πολύ κοντά στο ζητούμενο επιτόκιο. Εκ των υστέρων βλέπουμε ότι πράγματι είναι μια εξαιρετική αρχική τιμή για την μέθοδο του Νεύτωνα. □

## 5.5 Συνεχής Ανατοκισμός

Είχαμε δει σε προηγούμενη παράγραφο το πρόβλημα εύρεσης του επιτοκίου όταν όλα τα υπόλοιπα είναι γνωστά. Γενικά, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το επιτόκιο ακριβώς παρά μόνο να το προσεγγίσουμε. Αν το επιτόκιο αναφέρεται σε ημέρες τότε ο γενικευμένος τύπος ανατοκισμού είναι της μορφής

$$K_t = K \cdot (1+i)^N$$

όπου $N$ είναι το πλήθος των ημερών. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να υπολογίσουμε το επιτόκιο ακριβώς όταν όλα τα υπόλοιπα στοιχεία είναι γνωστά. Για αυτό το λόγο αλλά και για άλλους είναι χρήσιμη η έννοια του συνεχή ανατοκισμού, δηλαδή κεφαλαιοποιώ τον τόκο κάθε στιγμή. Στην συνέχεια θα περιγράψουμε πως αυτό είναι εφικτό από μαθηματικής άποψης.
Υποθέτουμε ότι ένα κεφάλαιο $K$ ανατοκίζεται κάθε περίοδο $t_1$ (π.χ. ένα έτος) με επιτόκιο $i$. Χωρίζουμε την κάθε χρονική περίοδο $t_1$ σε $n$ ίσες υποπεριόδους $t_n$ και άρα $t_n = \frac{t_1}{n}$. Αν ο τόκος κεφαλαιοποιείται σε κάθε υποπερίοδο τότε το τελικό κεφάλαιο σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t$ θα είναι

$$K_t^n = K \cdot \left(1+\frac{i}{n}\right)^{[\frac{nt}{t_1}]} \cdot \left(1+\left(\frac{nt}{t_1}-[\frac{nt}{t_1}]\right)\cdot\frac{i}{n}\right)$$

ή αλλιώς

$$K_t^n = K \cdot \left(1+\frac{i}{n}\right)^{\frac{n}{i}(\frac{i}{n}[\frac{nt}{t_1}])} \cdot \left(1+\left(\frac{nt}{t_1}-[\frac{nt}{t_1}]\right)\cdot\frac{i}{n}\right)$$

Σημειώστε ότι $[x] \le x \le [x]+1$ άρα $[\frac{nt}{t_1}] \le \frac{nt}{t_1} \le [\frac{nt}{t_1}]+1$ και επομένως

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{[\frac{nt}{t_1}]}{n} \le \frac{t}{t_1} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{[\frac{nt}{t_1}]}{n}$$

Δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\frac{nt}{t_1}]}{n}=\frac{t}{t_1}$$

Θέτουμε $b_n=\left(1+\frac{i}{n}\right)^{\frac{n}{i}(\frac{i}{n}[\frac{nt}{t_1}])}$ και $c_n=\ln b_n=(\frac{i}{n}[\frac{nt}{t_1}])\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)^{\frac{n}{i}}$.
Υποθέτοντας ότι $n\to\infty$, δηλαδή ο ανατοκισμός είναι συνεχής, προκύπτει ότι $\lim_{n\to\infty}c_n=i\cdot\frac{t}{t_1}\ln e$. 'ρα, το τελικό ποσό θα είναι

$$\lim_{n\to\infty}K_t^n=K_t=K\cdot e^{i\cdot\frac{t}{t_1}}$$

Έτσι, αν το ετήσιο επιτόκιο είναι $i$ αλλά οι τόκοι κεφαλαιοποιούνται σε κάθε χρονική στιγμή τότε ένα Ευρώ σήμερα τοκιζόμενο για ένα χρόνο θα γίνει $e^i$ Ευρώ. Το ποσό αυτό είναι πάντοτε μεγαλύτερο από την οποιαδήποτε άλλη συχνότητα κεφαλαιοποίησης και αυτό φαίνεται εύκολα από το γεγονός ότι η ακολουθία $(1+\frac{i}{n})^n$ είναι αύξουσα. Ανακεφαλαιώνοντας, αν $i$ είναι το επιτόκιο που αναφέρεται σε $t_1$ χρονικές μονάδες τότε

$$K_t=Ke^{i\frac{t}{t_1}}\quad\text{(τύπος συνεχούς ανατοκισμού)}$$

όπου $t$ είναι η χρονική περίοδος τοκισμού σε πολλαπλάσια (όχι κατά ανάγκη ακέραια) του $t_1$.
Από την σχέση αυτή, διαιρώντας με το $K$ και έπειτα λογαριθμίζοντας κατά μέλη, προκύπτει ότι

$$i=\frac{t_1}{t}\ln\frac{K_t}{K}$$

**'ΣΚΗΣΗ 82** *Έστω κεφάλαιο 500 Ευρώ τοκίζεται με ετήσιο επιτόκιο 3% συνεχούς ανατοκισμού για 3 χρόνια, 2 μήνες και 14 ημέρες. Ποιο είναι το τελικό κεφάλαιο;*

**ΛΥΣΗ.** Το επιτόκιο είναι $i=0.03$ οπότε μας μένει να μετατρέψουμε τη χρονική διάρκεια τοκισμού σε χρόνια. Έτσι έχουμε

$$t=3+\frac{2}{12}+\frac{14}{360}\backsimeq 3.205$$

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε τον τύπο συνεχούς ανατοκισμού και έχουμε ότι το τελικό ποσό είναι ίσο με

$$K_t=500\cdot e^{0.03\cdot 3.205}\backsimeq 550.462$$

□

**'ΣΚΗΣΗ 83** *Έστω ότι το ποσό των 1.500 Ευρώ τοκίζεται για 4 χρόνια, 3 μήνες και 18 ημέρες με ετήσιο επιτόκιο 3% συνεχούς ανατοκισμού. Ποια είναι η διαφορά με το αν τοκιζόταν για ίδιο χρονικό διάστημα με το ίδιο επιτόκιο αλλά τριμηνιαίου ανατοκισμού;*

**ΛΥΣΗ.** Η χρονική διάρκεια τοκισμού σε χρόνια είναι

$$t = 4 + \frac{3}{12} + \frac{18}{360} = 4.3$$

Στην περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού το τελικό κεφάλαιο είναι ίσο με

$$K_t = 1.500 \cdot e^{0.03 \cdot 4.3} \simeq 1.706,53$$

Στην περίπτωση τριμηνιαίου ανατοκισμού το τελικό κεφάλαιο θα είναι

$$\hat{K}_t = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{0.03}{4}\right)^{17} \cdot \left(1 + \frac{18}{90} \cdot \frac{0.03}{4}\right) \simeq 1.705,72$$

□

**'ΣΚΗΣΗ 84** *Έστω ότι το ποσό των 2.500 Ευρώ τοκίζεται με τριμηνιαίο επιτόκιο 2% συνεχούς ανατοκισμού για 2 χρόνια, 4 μήνες και 24 ημέρες. Ποιο είναι το τελικό ποσό;*

**ΛΥΣΗ.** Εδώ το επιτόκιο είναι τριμηνιαίο άρα ο χρόνος τοκισμού θα πρέπει να μετατραπεί σε τρίμηνα (και όχι χρόνια). Έτσι έχουμε

$$t = \frac{2 \cdot 360}{90} + \frac{4 \cdot 30}{90} + \frac{24}{90} = 9.6$$

'ρα το τελικό ποσό θα είναι

$$K_t = 2.500 \cdot e^{0.02 \cdot 9.6} \simeq 3.029,17$$

□

**'ΣΚΗΣΗ 85** *Έστω ότι το ποσό των 1.500 Ευρώ τοκίζεται με 4μηνιαίο επιτόκιο 2% συνεχούς ανατοκισμού και δίνει τελικό κεφάλαιο 1.800 Ευρώ. Πόσο χρόνο τοκίστηκε;*

**ΛΥΣΗ.** Ισχύει η σχέση

$$1.800 = 1.500 \cdot e^{0.02 \cdot t}$$

Λύνοντας ως προς $t$ προκύπτει ότι

$$t = \frac{1}{i} \ln \frac{1.800}{1.500} \simeq 9.11$$

Η απάντηση είναι ότι το ποσό τοκίστηκε για 9.11 τετράμηνα. □

**'ΣΚΗΣΗ 86** *Έστω ότι 500 Ευρώ τοκίζονται με ημερήσιο επιτόκιο $i = 0.001$ συνεχούς ανατοκισμού και έχει τελικό κεφάλαιο 510 Ευρώ. Πόσο χρόνο ανατοκίστηκε; Η απάντηση να δοθεί σε χρόνια.*

**Λυση.** Από την σχέση

$$510 = 500 \cdot e^{0.001 \cdot t}$$

προκύπτει ότι

$$t = \frac{1}{0.001} \ln \frac{510}{500} \backsimeq 19.8$$

Επειδή το επιτόκιο είναι ημερήσιο, το αποτέλεσμα που πήραμε αναφέρεται σε ημέρες. Για να δώσουμε την απάντηση σε χρόνια αρκεί να διαιρέσουμε με 360 οπότε το χρονικό διάστημα τοκισμού είναι $\frac{19.8}{360} \backsimeq 0.05$ χρόνια. □

### 5.5.1 Ισοδυναμία Επιτοκίων

Έστω ότι η τράπεζα $T_1$ χρησιμοποιεί ετήσιο επιτόκιο 2% συνεχούς ανατοκισμού και έστω η τράπεζα $T_2$ εξαμηνιαίο επιτόκιο 1.1% συνεχούς ανατοκισμού. Ποια είναι η διαφορά όταν τοκίσουμε το ποσό των 1.500 Ευρώ για χρονικό διάστημα 2 χρόνων, 3 μηνών και 20 ημερών;
Όταν τοκίσουμε τα χρήματά μας στην τράπεζα $T_1$ τότε το τελικό ποσό θα είναι

$$K_t = 1.500 \cdot e^{0.02 \cdot t}$$

Πρέπει να μετατρέψουμε την χρονική διάρκεια τοκισμού σε χρόνια. Έχουμε ότι

$$t \backsimeq 2.3$$

Αντικαθιστώντας το $t$ προκύπτει το τελικό ποσό το οποίο θα είναι $K_t \backsimeq 1.570,6$.
Από την άλλη μεριά, τοκίζοντας το ίδιο ποσό στην τράπεζα $T_2$ θα έχουμε ως τελικό ποσό

$$\hat{K}_t = 1.500 \cdot e^{0.011 \cdot 4.6} \backsimeq 1.577,8$$

Στην περίπτωση αυτή μετατρέψαμε τη χρονική διάρκεια σε εξάμηνα.
Ποιο έπρεπε να είναι το επιτόκιο στην τράπεζα $T_2$ για να έχουμε το ίδιο τελικό ποσό;
Για να έχουμε το ίδιο τελικό ποσό πρέπει να ισχύει

$$1.500 \cdot e^{0.02 \cdot 2.3} = 1.500 \cdot e^{i \cdot 4.6}$$

Για να ισχύει η παραπάνω ισότητα θα πρέπει να είναι ίσοι οι εκθέτες το οποίο σημαίνει ότι $i = 0.01$. Διαπιστώνουμε ότι η τράπεζα $T_2$ πρέπει να έχει το μισό επιτόκιο από την τράπεζα $T_1$. Σημειώστε ότι το επιτόκιο της τράπεζας $T_1$ αναφέρεται σε έτος ενώ της $T_2$ σε εξάμηνο, δηλαδή στο μισό χρόνο. Αυτό δεν είναι τυχαίο, δηλαδή αν η τράπεζα $T_1$ έχει επιτόκιο $i_1$ σε χρονικές μονάδες $t_1$ συνεχούς ανατοκισμού και η τράπεζα $T_2$ σε χρονικές μονάδες $t_2$ τότε πρέπει να χρησιμοποιεί επιτόκιο $i_2 = i_1 \cdot \frac{t_2}{t_1}$.
Αν τοκίσουμε 1 Ευρώ με επιτόκιο $i_1$ συνεχούς ανατοκισμού που αναφέρεται σε $t_1$ χρονικές μονάδες θα έχουμε μετά από χρονικό διάστημα $t$ το εξής τελικό ποσό

$$K_t = e^{i_1 \cdot \frac{t}{t_1}}$$

Έτσι, αν 1 Ευρώ τοκιστεί για το ίδιο χρονικό διάστημα $t$ αλλά με επιτόκιο $i_2$ που αναφέρεται σε $t_2$ χρονικές μονάδες τότε για να έχουμε το ίδιο τελικό κεφάλαιο θα πρέπει να ισχύει

$$e^{i_1 \cdot \frac{t}{t_1}} = e^{i_2 \frac{t}{t_2}}$$

από το οποίο έχουμε ως αποτέλεσμα ότι $\frac{i_1}{i_2} = \frac{t_1}{t_2}$. Προφανώς όλοι οι αριθμοί $t, t_1, t_2$ θα πρέπει να είναι γραμμένοι στις ίδιες χρονικές μονάδες (π.χ. χρόνια).
Έτσι προκύπτει ο επόμενος ορισμός.

**Ορισμος 87 (Ισοδύναμα Επιτόκια Συνεχούς Ανατοκισμού)** *Έστω επιτόκιο $i_1$ συνεχούς ανατοκισμού που αναφέρεται σε $t_1$ χρονικές μονάδες και $i_2$ επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού που αναφέρεται σε $t_2$ χρονικές μονάδες. Τότε τα επιτόκια θα λέγονται ισοδύναμα όταν*

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

**'Σκηση 88** *Έστω ότι κεφάλαιο 1.500 Ευρώ τοκίζεται για χρονικό διάστημα $t$ (σε χρόνια) με ετήσιο επιτόκιο $i_1 = 0.02$ συνεχούς ανατοκισμού. Ποιο είναι το ισοδύναμο τριμηνιαίο επιτόκιο $i_2$ συνεχούς ανατοκισμού;*

**Λυση.** Αν τοκίσουμε το ποσό αυτό με το πρώτο επιτόκιο θα έχουμε τελική αξία

$$K_t = 1.500 \cdot e^{0.02 \cdot t}$$

Αν το τοκίσουμε με το δεύτερο επιτόκιο θα έχει τελική αξία

$$\hat{K}_t = 1.500 \cdot e^{i_2 \cdot t \cdot 4}$$

Εδώ μετατρέψαμε τα $t$ χρόνια σε τρίμηνα. Για να βρούμε το $i_2$ εξισώνουμε τα τελικά ποσά και έχουμε

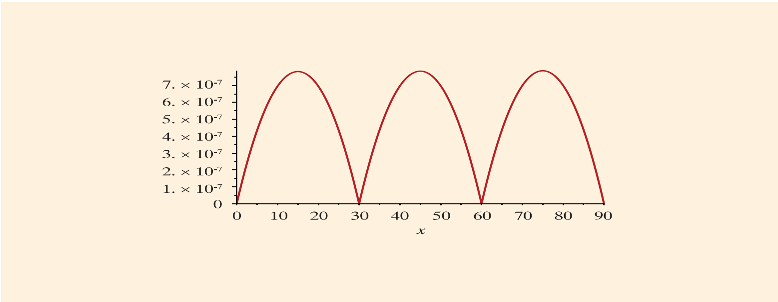
$$1.500 \cdot e^{0.02 \cdot t} = 1.500 \cdot e^{i_2 \cdot t \cdot 4}$$

Αυτό σημαίνει ότι $i_2 = \frac{0.02}{4}$. Σημειώστε ότι για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα τοκισμού $t$ τα τελικά ποσά θα είναι ίδια αν το $i_2 = \frac{0.02}{4}$. □

**Παρατηρηση 89** *Παρατηρούμε ότι όταν τα $i_1$ και $i_2$ είναι ισοδύναμα επιτόκια συνεχούς ανατοκισμού τότε αν ένα οποιοδήποτε ποσό τοκιστεί με τον ένα ή τον άλλο τρόπο για οποιοδήποτε χρονικό διάστημα $t$ θα έχει την ίδια τελική αξία. Αυτό δεν ισχύει για τα ισοδύναμα επιτόκια που δεν είναι συνεχούς ανατοκισμού. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι ακόμη ένα πλεονέκτημα του συνεχούς ανατοκισμού.*

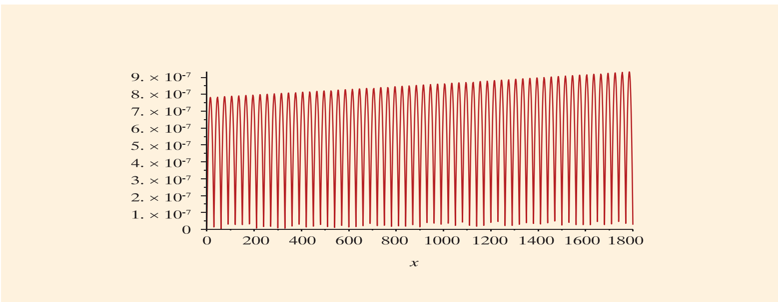
Στην συνέχεια θα εξετάσουμε το ερώτημα της ισοδυναμίας επιτοκίου συνεχούς χρόνου με επιτόκιο περιοδικής κεφαλαιοποίησης τόκων.

Αν ένα ποσό $K$ τοκισθεί με ετήσιο επιτόκιο 3% συνεχούς ανατοκισμού θα δώσει τελική αξία μετά από χρόνο $t$ ίση με $K \cdot e^{0.03 \cdot t}$. Αν το ίδιο ποσό $K$ τοκισθεί με ετήσιο επιτόκιο $i$ μηνιαίου ανατοκισμού τότε μετά από $N$ μήνες θα έχει τελική αξία ίση με $K \cdot (1 + \frac{i}{12})^N$. Ποιο πρέπει να είναι το επιτόκιο $i$ έτσι ώστε οι τελικές αξίες να συμπίπτουν στο τέλος του κάθε μήνα;
Για να υπολογίσουμε το επιτόκιο $i$ εξισώνουμε τα ποσά $K \cdot e^{0.03 \cdot \frac{1}{12}}$ και $K \cdot (1 + \frac{i}{12})$. Προκύπτει λοιπόν ότι $i = 12 \cdot (e^{0.03 \cdot \frac{1}{12}} - 1) \backsimeq 0.030037536$. Υπό την έννοια αυτή τα επιτόκια είναι ισοδύναμα διότι ίσα ποσά που τοκίζονται για πολλαπλάσια του μήνα δίνουν ίσες τελικές αξίες.
Στο σχήμα 5.4 βλέπουμε την διαφορά που έχουν τα τελικά ποσά όταν τοκιστεί ένα Ευρώ με τον ένα ή τον άλλο τρόπο. Η διαφορά είναι υπέρ του επιτοκίου με μηνιαίο ανατοκισμό.



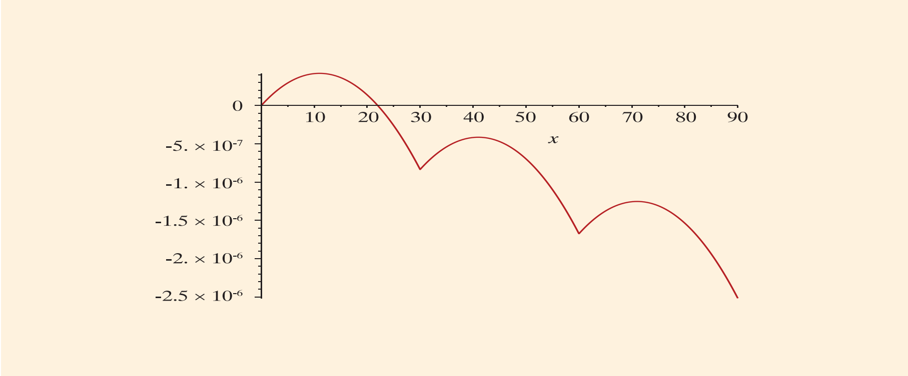

Σχήμα 5.4: Διαφορά των ποσών όταν τοκιστούν για 90 ημέρες

Στο σχήμα 5.5 παρατηρούμε ότι το μέγιστο της διαφοράς των τοκισμένων ποσών αυξάνεται.




Σχήμα 5.5: Διαφορά των ποσών όταν τοκιστούν για 1800 ημέρες

Στο σχήμα 5.6 βλέπουμε την διαφορά των τοκισμένων ποσών για 90 ημέρες όταν όμως το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι λίγο παραπάνω από το ισοδύναμο, δηλαδή $i = 0.03001$. Διαπιστώνουμε ότι τις πρώτες ημέρες πάλι υπερτερεί το επιτόκιο περιοδικού ανατοκισμού αλλά τελικά υπερτερεί αυτό του συνεχούς ανατοκισμού.




Σχήμα 5.6: Διαφορά των ποσών όταν τοκιστούν για 90 ημέρες όταν το επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι $i = 0.03001$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 90** *Έστω κεφάλαιο τοκίζεται με επιτόκιο ετήσιου ανατοκισμού $i$. Ποιο είναι το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού;*

**Απάντηση.** Έστω ένα Ευρώ τοκίζεται για ένα χρόνο με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού $i$. Τότε το τελικό ποσό θα είναι $1+i$. Αν τοκισθεί για έναν χρόνο με ετήσιο επιτόκιο $i^{'}$ και συνεχή ανατοκισμό τότε το τελικό ποσό θα είναι $e^{i^{'}}$ και αφού τα επιτόκια είναι ισοδύναμα τότε θα πρέπει και οι τελικές αξίες των κεφαλαίων να είναι ίσες. Επομένως, τα επιτόκια θα ικανοποιούν την παρακάτω σχέση

$$1+i = e^{i^{'}} \Rightarrow i^{'} = \ln(1+i)$$

Συνεπώς ίδια κεφάλαια θα έχουν ίσες τελικές αξίες σε πολλαπλάσια του έτους. □

### 5.5.2 Συνεχής Ανατοκισμός και Μέσο Επιτόκιο

Θα εξετάσουμε τώρα την έννοια του μέσου επιτοκίου όταν τα κεφάλαια $K_1, \cdots, K_n$ τοκίζονται με επιτόκια περιοδικού ή συνεχούς ανατοκισμού. Υποθέτουμε ότι το κεφάλαιο $K_j$ τοκίζεται για χρονικό διάστημα $t_j$ με επιτόκιο $i_j$ που αναφέρεται σε $k_j$ χρονικές μονάδες. Το τελικό κεφάλαιο θα είναι της μορφής

$$K_j^t = K_j \cdot (1+i_j)^{[\frac{t_j}{k_j}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{t_j}{k_j} - [\frac{t_j}{k_j}]\right) i_j\right)$$

ενώ αν είναι συνεχής ανατοκισμός το τελικό κεφάλαιο θα είναι

$$K_j^t = K_j \cdot e^{i_j \cdot \frac{t_j}{k_j}}$$

Ας θυμηθούμε την έννοια του μέσου χρόνου τοκισμού (δες ορισμό 41). Ισχύει ότι

$$t = \frac{\sum_{j=1}^{n} K_j t_j}{\sum_{j=1}^{n} K_j} \quad \text{(μέσος χρόνος τοκισμού)}$$

Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε το επιτόκιο $i$ συνεχούς ανατοκισμού τέτοιο ώστε αν τοκίσουμε με αυτό το συνολικό κεφάλαιο $K = \sum_{j=1}^{n} K_j$ για το μέσο χρόνο τοκισμού $t$ να έχει τελική αξία ίση με $\sum_{j=1}^{n} K_j^t$. Εξισώνοντας προκύπτει ότι

$$K \cdot e^{it} = \sum_{j=1}^{n} K_j^t$$

'ρα

$$i = \frac{1}{t} \ln \frac{\sum_{j=1}^{n} K_j^t}{K} \quad \text{(μέσο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού)}$$

**'ΣΚΗΣΗ 91** *Έστω ότι το ποσό των 1.500 Ευρώ τοκίζεται για χρονικό διάστημα 3 χρόνων, 5 μηνών και 6 ημερών με ετήσιο επιτόκιο 3% εξαμηνιαίου ανατοκισμού. Επιπλέον, το ποσό των 2.500 Ευρώ τοκίζεται για χρονικό διάστημα 4 χρόνων, 3 μηνών και 23 ημερών με ετήσιο επιτόκιο 4% συνεχούς ανατοκισμού. Ποιο είναι το μέσο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού;*

**ΛΥΣΗ.** Η τελική αξία των 1.500 Ευρώ θα είναι

$$K_1^t = 1.500 \cdot \left(1 + \frac{0.03}{2}\right)^6 \cdot \left(1 + \frac{156}{180}\frac{0.03}{2}\right) \approx 1.661,48$$

Από την άλλη μεριά η τελική αξία του ποσού των 2.500 Ευρώ θα είναι

$$K_2^t = 2.500 \cdot e^{0.04 \cdot 4.31} \backsimeq 2.970,38$$

Δηλαδή το άθροισμα είναι περίπου 4.631,86 Ευρώ.
Ο μέσος χρόνος τοκισμού $t$ είναι

$$t = \frac{1.500 \cdot 3.34 + 2.500 \cdot 4.31}{1.500 + 2.500} \backsimeq 3.97$$

'ρα το μέσο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι ίσο με

$$i = \frac{1}{3.97} \ln \frac{4.631,86}{4.000} \backsimeq 0.036$$

Δηλαδή, αν τοκίσω το ποσό των 4.000 Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο $i = 0.036$ συνεχούς ανατοκισμού για χρονικό διάστημα $t = 3.97$ χρόνια θα έχω την ίδια τελική αξία. □

## 5.6 Προεξόφληση Τίτλων στον Ανατοκισμό

Στο τρίτο κεφάλαιο μελετήσαμε το πρόβλημα της προεξόφλησης τίτλων υποθέτοντας απλή κεφαλαιοποίηση. Σε αυτή την παράγραφο θα μελετήσουμε το ίδιο πρόβλημα υποθέτοντας σύνθετη κεφαλαιοποίηση και θα παρουσιάσουμε την «φυσική» γενίκευση της προεξόφλησης στην περίπτωση αυτή.
Προφανώς, η προεξόφληση σε σύνθετη κεφαλαιοποίηση χωρίζεται επίσης σε εξωτερική και εσωτερική.

### 5.6.1 Εξωτερική Προεξόφληση

Έστω ότι $i$ το επιτόκιο εξωτερικής προεξόφλησης το οποίο αναφέρεται σε $t$ χρονικές μονάδες και το οποίο ανατοκίζεται ανά $\hat{t}$ χρονικές μονάδες. Το ονομαστικό επιτόκιο θα είναι $i^{'} = \frac{\hat{t}}{t}$.
Για να υπολογίσουμε το εξωτερικό προεξόφλημα ενός τίτλου με ονομαστική αξία $K$ όταν προεξοφληθεί $t$ χρόνο πριν την λήξη του θα σκεφτούμε ως εξής (δες περίπτωση απλού τόκου). Αν τοκίσουμε το ποσό $K$ για χρόνο $-t$ με επιτόκιο $i^{'}$ το οποίο ανατοκίζεται ανά $\hat{t}$ χρονικές μονάδες τότε το τελικό ποσό (ή αλλιώς η πραγματική αξία του τίτλου) θα είναι

$$K_{-t} = K \cdot (1+i^{'})^{-[\frac{t}{\hat{t}}]} \cdot \left(1 - \left(\frac{t}{\hat{t}} - [\frac{t}{\hat{t}}]\right) \cdot i^{'}\right)$$

(πραγματική αξία εξωτερικής προεξόφλησης)

Το εξωτερικό προεξόφλημα ενός τίτλου με ονομαστική αξία $K$ θα είναι

$$E = K - K_{-t}$$

Σημειώστε ότι το εξωτερικό προεξόφλημα στην συνθέτη κεφαλαιοποίηση τείνει στο μηδέν καθώς το $t$ τείνει στο άπειρο σε αντίθεση με το εξωτερικό προεξόφλημα στον απλό τόκο.
Στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού η πραγματική αξία του τίτλου θα είναι στην εξωτερική προεξόφληση

$$K_{-t} = K \cdot e^{-ti} \quad \text{(πραγματική αξία συνεχούς ανατοκισμού)}$$

όπου το $i$ είναι το επιτόκιο προεξόφλησης που αναφέρεται σε $\hat{t}$ περιόδους και ο χρόνος $t$ θα είναι γραμμένος σε πολλαπλάσια του $\hat{t}$ (όχι κατά ανάγκη ακέραια).

### 5.6.2 Εσωτερική Προεξόφληση

Για να υπολογίσουμε την πραγματική αξία ενός τίτλου με εσωτερική προεξόφληση θα σκεφτούμε ως εξής. Η πραγματική αξία Π του τίτλου $t$ χρόνο πριν την λήξη του θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε αν τοκιστεί με επιτόκιο $i^{'}$ το οποίο ανατοκίζεται ανά $\hat{t}$ χρονικές μονάδες να δίνει τελικό κεφάλαιο ίσο με την ονομαστική αξία του τίτλου. Δηλαδή

$$\Pi \cdot (1+i^{'})^{[\frac{t}{\hat{t}}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{t}{\hat{t}} - [\frac{t}{\hat{t}}]\right) \cdot i^{'}\right) = K$$

Συνεπώς η πραγματική αξία του τίτλου με εσωτερική προεξόφληση θα είναι

$$\Pi = \frac{K\cdot(1+i')^{-[\frac{t}{\hat{t}}]}}{\left(1+\left(\frac{t}{\hat{t}}-[\frac{t}{\hat{t}}]\right)\cdot i'\right)}$$

(πραγματική αξία εσωτερικής προεξόφλησης)

'ρα το προεξόφλημα στην εσωτερική προεξόφληση θα είναι

$$E = K - \Pi$$

Παρόμοια με την εξωτερική προεξόφληση, όταν ο ανατοκισμός είναι συνεχής τότε η πραγματική αξία στην εσωτερική προεξόφληση συμπίπτει με αυτή της εξωτερικής και άρα

$$K_{-t} = K \cdot e^{-ti}$$

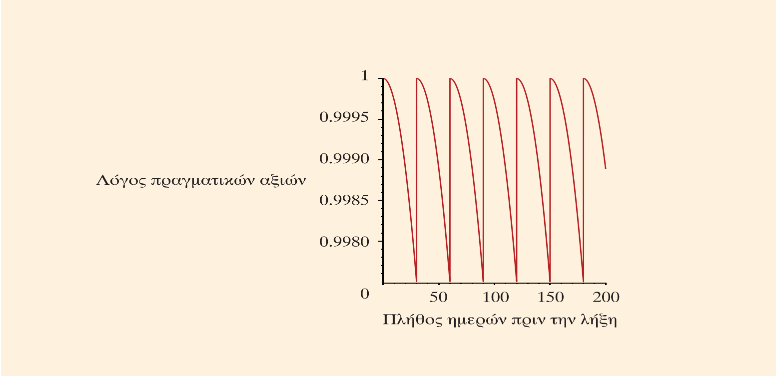
(πραγματική ή παρούσα αξία συνεχούς ανατοκισμού)

Υποθέτοντας συνεχή ανατοκισμό τα πράγματα είναι απλούστερα, η εσωτερική και εξωτερική προεξόφληση συμπίπτουν αλλά και οι διάφοροι υπολογισμοί είναι ευκολότεροι (π.χ. εύρεση του χρόνου προεξόφλησης, εύρεση του επιτοκίου).

**Παρατηρηση 92** *Σημαντικό είναι να τονίσουμε ότι το εσωτερικό και το εξωτερικό προεξόφλημα στην σύνθετη (περιοδική και όχι συνεχή) κεφαλαιοποίηση δεν έχουν μεγάλη διαφορά. Στην πραγματικότητα, όπως φαίνεται άλλωστε και από τους παραπάνω τύπους, συμπίπτουν σε ακέραια πολλαπλάσια του χρόνου ανατοκισμού. Η διαφορά είναι μονάχα στο χρόνο μεταξύ δυο κεφαλαιοποιήσεων του τόκου. Για να το δούμε αυτό ας σχηματίσουμε τον λόγο της πραγματικής (εξωτερικού προεξοφλήματος) αξίας δια την πραγματική (εσωτερικού προεξοφλήματος) ο οποίος είναι*

$$\left(1-\left(\frac{t}{\hat{t}}-[\frac{t}{\hat{t}}]\right)\cdot i'\right)\left(1+\left(\frac{t}{\hat{t}}-[\frac{t}{\hat{t}}]\right)\cdot i'\right)$$

*Στο σχήμα 5.7 βλέπουμε τον λόγο των πραγματικών αξιών όταν $i = 0.05$ μηνιαίου ανατοκισμού. Φαίνεται ότι η πραγματική αξία είναι λίγο μεγαλύτερη στην εσωτερική προεξόφληση.* □




Σχήμα 5.7: Λόγος πραγματικής (εξωτερικής) αξίας δια πραγματικής (εσωτερικής) αξίας. Εδώ $i = 0.05$ μηνιαίου ανατοκισμού.

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε μέσω παραδειγμάτων μονάχα την εσωτερική προεξόφληση μιας και η εξωτερική είναι παρόμοια.

**Παραδειγμα 93 (Ευρεση Χρονου Προεξοφλησης)** *Έστω ότι η ονομαστική αξία ενός γραμματίου είναι 10.000 Ευρώ με χρόνο λήξης 2 χρόνια από σήμερα. Υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση με ετήσιο επιτόκιο προεξόφλησης και ανατοκισμού $i = 0.1$ θα υπολογίσουμε τη χρονική στιγμή που πρέπει να προεξοφληθεί για να λάβουμε το ποσό των 9.500 Ευρώ.*
*Όπως έχουμε πει η πραγματική ή παρούσα αξία ενός τίτλου στην εσωτερική προεξόφληση δίνεται από τον τύπο*

$$\Pi = \frac{K\cdot(1+i')^{-[\frac{t}{\hat{t}}]}}{\left(1+\left(\frac{t}{\hat{t}}-[\frac{t}{\hat{t}}]\right)\cdot i'\right)}$$

*Σημειώστε ότι ο αριθμός $[\frac{t}{\hat{t}}]$ είναι ακέραιος αριθμός ενώ ο $\left(\frac{t}{\hat{t}} - [\frac{t}{\hat{t}}]\right)$ βρίσκεται μεταξύ του μηδέν και της μονάδος. Επομένως μπορούμε να γράψουμε*

$$\Pi = \frac{K\cdot(1+i')^{-n}}{\left(1+q\cdot i'\right)}$$

*με $n \in \mathbb{N}$ και $q \in (0,1)$ τα οποία είναι άγνωστα ενώ γνωστά είναι τα $\Pi = 9.500$, $K = 10.000$ και $i = 0.1$.*
*Όπως σε προηγούμενα προβλήματα θα υπολογίσουμε πρώτα το $n$ (τα χρόνια δηλαδή). Για να το κάνουμε αυτό παρατηρούμε ότι*

$$10.000 \cdot (1+0.1)^{-(n+1)} \leq 9.500 \leq 10.000 \cdot (1+0.1)^{-n}$$

*Η ανισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την παρακάτω*

$$n \leq \frac{\ln 10.000 - \ln 9.500}{\ln(1+0.1)} \leq n+1$$

*το οποίο σημαίνει ότι*

$$n = \left[\frac{\ln 10.000 - \ln 9.500}{\ln(1+0.1)}\right] = [0.53] = 0$$

*Δηλαδή πρέπει να προεξοφλήσουμε το γραμμάτιο σε λιγότερο από χρόνο. Μας μένει να υπολογίσουμε το $q$. Αντικαθιστώντας το $n$ έχουμε ότι*

$$9.500 = \frac{10.000}{1 + q \cdot 0.1}$$

*Λύνοντας ως προς το $q$ έχουμε*

$$q = \frac{50}{95}$$

*ή αλλιώς περίπου 189 ημέρες πριν την λήξη του γραμματίου.* □

**'σκηση 94 (Ευρεση Παρουσης Αξιας)** *Έστω γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ πρέπει να προεξοφληθεί 100 ημέρες νωρίτερα από την λήξη του. Υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση και ετήσιο επιτόκιο $i = 0.1$ τριμηνιαίου ανατοκισμού υπολογίστε την αξία κατά την ημέρα της προεξόφλησης.*

**Λυση.** Πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το ονομαστικό επιτόκιο τριμήνου το οποίο θα είναι $i' = \frac{0.1}{4}$. Η πραγματική αξία του γραμματίου 100 ημέρες πριν την λήξη θα είναι, σημειώνοντας ότι οι 100 ημέρες είναι $n = 1$ τρίμηνα και $q = \frac{10}{90}$ του τριμήνου,

$$\Pi = \frac{10.000 \cdot (1 + i')^{-1}}{1 + \frac{10}{90} \cdot i'} = \frac{10.000 \cdot (1 + \frac{0.1}{4})^{-1}}{1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{0.1}{4}} \backsimeq 9.729,07$$

□

**'σκηση 95 (Ευρεση Επιτοκιου Προεξοφλησης)** *Να βρεθεί το ετήσιο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού εσωτερικής προεξόφλησης αν είναι γνωστό ότι το προεξόφλημα είναι 100 Ευρώ όταν προεξοφληθεί γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ 150 ημέρες πριν την λήξη του.*

**Λυση.** Εφόσον το προεξόφλημα είναι 100 Ευρώ προκύπτει ότι η πραγματική αξία του γραμματίου είναι $\Pi = 9.500$ Ευρώ. Οι 100 ημέρες είναι $n = 3$ μήνες και $q = 1/3$ του μήνα. Αν το γραμμάτιο είχε προεξοφληθεί τρεις μήνες πριν την λήξη του θα είχε πραγματική αξία μεγαλύτερη των 9.500 Ευρώ ενώ αν είχε προεξοφληθεί 4 μήνες πριν την λήξη του θα είχε μικρότερη. Από αυτά δημιουργούμε τις εξής ανισότητες

$$\Pi_{4\text{ μήνες}} \leq 9.500 \leq \Pi_{3\text{ μήνες}}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\frac{10.000}{(1+i)^4} \leq 9.500 \leq \frac{10.000}{(1+i)^3}$$

Δηλαδή

$$0.012905895 \leq i \leq 0.017244768$$

Όπως σε προηγούμενη παράγραφο, θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο του Νεύτωνα για την καλύτερη προσέγγιση του επιτοκίου. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει να σχηματίσουμε μια συνάρτηση $f$ η ρίζα της οποίας θα είναι το ζητούμενο επιτόκιο. Εφόσον

$$9.500 = \frac{10.000 \cdot (1+i)^{-3}}{1 + \frac{1}{3} \cdot i}$$

τότε θέτοντας

$$f(x) = \frac{10.000}{(1+x)^3(1+\frac{1}{3}x)} - 9.500$$

διαπιστώνουμε ότι η ρίζα της $f$ θα είναι το ζητούμενο επιτόκιο. Η μέθοδος του Νεύτωνα χρειάζεται και αρχική τιμή. Ο αριθμός $x_0 = \frac{1}{3} \cdot 0.012905895 + \frac{2}{3} \cdot 0.017244768 = 0.01579847700$ είναι μια καλή αρχική τιμή. Η πρώτη επανάληψη της μεθόδου του Νεύτωνα μας δίνει $x_1 = 0.01549878363$ ενώ η δεύτερη μας δίνει $x_2 = 0.01549897200$. Διαπιστώνουμε ότι είναι πολύ κοντά η δεύτερη με την πρώτη επομένως μπορούμε να σταματήσουμε τις επαναλήψεις εδώ. Δεχόμαστε ως επιτόκιο (μηνιαίο) τον αριθμό 0.01549897200 συνεπώς το ετήσιο επιτόκιο μηνιαίου ανατοκισμού είναι $0.01549897200 \cdot 12 = 0.1859876640$ δηλαδή κάτι παραπάνω από 18%. □

**'ΣΚΗΣΗ 96** *Έστω γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ προεξοφλείται με ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού 10% και δίνει προεξόφλημα 100 Ευρώ. Να βρεθεί ο χρόνος προεξόφλησης σε ημέρες.*

**ΛΥΣΗ.** Η πραγματική αξία του γραμματίου υποθέτοντας συνεχή ανατοκισμό στην προεξόφληση είναι

$$K_{-t} = 10.000 \cdot e^{-t \cdot 0.1}$$

Το προεξόφλημα είναι $E = 10.000 - K_{-t} = 100$ άρα η πραγματική αξία είναι 9.900 Ευρώ. Λύνοντας ως προς $t$ προκύπτει ότι

$$t = 10 \cdot \ln \frac{100}{99} \backsimeq 36 \text{ (ημέρες πριν την λήξη)}$$

□

**'ΣΚΗΣΗ 97** *Γραμμάτιο ονομαστικής αξίας 10.000 Ευρώ προεξοφλείται 100 ημέρες νωρίτερα δίνοντας 9.600 Ευρώ πραγματική αξία. Να βρεθεί το επιτόκιο προεξόφλησης συνεχούς ανατοκισμού.*

**ΛΥΣΗ.** Η σχέση πραγματικής και ονομαστικής αξίας του γραμματίου σε συνεχή ανατοκισμό είναι

$$9.600 = 10.000 \cdot e^{-\frac{100}{360} \cdot i}$$

Λύνοντας ως προς $i$ προκύπτει ότι

$$i = 3.6 \cdot \ln\left(\frac{100}{96}\right) \simeq 0.14$$

Δηλαδή το επιτόκιο είναι περίπου 14%. □

**'ΣΚΗΣΗ 98** *Έμπορος αγόρασε προϊόντα από τον προμηθευτή του αλλά πλήρωσε με γραμμάτιο αξίας 10.000 Ευρώ. Ο προμηθευτής δεν χρειάζεται τα χρήματα νωρίτερα (πριν την λήξη του γραμματίου) αλλά έχει αμφιβολίες ως προς την φερεγγυότητα του οφειλέτη. Για τον λόγο αυτό αποφασίζει να προεξοφλήσει το γραμμάτιο νωρίτερα σε μια τράπεζα και ταυτόχρονα να καταθέσει το ποσό αυτό σε μια άλλη ενδεχομένως τράπεζα μέχρι την ημερομηνία λήξης του γραμματίου. Υποθέτουμε ότι το επιτόκιο προεξόφλησης είναι $i_1 = 0.1$ μηνιαίου ανατοκισμού ενώ το επιτόκιο κατάθεσης είναι επίσης μηνιαίο και ίσο με $i_2 = 0.05$ συνεχούς ανατοκισμού. Πόσες ημέρες πριν συμφέρει να προεξοφλήσει το γραμμάτιο;*

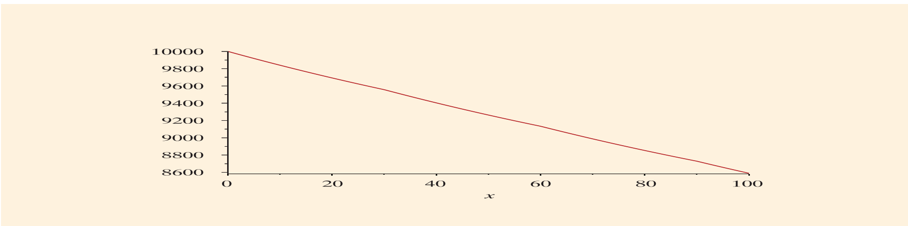
**ΛΥΣΗ.** Η πραγματική αξία του γραμματίου $N$ ημέρες πριν την λήξη του είναι

$$\Pi = \frac{10.000 \cdot (1+i_1)^{-[\frac{N}{30}]}}{1 + \left(\frac{N}{30} - [\frac{N}{30}]\right) \cdot i_1}$$

Αν τοκίσει το ποσό αυτό για $N$ ημέρες με επιτόκιο $i_2$ τότε στο τέλος θα έχει το ποσό

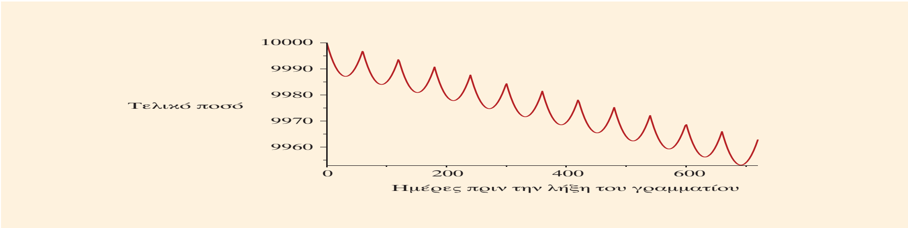
$$\Pi \cdot e^{\frac{N}{30} \cdot i_2}$$

Στο σχήμα 5.8 φαίνεται καθαρά ότι τον συμφέρει να προεξοφλήσει τον τίτλο την προηγούμενη μέρα πριν την λήξη του γραμματίου. Το ποσό που θα πάρει θα είναι περίπου 9.983,4 Ευρώ. Με αυτό τον τρόπο μεταθέτει τον κίνδυνο στην τράπεζα χάνοντας μόνο ένα μικρό ποσό.



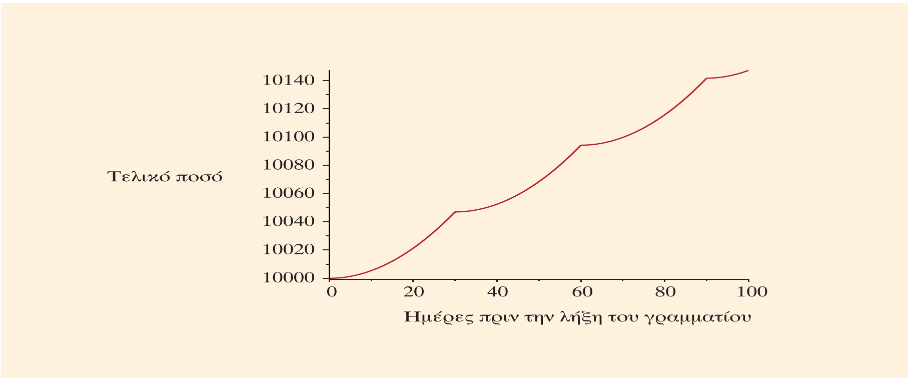

Σχήμα 5.8: Ποσό που θα έχει ο προμηθευτής όταν προεξοφλήσει και έπειτα καταθέσει τα χρήματα σε τράπεζα. Εδώ $i_1 = 0.1$ και $i_2 = 0.05$.

Στο σχήμα 5.9 δείτε το γράφημα του τελικού ποσού όταν το επιτόκιο κατάθεσης είναι $i_2 = 0.095$.




Σχήμα 5.9: Ποσό που θα έχει ο προμηθευτής όταν προεξοφλήσει και έπειτα καταθέσει τα χρήματα σε τράπεζα. Εδώ $i_1 = 0.1$ και $i_2 = 0.095$.

Παρατηρήστε ότι υποθέσαμε ότι το επιτόκιο κατάθεσης είναι μικρότερο από αυτό της προεξόφλησης. Αν τυχόν ήταν τα ίδια τότε ο προμηθευτής θα έπρεπε να προεξοφλήσει τον τίτλο το συντομότερο δυνατό, δείτε το σχήμα 5.10, διότι το τελικό ποσό θα ξεπεράσει την ονομαστική αξία του γραμματίου.




Σχήμα 5.10: Ποσό που θα έχει ο προμηθευτής όταν προεξοφλήσει και έπειτα καταθέσει τα χρήματα σε τράπεζα όταν τα επιτόκια προεξόφλησης και κατάθεσης είναι ίσα.

Το φαινόμενο κατά το οποίο μπορούμε να κερδίσουμε χρήματα χωρίς ρίσκο και χωρίς αρχικό κεφάλαιο (γνωστό ως **ευκαιρία σίγουρου κέρδους χωρίς ρίσκο**) δεν μπορεί να υπάρξει στην αγορά για μεγάλο χρονικό διάστημα. Πράγματι, υποθέστε ότι η τράπεζα $T_1$ εφαρμόζει επιτόκιο προεξόφλησης $i_1$ και η τράπεζα $T_2$ εφαρμόζει επιτόκιο κατάθεσης $i_2 \geq i_1$. Η τράπεζα $T_2$ ενδιαφέρεται να προσελκύσει πολλές καταθέσεις (για να τις επενδύσει κατάλληλα) για αυτό και έχει ανεβάσει το επιτόκιο κατάθεσης. Όταν αυτή η διαφορά γίνει αντιληπτή στην αγορά τότε πολλοί θα κινηθούν καταλλήλως για να έχουν σίγουρο κέρδος χωρίς ρίσκο. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: Υπογράφει ο Α γραμμάτια στον Β ο οποίος τα προεξοφλεί άμεσα στην τράπεζα $T_1$ και έπειτα τα καταθέτει στην τράπεζα $T_2$. Όπως εξηγήσαμε, στο τέλος υπάρχει ένα κέρδος το οποίο το μοιράζουν μεταξύ τους. Αυτό μπορούν να συνεχίσουν να το κάνουν για πάντα, όσο διαρκεί αυτή η ευκαιρία. Η τράπεζα $T_2$ διαπιστώνει ότι προσελκύει πολλές καταθέσεις (χωρίς ενδεχομένως να γνωρίζει τον λόγο) και για αυτό μειώνει το επιτόκιο κατάθεσης για να αυξήσει τα κέρδη της. Από την άλλη μεριά η τράπεζα $T_1$ διαπιστώνει ότι προεξοφλεί όλο και περισσότερες επιταγές οπότε αυξάνει το επιτόκιο προεξόφλησης για να ενισχύσει τα κέρδη της. Με αυτό τον τρόπο σύντομα τα επιτόκια θα διαμορφωθούν κατά τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να μην υπάρχει τέτοιου είδους ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Η έννοια του σίγουρου κέρδους χωρίς ρίσκο είναι γνωστή και ως `Arbitrage` και συναντάται στον πραγματικό κόσμο. Όμως όπως εξηγήσαμε παραπάνω η αγορά διαμορφώνεται κατάλληλα έτσι ώστε σύντομα αυτή η ευκαιρία να εξαφανιστεί. Θα αναφερθούμε ξανά σε αυτή την έννοια σε επόμενο κεφάλαιο. □

### 5.6.3 Αντικατάσταση Τίτλων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε το πρόβλημα της αντικατάστασης τίτλων υποθέτοντας εσωτερική προεξόφληση με ανατοκισμό (περιοδικό ή συνεχή).
Έστω $g_1, \cdots, g_n$ τίτλοι με ονομαστικές αξίες $K_1, \cdots, K_n$ οι οποίοι λήγουν $t_1, \cdots, t_n$ χρονικές μονάδες από την ημέρα της αντικατάστασης. Οι τίτλοι αυτοί αντικαθίστανται από τους $\hat{g}_1, \cdots, \hat{g}_m$ οι οποίοι έχουν ονομαστικές αξίες $\hat{K}_1, \cdots, \hat{K}_m$ και λήγουν σε $\hat{t}_1, \cdots, \hat{t}_m$ χρονικές μονάδες από την ημέρα της αντικατάστασης. Στην γενικότερη περίπτωση θεωρούμε διαφορετικά επιτόκια για κάθε τίτλο, δηλαδή $i_1, \cdots, i_n$ και $\hat{i}_1, \cdots, \hat{i}_m$. Επιπλέον, θεωρούμε ότι ο ανατοκισμός διαφέρει από τίτλο σε τίτλο, μπορεί να είναι περιοδικός ή συνεχής.
Την ημέρα της αντικατάστασης θα πρέπει τα αθροίσματα των πραγματικών αξιών των παλαιών τίτλων και των νέων να είναι ίσα. Για τον λόγο αυτό η ημέρα της αντικατάστασης ονομάζεται και εποχή ισοδυναμίας.
Δηλαδή πρέπει να ισχύει

$$K_1^{-t_1} + K_2^{-t_2} + \cdots + K_n^{-t_n} = \hat{K}_1^{-\hat{t}_1} + \cdots + \hat{K}_m^{-\hat{t}_m}$$

όπου $K_i^{-t_i}$ είναι η πραγματική αξία του παλαιού τίτλου $g_i$ και $\hat{K}_i^{-\hat{t}_i}$ η πραγματική αξία του νέου τίτλου $\hat{g}_i$.

**'ΣΚΗΣΗ 99** *Έστω οι τίτλοι $g_1, g_2, g_3$ με ονομαστικές αξίες $K_1 = 10.000$, $K_2 = 11.000$ και $K_3 = 12.000$. Υποθέτουμε ότι οι τίτλοι $g_1, g_2$ προεξοφλούνται με επιτόκια μηνιαίου ανατοκισμού $i_1 = 0.08$ και $i_2 = 0.09$ ενώ ο τίτλος $g_3$ προεξοφλείται με ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού $i_3 = 0.08$. Επιπλέον, οι τίτλοι λήγουν σε $t_1 = 100$, $t_2 = 150$ και $t_3 = 200$ ημέρες μετά την ημέρα της αντικατάστασης. Θέλουμε τους τίτλους αυτούς να τους αντικαταστήσουμε με ένα ο οποίος προεξοφλείται με επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού $\hat{i}_1 = 0.085$. Αν αποφασίσουμε ο νέος τίτλος να λήγει 250 ημέρες μετά την αντικατάσταση τότε ποια είναι η ονομαστική αξία του νέου τίτλου;*

**ΛΥΣΗ.** Η πραγματική αξία του $g_1$ τίτλου κατά την ημέρα της αντικατάστασης είναι

$$K_1^{-t_1} = 10.000 \cdot (1 + 0.08)^{-3} \cdot \left(1 + \frac{10}{90} \cdot 0.08\right) = 8.008,885277$$

Η πραγματική αξία του $g_2$ τίτλου κατά την ημέρα της αντικατάστασης είναι

$$K_2^{-t_2} = 11.000 \cdot (1 + 0.09)^{-5} = 7.149,245249$$

Τέλος, η πραγματική αξία του τίτλου $g_3$ είναι

$$K_3^{-t_3} = 12.000 \cdot e^{-\frac{200}{360} \cdot 0.08} = 11.478, 34487$$

Το άθροισμα των παραπάνω πραγματικών αξιών είναι 26.636,47540 και αυτή θα πρέπει να είναι η πραγματική αξία του νέου τίτλου. Η σχέση που συνδέει την πραγματική αξία του νέου τίτλου με την ζητούμενη ονομαστική του αξία είναι η παρακάτω

$$26.636, 47540 = X \cdot e^{-\frac{250}{360} \cdot 0.085}$$

Λύνοντας ως προς $X$ προκύπτει ότι $X = 28.256, 098$. $\square$

# Κεφάλαιο 6

# Σειρές Πληρωμών (Ράντες)

Έστω ότι θέλουμε να καταθέσουμε σήμερα στην τράπεζα ένα ποσό $K$ με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 5% έτσι ώστε να είμαστε σε θέση να εκταμιεύουμε 10.000 Ευρώ στο τέλος κάθε έτους για 10 χρόνια. Ποιο είναι το μικρότερο ποσό $K$ που πρέπει να καταθέσουμε;
Το ποσό $K$ μετά από ένα έτος θα έχει γίνει $K(1+i)$ και εμείς θα εκταμιεύσουμε το ποσό $J = 10.000$ άρα θα έχει γίνει $K_1 = K(1+i) - J$. Στον επόμενο χρόνο το ποσό αυτό θα γίνει $K_2 = K_1(1+i) - J$ και τέλος $K_{10} = K_9(1+i) - J \geq 0$. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε το ελάχιστο $K$ ούτως ώστε το $K_{10} \geq 0$. Για τέτοιου είδους προβλήματα θα ορίσουμε τις λεγόμενες ράντες (ή αλλιώς σειρές πληρωμών).

ΟΡΙΣΜΟΣ 100 *Ράντα καλείται σειρά κεφαλαίων τα οποία καταβάλλονται σε ίσα χρονικά διαστήματα.*

Κάθε χρηματικό ποσό που καταβάλλεται θα ονομάζεται **όρος ή δόση** της ράντας. Αν ο όρος μιας ράντας καταβάλλεται στο τέλος κάθε περιόδου τότε η ράντα θα ονομάζεται **ληξιπρόθεσμη** ενώ αν καταβάλλεται στην αρχή θα ονομάζεται **προκαταβλητέα**.
Η έννοια της παρούσης αξίας ενός μελλοντικού ποσού θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα σε αυτό το κεφάλαιο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 101 *Ένα ποσό $\hat{K}$ σήμερα και ένα ποσό $K$ σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον θα λέγονται* **οικονομικά ισοδύναμα ποσά** *όταν μπορώ να τοκίσω σήμερα το ποσό $\hat{K}$ κατάλληλα έτσι ώστε το ποσό αυτό μαζί με τους τόκους να είναι ίσο με $K$ στην συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή. Επιπλέον, το ποσό $\hat{K}$ ονομάζεται η* **παρούσα αξία** *του ποσού $K$.*

Ο τοκισμός αυτός μπορεί να είναι με την μέθοδο του απλού τόκου ή του σύνθετου (περιοδικού ή συνεχούς ανατοκισμού). Σε κάθε περίπτωση η παρούσα αξία μεταβάλλεται και εξαρτάται βέβαια και από το επιτόκιο. 'ρα, δυο ποσά είναι οικονομικά ισοδύναμα όταν αναφερόμαστε σε συγκεκριμένους χρόνους, με συγκεκριμένο επιτόκιο και συγκεκριμένο τρόπο κεφαλαιοποίησης. Σημειώστε ότι η παρούσα αξία ενός ποσού είναι διαφορετική για μια τράπεζα και διαφορετική για έναν ιδιώτη διότι η τράπεζα μπορεί να δανείσει (νομίμως) με μεγαλύτερο επιτόκιο από ότι ένας οποιοσδήποτε ιδιώτης.

## 6.1 Εύρεση της παρούσης αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας

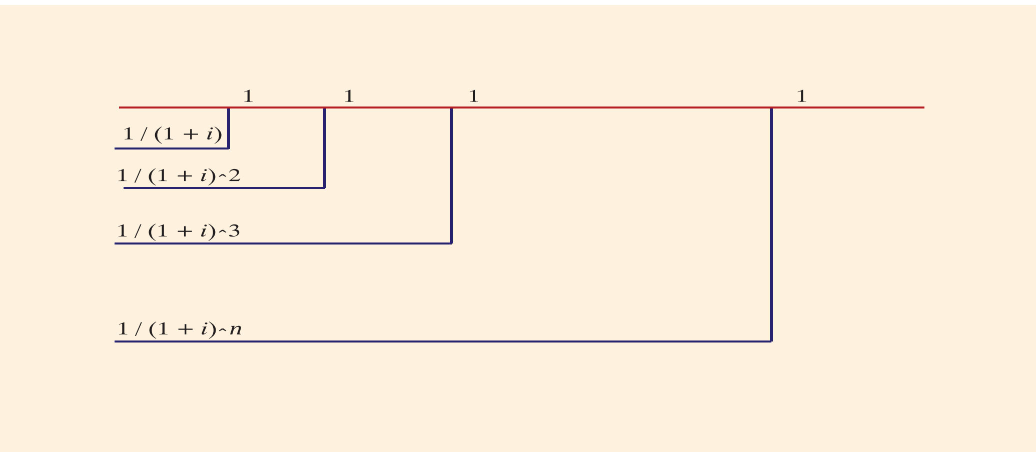
Ποιο είναι το ποσό που πρέπει να καταθέσω στην τράπεζα σήμερα έτσι ώστε μετά από ένα χρόνο να έχει γίνει 1 Ευρώ όταν το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού είναι $i$; Αν το ποσό που πρέπει να καταθέσω είναι $K$ τότε μετά από ένα χρόνο θα γίνει $K(1+i)$ οπότε για να είναι ίσο με 1 Ευρώ πρέπει $K = \frac{1}{1+i}$. Αυτό το ποσό ονομάζεται η παρούσα αξία του 1 Ευρώ μετά από ένα χρόνο από σήμερα. Παρόμοια, η παρούσα αξία 1 Ευρώ μετά από $n$ χρόνια από σήμερα θα είναι $\Pi = \frac{1}{(1+i)^n}$ και γενικότερα η παρούσα αξία του ποσού $K$ έπειτα από $n$ χρόνια είναι $\hat{K} = \frac{K}{(1+i)^n}$.
Αντίστοιχα, αν υποθέσουμε συνεχή ανατοκισμό τότε η παρούσα αξία του ποσού $K$ μετά από $t$ χρονικές μονάδες θα είναι

$$\hat{K} = K \cdot e^{-t \cdot i}$$

όπου το $t$ και το $i$ αναφέρονται προφανώς στις ίδιες χρονικές μονάδες. Εύκολα βλέπουμε λοιπόν ότι η παρούσα αξία ενός ποσού $K$ διαφέρει ανάλογα με τον τρόπο τοκισμού αλλά και με το επιτόκιο.
Έστω ότι καταβάλλουμε 1 Ευρώ στο τέλος κάθε έτους για $n$ χρόνια με ετήσιο επιτόκιο $i$. Αυτή η σειρά πληρωμών είναι μια ληξιπρόθεσμη ράντα και θέλουμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία της. Η παρούσα αξία της ράντας είναι το άθροισμα των επιμέρους αξιών (δες σχήμα 6.1) και επομένως

$$\alpha_{\overline{n}|i} = \frac{1}{1+i} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

Συμβολίζουμε με $\alpha_{\overline{n}|i}$ την παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας $n$ περιόδων με επιτόκιο $i$. Όπως διαπιστώνουμε η παρούσα αξία είναι μια γεωμετρική πρόοδος και είναι ίση με




Σχήμα 6.1: Παρούσα Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

$$\alpha_{\overline{n}|i} = \frac{1-U^n}{i}$$

(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας $n$ όρων) όπου $U = \frac{1}{1+i}$. Πράγματι, θέτοντας

$$S_{n+1} = \frac{1}{1+i} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}$$

έχουμε ότι

$$S_{n+1} - \frac{1}{1+i} \cdot S_{n+1} = \frac{1}{1+i} - \frac{1}{(1+i)^{n+1}}$$

Λύνοντας ως προς $S_{n+1}$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$S_{n+1} = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i}$$

Αν αντί για 1 Ευρώ καταβάλλουμε $K$ Ευρώ στο τέλος κάθε έτους τότε η παρούσα αξία της αντίστοιχης ράντας θα είναι ίση με $K\alpha_{\overline{n}|i}$. Υπολογίζοντας την παράγωγο ως προς $i$ παρατηρούμε ότι η παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς το επιτόκιο.

Γυρνώντας στο παράδειγμα που δώσαμε στην αρχή της παραγράφου θα χρησιμοποιήσουμε ράντες για τον υπολογισμό του αρχικού κεφαλαίου $K$. Αυτό θα είναι ίσο με

$$K = J\alpha_{\overline{n}|i} = J\alpha_{\overline{10}|0.05}$$

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι καθώς το $n \to \infty$ έχουμε ότι $U^n \to 0$ άρα ορίζουμε την λεγόμενη διηνεκή ράντα να είναι η

$$\alpha_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$$

(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης και διηνεκούς ράντας)

Ενδιαφέρον επίσης παρουσιάζει η περίπτωση όπου χρειαζόμαστε την παρούσα αξία ράντας (την οποία συμβολίζουμε με $\alpha^m_{\overline{n}|i}$) η οποία ξεκινά μετά από $m-1$ χρονικές περιόδους. Σε αυτή την περίπτωση, όταν έχουμε $n$ συνολικά όρους, ισχύει ότι

$$\alpha^m_{\overline{n}|i} = \frac{1}{(1+i)^m} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^{m+n-1}}$$

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα αυτό υπολογίζουμε την διαφορά

$$\alpha^m_{\overline{n}|i} - \frac{1}{1+i}\alpha^m_{\overline{n}|i} = \frac{1}{(1+i)^m} - \frac{1}{(1+i)^{n+m+1}}$$

'ρα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\alpha^m_{\overline{n}|i} = \frac{\alpha_{\overline{n}|i}}{(1+i)^{m-1}}$$

(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας $n$ όρων)
(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

και η αντίστοιχη διηνεκής ράντα είναι η

$$\alpha^m_{\overline{\infty}|i} = \frac{\alpha_{\overline{\infty}|i}}{(1+i)^{m-1}}$$
(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης και διηνεκούς ράντας)
(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

Στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού με ετήσιο επιτόκιο $i$ η παρούσα αξία του ενός Ευρώ μετά από $n$ χρόνια θα είναι $e^{-ni}$. Συνεπώς, αν καταβάλλουμε 1 Ευρώ στο τέλος κάθε χρόνου τότε η παρούσα αξία των ποσών αυτών θα είναι ίση με

$$\varepsilon_{\overline{n}|i} = e^{-i} + \cdots + e^{-ni}$$

Θέτοντας $x = e^{-i}$ και $S_{n+1} = x + x^2 + \cdots + x^n$ έχουμε ότι

$$S_{n+1} - xS_{n+1} = x^{n+1} - x$$

Λύνοντας ως προς $S_{n+1}$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $S_{n+1} = x\frac{1-x^n}{1-x}$. Δηλαδή η παρούσα αξία στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού είναι

$$\varepsilon_{\overline{n}|i} = e^{-i}\frac{1-e^{-ni}}{1-e^{-i}}$$
(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας $n$ όρων)

Η αντίστοιχη διηνεκής ράντα θα είναι

$$\varepsilon_{\overline{\infty}|i} = e^{-i}\frac{1}{1-e^{-i}}$$
(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης και διηνεκούς ράντας)

Εντελώς ανάλογα με πριν η αρξάμενη ράντα μετά από $m-1$ χρονικές περιόδους η οποία διαρκεί για $n$ περιόδους θα είναι

$$\varepsilon^m_{\overline{n}|i} = \frac{\varepsilon_{\overline{n}|i}}{e^{(m-1)i}}$$
(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας $n$ όρων)
(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

ενώ η αντίστοιχη διηνεκής ράντα θα είναι

$$\varepsilon^m_{\overline{\infty}|i} = \frac{\varepsilon_{\overline{\infty}|i}}{e^{(m-1)i}}$$
(παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης και διηνεκούς ράντας)
(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

Σημειώστε ότι όλες οι παραπάνω παρούσες αξίες αφορούν τις ράντες όπου η κάθε δόση είναι μια νομισματική μονάδα. Αν κάθε δόση είναι $K$ νομισματικές μονάδες τότε πρέπει να πολλαπλασιάσουμε την παρούσα αξία της κάθε ράντας με το $K$.

**'ΣΚΗΣΗ 102** *Ίδρυμα θέλει να καταβάλλει το ποσό των 1.000 Ευρώ μηνιαίως στον καλύτερο φοιτητή για τα επόμενα 4 χρόνια των σπουδών του. Για τον λόγο αυτό θα καταθέσει ένα ποσό σήμερα στην τράπεζα από την οποίο θα εκταμιεύεται το ποσό των 1.000 Ευρώ στο τέλος του κάθε μήνα. Ποιο είναι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει στην τράπεζα αν το μηνιαίο επιτόκιο ανατοκισμού είναι* $i = 0.05$;

**ΛΥΣΗ.** Τα 4 χρόνια αποτελούνται από 48 μήνες. Στο τέλος του πρώτου μήνα πρέπει να καταβληθούν 1.000 Ευρώ. Ποιο είναι το ποσό που πρέπει σήμερα να καταβάλλει το Ίδρυμα στην τράπεζα για να είναι σε θέση να καταβάλλει το ποσό αυτό; Στην ουσία ψάχνουμε την παρούσα αξία των 1.000 Ευρώ του πρώτου μήνα η οποία είναι $\frac{1.000}{1+i}$. Παρόμοια, η παρούσα αξία των 1.000 Ευρώ τον $m$-οστό μήνα είναι $\frac{1.000}{(1+i)^m}$. Συνεπώς, τα χρήματα που πρέπει σήμερα να καταβάλλει το ίδρυμα είναι το άθροισμα των επιμέρους παρουσών αξιών. 'ρα πρόκειται για μια ληξιπρόθεσμη ράντα 48 όρων με επιτόκιο $i = 0.05$ και 1.000 Ευρώ το ποσό του κάθε όρου. Επομένως, το ποσό που πρέπει να καταθέσει σήμερα το Ίδρυμα στην τράπεζα είναι ίσο με την παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης ράντας 48 όρων επί 1.000 Ευρώ, δηλαδή

$$K = 1.000 \cdot \alpha_{\overline{48}|0.05} = 18.077,15782 \text{ (Ευρώ)}$$

□

**'ΣΚΗΣΗ 103** *Ο Α (ηλικίας 20 ετών) κέρδισε 4.000.000 Ευρώ στο λαχείο και σκέφτεται πως θα χειριστεί το ποσό αυτό. Μια λύση είναι να το επενδύσει σε μια επιχείρηση αλλά αποφασίζει να κρατήσει ένα ποσό ούτως ώστε από την ηλικία των 60 ετών και μετά να μπορεί να παίρνει 10.000 Ευρώ ετησίως για πάντα. Ποιο είναι το ποσό που πρέπει να καταθέσει σήμερα στην τράπεζα όταν το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού είναι* $i = 0.05$; *Αν ο Α αποβιώσει στην ηλικία των* $60 + N$ *πόσα χρήματα θα περισσέψουν στην τράπεζα;*

**ΛΥΣΗ.** Το ποσό θα το καταθέσει σήμερα αλλά η πρώτη δόση θα του καταβληθεί σε 41 χρόνια από τώρα. Στην ουσία, το ζητούμενο είναι η παρούσα αξία ληξιπρόθεσμης και διηνεκούς ράντας αρξάμενης μετά από 40 χρόνια (δες σχήμα 6.2), δηλαδή το ποσό που θα καταθέσει σήμερα είναι

$$K = 10.000 \cdot \alpha^{41}_{\overline{\infty}|i} \backsimeq 28.410 \text{ (Ευρώ)}$$

Δηλαδή καταθέτοντας σήμερα ένα πολύ μικρό ποσό θα έχει από την ηλικία των 60 και έπειτα 10.000 Ευρώ το χρόνο για πάντα!

Θα υπολογίσουμε τώρα τα χρήματα που θα απομείνουν στην τράπεζα όταν ο Α αποβιώσει σε ηλικία $60 + N$ ετών. Καταρχάς, το ποσό των 28.410 Ευρώ που θα καταθέσει σήμερα θα γίνει 200.000 Ευρώ στην ηλικία των 60 ετών. Τόσα άλλωστε είναι τα χρήματα που χρειάζεται στην τράπεζα εκείνη την χρονική στιγμή ούτως ώστε να μπορεί να εκταμιεύει 10.000 Ευρώ το χρόνο για τα επόμενα χρόνια. Αν το δούμε ως παρούσα αξία διηνεκούς και ληξιπρόθεσμης ράντας θα βρούμε ότι το ποσό που χρειάζεται στην ηλικία των 60 ετών είναι $\frac{10.000}{0.05} = 200.000$. Αν ο Α αποβιώσει στην ηλικία των $60 + N$ ετών θα έχει εκταμιεύσει το ποσό των 10.000 Ευρώ κάθε χρόνο για τα $N$ αυτά χρόνια μετά τα 60. Η παρούσα αξία (κατά την ηλικία των 60 ετών) των ποσών αυτών θα είναι

$$10.000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i}$$

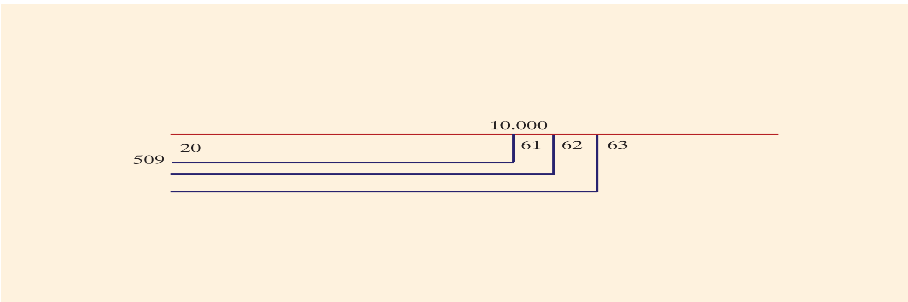
Επομένως το ποσό που θα περισσέψει θα είναι

$$200.000 - 10.000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i}$$

Το ποσό αυτό θα τοκίζεται για τα επόμενα $N$ χρόνια και θα είναι ίσο με

$$\left(200.000 - 10.000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i}\right) \cdot (1+i)^N = 200.000$$

'ρα, όποτε και αν αποβιώσει ο Α, το υπόλοιπο ποσό θα είναι το ίδιο και ίσο με αυτό που είχε στα 60 του χρόνια. Αυτό το αποτέλεσμα είναι λογικό. Σκεφτείτε ποιο ποσό πρέπει να έχει στην ηλικία των $M$ χρόνων ούτως ώστε να μπορεί να παίρνει το ποσό των 10.000 Ευρώ κάθε επόμενο χρόνο για πάντα. Το ζητούμενο ποσό θα είναι πάλι $\frac{10.000}{i} = 200.000$ Ευρώ! Αν το δούμε διαφορετικά, οι τόκοι του ποσού των 200.000 Ευρώ κάθε χρόνο είναι 10.000 Ευρώ. Δηλαδή μπορεί να καταναλώνει κάθε χρόνο μονάχα τους τόκους έτσι ώστε το κεφάλαιο να μένει ακέραιο. □




Σχήμα 6.2: 10.000 Ευρώ στα 61 έτη είναι οικονομικώς ισοδύναμα με $\frac{10.000}{(1+0.05)^{61}} \backsimeq 509$ Ευρώ στα 20 έτη.

**'ΣΚΗΣΗ 104** *Ο Α θέλει να καταθέσει ένα ποσό σήμερα στην τράπεζα έτσι ώστε το νεογέννητο παιδί του σήμερα να παίρνει κατά την ηλικία των 18 ετών και για τα 10 επόμενα έτη το ποσό των 10.000 Ευρώ ετησίως. Ποιο είναι το ποσό που πρέπει να κατατεθεί σήμερα στην τράπεζα αν το ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι $i = 0.03$; Υπολογίστε επίσης το ποσό που πρέπει να κατατεθεί σήμερα στην τράπεζα έτσι ώστε το παιδί του να παίρνει 10.000 Ευρώ ετησίως για πάντα.*

**ΛΥΣΗ.** Το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό ληξιπρόθεσμης ράντας 10 όρων και αρξάμενης μετά από 18 χρονικές περιόδους, δηλαδή το ποσό που πρέπει να κατατεθεί σήμερα στην τράπεζα είναι

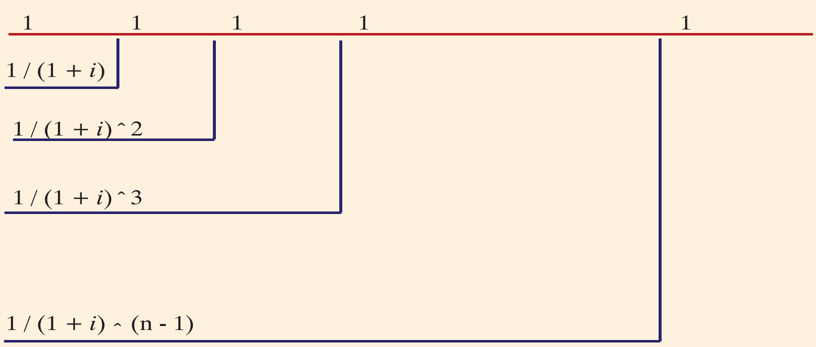
$$K = 10.000 \cdot \varepsilon^{19}_{10|i} \backsimeq 49.594$$

Από την άλλη μεριά το ποσό που πρέπει να κατατεθεί σήμερα στην τράπεζα ούτως ώστε το παιδί του να μπορεί να παίρνει το ποσό των 10.000 Ευρώ το χρόνο για πάντα είναι

$$K = 10.000 \cdot \varepsilon^{19}_{\overline{\infty}|i} \backsimeq 191.350$$

Η διαφορά είναι μεγάλη όμως το πλεονέκτημα είναι σοβαρό. Το παιδί θα παίρνει για πάντα (όσο ζει) το ποσό των 10.000 Ευρώ ετησίως και ταυτόχρονα θα αφήσει με την σειρά του το ποσό των $\frac{10.000}{i}$ στο δικό του παιδί και ούτω κάθε εξής. □

## 6.2 Εύρεση της παρούσης αξίας μιας προκαταβλητέας ράντας




Σχήμα 6.3: Παρούσα Αξία Προκαταβλητέας Ράντας

Σε αυτή την παράγραφο θα εξετάσουμε τις προκαταβλητέες ράντες. Η διαφορά εδώ είναι ότι το ποσό προκαταβάλλεται στην αρχή της κάθε χρονικής περιόδου. Αν συμβολίσουμε με $U = \frac{1}{1+i}$ τότε η παρούσα αξία μιας προκαταβλητέας ράντας θα είναι (δες σχήμα 6.3) το άθροισμα των παρουσών αξιών, δηλαδή

$$\overline{\alpha}_{\overline{n}|i} = 1 + U + U^2 + \cdots + U^{n-1} = \frac{1 - U^n}{i}(1+i) = \alpha_{\overline{n}|i}(1+i)$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $1 + x + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$. Για να δούμε την απόδειξη θέτουμε $S_n = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$ και σχηματίζουμε την διαφορά $S_n - xS_n = 1 - x^n$. Λύνοντας ως προς $S_n$ προκύπτει η ζητούμενη ταυτότητα.

Δηλαδή, τοποθετούμε 1 Ευρώ σήμερα στην τράπεζα επομένως η παρούσα αξία του είναι 1 Ευρώ. Το 1 Ευρώ που θα τοποθετήσουμε μετά από ένα χρόνο θα έχει παρούσα αξία $U$ και συνεχίζοντας έτσι προκύπτει το άθροισμα των σημερινών αξιών. Διαπιστώνουμε ότι η παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη ληξιπρόθεσμη.

Παρόμοια, με την ληξιπρόθεσμη ράντα έχουμε τα εξής, στην περιοδική ανακεφαλαιοποίηση

$$\overline{\alpha}_{\overline{n}|i} = \alpha_{\overline{n}|i}(1+i)$$
(παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας $n$ όρων)
$$\overline{\alpha}_{\overline{\infty}|i} = \alpha_{\overline{\infty}|i}(1+i)$$
(παρούσα αξία προκαταβλητέας και διηνεκούς ράντας)
$$\overline{\alpha}^m_{\overline{n}|i} = \frac{\overline{\alpha}_{\overline{n}|i}}{(1+i)^{m-1}}$$
(παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας $n$ όρων)
(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)
$$\overline{\alpha}^m_{\overline{\infty}|i} = \frac{\overline{\alpha}_{\overline{\infty}|i}}{(1+i)^{m-1}}$$
(παρούσα αξία προκαταβλητέας και διηνεκούς ράντας)
(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

ενώ στην συνεχή ανακεφαλαιοποίηση ισχύουν τα παρακάτω

$$\overline{\varepsilon}_{\overline{n}|i} = \varepsilon_{\overline{n}|i}e^i$$
(παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας $n$ όρων)
$$\overline{\varepsilon}_{\overline{\infty}|i} = \varepsilon_{\overline{\infty}|i}e^i$$
(παρούσα αξία προκαταβλητέας και διηνεκούς ράντας)
$$\overline{\varepsilon}^m_{\overline{n}|i} = \frac{\overline{\varepsilon}_{\overline{n}|i}}{\varepsilon^{(m-1)i}}$$
(παρούσα αξία προκαταβλητέας ράντας $n$ όρων)
(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)
$$\overline{\varepsilon}^m_{\overline{\infty}|i} = \frac{\overline{\varepsilon}_{\overline{\infty}|i}}{\varepsilon^{(m-1)i}}$$
(παρούσα αξία προκαταβλητέας και διηνεκούς ράντας)
(αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές περιόδους)

Για να δικαιολογήσουμε την σχέση $\overline{\varepsilon}_{\overline{n}|i} = \varepsilon_{\overline{n}|i}e^i$ έχουμε ότι

$$\overline{\varepsilon}_{\overline{n}|i} = 1 + e^{-i} + \cdots + e^{-(n-1)i} = e^i(e^{-i} + \cdots + e^{-ni}) = \varepsilon_{\overline{n}|i}e^i$$

Παρόμοια προκύπτουν και οι υπόλοιπες σχέσεις.
Μπορεί κάποιος να εργαστεί στις ίδιες ασκήσεις με την προηγούμενη παράγραφο υποθέτοντας τώρα προκαταβλητέες ράντες.

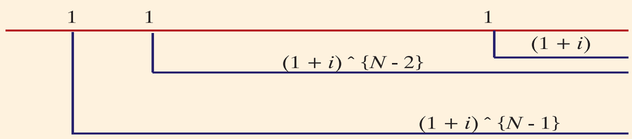
## 6.3 Εύρεση της τελικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας

Στην άσκηση 103 ο Α έπρεπε να τοποθετήσει το ποσό των 28.410 Ευρώ σήμερα ούτως ώστε μετά από 40 χρόνια να έχει το ποσό των 200.000 Ευρώ στην τράπεζα. Όπως είδαμε το ποσό αυτό είναι αρκετό για να μπορεί να εκταμιεύει 10.000 Ευρώ στο

τέλος κάθε χρόνου για όλα τα επόμενα χρόνια. Τίθεται το εξής ερώτημα: Μπορεί να καταθέτει στην τράπεζα ένα συγκεκριμένο ποσό τον χρόνο έτσι ώστε μετά από 40 χρόνια να δημιουργήσει το ζητούμενο ποσό των 200.000 Ευρώ;
Ας δούμε το ερώτημα λίγο διαφορετικά. Έστω ότι καταθέτω 1 Ευρώ στο τέλος τους κάθε χρόνου για $N$ χρόνια με επιτόκιο κατάθεσης $i$. Τι ποσό θα έχει συγκεντρωθεί στο τέλος των $N$ χρόνων;
Το ποσό θα είναι

$$K = 1 \cdot (1+i)^{N-1} + \cdots + 1$$

Το πρώτο Ευρώ θα το καταθέσω στο τέλος του πρώτου έτους και άρα θα τοκιστεί για τα επόμενα $N-1$ έτη. Το δεύτερο Ευρώ θα το καταθέσω στο τέλος του δεύτερου έτους και θα τοκιστεί για τα επόμενα $N-2$ χρόνια και ούτω κάθε εξής.




Σχήμα 6.4: Τελική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

’ρα μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας μιας νομισματικής μονάδας υποθέτοντας περιοδική κεφαλαιοποίηση η οποία θα είναι

$$s_{\overline{n}|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + 1$$

Το παραπάνω άθροισμα είναι

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

(τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας)

Διαπιστώνουμε εύκολα ότι η τελική αξία (σε αντίθεση με την παρούσα αξία) ληξιπρόθεσμης ράντας τείνει στο άπειρο καθώς το $n \to \infty$ συνεπώς δεν έχει νόημα να μιλάμε για τελική αξία ληξιπρόθεσμης και διηνεκούς ράντας. Υπολογίζοντας την παράγωγο της τελικής αξίας ως προς το επιτόκιο $i$ διαπιστώνουμε ότι είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς το επιτόκιο.
Επίσης είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι

$$\frac{\alpha_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

Στην περίπτωση συνεχούς κεφαλαιοποίησης θα έχουμε

$$s\varepsilon_{\overline{n}|i} = e^{(n-1)i} + \cdots + 1$$

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα αυτό θέτουμε $S_n = 1 + e^i + \cdots + e^{(n-1)i}$ και σχηματίζουμε την διαφορά $S_n - e^i S_n = 1 - e^{ni}$. Λύνοντας ως προς $S_n$ προκύπτει η τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας υποθέτοντας συνεχή κεφαλαιοποίηση η οποία είναι

$$s\varepsilon_{\overline{n}|i} = \frac{1-e^{ni}}{1-e^i}$$

(τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας)

Διαπιστώνουμε ότι όταν το επιτόκιο είναι αυστηρά θετικό η τελική αξία τείνει στο άπειρο καθώς το $n \to \infty$.

## 6.4 Εύρεση της τελικής αξίας προκαταβλητέας ράντας

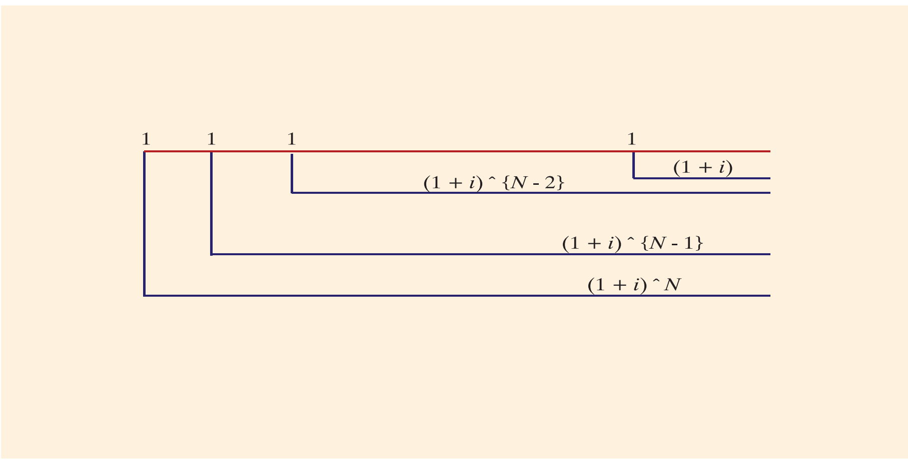
Σε αυτήν την περίπτωση καταβάλλουμε 1 Ευρώ στην αρχή του πρώτου έτους και επομένως αυτό τοκίζεται για τα επόμενα $n$ έτη με αντίστοιχη τελική αξία. Η τελική αξία της προκαταβλητέας ράντας θα είναι

$$\sigma_{\overline{n}|i} = (1+i)^n + \cdots + (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i) = s_{\overline{n}|i}(1+i)$$

'ρα η τελική αξία προκαταβλητέας ράντας στη περίπτωση περιοδικής ανακεφαλαίωσης είναι

$$\sigma_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}(1+i)$$

(τελική αξία προκαταβλητέας ράντας)




Σχήμα 6.5: Τελική Αξία Προκαταβλητέας Ράντας

Παρόμοια, όταν έχουμε συνεχή ανατοκισμό η τελική αξία θα είναι

$$\sigma\varepsilon_{\overline{n}|i} = e^{ni} + \cdots + e^i$$

Για να βρούμε το άθροισμα αυτό θέτουμε $S_n = e^{ni} + \cdots + e^i$ και σχηματίζουμε την διαφορά $S_n - e^i S_n = e^i - e^{(n+1)i}$. Λύνοντας ως προς $S_n$ έχουμε $S_n = e^i \frac{1-e^{ni}}{1-e^i}$.
'ρα η τελική αξία προκαταβλητέας ράντας σε συνεχή ανατοκισμό είναι

$$\sigma\varepsilon_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i} e^i$$

(τελική αξία προκαταβλητέας ράντας)

## 6.5 Κλασματικές Ράντες

Έστω ότι ο Α δανείστηκε το ποσό των 2.000 Ευρώ από τον Β. Υποθέτουμε ότι το επιτόκιο δανεισμού είναι $i$ το οποίο αναφέρεται σε $t$ χρονικές μονάδες. Ο Α θα επιστρέψει το ποσό στον Β με ισόποσες δόσεις στο μέλλον. Για να εξοφλήσει το δανεισμένο ποσό θα πρέπει το άθροισμα των παρουσών αξιών των μελλοντικών ποσών να είναι ίσο με 2.000 Ευρώ ανεξάρτητα από την περίοδο καταβολής των δόσεων. Ας υποθέσουμε ότι ο δανειζόμενος ενδιαφέρεται να αποπληρώνει το δανεισμένο ποσό σε μελλοντικές δόσεις οι οποίες θα καταβληθούν σε χρόνους που δεν είναι πολλαπλάσια της χρονικής μονάδας $t$ στην οποία αναφέρεται το επιτόκιο. Αν π.χ. το επιτόκιο είναι ετήσιο ο δανειζόμενος μπορεί να θέλει να πληρώνει κάποιο χρηματικό ποσό κάθε τετράμηνο. Έτσι, προκύπτουν οι λεγόμενες **κλασματικές ράντες** τις οποίες θα μελετήσουμε σε αυτή την ενότητα.

### 6.5.1 Παρούσα Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

Έστω ότι το επιτόκιο $i$ αναφέρεται σε $t$ χρονικές μονάδες. Τότε η παρούσα αξία κλασματικής ράντας μιας νομισματικής μονάδας, με περίοδο δόσεων $t_1$, σύνολο δόσεων $n$ και αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές μονάδες είναι

$$\alpha^m_{\overline{n}|i} = \sum_{j=m}^{n+m-1} \frac{1}{(1+i)^{[\frac{j\cdot t_1}{t}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{j\cdot t_1}{t} - [\frac{j\cdot t_1}{t}]\right)\cdot i\right)}$$

Αν το επιτόκιο $i$ αναφέρεται σε $t$ χρονικές μονάδες συνεχούς ανατοκισμού τότε η παρούσα αξία της κλασματικής ράντας, αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές μονάδες, θα είναι

$$\varepsilon^m_{\overline{n}|i} = \sum_{j=m}^{m+n-1} e^{-i\cdot\frac{j\cdot t_1}{t}} = e^{-i\cdot m\cdot\frac{t_1}{t}} \frac{1-e^{-n\cdot i\cdot\frac{t_1}{t}}}{1-e^{-i\frac{t_1}{t}}} \tag{6.1}$$

Διαπιστώνουμε ότι κάτω από την υπόθεση συνεχούς ανατοκισμού η παρούσα αξία κλασματικής ράντας έχει μια πιο συμπαγή μορφή. Επιπλέον, είναι πολύ πιο εύκολο να υπολογίσουμε το επιτόκιο ή το πλήθος των δόσεων όταν όλα τα υπόλοιπα είναι γνωστά.

Παρόμοια με τις απλές ράντες έχουμε τις διηνεκείς και κλασματικές ράντες. Στην περίπτωση περιοδικού ανατοκισμού ισχύει ότι η παρούσα αξία της κλασματικής και αρξάμενης σε $m-1$ χρονικές μονάδες είναι ίση με

$$\alpha^m_{\overline{\infty}|i} = \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{[\frac{j\cdot t_1}{t}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{j\cdot t_1}{t} - [\frac{j\cdot t_1}{t}]\right) \cdot i\right)}$$

ενώ στην περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού η παρούσα αξία είναι ίση με

$$\varepsilon^m_{\overline{\infty}|i} = \frac{e^{-im\cdot\frac{t_1}{t}}}{1 - e^{-i\frac{t_1}{t}}}$$

### 6.5.2 Παρούσα Αξία Προκαταβλητέας Ράντας

Στην περίπτωση προκαταβλητέας ράντας θα έχουμε

$$\overline{\alpha}^m_{\overline{n}|i} = \sum_{j=m-1}^{n+m-2} \frac{1}{(1+i)^{[\frac{j\cdot t_1}{t}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{j\cdot t_1}{t} - [\frac{j\cdot t_1}{t}]\right) \cdot i\right)}$$

όταν ο ανατοκισμός είναι περιοδικός και

$$\overline{\varepsilon}^m_{\overline{n}|i} = \sum_{j=m-1}^{m+n-2} e^{-i\cdot\frac{j\cdot t_1}{t}} = e^{-i(m-1)\cdot\frac{t_1}{t}} \frac{1 - e^{-n\cdot i\cdot\frac{t_1}{t}}}{1 - e^{-i\frac{t_1}{t}}}$$

όταν ο ανατοκισμός είναι συνεχής.
Οι αντίστοιχες διηνεκείς ράντες είναι

$$\overline{\alpha}^m_{\overline{\infty}|i} = \sum_{j=m-1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{[\frac{j\cdot t_1}{t}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{j\cdot t_1}{t} - [\frac{j\cdot t_1}{t}]\right) \cdot i\right)}$$

όταν ο ανατοκισμός είναι περιοδικός και

$$\overline{\varepsilon}^m_{\overline{\infty}|i} = \frac{e^{-i(m-1)\cdot\frac{t_1}{t}}}{1 - e^{-i\frac{t_1}{t}}} \tag{6.2}$$

όταν ο ανατοκισμός είναι συνεχής.

### 6.5.3 Τελική Αξία Ληξιπρόθεσμης Ράντας

Συμβολίζουμε με $T$ τον χρόνο λήξης της ράντας, δηλαδή μετά τον χρόνο αυτό δεν υπάρχει κανένας όρος της ράντας. Αν το επιτόκιο είναι περιοδικής κεφαλαιοποίησης τότε η τελική αξία ληξιπρόθεσμης και κλασματικής ράντας είναι

$$s_{\overline{n}|i} = \sum_{j=1}^{n}(1+i)^{[\frac{T-j\cdot t_1}{t}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{T-j\cdot t_1}{t} - [\frac{T-j\cdot t_1}{t}]\right)\cdot i\right)$$

Για την περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού έχουμε

$$s\varepsilon_{\overline{n}|i} = \sum_{j=1}^{n} e^{i\frac{T-j\cdot t_1}{t}} = e^{i\frac{T-t_1}{t}}\frac{1-e^{-i\cdot n\cdot\frac{t_1}{t}}}{1-e^{-i\frac{t_1}{t}}} \tag{6.3}$$

### 6.5.4 Τελική Αξία Προκαταβλητέας Ράντας

Αν το επιτόκιο είναι περιοδικής κεφαλαιοποίησης τότε η τελική αξία προκαταβλητέας και κλασματικής ράντας είναι

$$\sigma_{\overline{n}|i} = \sum_{j=0}^{n-1}(1+i)^{[\frac{T-j\cdot t_1}{t}]} \cdot \left(1 + \left(\frac{T-j\cdot t_1}{t} - [\frac{T-j\cdot t_1}{t}]\right)\cdot i\right)$$

Για την περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού έχουμε

$$\sigma\varepsilon_{\overline{n}|i} = \sum_{j=0}^{n-1} e^{i\frac{T-j\cdot t_1}{t}} = e^{i\frac{T}{t}}\frac{1-e^{-i\cdot n\cdot\frac{t_1}{t}}}{1-e^{-i\frac{t_1}{t}}} \tag{6.4}$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 105** (Σχόλια επί των Κλασματικών Ραντών) *Σημειώστε ότι στην περίπτωση που το $t_1$ είναι ίσο με το $t$, δηλαδή η περίοδος της δόσης της ράντας συμπίπτει με την περίοδο κεφαλαιοποίησης, τότε η κλασματική ράντα συμπίπτει με την απλή ράντα.*
*Επίσης, δεν είναι από μαθηματικής άποψης ορθό να εργαστούμε στο ισοδύναμο επιτόκιο το οποίο θα αναφέρεται στις $t_1$ χρονικές μονάδες για να αποφύγουμε την χρήση κλασματικής ράντας (δες άσκηση 108 παρακάτω). Όπως έχουμε διαπιστώσει τα ποσά είναι ίδια μονάχα στο Ε.Κ.Π. των $t_1$ και $t$ συνεπώς τα αποτελέσματα θα διαφέρουν από τα πραγματικά. Μπορούμε όμως να το κάνουμε στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού (δες παρατήρηση 89).*
*Η χρονική μονάδα $t_1$ μπορεί κάλλιστα να είναι πολλαπλάσιο του $t$ άρα η κλασματική ράντα είναι μια γενίκευση της απλής ράντας. Εύκολα βλέπουμε ότι η χρήση επιτοκίου συνεχούς ανατοκισμού οδηγεί σε απλούστερους υπολογισμούς και ο υπολογισμός αρχικών ή τελικών αξιών των ραντών είναι ευκολότερος ιδιαίτερα στις διηνεκείς.*

**'ΣΚΗΣΗ 106** *Ο Α δανείσθηκε το ποσό των 2.000 Ευρώ από τον Β με ετήσιο επιτόκιο $i = 0.05$ συνεχούς ανατοκισμού. Θέλει να επιστρέψει το δανεισμένο ποσό σε 4 ισόποσες δόσεις τις οποίες θα πληρώνει ανά 7 μήνες με πρώτη δόση 7 μήνες μετά τον δανεισμό. Ποιο είναι το ποσό της κάθε δόσης;*

**ΛΥΣΗ.** Στην περίπτωση αυτή έχουμε να κάνουμε με μια κλασματική ράντα διότι η χρονική περίοδος των 7 μηνών δεν συμπίπτει με την χρονική περίοδο κατά την οποία είναι ορισμένο το επιτόκιο. Η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη με παρούσα αξία το ποσό των 2.000 Ευρώ και το ζητούμενο είναι η δόση $K$. Επομένως ισχύει ότι

$$2.000 = K \cdot \varepsilon_{\overline{4}|0.05} = K \cdot e^{-0.05\cdot\frac{7}{12}} \frac{1 - e^{-0.05\cdot 4\cdot\frac{7}{12}}}{1 - e^{-0.05\cdot\frac{7}{12}}}$$

Λύνοντας ως προς $K$ υπολογίζουμε την δόση η οποία είναι $K = 537,5346087$ Ευρώ. □

**'ΣΚΗΣΗ 107** *Θέλουμε να καταθέτουμε κάθε τρεις μήνες το ποσό των 100 Ευρώ σε ένα λογαριασμό τραπέζης με ετήσιο επιτόκιο $i = 0.05$. Πρώτη κατάθεση θα είναι μετά από τρεις μήνες από τώρα. Ποιο θα είναι το τελικό ποσό μετά από 25 μήνες;*

**ΛΥΣΗ.** Πρόκειται για μια κλασματική ράντα αφού η περίοδος καταβολής των δόσεων δεν συμπίπτει με την περίοδο κεφαλαιοποίησης των τόκων. Επίσης, πρόκειται για μια ληξιπρόθεσμη ράντα της οποίας γνωρίζουμε την δόση $K = 100$, το πλήθος των όρων $n = 8$, το τέλος της ράντας $T = 25$ μήνες και το ζητούμενο είναι η τελική αξία. 'ρα η τελική αξία είναι ίση με

$$\begin{aligned} K_t &= 100 \cdot \sum_{j=1}^{8} (1+0.05)^{[\frac{25-j\cdot 3}{12}]} \times \left(1 + \left(\frac{25-j\cdot 3}{12} - [\frac{25-j\cdot 3}{12}]\right) \cdot 0.05\right) \\ &= 838,7916667 \text{ (Ευρώ)} \end{aligned}$$

□

**'ΣΚΗΣΗ 108** *Θέλουμε να καταθέτουμε κάθε τρεις μήνες το ποσό των 1.000 Ευρώ σε λογαριασμό τραπέζης με ετήσιο επιτόκιο $i = 0.05$. Πρώτη κατάθεση θα είναι μετά από τρεις μήνες από τώρα. Ποιο θα είναι το τελικό ποσό μετά από 18 μήνες;*

**ΛΥΣΗ.** Όπως στην προηγούμενη άσκηση πρόκειται για μια ληξιπρόθεσμη κλασματική ράντα της οποία ψάχνουμε την τελική αξία. Έχουμε όπως πριν ότι

$$\begin{aligned} K_t &= 1.000 \cdot \sum_{j=1}^{6} (1+0.05)^{[\frac{18-j\cdot 3}{12}]} \times \left(1 + \left(\frac{18-j\cdot 3}{12} - [\frac{18-j\cdot 3}{12}]\right) \cdot 0.05\right) \\ &= 6.188,125000 \text{ (Ευρώ)} \end{aligned}$$

Αν θελήσουμε να υπολογίσουμε την τελική αξία χρησιμοποιώντας το ισοδύναμο επιτόκιο τριμήνου θα βρούμε διαφορετικό αποτέλεσμα. Πράγματι, το ισοδύναμο επιτόκιο τριμήνου είναι το $i_1$ τέτοιο ώστε $(1 + i_1)^4 = 1 + 0.05$. Προκύπτει ότι $i_1 = 0.012272234$. Η τελική αξία θα είναι

$$\hat{K}_t = 1.000 \cdot s_{\overline{6}|i_1} = 6.187,123551$$

Διαπιστώνουμε ότι οι τελικές αξίες διαφέρουν. □

**'ΣΚΗΣΗ 109** *Θέλουμε να καταθέτουμε το ποσό των 100 Ευρώ για τους επόμενους 50 μήνες σε λογαριασμό τραπέζης με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού $i = 0.05$. Η πρώτη κατάθεση θα γίνει στο τέλος του πρώτου μήνα. Ποιο θα είναι το τελικό ποσό μετά από 40 χρόνια;*

**ΛΥΣΗ.** Στην περίπτωση μας ο χρόνος λήξης της ράντας είναι $T = 40 \cdot 12$ μήνες. Η ράντα είναι ληξιπρόθεσμη και κλασματική και το πλήθος των όρων είναι $n = 50$ μήνες. 'ρα η τελική αξία θα είναι

$$\begin{aligned} K_t &= 100 \cdot \sum_{j=1}^{50} (1+0.05)^{[\frac{40\cdot 12 - j\cdot 1}{12}]} \times \left(1 + \left(\frac{40\cdot 12 - j\cdot 1}{12} - [\frac{40\cdot 12 - j\cdot 1}{12}]\right) \cdot 0.05\right) \\ &= 31.794,10495 \text{ (Ευρώ)} \end{aligned}$$

□

**'ΣΚΗΣΗ 110** *Καταθέτουμε το ποσό των 1.000 Ευρώ κάθε 1 χρόνο και 7 μήνες σε λογαριασμό τραπέζης με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού $i = 0.05$. Η πρώτη δόση είναι μετά από 1 χρόνο και 7 μήνες από σήμερα και συνολικά κάνουμε αυτού του είδους την κατάθεση 20 φορές. Ποια είναι η παρούσα αξία του συνόλου των καταθέσεων και ποια η τελική αξία των μετά από 40 χρόνια; Ποια η σχέση μεταξύ της παρούσης αξίας και της τελικής;*

**ΛΥΣΗ.** Έχουμε να κάνουμε με ληξιπρόθεσμες και κλασματικές ράντες. Εδώ το $t_1 = 1 + \frac{7}{12} = 1,583$ και το $n = 20$ ενώ ο χρόνος λήξης της ράντας είναι $T = 40$ χρόνια. Η παρούσα αξία της ράντας είναι

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_{j=1}^{20} \frac{1.000}{(1+0.05)^{[j\cdot 1,583]} \cdot (1 + (j\cdot 1,583 - [j\cdot 1,583]) \cdot 0.05)} \\ &= 9.793,278116 \text{ (Ευρώ)} \end{aligned}$$

Η τελική αξία της ράντας θα είναι

$$\begin{aligned} K_t &= 1.000 \cdot \sum_{j=1}^{20} (1+0.05)^{[40 - j\cdot 1,583]} \times (1 + (40 - j\cdot 1,583 - [40 - j\cdot 1,583]) \cdot 0.05) \\ &= 68.973,02625 \text{ (Ευρώ)} \end{aligned}$$

Η σχέση μεταξύ παρούσης αξίας και τελικής είναι $K_t = \Pi \cdot (1 + 0.05)^{40}$. Αυτό σημαίνει ότι αν τοκίζαμε για 40 χρόνια το ποσό της παρούσης αξίας θα είχαμε ως τελικό ποσό την τελική αξία της παραπάνω ράντας. □

**'ΣΚΗΣΗ 111** *Ο Α θέλει να καταθέσει σήμερα, στην ηλικία των 20 ετών, ένα ποσό έτσι ώστε από τα 60 του χρόνια και μετά να εκταμιεύει 1.000 Ευρώ στο τέλος κάθε μήνα για πάντα. Το ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι $i = 0.05$. Ποιο ποσό πρέπει να καταθέσει σήμερα στην τράπεζα;*

Λυση. Πρόκειται για μια κλασματική και διηνεκής ράντα αρξάμενης σε $40 \cdot 12$ μήνες από τώρα. Ψάχνουμε την αρχική αξία η οποία θα είναι

$$\Pi = 1.000 \cdot \varepsilon^{m}_{\overline{\infty}|i} = 1.000 \cdot \frac{e^{-im\cdot\frac{t_1}{t}}}{1-e^{-i\frac{t_1}{t}}} = 1.000 \cdot \frac{e^{-0.05\cdot 40\cdot 12\cdot\frac{1}{12}}}{1-e^{-0.05\cdot\frac{1}{12}}} = 32.548,18225 \text{ (Ευρώ)}$$

□

## 6.6 Ισοδύναμες Ράντες

Στην άσκηση 102 μελετήσαμε την περίπτωση όπου κάποιο ίδρυμα θέλει να δώσει υποτροφία στον καλύτερο φοιτητή ενός τμήματος. Το ερώτημα ήταν ποιο ποσό έπρεπε να τοποθετήσει σήμερα στην τράπεζα ούτως ώστε να μπορεί να εκταμιεύεται το ποσό των 1.000 Ευρώ μηνιαίως για τέσσερα χρόνια στο τέλος κάθε μήνα. Είδαμε ότι το ποσό που χρειαζόταν ήταν 18.077,15782 Ευρώ.
Σε αυτό το πρόβλημα μπορεί να προκύψουν διάφορα ερωτήματα. Έστω ότι το ίδρυμα καταθέσει το ίδιο ποσό χρημάτων σήμερα αλλά αποφασίσει να δίνει την υποτροφία στην αρχή κάθε μήνα. Ποιο είναι το ποσό που θα παίρνει ο φοιτητής στην αρχή του κάθε μήνα; 'λλο ερώτημα είναι αν το ίδρυμα καταθέσει το ίδιο ποσό σήμερα αλλά αποφασίσει να δίνει την υποτροφία για 5 χρόνια (αντί για τέσσερα) στον φοιτητή στην αρχή ή στο τέλος του κάθε μήνα τότε πόσα χρήματα θα παίρνει ο φοιτητής τον μήνα;. Τα ερωτήματα αυτά ανάγονται σε προβλήματα «μετατροπής» ράντας, δηλαδή να περάσουμε από την μια μορφή ράντας σε μια άλλη, π.χ. από ληξιπρόθεσμη σε προκαταβλητέα, από $n$ όρων σε διηνεκή κ.τ.λ.
Κάθε ράντα αποτελείται από τις εξής παραμέτρους: αρχική αξία, τελική αξία, τον όρο, το πλήθος των όρων, επιτόκιο, ληξιπρόθεσμη ή προκαταβλητέα, διηνεκής. Θα λέμε λοιπόν ότι δυο ράντες είναι ισοδύναμες αν συμπίπτουν σε τουλάχιστον μια παράμετρο.

**Παραδειγμα 112** *Ο Α αποφασίζει να καταθέσει το ποσό των 100.000 Ευρώ σήμερα στην τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο $i = 0.05$ έτσι ώστε να λαμβάνει ένα ποσό στο τέλος κάθε έτους για 40 έτη ή για πάντα. Για να αποφασίσει τι από τα δυο θα κάνει χρειάζεται να συγκρίνει τα ποσά.*
*Στην πρώτη περίπτωση έχουμε μια ληξιπρόθεσμη ράντα με γνωστή αρχική αξία, το ποσό των 100.000 Ευρώ, 40 όρων και ψάχνουμε να βρούμε βρούμε το ποσό της κάθε δόσης. Έτσι έχουμε*

$$100.000 = K \cdot \alpha_{\overline{40}|0.05}$$

*Δηλαδή, η δόση είναι $K = \frac{100.000}{\alpha_{\overline{40}|0.05}} = 5.827,816117$ Ευρώ.*
*Η δεύτερη περίπτωση είναι να καταθέσει το ίδιο ποσό αλλά να λαμβάνει για πάντα ένα ποσό στο τέλος κάθε χρόνου. 'ρα πρέπει να εργαστούμε στην «ισοδύναμη» διηνεκή*

*ράντα για να βρούμε τον όρο της. Έτσι έχουμε*

$$100.000 = K \cdot \frac{1}{0.05}$$

*Δηλαδή το ποσό που θα παίρνει στο τέλος του κάθε χρόνου για πάντα θα είναι* $K =$ 5.000 *Ευρώ.*
*Ο Α διαπιστώνει ότι η διαφορά δεν είναι μεγάλη και αποφασίζει να χρησιμοποιήσει την δεύτερη λύση, αυτή της διηνεκούς ράντας. Επιπλέον, όπως έχουμε ήδη δει, όταν αποβιώσει το ποσό που θα υπάρχει στην τράπεζα θα είναι πάντοτε 100.000 Ευρώ. Αυτό το «κληροδότημα» θα το κληρονομήσουν τα παιδιά του τα οποία επίσης μπορούν να παίρνουν το ίδιο ποσό για πάντα στο τέλος του κάθε έτους! Βέβαια, να σημειώσουμε ότι αυτό θα συμβαίνει όσο το επιτόκιο τραπέζης είναι* 0.05. *Αν μειωθεί θα πρέπει να γίνει επαναπροσδιορισμός της δόσης ούτως ώστε να διατηρηθεί το αρχικό κεφάλαιο. Αν αυξηθεί μπορεί κάλλιστα να αυξηθεί και το ύψος της δόσης.*
*Ας υποθέσουμε ότι μετά από 20 χρόνια αλλάξει το επιτόκιο και γίνει* $i = 0.01$. *Πως πρέπει να αναπροσαρμοσθεί τη δόση;*
*Το ποσό που θα έχει ο Α στην τράπεζα εκείνη την χρονική στιγμή θα είναι 100.000 Ευρώ και το ερώτημα είναι ποια είναι η δόση στην περίπτωση που το επιτόκιο γίνει* $i = 0.01$ *έτσι ώστε να διατηρηθεί το ποσό των 100.000 Ευρώ σταθερό.*
*Έχουμε ότι*

$$100.000 = K \cdot \frac{1}{0.01}$$

*άρα* $K = 1.000$ *Ευρώ.*
*Αν ο Α θελήσει να παίρνει το ποσό των 5.000 Ευρώ τον χρόνο παρόλο που το επιτόκιο μειωθεί τότε για πόσα χρόνια θα γίνεται αυτό;*
*Το ερώτημα αυτό ανάγεται στον υπολογισμό των όρων της ισοδύναμης ράντας η οποία θα έχει την ίδια αρχική αξία, επιτόκιο* $i = 0.01$ *και δόση* $K = 5.000$ *και το ζητούμενο είναι το* $n$. *'ρα έχουμε*

$$100.000 = 5.000 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+0.05)^n}}{0.05}$$

*Λύνοντας ως προς* $n$ *θα έχουμε ότι μπορεί να παίρνει το ποσό των 5.000 ευρώ για τα επόμενα 22 περίπου χρόνια.*

## 6.7 Παραδείγματα και Ασκήσεις

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ **113** *Συνεχίζοντας την άσκηση 103 θα υπολογίσουμε το ποσό χρημάτων που πρέπει να καταθέτει ο Α στο τέλος κάθε έτους προκειμένου να συγκεντρώσει το ποσό των 200.000 Ευρώ μετά από 40 χρόνια.*
*Στην ουσία έχουμε μια ληξιπρόθεσμη ράντα για την οποία γνωρίζουμε την τελική αξία αλλά ψάχνουμε την δόση. Ισχύει λοιπόν η σχέση*

$$200.000 = K \cdot s_{\overline{40}|0.05}$$

*Λύνοντας ως προς K προκύπτει ότι πρέπει να καταθέτει το ποσό των* $K = 1.655,632233$ *Ευρώ στο τέλος του κάθε χρόνου.*
*Παρομοίως, θα υπολογίσουμε το ποσό των χρημάτων που πρέπει να καταθέτει ο A στην αρχή κάθε έτους προκειμένου να συγκεντρώσει το ποσό των 200.000 Ευρώ μετά από 40 χρόνια.*
*Το πρόβλημα ανάγεται στον υπολογισμό δόσης της ισοδύναμης προκαταβλητέας ράντας οπότε θα έχουμε*

$$200.000 = K \cdot \sigma_{\overline{40}|0.05} = \frac{(1+0.05)^{40}-1}{0.05} \cdot (1+0.05)$$

*Λύνοντας ως προς K προκύπτει ότι* $K = 1.576,792603$ *Ευρώ. Διαπιστώνουμε ότι το ποσό είναι μικρότερο από ότι στην ληξιπρόθεσμη και αυτό συμβαίνει διότι η κάθε δόση τοκίζεται ένα χρόνο παραπάνω.* □

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 114** *Ο A θέλει να καταθέτει στο τέλος του κάθε έτους το ποσό των 1.000 Ευρώ για 10 χρόνια. Η τράπεζα του δίνει επιτόκιο* $i = 0.01$ *για τα δέκα χρόνια αλλά για 20 χρόνια του δίνει επιτόκιο* $i = 0.02$*. Ποιο ποσό αρκεί να καταθέτει στο τέλος του κάθε έτους για 20 χρόνια έτσι ώστε να μαζέψει το διπλάσιο ποσό από ότι αν κατέθετε 1.000 Ευρώ το χρόνο για 10 χρόνια;*
*Θα υπολογίσουμε την τελική αξία της ράντας, 10 όρων με επιτόκιο* $i = 0.01$ *και δόση 1.000 Ευρώ. Έχουμε ότι*

$$K = 1.000 \cdot \frac{(1+0.01)^{10}-1}{0.01} = 10.462,21250$$

*Τώρα μας ενδιαφέρει να βρούμε τον όρο μιας ληξιπρόθεσμης ράντας 20 όρων, με επιτόκιο* $i = 0.02$ *και τελική αξία την διπλάσια, δηλαδή περίπου 21.000 Ευρώ. Έχουμε λοιπόν*

$$21.000 = K \cdot \frac{(1+0.02)^{20}-1}{0.02}$$

*Λύνοντας ως προς K υπολογίζουμε την δόση η οποία θα είναι* $K \backsimeq 864,29$ *Ευρώ.*

**'ΣΚΗΣΗ 115** *Ο A, φοιτητής ηλικίας 20 ετών, αποφάσισε να δημιουργήσει μια εταιρία. Έπεισε τους συνομήλικους συμφοιτητές του (100 άτομα) να του δίνουν 1.655,632233 Ευρώ το χρόνο στο τέλος του κάθε χρόνου για τα επόμενα 40 χρόνια. Από την άλλη μεριά ο A θα είναι υποχρεωμένος να τους δίνει το ποσό των 10.000 Ευρώ στο τέλος του κάθε έτους από την ηλικία των 60 ετών και πέρα. Κάνοντας τους απαραίτητους υπολογισμούς και υποθέσεις διαπίστωσε ότι με τα χρήματα που θα του καταθέτουν κάθε χρόνο μπορεί να κρατά το ποσό των 21.165 Ευρώ κάθε χρόνο μέχρι την ηλικία των 60 ετών ή το ποσό των 18.159,27826 για πάντα και ταυτόχρονα θα είναι σε θέση να εκπληρώσει τις οικονομικές του υποσχέσεις προς τους συμφοιτητές του. Εξηγήστε πως ακριβώς μπορεί αυτό να γίνει υποθέτοντας ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού* $i = 0.05$*.*

**ΛΥΣΗ.** Ο Α κάνει την εξής σημαντική υπόθεση αλλά ταυτόχρονα λογική. Υποθέτει ότι το πολύ 10 συμφοιτητές του θα ξεπεράσουν την ηλικία των 100 ετών. Αυτό σημαίνει ότι μετά τα 100 χρόνια θα πληρώνει 10.000 Ευρώ μονάχα για αυτούς τους 10 ανθρώπους.

Όπως είδαμε σε προηγούμενη άσκηση, για να είναι σε θέση να δίνει το ποσό των 10.000 Ευρώ στο τέλος κάθε έτους, πρέπει να συγκεντρώσει το ποσό των 200.000 Ευρώ για τον κάθε ένα μετά από 40 χρόνια. Καταθέτοντας κάθε συμφοιτητής του το ποσό των 1.655,632233 Ευρώ στο τέλος του κάθε χρόνου θα έχει συγκεντρώσει το ποσό αυτό για τον καθένα.

Στην ηλικία των 60 ετών ο Α πρέπει να έχει στην διάθεση του $10 \cdot 200.000$ Ευρώ για να καλύψει τους 10 συμφοιτητές του για τους οποίους δεν έχει υποθέσει τίποτε. Πόσα χρήματα χρειάζεται στην ηλικία των 60 ετών για να καλύψει τους 90 για τα επόμενα 40 χρόνια; Πρόκειται για την παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας 40 όρων, δηλαδή

$$90 \cdot 10.000 \cdot \alpha_{\overline{40|}0.05} = 1,544317772 \cdot 10^7$$

Με το ποσό αυτό θα καλύψει τους 90 ανθρώπους για τα επόμενα 40 χρόνια ενώ με το ποσό $10 \cdot 200.000$ θα καλύψει και τους υπόλοιπους 10 για πάντα. ’ρα στην ηλικία των 60 ετών χρειάζεται το ποσό των $1.744317772 \cdot 10^7$ Ευρώ για να τους καλύψει όλους. Για να δημιουργηθεί αυτό το ποσό πρέπει οι 100 αυτοί άνθρωποι να καταθέτουν ένα συγκεκριμένο ποσό τον χρόνο με τελική αξία αυτό το ποσό. Θέλουμε να βρούμε το ποσό αυτό και επειδή πρόκειται για την εύρεση τελικής αξίας ληξιπρόθεσμης ράντας πρέπει το ποσό αυτό $K$ να είναι τέτοιο ώστε

$$100 \cdot K \cdot s_{\overline{40|}0.05} = 100 \cdot K \cdot \frac{(1+0.05)^{40}-1}{0.05} = 1,744317772 \cdot 10^7$$

Δηλαδή το ποσό που αρκεί να καταβάλλει ο καθένας είναι $K = 1.443,974364$ Ευρώ. Επομένως, περισσεύουν $211,657869$ Ευρώ από τον καθένα το οποίο μπορεί να το καταναλώνει ο Α κάθε χρόνο, δηλαδή 21.165,7869 Ευρώ το χρόνο, από την ηλικία των 20 ετών ως την ηλικία των 60 ετών.

Εναλλακτικά, θα υπολογίσουμε πόσα μπορεί να καταναλώνει ο Α κάθε χρόνο για πάντα. Για να το βρούμε αυτό θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία της προηγούμενης ράντας, δηλαδή

$$21.165,7869 \cdot \alpha_{\overline{40|}0.05} = 3,631855652 \cdot 10^5$$

Στην συνέχεια θα σχηματίσουμε την ισοδύναμη ληξιπρόθεσμη και διηνεκή ράντα με παρούσα αξία το ποσό $3,631855652 \cdot 10^5$ και το ζητούμενο είναι η δόση της ράντας. Έχουμε λοιπόν

$$3,631855652 \cdot 10^5 = K \cdot \alpha_{\overline{\infty|}0.05}$$

Λύνοντας ως προς $K$ λαμβάνουμε το ποσό που μπορεί να καταναλώνει ο Α κάθε χρόνο για πάντα, το οποίο είναι $K = 18.159,27826$ Ευρώ.

Σημειώστε ότι το ποσό που θα απομείνει στον Α στα 100 του χρόνια (αν η υπόθεση του είναι σωστή) θα είναι $90 \cdot 200.000$. Τα χρήματα αυτά θα μπορεί να τα καταναλώσει όπως θέλει. Η παρούσα αξία των χρημάτων αυτών είναι ίση με

$$\frac{90 \cdot 200.000}{(1+0.05)^{80}} = 3,631855652 \cdot 10^5$$

Δηλαδή όσο το ποσό που υπολογίσαμε με διαφορετικό σκεπτικό παραπάνω.
Συνεχίζοντας το ίδιο σκεπτικό, αν οι υπόλοιποι 10 έχουν αποβιώσει μέχρι την ηλικία των 110 τότε θα περισσέψει επιπλέον το ποσό (εκείνη την εποχή) των $10 \cdot 200.000$ Ευρώ. Η παρούσα αξία του ποσού αυτού είναι 24.773,82579 Ευρώ η οποία μπορεί να προστεθεί στο ποσό των $3,631855652 \cdot 10^5$ Ευρώ. Με αυτή την επιπλέον υπόθεση μπορεί ο Α να καταναλώνει το ποσό των 19.397,96956 Ευρώ ετησίως για πάντα! □

Στο προηγούμενο παράδειγμα περιγράφουμε ουσιαστικά την βασική αρχή της ασφάλισης. Οι ασφαλιστικές εταιρίες λειτουργούν περίπου με αυτό τον τρόπο. Λόγω όμως του υψηλού ανταγωνισμού (πολλές εταιρίες που παρέχουν τις ίδιες υπηρεσίες) τα ποσά που συλλέγουν από τους ασφαλιζόμενους δεν τα τοποθετούν κατά ανάγκη σε τράπεζα. Προσπαθούν να επενδύσουν κατάλληλα τα χρήματα αυτά (όπως άλλωστε κάνουν και οι τράπεζες) έτσι ώστε να αποκομίσουν μεγαλύτερα κέρδη (αυξάνοντας όμως το ρίσκο) ή αλλιώς να πετύχουν μεγαλύτερο επιτόκιο από κατάθεση σε τράπεζα. Σε αυτή την προσπάθεια ιδιαίτερη σημασία έχει η χρηματοοικονομική επιστήμη. Με τον τρόπο αυτό θα ζητούν για τις ίδιες υπηρεσίες λιγότερα χρήματα από τους ασφαλισμένους αυξάνοντας έτσι την πελατεία τους.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 116** *Ένα ίδρυμα θέλει να χορηγεί μια υποτροφία ύψους 2.000 Ευρώ το χρόνο επί 10 χρόνια. Η πρώτη υποτροφία θα δοθεί μετά από ένα χρόνο από σήμερα. Ποιο είναι το ποσό που πρέπει να καταθέσει σήμερα το ίδρυμα σε μια τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3%; Το ίδιο αν η πρώτη υποτροφία δοθεί στην αρχή του πρώτου έτους.*
*Η σειρά πληρωμών είναι στην πραγματικότητα μια ληξιπρόθεσμη ράντα (ενώ είναι προκαταβλητέα στη δεύτερη περίπτωση) επομένως η παρούσα αξία είναι*

$$V = 2.000 \cdot \alpha_{\overline{10}|0.03}$$

*ενώ στην περίπτωση της προκαταβλητέας είναι*

$$V = 2.000 \cdot \overline{\alpha}_{\overline{10}|0.03}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 117** *Έστω ότι ο Α καταθέτει στο τέλος (αντίστοιχα στην αρχή) κάθε έτους το ποσό των 10.000 Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 3% επί 10 συνεχόμενα χρόνια. Τι ποσό θα έχει στο τέλος της 10ετίας;*

**Απάντηση.** Το πρόβλημά μας είναι να υπολογίσουμε την τελική αξία μια ληξιπρόθεσμης (αντίστοιχα προκαταβλητέας ράντας). Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$V = 10.000 \cdot s_{\overline{10}|0.03}$$

ενώ στην περίπτωση της προκαταβλητέας η τελική αξία είναι

$$V = 10.000 \cdot \sigma_{\overline{10}|0.03}$$

□

**Παραδειγμα 118** *Να υπολογισθεί η ετήσια δόση ληξιπρόθεσμης ράντας με παρούσα αξία 10.000 Ευρώ, επιτόκιο $i = 3\%$ και διάρκεια 10 ετών.*

**Απάντηση.** Στο παράδειγμα αυτό έχουμε μια ληξιπρόθεσμη ράντα με αρχική αξία $V = 10.000$, $n = 10$, $i = 0.03$. Αυτό που ψάχνουμε είναι το $R$ τ.ω.

$$V = R \cdot \alpha_{\overline{10}|0.03}$$

Λύνοντας ως προς $R$ υπολογίζουμε την ετήσια δόση. □

**Παραδειγμα 119** *Με ποιο επιτόκιο ληξιπρόθεσμη ράντα με ετήσιο όρο 10.000 Ευρώ και διάρκεια 10 ετών έδωσε τελική αξία 120.000 Ευρώ;*

**Απάντηση.** Εδώ γνωρίζουμε την τελική αξία ληξιπρόθεσμης ράντας, τον ετήσιο όρο (δόση) καθώς και τη διάρκεια. Ψάχνουμε το $i$ το οποίο θα βρούμε από τη σχέση

$$120.000 = 10.000 \cdot s_{\overline{10}|i} = 10.000 \cdot \frac{(1+i)^{10} - 1}{i}$$

Για να λυθεί ως προς $i$ η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει να εφαρμοστεί κάποια αριθμητική μέθοδος όπως η μέθοδος του Νεύτωνα την οποία έχουμε ήδη αναφέρει. □

**Παραδειγμα 120 (Τακτοποιηση Κλασματικου Αριθμου)** *Να βρεθεί το πλήθος των όρων ληξιπρόθεσμης ράντας η οποία έχει αρχική αξία 10.000 Ευρώ ετήσια δόση 500 Ευρώ και επιτόκιο 3%.*

**Απάντηση.** Εδώ ψάχνουμε να βρούμε το $n$ από τη σχέση

$$10.000 = 500 \cdot \alpha_{\overline{n}|0.03} = 500 \cdot \frac{1 - U^n}{0.03}$$

όπου $U = \frac{1}{1+0.03}$. Χρησιμοποιώντας το λογάριθμο υπολογίζουμε το $n$

$$\frac{1}{(1+0.03)^n} = 1 - \frac{10.000 \cdot 0.03}{500} = 0.4 \text{ δηλαδή } n = \frac{\ln 0.4}{-\ln(1.03)}$$

Υπάρχει όμως η περίπτωση να μην είναι ακέραιος αριθμός οπότε σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να κάνουμε τη λεγόμενη **τακτοποίηση του κλασματικού αριθμού**. Αυτό σημαίνει ότι θα αλλάξουμε λίγο τη δόση της ράντας ούτως ώστε το $n$ να είναι ακέραιος. Επιλέγουμε ως διάρκεια είτε $[\frac{\ln 0.4}{-\ln(1.03)}]$ είτε $[\frac{\ln 0.4}{-\ln(1.03)}] + 1$. Έπειτα υπολογίζουμε τη δόση από τη σχέση

$$10.000 = R \cdot \alpha_{\overline{[\frac{\ln 0.4}{-\ln(1.03)}]}|0.03}$$

αν έχουμε επιλέξει το $[\frac{\ln 0.4}{-\ln(1.03)}]$ ως διάρκεια. □

# Κεφάλαιο 7

# Δάνεια

Θα εξετάσουμε διάφορους τρόπους αποπληρωμής δανείων, χρησιμοποιώντας τις ράντες (σειρές πληρωμών). Συμβολίζουμε με $K$ το δανεισμένο ποσό, με $n$ τις χρονικές περιόδους, $i$ το επιτόκιο και $T$ τον χρόνο λήξης του δανείου.

## 7.1 Δάνεια εξοφλητέα σε μια δόση

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν γενικά δυο υποπεριπτώσεις. Η μια είναι ο δανειζόμενος να αποδίδει στο τέλος κάθε χρόνου τον τόκο του κεφαλαίου και στο τέλος των $n$ ετών να καταβάλλει και το ποσό $K$.
Στην περίπτωση περιοδικής κεφαλαιοποίησης των τόκων ο τόκος σε κάθε περίοδο είναι ίσος με $Ki$ ενώ στην περίπτωση της συνεχούς κεφαλαιοποίησης ο τόκος σε κάθε περίοδο είναι $K(e^i - 1)$.
Η παρούσα αξία των ποσών αυτών στην περίπτωση περιοδικής κεφαλαιοποίησης είναι

$$Ki\alpha_{\overline{n}|i} + KU^n$$

και αυτή θα πρέπει να είναι ίση με το δάνειο $K$, δηλαδή θα ισχύει η σχέση

$$K = Ki\alpha_{\overline{n}|i} + KU^n$$

Πράγματι, αντικαθιστώντας τις ποσότητες βλέπουμε ότι ισχύει.
Από την άλλη μεριά η παρούσα αξία των ποσών στην περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού θα είναι

$$\underbrace{K(e^i - 1)}_{\text{τόκος μιας περιόδου}} \cdot \varepsilon_{\overline{n}|i} + Ke^{-ni}$$

Αντικαθιστώντας διαπιστώνουμε ότι η παρούσα αξία των ποσών αυτών είναι ίση με $K$.
'ρα, στο τέλος κάθε περιόδου καταβάλλει το ποσό των $Ki$ ή $K(e^i - 1)$ Ευρώ ανάλογα τον τρόπο κεφαλαιοποίησης των τόκων και στο τέλος της $n$-οστής περιόδου το ποσό των $K$ Ευρώ.

Η δεύτερη περίπτωση είναι να μην καταβάλλει τίποτε κατά τη διάρκεια του δανείου και στο τέλος να καταβάλλει το ποσό με τους τόκους, δηλαδή $K(1+i)^n$ στην περιοδική κεφαλαιοποίηση και $Ke^{ni}$ στην συνεχή κεφαλαιοποίηση.

**'ΣΚΗΣΗ 121** *Ο Α δάνεισε στον Β το ποσό των 10.000 Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο $i = 0.05$. Συμφώνησαν να αποπληρωθεί το δάνειο σε 4 χρόνια καταβάλλοντας τους τόκους στο τέλος του κάθε έτους. Ποια είναι η παρούσα αξία των ποσών που θα καταβληθούν; Υποθέστε ετήσιο ανατοκισμό αλλά και συνεχή ανατοκισμό.*

**ΛΥΣΗ.** Στο τέλος του κάθε χρόνου ο Α θα καταβάλλει το ποσό των $10.000 \cdot 0.05$ Ευρώ ενώ στο τέλος των 4 χρόνων θα πρέπει να του καταβάλλει και το ποσό των 10.000 Ευρώ. Η παρούσα αξία των ποσών είναι

$$\underbrace{10.000 \cdot 0.05 \cdot \alpha_{\overline{n}|i}}_{\text{παρούσα αξία τόκων}} + \underbrace{10.000 \cdot \frac{1}{(1+0.05)^4}}_{\text{παρούσα αξία κεφαλαίου}} = 10.000$$

όταν έχουμε ετήσιο ανατοκισμό ενώ

$$\underbrace{10.000 \cdot (e^{0.05} - 1) \cdot \varepsilon_{\overline{n}|i}}_{\text{παρούσα αξία τόκων}} + \underbrace{10.000 \cdot e^{-4 \cdot 0.05}}_{\text{παρούσα αξία κεφαλαίου}} = 10.000$$

όταν έχουμε συνεχή ανατοκισμό. □

## 7.2 Εξοφλητικό Απόθεμα

Η ιδέα εδώ είναι ο δανειζόμενος να καταθέτει κάποια χρήματα στην τράπεζα με επιτόκιο $r < i$ (διότι αν ήταν μεγαλύτερο το $r$ θα μπορούσε κάποιος να δανειστεί με επιτόκιο $i$ να τα καταθέσει στην τράπεζα με μεγαλύτερο επιτόκιο και στο τέλος να έχει κέρδος) έτσι ώστε στο τέλος της διάρκειας του δανείου να σχηματιστεί το κατάλληλο ποσό για την αποπληρωμή του χρέους. Αν οι τόκοι πληρώνονται στο τέλος κάθε χρόνου, (δηλαδή $Ki$ ή $K(e^i - 1)$ ανάλογα με τον τρόπο κεφαλαιοποίησης των τόκων) και αν καταθέτει στην τράπεζα ένα ποσό $R$ με επιτόκιο $r$ τότε πρέπει

$$Rs_{\overline{n}|r} = K$$

στην περίπτωση της περιοδικής κεφαλαιοποίησης των τόκων και

$$Rse_{\overline{n}|r} = K$$

στην περίπτωση συνεχούς ανατοκισμού.
Δηλαδή, ο δανειζόμενος πληρώνει κάθε χρόνο τους τόκους και το ερώτημα είναι πόσα χρήματα πρέπει να καταθέτει στην τράπεζα στο τέλος κάθε χρόνου έτσι ώστε η τελική αξία (της ληξιπρόθεσμης ράντας) να είναι ίση με το $K$.

Οπότε

$$R = \frac{K}{s_{\overline{n}|r}} \quad ή \;\; R = \frac{K}{se_{\overline{n}|r}}$$

Αν συμβολίσουμε με

$$\boxed{P_{\overline{n}|r} = \frac{1}{s_{\overline{n}|r}} \;\; ή \;\; P^e_{\overline{n}|r} = \frac{1}{se_{\overline{n}|r}} \;\; \text{(χρεολύσιο μιας νομισματικής μονάδας)}}$$

τότε θα έχουμε $R = KP_{\overline{n}|r}$ και το $P_{\overline{n}|r}$ ονομάζεται χρεολύσιο μιας νομισματικής μονάδας. Δηλαδή, το $P_{\overline{n}|r}$ συμβολίζει το ποσό που πρέπει να καταθέτουμε στην τράπεζα για $n$ χρονικές περιόδους και με επιτόκιο περιόδου $r$ ούτως ώστε στο τέλος να έχει συγκεντρωθεί το ποσό του ενός Ευρώ. 'ρα αν θέλουμε να συγκεντρώσουμε $K$ Ευρώ θα πρέπει να καταθέτουμε $KP_{\overline{n}|r}$ Ευρώ ανά χρονική περίοδο.
Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την παρούσα αξία των ποσών που ο δανειζόμενος θα έχει δώσει. Η παρούσα αξία που θα υπολογίσουμε θα είναι με βάση το επιτόκιο $i$, δηλαδή από την πλευρά του δανειστή (τράπεζας). Ο δανειζόμενος καταβάλλει τους τόκους σε κάθε χρονική περίοδο, οι οποίοι είναι $Ki$ ή $K(e^i - 1)$ ανάλογα με τον τρόπο κεφαλαιοποίησης των τόκων, και η παρούσα αξία τους θα είναι

$$K \cdot i \cdot \alpha_{\overline{n}|i} \quad ή \quad K \cdot (e^i - 1) \cdot \varepsilon_{\overline{n}|i}$$

Τα ποσά που τοποθετεί στην τράπεζα για να σχηματίσει το τελικό ποσό έχουν παρούσα αξία

$$K \cdot P_{\overline{n}|r} \cdot \alpha_{\overline{n}|i} \quad ή \quad K \cdot P^e_{\overline{n}|r} \cdot \varepsilon_{\overline{n}|i}$$

'ρα, η παρούσα αξία όλων των ποσών που καταβάλλει ο δανειζόμενος είναι στην περίπτωση της περιοδικής κεφαλαιοποίησης

$$K \cdot i \cdot \alpha_{\overline{n}|i} + K \cdot P_{\overline{n}|r} \cdot \alpha_{\overline{n}|i}$$

Σημειώστε ότι

$$\frac{\alpha_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i}} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

Επομένως, η παρούσα αξία θα είναι

$$\begin{aligned} K \cdot (i \cdot \alpha_{\overline{n}|i} + P_{\overline{n}|r} \cdot \alpha_{\overline{n}|i}) &= K \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{\alpha_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i}} \cdot \frac{s_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|r}}\right) \\ &= K\left(1 + \frac{1}{(1+i)^n}\left(\frac{s_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|r}} - 1\right)\right) \end{aligned}$$

Λόγω του ότι $\frac{s_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|r}} > 1$ (σημειώστε ότι η $s_{\overline{n}|i}$ είναι αύξουσα ως προς $i$) προκύπτει τελικά ότι η παρούσα αξία είναι μεγαλύτερη από το $K$. Δηλαδή, ο δανειζόμενος

θα δώσει περισσότερα χρήματα από ότι είχε δανεισθεί. Η διαφορά προκύπτει από το γεγονός ότι δανείζεται με μεγαλύτερο επιτόκιο από ότι μπορεί ο ίδιος να καταθέσει (δανείσει). Το πλεονέκτημα όμως είναι ότι καθ΄ όλη την διάρκεια των καταθέσεων σε τράπεζα ο δανειζόμενος μπορεί να εκταμιεύσει οποιοδήποτε ποσό θέλει για μια έκτατη ανάγκη. Για να δούμε καλύτερα την διαφορά αρκεί να υποθέσουμε ότι ο δανειζόμενος καταθέτει τα ποσά στην ίδια τράπεζα από την οποία δανείσθηκε το ποσό. Βλέπουμε ότι τα χρήματα που παίρνει η τράπεζα από τον ιδιώτη με επιτόκιο $r$ μπορεί να τα δανείσει με επιτόκιο $i > r$ και επομένως να έχει κέρδος το οποίο προκύπτει από την διαφορά των επιτοκίων.
Παρόμοιοι είναι οι υπολογισμοί στην περίπτωση του συνεχούς ανατοκισμού.
Στην περίπτωση που ο δανειζόμενος δεν πληρώνει τους τόκους στο τέλος κάθε χρόνου θα πρέπει να σχηματίσει ένα εξοφλητικό απόθεμα με τελική αξία $K(1+i)^n$ ή $Ke^{ni}$. 'ρα η δόση που πρέπει να καταθέτει στην τράπεζα στο τέλος του κάθε έτους θα είναι

$$R = K(1+i)^n P_{\overline{n}|r} \quad \text{ή} \quad Ke^{ni} P^e_{\overline{n}|r}$$

Η παρούσα αξία των παραπάνω ποσών είναι, στην περίπτωση περιοδικής κεφαλαιοποίησης των τόκων,

$$K \cdot (1+i)^n P_{\overline{n}|r} \cdot \alpha_{\overline{n}|i} = K \cdot (1+i)^n \frac{\alpha_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|i}} \cdot \frac{s_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|r}} = K \cdot (1+i)^n \cdot \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{s_{\overline{n}|i}}{s_{\overline{n}|r}}$$

Παρατηρούμε πάλι ότι η παρούσα αξία είναι μεγαλύτερη του $K$.
Η γενικότερη περίπτωση είναι όταν ο δανειζόμενος καταθέτει χρήματα σε τράπεζα σε χρονικές περιόδους που δεν είναι κατ΄ ανάγκη ακέραια πολλαπλάσια της περιόδου που αναφέρεται το επιτόκιο. Δηλαδή μπορεί να θελήσει να καταθέσει $m$-φορές χρήματα στην τράπεζα μέχρι την λήξη του δανείου και μάλιστα σε χρόνους που δεν έχουν κάποια περιοδικότητα ή σχέση με την περίοδο που αναφέρεται το επιτόκιο. Αρκεί βέβαια το τελικό ποσό που θα προκύψει στο τέλος του δανείου να είναι ίσο με το ζητούμενο ποσό.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 122** *Έστω ότι ο Α δανείζεται το ποσό $K = 100.000$ Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο 6% και το οποίο πρέπει να αποπληρωθεί σε 20 χρόνια. Ας υποθέσουμε ότι ο Α επιθυμεί να σχηματίσει εξοφλητικό απόθεμα στην τράπεζα με ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού 4%. Να βρεθεί η δόση που πρέπει να καταθέτει στην τράπεζα στην περίπτωση που πληρώνει τους τόκους στο τέλος κάθε έτους αλλά και στην περίπτωση που δεν πληρώνει τους τόκους.*

**Απάντηση.** Στην πρώτη περίπτωση πρέπει να σχηματίσει μετά από 20 χρόνια το ποσό $K$. 'ρα πρέπει να καταθέτει στην τράπεζα στο τέλος κάθε έτους το ποσό

$$R = K \cdot P_{\overline{20}|0.04}$$

ενώ στην περίπτωση που δεν καταβάλλει τους τόκους στο τέλος του έτους θα πρέπει να σχηματίσει ποσό ίσο με $K(1+0.06)^{20}$ και επομένως η δόση θα είναι

$$R = K \cdot (1+0.06)^{20} \cdot P_{\overline{20}|0.04}$$

□

**'ΣΚΗΣΗ 123** *Ο Α δανείζεται το ποσό των 10.000 Ευρώ από τον Β και συμφωνούν να έχει αποπληρωθεί μετά από 4 χρόνια. Το ετήσιο επιτόκιο δανεισμού είναι $i = 0.06$ ενώ το ετήσιο επιτόκιο κατάθεσης είναι $r = 0.04$ συνεχούς ανατοκισμού. Συμφωνούν επίσης να καταβάλλονται οι τόκοι στο τέλος του κάθε χρόνου. Ο Α για κάποιο λόγο μπορεί να καταθέτει ένα ποσό στο τέλος κάθε 7μήνου στην τράπεζα προκειμένου να σχηματίσει το ζητούμενο ποσό. Ποιο είναι το ποσό που πρέπει να καταθέτει;*

**ΛΥΣΗ.** Εδώ ο χρόνος λήξης του δανείου είναι $T = 4$ χρόνια. Ο Α πρέπει να καταβάλλει το ποσό των $10.000 \cdot 0.05$ Ευρώ στο τέλος του κάθε χρόνου. Επίσης, στο τέλος των 4 χρόνων πρέπει να καταβάλλει και το ποσό των 10.000 Ευρώ. Για να σχηματίσει το ποσό αυτό θα καταθέτει στην τράπεζα ένα ποσό $R$ στο τέλος κάθε 7μήνου με επιτόκιο κατάθεσης $r = 0.04$ έτσι ώστε στο τέλος της τετραετίας να έχει σχηματιστεί το ποσό των 10.000 Ευρώ.
Τα 4 έτη αποτελούνται από 6 επτάμηνα και περισσεύουν και 6 μήνες. Στο τέλος κάθε επταμήνου θα καταθέτει ένα ποσό $R$. Μετά την κατάθεση του έκτου επταμήνου τα χρήματα θα παραμείνουν στην τράπεζα μέχρι την λήξη του δανείου, δηλαδή για έξι μήνες ακόμη. Η συγκεκριμένη σειρά πληρωμών είναι μια κλασματική και ληξιπρόθεσμη ράντα της οποίας γνωρίζουμε την τελική αξία (10.000 Ευρώ) και ψάχνουμε την δόση. 'ρα, η δόση είναι (δες 6.3)

$$R = \frac{10.000}{s\varepsilon_{\overline{6}|0.04}} = \frac{10.000}{e^{0.04\cdot\frac{48-7}{12}} \cdot \frac{1-e^{-0.04\cdot 6\cdot\frac{7}{12}}}{1-e^{-0.04\cdot\frac{7}{12}}}} = 1.539,870685 \quad \text{Ευρώ}$$

□

Σχήμα 7.1: Ομόλογο της Carl Zeiss-Stiftung του 1926

## 7.3 Απόσβεση δανείου με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου

Στην προηγούμενη μέθοδο αποπληρωμής δανείου είδαμε ότι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει σε κάθε χρονική περίοδο είναι

$$\underbrace{Ki}_{\text{ποσό για τόκους}} + \underbrace{KP_{\overline{n}|r}}_{\text{ποσό κατάθεσης}}$$

στην περίπτωση της περιοδικής κεφαλαιοποίησης. Είδαμε επίσης ότι λόγω της διαφοράς των επιτοκίων κατάθεσης και δανεισμού η παρούσα αξία του τελικού ποσού που θα καταβάλλει ο δανειζόμενος ξεπερνά την αξία του δανεισμένου ποσού.
Θα εξετάσουμε τώρα την περίπτωση όπου ο δανειζόμενος μπορεί να καταβάλλει στον δανειστή μέρος του κεφαλαίου σε κάθε χρονική περίοδο μαζί με τους ανάλογους τόκους αντί να καταθέτει σε τράπεζα με χαμηλότερο επιτόκιο. Έστω ότι στο τέλος της πρώτης περιόδου καταβάλλει το ποσό

$$R = Ki + KP_{\overline{n}|i}$$

όπου το $Ki$ είναι ο τόκος του κεφαλαίου ενώ το ποσό $KP_{\overline{n}|i}$ είναι μέρος του κεφαλαίου. Στη δεύτερη περίοδο ο δανειζόμενος έχει ήδη αποπληρώσει μέρος του κεφαλαίου επομένως ο τόκος που θα πληρώσει θα είναι $(K - KP_{\overline{n}|i})i$. Αν ο δανειζόμενος θέλει να πληρώνει σταθερή δόση τότε στο τέλος της δεύτερης περιόδου θα πληρώσει τον τόκο $(K - KP_{\overline{n}|i})i$ και το ποσό $R - (K - KP_{\overline{n}|i})i = KP_{\overline{n}|i}(1+i)$.
Σε κάθε σταθερή δόση $R$ βλέπουμε ότι μειώνονται οι τόκοι και αυξάνεται το ποσό για το κεφάλαιο. Συνεχίζοντας τη διαδικασία διαπιστώνουμε επαγωγικά ότι στο τέλος της $m$ περιόδου το ποσό που θα πληρώσουμε για το κεφάλαιο θα είναι ίσο με

$KP_{\overline{n}|i}(1+i)^{m-1}$ ποσό για κεφάλαιο στο τέλος της $m$ περιόδου

Πράγματι, για $m = 1$ ισχύει όπως έχουμε δει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο $m$, δηλαδή στο τέλος της $m$-περιόδου το ποσό για κεφάλαιο θα είναι $KP_{\overline{n}|i}(1+i)^{m-1}$. Αυτό σημαίνει ότι έχει αποπληρώσει μέχρι εκείνη την στιγμή το ποσό

$$KP_{\overline{n}|i} + KP_{\overline{n}|i}(1+i) + \cdots + KP_{\overline{n}|i}(1+i)^{m-1} = KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{m}|i}$$

Αυτό σημαίνει ότι στην επόμενη περίοδο θα πληρώσει το ποσό $(K - KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{m}|i})i$ για τόκους και $R - (K - KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{m}|i})i$ για κεφάλαιο. Αντικαθιστώντας έχουμε ότι $R - (K - KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{m}|i})i = KP_{\overline{n}|i}(1+i)^m$ αποδεικνύοντας έτσι τον ισχυρισμό μας.
Αν συμβολίσουμε με $E_m = KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{m}|i}$ το ποσό του κεφαλαίου που έχει εξοφληθεί στο τέλος της $m$ περιόδου τότε το ανεξόφλητο ποσό θα είναι $K - E_m$ και επομένως ο τόκος που πρέπει να πληρωθεί στο τέλος του $m+1$ χρόνου θα είναι $(K - E_m)i$. Παρατηρήστε ότι στο τέλος της $n$-οστής περιόδου θα έχουμε $E_n = KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{n}|i} = K$.
Η παρούσα αξία των ποσών που έχει καταβάλλει ο δανειζόμενος είναι

$$R\alpha_{\overline{n}|i} = (Ki + KP_{\overline{n}|i})\alpha_{\overline{n}|i} = K$$

Επομένως ο δανειζόμενος θα καταβάλλει ποσά των οποίων η παρούσα αξία θα είναι ίση με το δανειζόμενο ποσό σε αντίθεση με την προηγούμενη μέθοδο κατά την οποία ήταν μεγαλύτερη. Εδώ όμως δεν έχει το πλεονέκτημα να εκταμιεύσει κάποιο ποσό σε περίπτωση ανάγκης.
Μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν πίνακα με τρεις στήλες και $n$ γραμμές όσες είναι και οι περίοδοι αποπληρωμής. Στην πρώτη στήλη θα έχουμε τη δόση κάθε περιόδου

που είναι σταθερή και ίση $R = Ki - KP_{\overline{n}|i}$. Στη δεύτερη στήλη θα έχουμε το ποσό που αναλογεί σε πληρωμή κεφαλαίου που είναι ίσο με $KP_{\overline{n}|i}(1+i)^{m-1}$ στο τέλος της $m$ περιόδου. Στην τρίτη στήλη θα έχουμε το ποσό που αναλογεί σε τόκους και είναι η διαφορά των δυο προηγούμενων τιμών. Αν θέλουμε προσθέτουμε και μια τέταρτη στήλη στην οποία γράφουμε το συνολικό ποσό κεφαλαίου που έχει αποπληρωθεί στο τέλος της $m$ περιόδου, το οποίο είναι ίσο με $KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{m}|i}$.
Συνοψίζοντας έχουμε τα εξής στο τέλος της $m$ περιόδου

$$\begin{aligned} R = Ki + KP_{\overline{n}|i}, &\qquad \text{ποσό σταθερής δόσης,} \\ KP_{\overline{n}|i}(1+i)^{m-1}, &\qquad \text{ποσό για κεφάλαιο,} \\ R - KP_{\overline{n}|i}(1+i)^{m-1}, &\qquad \text{ποσό για τόκους,} \\ KP_{\overline{n}|i}s_{\overline{m}|i}, &\qquad \text{μέρος του κεφαλαίου που έχει αποπληρωθεί} \end{aligned}$$

Παρόμοιους συλλογισμούς και υπολογισμούς μπορούμε να κάνουμε στην περίπτωση της συνεχούς κεφαλαιοποίησης των τόκων. Σε αυτή την περίπτωση ο δανειζόμενος θα καταβάλλει το ποσό

$$\underbrace{K(e^i - 1)}_{\text{ποσό για τόκους}} + \underbrace{KP^e_{\overline{n}|i}}_{\text{ποσό για κεφάλαιο}}$$

στο τέλος της πρώτης περιόδου.
Συνοψίζοντας έχουμε τα εξής στο τέλος της $m$ περιόδου

$$\begin{aligned} R = K(e^i - 1) + KP^e_{\overline{n}|i}, &\qquad \text{ποσό σταθερής δόσης,} \\ KP^e_{\overline{n}|i}e^{i(m-1)}, &\qquad \text{ποσό για κεφάλαιο,} \\ R - KP^e_{\overline{n}|i}e^{i(m-1)}, &\qquad \text{ποσό για τόκους,} \\ KP^e_{\overline{n}|i}se_{\overline{m}|i}, &\qquad \text{μέρος του κεφαλαίου που έχει αποπληρωθεί} \end{aligned}$$

**Παραδειγμα 124** *Δάνειο 100.000 Ευρώ πρέπει να εξοφληθεί σε 5 έτη με ίσες ετήσιες δόσεις και επιτόκιο 5%. Να κατασκευαστεί πίνακας αποπληρωμής του δανείου.*

**Απάντηση.** Εδώ το κεφάλαιο είναι $K = 100.000$, $n = 5$ και $i = 0.05$. Η δόση θα είναι $R = Ki + KP_{\overline{n}|i} = 23.097,5$

| Έτη | Δόση | Ποσό για κεφάλαιο | Ποσό για τόκους | Μέρος κεφαλαίου που έχει αποπληρωθεί |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 23.097,5 | 18.097,4 | 5.000 | 18.097,4 |
| 2 | 23.097,5 | 19.002,3 | 4.095,1 | 37.099,8 |
| 3 | 23.097,5 | 19.952,4 | 3.145 | 57.052,3 |
| 4 | 23.097,5 | 20.950,0 | 2.147,4 | 78.002,4 |
| 5 | 23.097,5 | 21.997,5 | 1.099,9 | 100.000 |

□

**'ΣΚΗΣΗ 125** *Επιχειρηματίας δανείζεται το ποσό των 10.000.000 Ευρώ με ετήσιο επιτόκιο δανεισμού $i = 0.06$ το οποίο λήγει σε 10 χρόνια. Το ετήσιο επιτόκιο κατάθεσης σε τράπεζα είναι $r = 0.04$. Ποια είναι η δόση στην περίπτωση που εφαρμόσει την μέθοδο του εξοφλητικού αποθέματος και ποια είναι η δόση στην περίπτωση που εφαρμόσει την μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου;*

**ΛΥΣΗ.** Αν εφαρμόσει την μέθοδο του εξοφλητικού αποθέματος και αποφασίσει να πληρώνει τους τόκους στο τέλος του κάθε χρόνου τότε η δόση που θα καταβάλλει θα είναι

$$R_1 = \underbrace{10.000.000 \cdot 0.06}_{\text{ποσό για τόκους}} + \underbrace{10.000.000 \cdot P_{\overline{10}|0.04}}_{\text{ποσό κατάθεσης σε τράπεζα}} = 1.432.909,443$$

Από την άλλη μεριά η δόση που θα καταβάλλει με την μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου θα είναι

$$R_2 = 10.000.000 \cdot 0.06 + 10.000.000 \cdot P_{\overline{10}|0.06} = 1.358.679,582$$

Διαπιστώνουμε ότι η δόση με την μέθοδο του σταθερού χρεολυσίου είναι μικρότερη. Αυτό είναι αναμενόμενο μιας και έχουμε αποδείξει ότι η παρούσα αξία των ποσών με την μέθοδο του εξοφλητικού αποθέματος ξεπερνά το ποσό του αρχικού δανείου. Το μοναδικό πλεονέκτημα για την μέθοδο του εξοφλητικού αποθέματος είναι ότι τα ποσά που θα καταβάλλει στην τράπεζα κάθε χρόνο θα είναι διαθέσιμα στον επιχειρηματία σε περίπτωση έκτακτης ανάγκης. □

## 7.4 Ομολογιακά Δάνεια

Τα ομολογιακά δάνεια είναι δάνεια πολλών δανειστών σε ένα δανειζόμενο. Μια τέτοια περίπτωση είναι όταν το κράτος σκοπεύει να δανειστεί (από τους πολίτες) ένα ποσό $K$ το οποίο το χωρίζει σε $N$ ίσα ποσά τα οποία ονομάζονται ομολογίες. Ο κάθε δανειστής μπορεί να πάρει έναν ή περισσότερους τέτοιους τίτλους όπου σε κάθε τίτλο αναγράφεται η ονομαστική αξία του τίτλου. Η τιμή του τίτλου στην οποία πωλούνται οι ομολογίες ονομάζεται τιμή εκδόσεως ενώ η τιμή που θα εξοφληθεί η κάθε ομολογία ονομάζεται τιμή εξοφλήσεως, η οποία μπορεί να είναι και διαφορετική από την ονομαστική αξία. Ο δανειζόμενος καταβάλλει τόκο ο οποίος υπολογίζεται με βάση την ονομαστική αξία του ομολόγου.

Οι τόκοι του ομολόγου εξοφλούνται με τα τοκομερίδια τα οποία είναι κουπόνια με τα οποία εισπράττονται οι τόκοι στο τέλος κάθε περιόδου (εξαμήνου, χρόνου κτλ). Το δανεισμένο κεφάλαιο εξοφλείται με τις ομολογίες, δηλαδή σε προκαθορισμένες ημερομηνίες κληρώνεται ορισμένος αριθμός ομολογιών και οι ομολογιούχοι εισπράττουν τα χρήματα που αντιπροσωπεύουν οι ομολογίες τους.

Επομένως, αν το δάνειο εξοφληθεί σε $n$ χρόνια ο δανειζόμενος θα πρέπει να καταβάλλει (εκτός των τόκων μέσω των κουπονιών) μέρος του δανείου κληρώνοντας αντίστοιχες ομολογίες. Αυτό γίνεται με τη μέθοδο του προοδευτικού χρεολυσίου. Θα σχηματιστεί μια ράντα με τελική τιμή $K$, και άρα

$$R = Ki + KP_{\overline{n}|i}$$

είναι το ποσό που θα καταβάλλει ο δανειζόμενος σε κάθε περίοδο. Για κεφάλαιο αναλογεί το ποσό $KP_{\overline{n}|i}$ το οποίο θα διαιρεθεί με το ποσό $K/N$ για να μας δώσει το πλήθος των ομολογιών που θα κληρωθούν το οποίο θα είναι $[NP_{\overline{n}|i}]$. Σημειώστε ότι πρέπει να είναι ακέραιος αριθμός το πλήθος των ομολογιών ενώ το ποσό $NP_{\overline{n}|i}$ μπορεί να μην είναι ακέραιος αριθμός. Σε μια τέτοια περίπτωση θα εξοφλήσει λιγότερα από όσα πρέπει και η διαφορά θα προστεθεί στο ποσό της επόμενης φοράς. Το ποσό $KP_{\overline{n}|i} - \frac{K}{N}[NP_{\overline{n}|i}]$ θα προστεθεί στο ποσό της επόμενης χρονικής περιόδου που θα πρέπει να εξοφλήσει ο δανειζόμενος, δηλαδή θα πρέπει να εξοφλήσει $R' = R + KP_{\overline{n}|i} - \frac{K}{N}[NP_{\overline{n}|i}]$.

Στην επόμενη περίοδο έχουν περισσέψει $N - [NP_{\overline{n}|i}]$ τίτλοι και επομένως θα καταβληθούν οι αντίστοιχοι τόκοι οι οποίοι θα είναι τώρα $\frac{K}{N}\left(N - [NP_{\overline{n}|i}]\right) i$ ενώ το ποσό δανείου που θα αποπληρωθεί θα είναι $R' - \frac{K}{N}(N - [NP_{\overline{n}|i}])i$. Αυτό με τη σειρά του θα διαιρεθεί με το $K/N$ για να βρεθεί το πλήθος των ομολογιών που θα κληρωθούν. Αν η διαίρεση δεν δώσει ακέραιο αριθμό το υπόλοιπο το προσθέτουμε στο ποσό του επόμενου έτους. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι το τέλος του $n$-οστού έτους.

**'ΣΚΗΣΗ 126** *Το κράτος σύναψε ομολογιακό δάνειο ύψους 5.000.000 Ευρώ το οποίο αποτελείται από 10.000 ομολογίες ονομαστικής αξίας 500 Ευρώ. Το δάνειο θα εξοφληθεί με επιτόκιο 3% σε 6 χρόνια. Κατασκευάστε τον πίνακα αποπληρωμής του δανείου.*

**ΛΥΣΗ.** Όπως είπαμε το ποσό που θα καταβάλλει το χρόνο (για τόκους και αποπληρωμή κεφαλαίου) θα είναι

$$R = \underbrace{5.000.000 \cdot 0.03}_{\text{τόκοι}} + \underbrace{5.000.000 \cdot P_{\overline{6}|0.03}}_{\text{ποσό για κεφάλαιο}} = 923.000$$

$1^o$ ΄Ετος.

Το ποσό των $5.000.000 \cdot 0.03$ είναι για τόκους ενώ το ποσό $5.000.000 \cdot P_{\overline{6}|0.03} = 772.987,5004$ είναι για αποπληρωμή κεφαλαίου. Διαιρούμε με το 500 για να δούμε πόσοι τίτλοι πρέπει να αποπληρωθούν και βλέπουμε ότι είναι 1.545 τίτλοι. Το ποιοι ακριβώς θα είναι αυτοί θα προκύψει μέσω κλήρωσης στο τέλος του πρώτου έτους. Όμως περισσεύουν $772.987,5004 - 1.545 \cdot 500 = 487,5004$ Ευρώ τα οποία θα προστεθούν στον επόμενο χρόνο.

$2^o$ ΄Ετος.

Στο τέλος του δεύτερου έτους το κράτος θα καταβάλλει το ποσό $8.455 \cdot 500 \cdot 0.03 = 126.825$ για τόκους και επομένως θα καταβάλλει $923.487,5004 - 126.825 =$

$796.662, 5004$ για αποπληρωμή κεφαλαίου. Διαιρούμε το ποσό αυτό με το 500 για να δούμε πόσες ομολογίες θα κληρωθούν. Διαπιστώνουμε ότι πρέπει να κληρωθούν 1.593 ομολογίες αλλά περισσεύουν και $162, 5004$ Ευρώ. Επειδή αυτό το ποσό δεν εξοφλεί κάποιον τίτλο το κρατά ο οφειλέτης και το προσθέτει στο ποσό των 923.000 στο τρίτο έτος.

$3^o$ ΄Ετος.

Οι εναπομείναντες τίτλοι είναι $10.000-(1.545+1.593) = 6.862$ το πλήθος. Επομένως στο τέλος του τρίτου χρόνου πρέπει να πληρώσει το ποσό των $6.862 \cdot 500 \cdot 0.03 = 102.930$ Ευρώ για τόκους. Για να υπολογίσουμε το ποσό για αποπληρωμή δανείου θα αφαιρέσουμε το ποσό αυτό από το $923.162, 5004$ και άρα θα έχουμε $820.232, 5004$ Ευρώ για κεφάλαιο. Διαιρώντας με το 500 θα βρούμε το πλήθος των ομολογιών που πρέπει να κληρωθούν και είναι 1.640 τίτλοι. Όμως $820.232, 5004 - 1.640 \cdot 500 = 232, 5004$ Ευρώ τα οποία πρέπει να προστεθούν στην επόμενη χρονιά.

$4^o$ ΄Ετος.

Οι εναπομείναντες τίτλοι είναι $10.000-(1.545+1.593+1.640) = 5.222$ τίτλοι. Αυτό σημαίνει ότι στο τέλος του τέταρτου έτους θα πληρώσει για τόκους το ποσό $5.222 \cdot 500 \cdot 0.03 = 78.330$. Αφαιρούμε από το ποσό των $923.232, 5004$ για να υπολογίσουμε το ποσό για κεφάλαιο το οποίο είναι $923.232, 5004 - 78.330 = 844.902, 5004$ Ευρώ. Για να υπολογίσουμε το πλήθος των ομολογιών διαιρούμε το ποσό αυτό με το 500 και έχουμε ότι είναι 1.689 ομολογίες. Όμως $844.902, 5004 - 1.689 \cdot 500 = 402, 5004$ Ευρώ τα οποία θα προστεθούν στον επόμενο χρόνο.

$5^o$ ΄Ετος.

Οι εναπομείναντες τίτλοι είναι $10.000 - (1.545 + 1.593 + 1.640 + 1.689) = 3.533$ το πλήθος. Αυτό σημαίνει ότι στο τέλος τους πέμπτου έτους θα πληρώσει το ποσό $3.533 \cdot 500 \cdot 0.03 = 52.995$ Ευρώ για τόκους. ΄ρα για κεφάλαιο θα δώσει το ποσό $923.402, 5004 - 52.995 = 870.407, 5004$ Ευρώ. Διαιρούμε με το 500 για να βρούμε το πλήθος των ομολογιών το οποίο είναι 1.740 ομολογίες. Όμως περισσεύουν $870.407, 5004 - 1.740 \cdot 500 = 407, 5004$ Ευρώ τα οποία θα προστεθούν στο επόμενο και τελευταίο έτος.

$6^o$ ΄Ετος.

Οι εναπομείναντες τίτλοι είναι $10.000 - (1.544 + 1.593 + 1.640 + 1.689 + 1.740) = 1.793$. Αυτό σημαίνει ότι στο τέλος του έκτου έτους θα πληρώσει το ποσό $1.793 \cdot 500 \cdot 0.03 = 26.895$ Ευρώ για τόκους. ΄ρα για κεφάλαιο θα δώσει το ποσό των $923.407, 5004 - 26.895 = 896.512, 5004$ Ευρώ. Εφόσον είναι το τελευταίο έτος θα πρέπει να ισχύει $\frac{896.512,5004}{500} = 1.793$.

| Έτη | Πλήθος Τίτλων | Τόκοι Περιόδου |
|---|---|---|
| 1 | 1.545 | 150.000 |
| 2 | 1.593 | 126.825 |
| 3 | 1.640 | 102.930 |
| 4 | 1.689 | 78.330 |
| 5 | 1.740 | 52.995 |
| 6 | 1.793 | 26.895 |

□

# Κεφάλαιο 8

# Χρηματιστηριακές Πράξεις

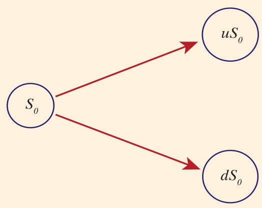
## 8.1 Μετοχές

Θα ασχοληθούμε με τις συναλλαγές που γίνονται στο χρηματιστήριο ξεκινώντας από τις μετοχές.
Μετοχή (μιας εταιρείας) είναι ένας τίτλος ο οποίος αντιστοιχεί σε ένα μερίδιο αξίας της εταιρείας.
Η τιμή μιας μετοχής προκύπτει έπειτα από καθημερινή διαπραγμάτευση. Οι κάτοχοι, δηλαδή, των μετοχών που θέλουν να πουλήσουν κάποιες το δηλώνουν στο Χρηματιστήριο (δίνοντας ίσως μια κατώτερη τιμή) και οι ενδιαφερόμενοι αγοράζουν. Αν εκδηλώσουν ενδιαφέρον αγοράς για περισσότερες μετοχές από ότι πωλούνται τότε προφανώς η τιμή ανεβαίνει, αλλιώς κατεβαίνει. Η τελευταία τιμή πώλησης στη συγκεκριμένη ημέρα είναι και η τιμή της μετοχής εκείνη την ημέρα. Είναι προφανές ότι κανείς δεν μπορεί να προβλέψει την αυριανή τιμή της μετοχής όμως μπορεί να μαντέψει ότι πιθανόν αύριο να εκδηλωθεί ιδιαίτερο ενδιαφέρον αγοράς διότι η εταιρεία πρόκειται να επεκτείνει τις δραστηριότητες της κτλ. Όμως δεν μπορεί κανείς να προβλέψει πόσο θα ανέβει, αν συμβεί κάτι τέτοιο τελικά.

### 8.1.1 Διωνυμικό Μοντέλο

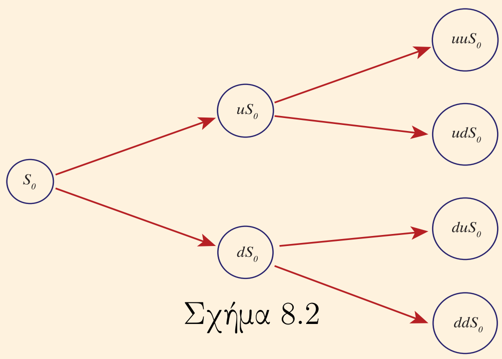
Μπορούμε να κάνουμε ορισμένες απλοποιήσεις και να προσπαθήσουμε να μοντελοποιήσουμε το φαινόμενο προκειμένου να εξάγουμε αργότερα κάποια συμπεράσματα.
Μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση της μετοχής τον τελευταίο χρόνο (ή και παλαιότερα) και να βγάλουμε ένα μέσο όρο για την ανοδική και καθοδική πορεία της. Δηλαδή, αν η τιμή ανέβει από την $n$ στην $n+1$ ημέρα, ποιο είναι το μέσο ποσοστό ανόδου (και αντίστοιχα καθόδου). Μπορούμε έτσι να καταλήξουμε σε δυο νούμερα $u, d$ τα οποία θα είναι οι μέσοι όροι ανόδου και καθόδου αντίστοιχα σε σχέση με την προηγούμενη ημέρα. Δηλαδή, αν η τιμή της μετοχής σήμερα είναι $S_0$ τότε την επόμενη ημέρα θα είναι $uS_0$ αν ανέβει και $dS_0$ αν κατέβει. Σημειώστε όμως ότι αυτή η μέση τιμή ανόδου και καθόδου αφορά το **παρελθόν** και όχι το **μέλλον**. Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε αυτή την πληροφορία όμως θα κάνουμε μια παραδοχή. Θα **υποθέσουμε** ότι το ίδιο θα συμβεί και στο μέλλον προκειμένου να βγάλουμε

κάποια συμπεράσματα. Σίγουρα η υπόθεση αυτή δεν είναι σωστή αλλά ελπίζουμε να μην αποκλίνει πολύ από αυτό που θα συμβεί στο μέλλον.
Ένας τρόπος να αποτυπώσουμε σχηματικά τα παραπάνω είναι να κατασκευάσουμε το παρακάτω δέντρο τιμών της μετοχής. Υποθέτουμε ότι σήμερα είναι η χρονική στιγμή 0 και αύριο είναι η χρονική στιγμή 1. Το παρακάτω δέντρο (μιας περιόδου) αποτυπώνει τις τιμές της μετοχής. Το μοντέλο αυτό ονομάζεται διωνυμικό μοντέλο ακριβώς επειδή υποθέτουμε ότι οι πιθανές τιμές της μετοχής την επόμενη χρονική στιγμή είναι μόνο δύο. Σε όλα τα επόμενα θα εργαζόμαστε κάτω από αυτή την υπόθεση, η οποία βέβαια δεν είναι ρεαλιστική, παρουσιάζοντας έτσι την θεωρία που αφορά το διωνυμικό μοντέλο.




Σχήμα 8.1

Μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση της μετοχής στο παρελθόν και να βγάλουμε τον μέσο όρο καθόδου ή ανόδου για την περίοδο μιας εβδομάδας, ενός μήνα, εξαμήνου ή όποια άλλη περίοδο θέλουμε. Σε αυτή την περίπτωση το παραπάνω δέντρο θα αναπαριστά την κίνηση της μετοχής σε αυτήν την περίοδο, π.χ. ενός τριμήνου.
Επίσης, αν η περίοδος που θέλουμε να μελετήσουμε τη μετοχή στο μέλλον είναι μεγάλη μπορούμε να τη χωρίσουμε σε μικρότερες. Αν π.χ. θέλουμε να μελετήσουμε τη μετοχή για τον επόμενο χρόνο μπορούμε να χωρίσουμε το χρόνο σε εξάμηνα (και αφού υπολογίσουμε με ιστορικά δεδομένα τα $u, d$ εξαμήνου) να κατασκευάσουμε το παρακάτω δέντρο

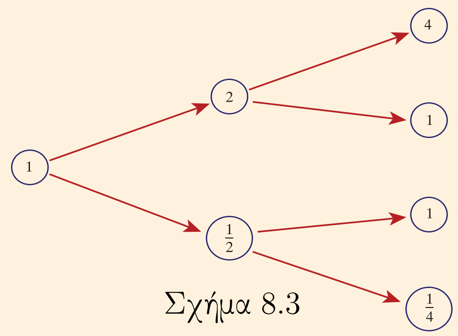



Σχήμα 8.2

'ρα, έχοντας κάνει την **υπόθεση** ότι στο μέλλον η μετοχή θα έχει τον ίδιο ρυθμό ανόδου και καθόδου καταγράψαμε τις πιθανές κινήσεις της μετοχής. Δεν γνωρίζουμε ποιο μονοπάτι θα ακολουθήσει η μετοχή αλλά (αν η υπόθεσή μας είναι σωστή για τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου) γνωρίζουμε όλα τα πιθανά μονοπάτια της μετοχής.

Στην πράξη, αν θέλουμε να έχουμε καλύτερη εικόνα, πρέπει να χωρίσουμε την περίοδο σε 20 με 30 υποπεριόδους και να κατασκευάσουμε το αντίστοιχο δέντρο τιμών της μετοχής. Σε τέτοιες περιπτώσεις μόνο με χρήση υπολογιστών μπορεί να γίνει η μελέτη.

**Παραδειγμα 127** *Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε το δέντρο τιμών μιας μετοχής για τον επόμενο χρόνο χωρίζοντας το χρόνο σε εξάμηνα. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να γνωρίζω τα $u, d$ εξαμήνου και για να τα υπολογίσω χρησιμοποιώ στοιχεία 10 ετών (για παράδειγμα) όσον αφορά την κίνηση της μετοχής ανά εξάμηνο οπότε και υπολογίζω τους μέσους όρους καθόδου και ανόδου. Ας υποθέσουμε ότι είναι $u = 2$ και $d = 1/2$. Τότε το δέντρο τιμών της μετοχής (δυο περιόδων) θα είναι*




Σχήμα 8.3

### 8.1.2 Χαρτοφυλάκιο

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος θέλει να επενδύσει τα χρήματά του σε μια μετοχή και σε κατάθεση σε τράπεζα με επιτόκιο περιόδου $r$. Αγοράζει λοιπόν ένα πλήθος $a$ μετοχών τη χρονική στιγμή 0 και καταθέτει και ένα ποσό $b$ στην τράπεζα. Λέμε τότε ότι έχει κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο με συγκεκριμένη αξία τη χρονική στιγμή 0 η οποία είναι

$$V_0 = aS_0 + b$$

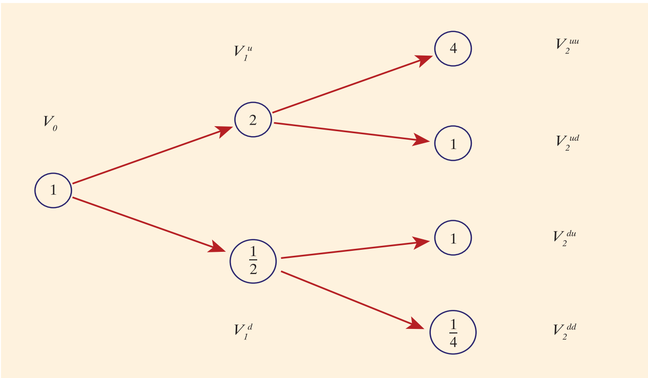
Δηλαδή, πολλαπλασιάζουμε το πλήθος των μετοχών με την (γνωστή) τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή 0 και προσθέτουμε και τα χρήματα που κατέθεσε στην τράπεζα. Η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή 0 συμβολίζεται με $V_0$. Ποια θα είναι η αξία του χαρτοφυλακίου στο μέλλον; Προφανώς εξαρτάται από την τιμή της μετοχής, διότι το ποσό στην τράπεζα θα έχει προκαθορισμένη αξία μετά τους υπολογισμούς των τόκων.
Για το λόγο αυτόν θα κάνουμε την κατασκευή του δέντρου τιμών της μετοχής, έχοντας κάνει όπως περιγράψαμε τις απαραίτητες υποθέσεις και υπολογισμούς.
Τη χρονική στιγμή 1 η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$V_1^u = a(uS_0) + b(1+r)$$
$$V_1^d = a(dS_0) + b(1+r)$$

Η $V_1^u$ είναι για την περίπτωση που η μετοχή ανέβει ενώ η $V_1^d$ είναι για την περίπτωση που η μετοχή κατέβει. Αντίστοιχα, υπολογίζουμε την αξία του χαρτοφυλακίου για τη χρονική στιγμή 2 η οποία θα είναι

$$\begin{aligned} V_2^{uu} &= a(uuS_0) + b(1+r)^2 \\ V_2^{ud} &= a(udS_0) + b(1+r)^2 \\ V_2^{du} &= a(duS_0) + b(1+r)^2 \\ V_2^{dd} &= a(ddS_0) + b(1+r)^2 \end{aligned}$$

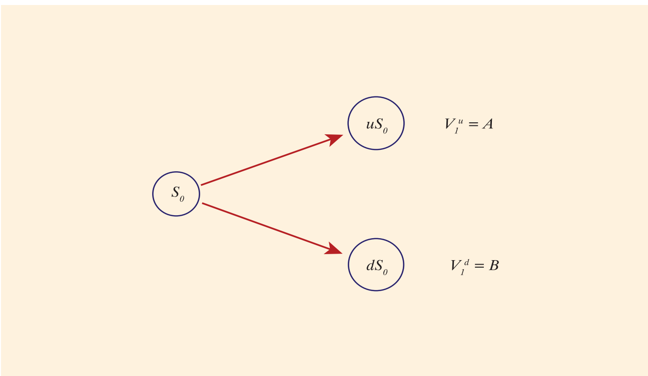
Τις αξίες του χαρτοφυλακίου μαζί με τις τιμές της μετοχής μπορούμε αν θέλουμε να τις αποτυπώσουμε στο αντίστοιχο δέντρο τιμών.




Σχήμα 8.4

### 8.1.3 Κατασκευή Χαρτοφυλακίου Προκαθορισμένης Αξίας

Ας ξαναγυρίσουμε στο μοντέλο μιας περιόδου και ας υποθέσουμε ότι μας δίνονται συγκεκριμένες τιμές $A, B$ οι οποίες πρέπει να είναι ίσες με την αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή 1, δηλαδή να ισχύει $V_1^u = A$ και $V_1^d = B$. Σχηματικά,




Σχήμα 8.5

Το ερώτημα είναι ποιο πρέπει να είναι το ποσό $V_0$, πόσες μετοχές πρέπει να αγοράσει ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου και πόσα χρήματα να τοποθετήσει στην τράπεζα με επιτόκιο περιόδου $r$;

Ας υποθέσουμε ότι αγοράζει $a$ μετοχές τη στιγμή 0 και καταθέτει $b$ ποσό στην τράπεζα. Τότε το χαρτοφυλάκιο θα έχει αξία

$$V_0 = aS_0 + b$$

τη χρονική στιγμή 0 ενώ τη χρονική στιγμή 1 οι πιθανές αξίες θα είναι

$$\begin{aligned} V_1^u &= a(uS_0) + b(1+r) = A, \\ V_1^d &= a(dS_0) + b(1+r) = B \end{aligned}$$

Απαιτώντας οι αξίες του χαρτοφυλακίου να έχουν συγκεκριμένη τιμή προκύπτουν οι παραπάνω δυο εξισώσεις με δυο αγνώστους. Για να υπολογίσουμε την λύση, αφαιρούμε την δεύτερη εξίσωση από την πρώτη και έχουμε

$$a(u-d)S_0 = A - B \Rightarrow a = \frac{A-B}{(u-d)S_0}$$

Αντικαθιστώντας το $a$ στην πρώτη εξίσωση, υπολογίζουμε και το $b$. Συνεπώς, η λύση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} a &= \frac{A-B}{(u-d)S_0}, \\ b &= \frac{Bu - Ad}{(u-d)(1+r)} \end{aligned}$$

Η αξία του χαρτοφυλακίου είναι $V_0 = aS_0 + b$ την χρονική στιγμή 0. Αντικαθιστώντας τα $a$ και $b$ που υπολογίσαμε έχουμε

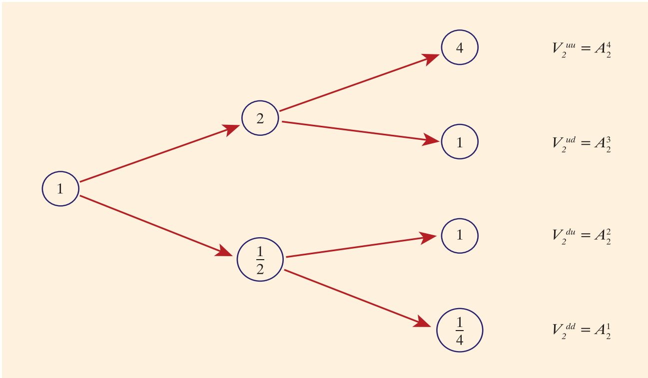
$$\begin{aligned} V_0 = aS_0 + b &= \frac{A-B}{(u-d)S_0}S_0 + \frac{Bu-Ad}{(u-d)(1+r)} = \frac{(A-B)(1+r) + Bu - Ad}{(u-d)(1+r)} \\ &= \frac{A(1+r-d) + B(u-(1+r))}{(u-d)(1+r)} \end{aligned}$$

Επομένως, η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\big(qA + (1-q)B\big)$$

όπου $q = \frac{1+r-d}{u-d}$.

Μπορούμε να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα αυτό και για ένα δέντρο δυο περιόδων και να απαιτήσουμε (σχηματικά) το εξής




Σχήμα 8.6

όπου $A_2^4, A_2^3, A_2^2, A_2^1$ είναι δοσμένοι αριθμοί. Με τον τρόπο που περιγράψαμε πριν υπολογίζουμε τις αξίες που πρέπει να έχει τη στιγμή 1,

$$\begin{aligned} V_1^u &= \frac{1}{1+r}(qA_2^4 + (1-q)A_2^3) \\ V_1^d &= \frac{1}{1+r}(qA_2^2 + (1-q)A_2^1) \end{aligned}$$

Δηλαδή, από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} V_2^{uu} &= a_1^u(uuS_0) + b_1^u(1+r) = A_2^{uu} \\ V_2^{ud} &= a_1^u(udS_0) + b_1^u(1+r) = A_2^{ud} \end{aligned}$$

προκύπτει εύκολα ότι

$$\begin{aligned} a_1^u &= \frac{A_2^{uu} - A_2^{ud}}{(u-d)uS_0} \\ b_1^u &= \frac{A_2^{ud} - A_2^{uu}}{(u-d)(1+r)} \end{aligned}$$

Εφόσον

$$V_1^u = a_1^u(uS_0) + b_1^u$$

αντικαθιστώντας τα $a_1^u$ και $b_1^u$ προκύπτει ο παραπάνω τύπος για το $V_1^u$. Εντελώς παρόμοια προκύπτει και ο τύπος για το $V_1^d$.
Αντίστοιχα μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των μετοχών που πρέπει να έχει στην κατοχή του καθώς και το ποσό στην τράπεζα σε κάθε περίπτωση. Στην συνέχεια, μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου καθώς και το αρχικό πλήθος μετοχών και ποσού που πρέπει να έχει στην τράπεζα.
Με λίγα λόγια έχουμε απαντήσει στο εξής ερώτημα. Ποιες κινήσεις πρέπει να κάνω (αγορά μετοχών, κατάθεση σε τράπεζα) στο χρόνο μηδέν για να φτάσω στο χρόνο 2 σε δοσμένες αξίες του χαρτοφυλακίου. Σημειώστε, ότι αν διαλέξετε συγκεκριμένες τιμές των $A_2^i$ υπάρχει η πιθανότητα να προκύψει κάπου αρνητικός αριθμός μετοχών (το οποίο σημαίνει δανεισμό μετοχών) ή και αρνητικό ποσό κατάθεσης στην τράπεζα (το οποίο σημαίνει δανεισμό ποσού από τράπεζα με επιτόκιο $r$).

**Παραδειγμα 128** *Υποθέστε ότι μας δίνονται τα $u = 2, d = 1/2$ και το $r = 0.03$ καθώς και $A_2^4 = 2, A_2^3 = A_2^2 = A_2^1 = 0$. Να υπολογίσετε (σε ένα δυο περιόδων δέντρο τιμών) την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου καθώς και το πλήθος των μετοχών και κατάθεσης σε τράπεζα ούτως ώστε το χαρτοφυλάκιο να έχει αξίες τις τιμές $A_2^i$. Τέλος υποθέστε ότι η σημερινή τιμή της μετοχής είναι $S_0 = 1$.*

**Απάντηση.** Υπολογίζουμε πρώτα το $q = \frac{1+r-d}{u-d} = 0.35$ ενώ το $1 - q = 0.65$. Έπειτα υπολογίζουμε τις αξίες

$$\begin{aligned} V_1^u &= \frac{1}{1+r}(qA_2^4 + (1-q)A_2^3) = \frac{0.35 \cdot 2}{1.03} = \frac{0.7}{1.03} = 0.67 \\ V_1^d &= \frac{1}{1+r}(qA_2^2 + (1-q)A_2^1) = 0. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου

$$V_0 = \frac{1}{1+r}(qV_1^u + (1-q)V_1^d) = \frac{0.35 \cdot 0.7}{1.03} = 0.23$$

Στη συνέχεια θα καταγράψουμε τις απαραίτητες κινήσεις που πρέπει να κάνει ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου για να έχει την προκαθορισμένη αξία.
Αντικαθιστώντας στους τύπους προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} a &= \frac{V_1^u - V_1^d}{(u-d)S_0} = 0.44 \\ b &= \frac{uV_1^d - dV_1^u}{(u-d)(1+r)} = -0.21 \end{aligned}$$

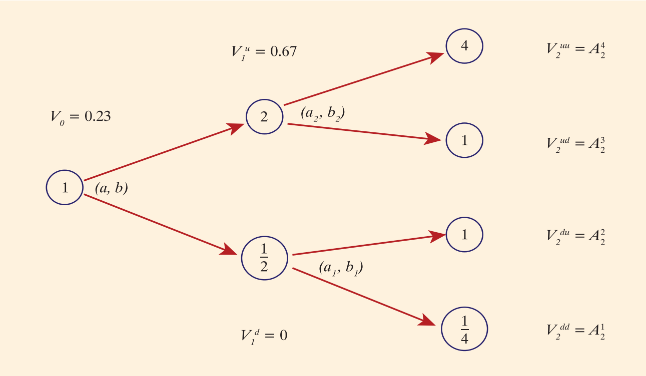
Αυτό σημαίνει ότι την χρονική στιγμή 0 με το ποσό $V_0 = 0.23$ θα αγοράσει 0.44 μετοχές και θα δανειστεί από την τράπεζα 0.21.
Στη συνέχεια, την περίοδο 1 (μετά από ένα εξάμηνο για παράδειγμα) ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου θα πρέπει να αναδιοργανώσει το χαρτοφυλάκιό του ανάλογα με την περίσταση. Τη χρονική στιγμή 1 η τιμή της μετοχής είτε θα έχει ανέβει είτε θα έχει κατέβει. Στην περίπτωση που έχει ανέβει θα πρέπει να αναδιοργανώσει το χαρτοφυλάκιο ως εξής,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{A_2^4 - A_2^3}{(u-d)(uS_0)} = 2/3 \\ b_2 &= \frac{uA_2^3 - dA_2^4}{(u-d)(1+r)} = -0.64 \end{aligned}$$

ενώ στην περίπτωση που η μετοχή έχει κατέβει θα πρέπει να αναδιοργανώσει το χαρτοφυλάκιό του ως εξής

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A_2^2 - A_2^1}{(u-d)(dS_0)} = 0 \\ b_1 &= \frac{uA_2^1 - dA_2^2}{(u-d)(1+r)} = 0 \end{aligned}$$

το οποίο είναι λογικό αφού η αξία του χαρτοφυλακίου του είναι μηδενική σε αυτή την περίπτωση. Σχηματικά έχουμε

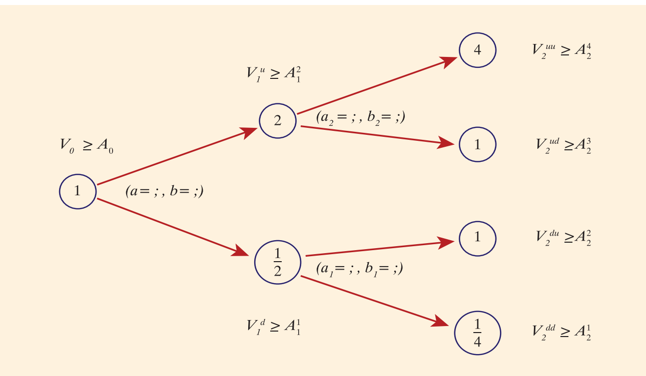



Σχήμα 8.7

□

**Κατασκευή Χαρτοφυλακίου Προκαθορισμένης Αξίας με Ενδιάμεσες Απαιτήσεις**

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας ζητείται να κατασκευάσουμε το μικρότερο χαρτοφυλάκιο με αξίες στο τέλος της δεύτερης περιόδου μεγαλύτερες ή ίσες από δοσμένες τιμές αλλά επιπλέον μας ζητείται οι αξίες του χαρτοφυλακίου να υπερβαίνουν συγκεκριμένες ποσότητες στους ενδιάμεσους χρόνους. Δηλαδή, θέλουμε χαρτοφυλάκιο του οποίου οι αξίες στη δεύτερη περίοδο να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από $A_2^4, A_2^3, A_2^2, A_2^1$ και επίσης στη χρονική στιγμή 1 οι αξίες του χαρτοφυλακίου να υπερβαίνουν τις $A_1^2, A_1^1$ δοσμένες τιμές και τέλος τη χρονική στιγμή 0 να ισχύει ότι $V_0 \geq A_0$ για δοσμένο $A_0$. Σχηματικά, μας ζητείται το εξής




Σχήμα 8.8

Σκεπτόμενοι όπως πριν η αξία του χαρτοφυλακίου $V_1^u$ θα πρέπει να είναι ίση με την $E_1^u = \frac{1}{1+r}(qA_2^4 + (1-q)A_2^3)$ και επιπλέον μεγαλύτερη ή ίση της $A_1^2$ επομένως είναι λογικό να απαιτήσω η αξία $V_1^u = \max\{A_1^2, E_1^u\}$. Παρόμοια και για τις υπόλοιπες αξίες. Δηλαδή

$$\begin{aligned} V_1^d &= \max\{A_1^1, E_1^d\} \\ V_0 &= \max\left\{A_0, \frac{1}{1+r}(qV_1^u + (1-q)V_1^d)\right\} \end{aligned}$$

**Παραδειγμα 129** *Κατασκευάστε χαρτοφυλάκιο τ.ω. οι αξίες του στο χρόνο 2 να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από $A_2^4 = 2, A_2^3 = A_2^2 = A_2^1 = 0$ και επίσης οι αξίες τη χρονική στιγμή 1 να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από $A_1^2 = 3/2$ και $A_1^1 = 1$. Θεωρούμε τα υπόλοιπα δεδομένα τα ίδια με το προηγούμενο παράδειγμα.*

**Απάντηση.** Το $q = 0.35$ και το $1 - q = 0.65$. Αν οι αξίες στη χρονική στιγμή 1 είναι ίσες με

$$\begin{aligned} V_1^u &= \frac{1}{1+r}(qA_2^4 + (1-q)A_2^3) = \frac{0.35 \cdot 2}{1.03} = \frac{0.7}{1.03} = 0.67 \\ V_1^d &= \frac{1}{1+r}(qA_2^2 + (1-q)A_2^1) = 0. \end{aligned}$$

τότε, όπως έχουμε δει, στο χρόνο 2 οι αξίες θα είναι ίσες με τις απαιτούμενες. Όμως, εδώ μας ζητείται επιπλέον οι αξίες $V_1^u, V_1^d$ να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από $3/2, 1$ αντίστοιχα. Επομένως, απαιτώ οι αξίες να είναι ως εξής

$$\begin{aligned} V_1^u &= \max\{3/2, 0.67\} = 3/2 \\ V_1^d &= \max\{1, 0\} = 1 \end{aligned}$$

Υπολογίζω τώρα την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου

$$V_0 = \frac{1}{1+r}(qV_1^u + (1-q)V_1^d) = 1.14$$

Στη συνέχεια υπολογίζω τη σύσταση του χαρτοφυλακίου σε κάθε περίσταση. Στο χρόνο μηδέν θα πρέπει να έχει το χαρτοφυλάκιο

$$\begin{aligned} a &= \frac{V_1^u - V_1^d}{(u-d)S_0} = 1/3 \\ b &= \frac{uV_1^d - dV_1^2}{(u-d)(1+r)} = 0.80 \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας, υπολογίζουμε τα $a_2, b_2, a_1, b_1$ όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα.

**Ασκηση 130** *Ένας επενδυτής μας ζητά να επενδύσει ένα ποσό σε αγορά μετοχών και σε κατάθεση σε τράπεζα έτσι ώστε (σε ένα δέντρο μιας περιόδου) μετά την πάροδο μιας περιόδου η απόδοση της επένδυσης αυτής να ξεπερνά την απόδοση κατάθεσης σε τράπεζα του ίδιου ποσού. Μπορείτε να μετατρέψετε το πρόβλημα αυτό σε ένα μαθηματικό πρόβλημα και στην συνέχεια να δώσετε τις κατάλληλες απαντήσεις στον επενδυτή; Υποθέστε ότι η τιμή της μετοχής σήμερα είναι $S_0$, οι ρυθμοί ανόδου και καθόδου είναι $u, d$ και το επιτόκιο περιόδου είναι $r$.*

**Απάντηση.** Έστω ότι θα επενδύσουμε το ποσό $V_0$ σήμερα. Μετά από μια περίοδο η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι $V_1^u = V_0 + A$ ή $V_1^d = V_0 + B$. Αυτό που στην πραγματικότητα θέλει ο επενδυτής (στην γλώσσα των μαθηματικών) είναι $V_o \cdot r < \min\{A, B\}$. Πράγματι, το ποσό $V_0 \cdot r$ είναι το κέρδος του μετά από μια περίοδο στην περίπτωση που καταθέσει το ποσό $V_0$ σήμερα στην τράπεζα. Ενώ αν επενδύσει σε κάποιο χαρτοφυλάκιο όπως περιγράψαμε πριν το κέρδος του θα είναι τουλάχιστον το ποσό $\min\{A, B\}$. Αυτό λοιπόν που επιθυμεί ο επενδυτής είναι η επένδυση του σε χαρτοφυλάκιο να ξεπερνά σε απόδοση την αντίστοιχη κατάθεση σε τράπεζα, δηλαδή $V_o \cdot r < \min\{A, B\}$. Ας δούμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις είναι εφικτό.
Όπως γνωρίζουμε, αν επενδύσουμε σήμερα το ποσό $V_0$ και θέλουμε να έχει τελικές αξίες $V_1^u = V_0 + A$ ή $V_1^d = V_0 + B$ τότε θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{1+r}\left(q(V_0 + A) + (1-q)(V_0 + B)\right) \Rightarrow \\ (1+r)V_0 &= qV_0 + qA + (1-q)V_0 + (1-q)B \Rightarrow \\ V_0 r &= q(A - B) + B \end{aligned}$$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
• $\min\{A, B\} = B$. Εφόσον πρέπει $V_0 r < B$ έπεται ότι $q(A-B)+B < B$ το οποίο σημαίνει ότι (αφού $A - B > 0$) θα πρέπει να ισχύει ότι $q < 0$ δηλαδή $1 + r < d$.
• $\min\{A, B\} = A$. Εφόσον πρέπει $V_0 r < A$ έπεται ότι $q(A-B)+B < A$ το οποίο σημαίνει ότι (αφού $A-B < 0$) θα πρέπει να ισχύει ότι $q > 1$ ή αλλιώς $1+r-d > u-d$ δηλαδή $1 + r > u$.
• Αν $A = B$ τότε προκύπτει ότι $V_0 r = B$ και επομένως δεν γίνεται $V_0 r < \min\{A, B\} = B$.
Τελικά είναι εφικτή η κατασκευή ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου αρκεί

$$1 + r \notin (d, u)$$

Στην πρώτη περίπτωση όπου $A > B$ ο επενδυτής θα αγοράσει σήμερα μετοχές και θα τις πουλήσει στο τέλος της περιόδου προκειμένου να έχει το ζητούμενο κέρδος. Όταν αυτή η δυνατότητα γίνει αντιληπτή στο ευρύ επενδυτικό κοινό πολλοί θα θελήσουν να αποκομίσουν κέρδος με αυτό τον τρόπο. Αυτό όμως θα σημαίνει ότι όλοι αυτοί θα θελήσουν να πουλήσουν τις μετοχές τους στο τέλος της πρώτης περιόδου με συνέπεια ο ρυθμός καθόδου $d$ να ελαττωθεί και έτσι κάποια στιγμή να γίνει μικρότερος του $1 + r$. Παρόμοιος συλλογισμός μπορεί να διατυπωθεί στην περίπτωση που $A < B$. Τέτοιες ευκαιρίες σίγουρου κέρδους, όπως ονομάζονται, παρουσιάζονται συχνά στην αγορά αλλά διατηρούνται για μικρό χρονικό διάστημα. □

## 8.2 Προθεσμιακά Συμβόλαια και Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης

Τα προθεσμιακά συμβόλαια λαμβάνουν μέρος μεταξύ δυο ενδιαφερομένων οι οποίοι έχουν την **υποχρέωση** μετά την πάροδο καθορισμένου χρόνου να ανταλλάξουν

περιουσιακά στοιχεία με προκαθορισμένο τρόπο. Έστω ότι ο $A$ υποχρεούται να πουλήσει στον $B$ μετά από έναν χρόνο 100 μετοχές μιας συγκεκριμένης εταιρείας στην τιμή (παράδοσης) $K$ ανά μετοχή την οποία συμφωνούν την ημέρα που υπογράφουν το συμβόλαιο. Σημειώστε ότι κανείς δεν γνωρίζει την τιμή της μετοχής μετά από ένα χρόνο επομένως υπάρχει και για τους δυο ένα ρίσκο. Παρόμοιο είναι και το συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης με τη διαφορά ότι τέτοια συμβόλαια είναι υπό διαπραγμάτευση στο χρηματιστήριο. Είναι δηλαδή τυποποιημένα συμβόλαια (π.χ. 100 μετοχές της εταιρείας $A$ μετά από τρεις μήνες) και διαπραγματεύονται την τιμή $K$.
Για ποιον λόγο υπάρχουν αυτά τα συμβόλαια; Υποθέστε ότι ο επενδυτής $A$ διαισθάνεται ότι η τιμή μιας μετοχής πρόκειται να κατέβει κατά τη διάρκεια του συμβολαίου ενώ από την άλλη μεριά ένας άλλος επενδυτής $B$ φοβάται ότι η τιμή της μετοχής θα είναι υψηλή στο τέλος του συμβολαίου. Σε αυτή την περίπτωση μπορούν να συνάψουν ένα συμβόλαιο όπως παραπάνω και προφανώς κερδισμένος θα πρέπει να είναι (όταν η τιμή παράδοσης είναι λογική) αυτός του οποίου η διαίσθηση επαληθευτεί.
Ποιες είναι οι κινήσεις του $A$ και ποιες του $B$ μετά τη σύναψη του συμβολαίου; Ο $B$ μπορεί να καταθέσει στην τράπεζα οποιαδήποτε στιγμή $t \in [0, T]$ το ποσό $Ke^{-r(T-t)}$ το οποίο στη λήξη του συμβολαίου θα είναι ίσο με την τιμή παράδοσης. Ο $A$ προκειμένου να πουλήσει τη μετοχή στον $B$ θα πρέπει πρώτα να την αγοράσει αν δεν είναι ήδη στην κατοχή του. Ποια είναι η καταλληλότερη στιγμή αγοράς της μετοχής; Προφανώς συμφέρει να την αγοράσει όταν η μετοχή πάρει τη μικρότερη τιμή κατά τη διάρκεια του συμβολαίου αλλά μην γνωρίζοντας το μέλλον δεν μπορεί να είναι σίγουρος πότε είναι η κατάλληλη στιγμή. Διαπιστώνουμε ότι μετά τη σύναψη του συμβολαίου μόνο ο $A$ έχει τη δυνατότητα να ρισκάρει προκειμένου να κερδίσει περισσότερα και αυτό επιλέγοντας το χρόνο αγοράς των μετοχών.
Ο επενδυτής $A$ θα μπορούσε να καταθέσει το ποσό $S_0$ στην τράπεζα τη χρονική στιγμή μηδέν και να λάβει $S_0e^{rT}$ χωρίς ρίσκο τη χρονική στιγμή $T$. Αν η τιμή παράδοσης $K$ είναι μεγαλύτερη αυτού του ποσού τότε ο $A$ μπορεί να αγοράσει τις μετοχές τη στιγμή μηδέν και στη λήξη του να τις πουλήσει στην τιμή $K > S_0e^{rT}$ ανεξάρτητα από το πώς θα κινηθεί η μετοχή. Θα έχει επομένως σίγουρο κέρδος, χωρίς ρίσκο, μεγαλύτερο από την τοποθέτηση σε τράπεζα, κάτι το οποίο δεν είναι δίκαιο. Με το ποσό, λοιπόν, $S_0e^{rT}$ ο $A$ έχει εκμηδενίσει το ρίσκο. Αν ο $B$ μπορεί να πουλήσει στο χρόνο μηδέν δανεισμένες μετοχές τοποθετεί το ποσό αυτό στην τράπεζα και στο χρόνο $T$ είναι ίσο με $S_0e^{rT}$. Στο χρόνο $T$ αγοράζει τις μετοχές από τον $A$ (και τις επιστρέφει αφού τις είχε δανειστεί) στην τιμή $S_0e^{rT}$, επομένως και ο $B$ μπορεί να εκμηδενίσει το ρίσκο. Έτσι το ποσό $S_0e^{rT}$ θεωρείται η δίκαιη τιμή παράδοσης αφού και οι δυο μπορούν να αντισταθμίσουν το ρίσκο όταν ο $B$ έχει τη δυνατότητα να πουλήσει δανεισμένες μετοχές. Αν δεν έχει αυτή τη δυνατότητα τότε οι δυο αντισυμβαλλόμενοι δεν είναι ισοδύναμοι απέναντι στο ρίσκο όταν η τιμή παράδοσης είναι $S_0e^{rT}$.
Τα συμβόλαια αυτά είναι υπό διαπραγμάτευση (είτε στο χρηματιστήριο είτε εξωχρηματιστηριακά) και επομένως η τιμή παράδοσης $K$ μπορεί να διαφέρει από την $S_0e^{rT}$.

Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό που διαχωρίζει αυτές τις έννοιες.

**Ορισμος 131** *Το ποσό $S_0e^{rT}$ ονομάζεται* **αξία** *παράδοσης ενώ το ποσό $K$ θα το ονομάζουμε* **τιμή** *παράδοσης ενός προθεσμιακού συμβολαίου ή συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης.*

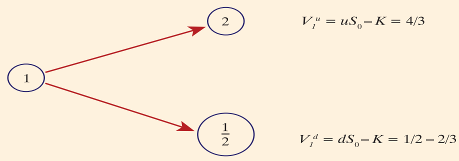
Η **αξία** παράδοσης είναι η λεγόμενη δίκαιη τιμή κατά την οποία κανένα από τα δυο συμβαλλόμενα μέρη δεν είναι κερδισμένο (εκ των προτέρων) ενώ η **τιμή** παράδοσης είναι η τιμή που θα συμφωνήσουν μετά την διαπραγμάτευση. Η **τιμή** μπορεί να διαφέρει από την **αξία** ανάλογα με τις προσδοκίες των επενδυτών όσον αφορά το υποκείμενο αγαθό. Αν οι επενδυτές διαισθάνονται ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει πολύ πάνω από την σημερινή τιμή τότε η **τιμή** παράδοσης μπορεί να συμφωνηθεί να είναι αρκετά μεγαλύτερη από την **αξία** παράδοσης. Οι παραπάνω ισχυρισμοί ταιριάζουν για οποιαδήποτε περίπτωση αγαθού στη θέση της μετοχής.
Ένα παράδειγμα το οποίο δεν αναφέρεται σε αγοραπωλησία μετοχών αλλά αγαθών είναι η συμφωνία πώλησης και παράδοσης πετρελαίου. Υποθέστε ότι ο Α είναι πωλητής πετρελαίου και ο Β επιχειρηματίας ο οποίος χρησιμοποιεί το πετρέλαιο ως βασική πηγή ενέργειας. Ο Β χρειάζεται συγκεκριμένη ποσότητα πετρελαίου κάθε χρόνο χωρίς όμως να είναι σε θέση να αγοράσει μεγαλύτερη ποσότητα για λόγους αποθήκευσης και φύλαξης. Ο Β για να είναι εξασφαλισμένος ότι τον επόμενο χρόνο θα αγοράσει το πετρέλαιο που χρειάζεται στη σημερινή τιμή και όχι στην μελλοντική η οποία μπορεί να είναι αρκετά υψηλότερη, χρειάζεται ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με το οποίο θα εξασφαλίζει την τιμή αλλά και το ότι θα του παραδοθεί τον επόμενο χρόνο. Ο Α επίσης, με ένα τέτοιο συμβόλαιο θα είναι σίγουρος για τις μελλοντικές του πωλήσεις και έτσι αποθηκεύει την απαραίτητη ποσότητα πετρελαίου και ταυτόχρονα «κλειδώνει» την τιμή πώλησης της ποσότητας αυτής.

## 8.3 Δικαιώματα Προαίρεσης

### 8.3.1 Ευρωπαϊκά Συμβόλαια

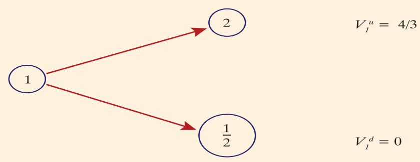
Ιδιαίτερο μαθηματικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα λεγόμενα δικαιώματα προαίρεσης. Υποθέστε ότι ο Α συνάπτει ένα συμβόλαιο με τον Β το οποίο να **υποχρεώνει** τον Α να πουλήσει στον Β ένα συγκεκριμένο αριθμό μετοχών σε συγκεκριμένη τιμή (τιμή εξάσκησης) και σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον (λήξη του συμβολαίου). Ο Β από την άλλη δεν είναι υποχρεωμένος να το κάνει αλλά έχει το **δικαίωμα** ανάλογα αν τον συμφέρει. Αν π.χ. η τιμή της μετοχής στη λήξη του συμβολαίου, έστω $S_T$, είναι μεγαλύτερη της $K$ τότε ο Β θα αγοράσει μετοχές από τον Α φθηνότερα από ότι πωλούνται στην αγορά με συνέπεια να κερδίσει την διαφορά τιμών.
Είναι προφανές ότι ο Β βρίσκεται σε πλεονεκτική θέση έναντι του Α και επομένως κανένας δεν πρόκειται να βρεθεί στη θέση του Α χωρίς κάποιο αντίτιμο. Έτσι λοιπόν ο Α συμφωνεί να βρεθεί σε αυτή τη μειονεκτική θέση αν του δοθεί ένα ποσό από τον Β.

Το ερώτημα για τον Α είναι ποιο ποσό πρέπει να ζητήσει από τον Β. Αυτό εξαρτάται από το πώς θα χρησιμοποιήσει τα χρήματα αυτά για να καλύψει τον Β στην περίπτωση που εξασκήσει το δικαίωμα. Αν π.χ. η τιμή της μετοχής ανέβει ψηλότερα από Κ τότε το ποσό που διεκδικεί στην πραγματικότητα ο Β είναι το $S_T - K$ (για κάθε μετοχή). Επομένως ο Α ουσιαστικά πρέπει να καταβάλλει στον Β το ποσό αυτό.
Ας το δούμε σε ένα δέντρο μιας περιόδου. Ας υποθέσουμε ότι ο Α πρέπει να παραδώσει στον Β μια μετοχή στο χρόνο 1 και σε τιμή Κ. Υποθέτουμε επίσης ότι $S_0 = 1$, $u = 2$ και $d = 1/2$, $K = 2/3$. Επομένως, το ποσό που θα κερδίσει ο Β στο χρόνο 1 φαίνεται σχηματικά




Σχήμα 8.9

Εφόσον ο Β έχει το δικαίωμα να εξασκήσει το συμβόλαιο αν τον συμφέρει διαπιστώνουμε ότι δεν θα το κάνει αν η τιμή της μετοχής πέσει ενώ θα το εξασκήσει αν ανέβει με κέρδος 4/3. Σχηματικά, φαίνεται παρακάτω τα χρήματα που πρέπει να έχει στη διάθεσή του ο Α σε κάθε περίπτωση




Σχήμα 8.10

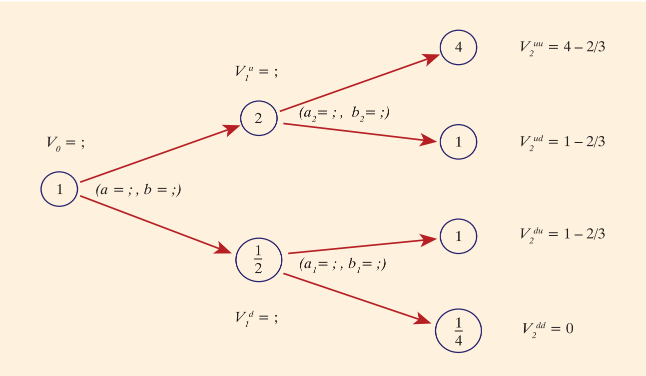
Πώς θα έχει αυτά τα χρήματα; Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσει κατάλληλα τα χρήματα από την πώληση του συμβολαίου έτσι ώστε να κατασκευάσει κατάλληλο χαρτοφυλάκιο με αξίες τη χρονική στιγμή 1 αυτές που χρειάζεται. Όπως ήδη είδαμε ο Α μπορεί να υπολογίσει το ποσό που του χρειάζεται για να κατασκευάσει τέτοιο χαρτοφυλάκιο και αυτό το ποσό ακριβώς θα ζητήσει από τον Β για να υπογράψει ένα τέτοιο συμβόλαιο. Αν υποθέσουμε ότι $r = 0.03$ τότε το ποσό που χρειάζεται είναι

$$V_0 = \frac{1}{1+r}\left(q\frac{4}{3} + (1-q)0\right) = \frac{0.35 \cdot 4}{3 \cdot 1.03} = 0.45$$

ανά μετοχή. Με το ποσό αυτό θα αγοράσει μετοχές και θα κάνει κατάθεση στην τράπεζα σύμφωνα με τους τύπους

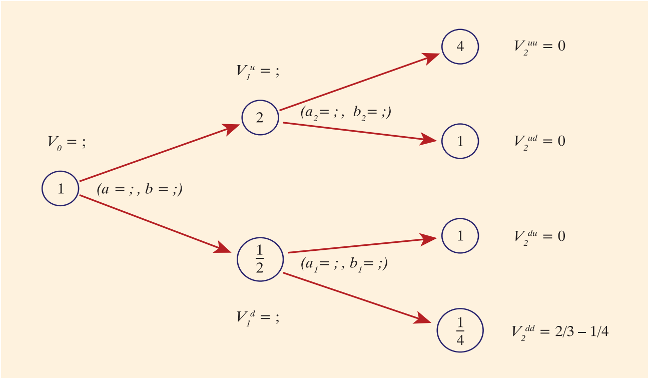
$$
\begin{aligned}
a &= \frac{4/3 - 0}{(2 - 1/2) \cdot 1} = 8/9 \\
b &= \frac{2 \cdot 0 - 1/2 \cdot 4/3}{(2 - 1/2) \cdot 1.03} = -0.43
\end{aligned}
$$

Δηλαδή θα αγοράσει 0.88 μετοχές και θα δανειστεί 0.43 από την τράπεζα, πάντοτε ανά μετοχή.
Αν η επιλογή των $u, d$ προκύψει σωστή τότε είναι σίγουρο ότι ο Α θα είναι σε θέση να καλύψει τον Β σε κάθε περίπτωση. Θυμηθείτε όμως ότι τα $u, d$ υπολογίσθηκαν με βάση την παρελθοντική συμπεριφορά της μετοχής και επομένως δεν είναι καθόλου σίγουρο αν ακολουθήσει την ίδια και στο μέλλον.
Προφανώς παρόμοιοι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν και σε ένα δέντρο δυο περιόδων και το πρόβλημα ανάγεται στο να υπολογίσουμε τις τιμές $A_2^4$, $A_2^3$, $A_2^2$, $A_2^1$ που πρέπει να έχει το χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή 2 και επομένως ανάγεται στην κατασκευή χαρτοφυλακίου προκαθορισμένης αξίας. Ας το δούμε σχηματικά,




Σχήμα 8.11

Το συμβόλαιο που περιγράψαμε λέγεται Ευρωπαϊκό συμβόλαιο αγοράς. Με τον όρο Ευρωπαϊκό εννοούμε ότι ο αγοραστής (ο Β) του συμβολαίου μπορεί να εξασκήσει το συμβόλαιο μόνο τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, στη λήξη του. Ο όρος Ευρωπαϊκό δεν είναι γεωγραφικός όρος, τέτοια συμβόλαια χρησιμοποιούνται παντού. Επίσης το λέμε συμβόλαιο αγοράς διότι ο αγοραστής έχει το δικαίωμα να αγοράσει μετοχές από τον Α. Υπάρχει και το λεγόμενο Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με το οποίο ο Β έχει δικαίωμα να πουλήσει στον Α μετοχές σε προκαθορισμένη τιμή. Σε ένα τέτοιο συμβόλαιο ο Β θα είναι κερδισμένος αν η μετοχή πέσει κάτω από την τιμή Κ (πουλώντας τη στον Α ακριβότερα). Για τον Α το μόνο που αλλάζει είναι ο υπολογισμός των $A_2^i$ ούτως ώστε να αποφασίσει για την τιμή πώλησης $V_0$ του συμβολαίου. Σχηματικά, για ένα Ευρωπαϊκό συμβόλαιο πώλησης έχουμε το παρακάτω




Σχήμα 8.12

έχοντας υποθέσει τα συνηθισμένα νούμερα.

## 8.3.2 Αμερικανικά Συμβόλαια

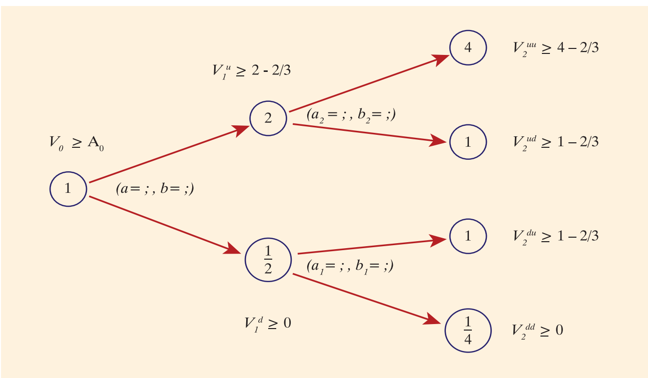
Τα συμβόλαια αυτά έχουν τη διαφορά με τα αντίστοιχα Ευρωπαϊκά ότι ο αγοραστής του συμβολαίου έχει το δικαίωμα να εξασκήσει το συμβόλαιο ανά πάσα στιγμή μέχρι τη λήξη του. Δηλαδή, σε ένα δέντρο τιμών 2 περιόδων έχει το δικαίωμα να εξασκήσει το συμβόλαιο τις χρονικές στιγμές 0, 1 ή 2, όποτε τον συμφέρει. Σε ένα δικαίωμα αγοράς το ποσό που θα εισπράξει θα είναι $S_t - K$ αν αυτό είναι θετικό αλλιώς δεν θα το εξασκήσει. Συνοπτικά, γράφουμε ότι το ποσό που θα εισπράξει (και άρα το ποσό που πρέπει να έχει διαθέσιμο ο πωλητής του συμβολαίου) είναι

$$\max\{S_t - K, 0\}$$

για το συμβόλαιο αγοράς, ενώ για το συμβόλαιο πώλησης θα είναι

$$\max\{K - S_t, 0\}$$

όπου $S_t$ είναι η τιμή της μετοχής τη στιγμή που θα επιλέξει να το εξασκήσει. Το πρόβλημα για την τιμή που θα δώσει ο Α ανάγεται πάλι στην **κατασκευή χαρτοφυλακίου προκαθορισμένης αξίας με ενδιάμεσες απαιτήσεις**. Ας το δούμε σχηματικά, για ένα Αμερικανικό συμβόλαιο αγοράς

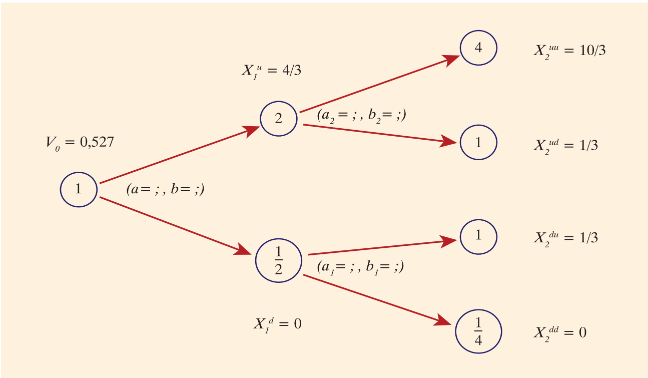



Σχήμα 8.13

Γενικά, ο B σε ένα Αμερικανικό συμβόλαιο θα εξασκήσει όποτε τον συμφέρει. Δεν γνωρίζει το μέλλον όμως για να επιλέξει εκ των προτέρων τη χρονική στιγμή εξάσκησης, επομένως ένα λογικό κριτήριο για να εξασκήσει είναι να εξετάσει αν ισχύει η ανισότητα

$$X_n > V_0(1+r)^n$$

όπου με $X_n$ συμβολίζουμε το κέρδος του B αν εξασκήσει στο χρόνο $n$. Αν αυτό το κέρδος υπερβαίνει το ποσό $V_0(1+r)^n$ (το οποίο είναι το κόστος του συμβολαίου τοκιζόμενο για $n$ χρονικές περιόδους) τότε τον συμφέρει να το εξασκήσει τη χρονική στιγμή εκείνη διότι θα έχει κερδίσει περισσότερα από ότι αν τοποθετούσε τα $V_0$ στην τράπεζα.
Στο παραπάνω παράδειγμα, κάνοντας τους υπολογισμούς έχουμε σχηματικά




Σχήμα 8.14

Κάνοντας τους υπολογισμούς και αν η μετοχή ακολουθήσει συνεχή ανοδική πορεία τότε ο B θα έχει μεγαλύτερο κέρδος από κατάθεση σε τράπεζα αν εξασκήσει τη χρονική στιγμή 2. Σε κάθε άλλη περίπτωση κίνησης της μετοχής είτε θα έχει χάσει το ποσό των 0.527 που κατέβαλε για την αγορά του συμβολαίου είτε η απολαβή του θα είναι μικρότερη από κατάθεση σε τράπεζα.

### 8.3.3 Κατάλληλος χρόνος εξάσκησης

Έστω ένα Αμερικανικό συμβόλαιο αγοράς με $K = 5/2$, $N = 3$, $u = 2$, $d = 1/2$ και $r = 1/2$. Ας υποθέσουμε ότι η μετοχή κινείται ανοδικά στις δυο πρώτες περιόδους. Ο κάτοχος του δικαιώματος, στο χρόνο $n = 2$, πρέπει να αποφασίσει αν θα εξασκήσει το δικαίωμα ή όχι. Κάνοντας τους υπολογισμούς φαίνεται ότι πρέπει να εξασκήσει στο χρόνο $n = 2$ διότι το κέρδος του τότε θα είναι

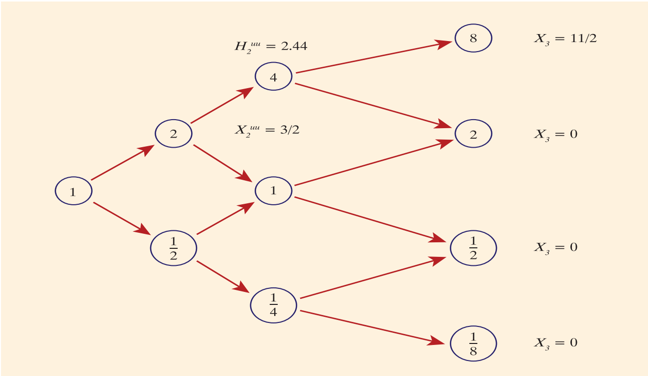
$$(S_2^{uu} - K) - V_0(1+r)^2 = 3/2 - 0.48(1+1/2)^2 > 0$$

Ας σημειώσουμε ότι αν για κάποιο $n$ ισχύει ότι $V_n^A = X_n$ και αν υποθέσουμε ότι ο κάτοχος δεν εξασκήσει σε αυτόν το χρόνο τότε ο πωλητής έχει περισσότερα χρήματα στο χαρτοφυλάκιό του από ότι χρειάζεται για να προχωρήσει στο επόμενο βήμα.

Συμβολίζουμε με $H_n$ την παρακάτω ακολουθία,

$$H_n = \begin{cases} X_N, & \text{για } n = N, \\ \max\{X_n, \frac{1}{1+r}\left(qH^u_{n+1} + (1-q)H^d_{n+1}\right)\}, & \text{για } n = N-1, \cdots, 0 \end{cases}$$

Λέμε ότι η $H_n$ είναι η δίκαιη τιμή (ή η αξία) του Αμερικανικού συμβολαίου κατά το χρόνο $n$. Η τιμή $H_n$ είναι λοιπόν το ελάχιστο ποσό που χρειάζεται ο πωλητής τη χρονική στιγμή $n$ για να είναι καλυμμένος για τις επόμενες χρονικές στιγμές.
Διαπιστώνουμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή $n = 2$ είναι $V_{2,2} = 2.44 > X_{2,2}$ και επομένως ο πωλητής είναι επίσης κερδισμένος.




Σχήμα 8.15

Στην περίπτωση που ο κάτοχος δεν εξασκήσει το συμβόλαιο τη χρονική στιγμή $n = 2$ τότε ο πωλητής έχει στην κατοχή του περισσότερα χρήματα από ότι χρειάζεται για να προχωρήσει στην επόμενη χρονική στιγμή. Έτσι λοιπόν, μπορεί να επενδύσει μόνο αυτά που χρειάζεται και να κρατήσει τα υπόλοιπα (πόσα χρειάζεται και πόσα θα κρατήσει;) ή μπορεί να τα επενδύσει όλα.
Αν το συμβόλαιο είναι υπό διαπραγμάτευση στο χρηματιστήριο τότε ενδέχεται ο αγοραστής να μπορεί να πουλήσει το συμβόλαιο σε μεγαλύτερη τιμή από την απολαβή αν το εξασκήσει. Η αξία του συμβολαίου τη στιγμή $n = 2$ είναι πράγματι μεγαλύτερη από την απολαβή και αποδεικνύεται παρακάτω ότι συμβαίνει πάντα στα Αμερικανικά δικαιώματα αγοράς για κάθε $n$. Στην εξωχρηματιστηριακή αγορά, τα συμβόλαια που πωλούνται είναι συνήθως πιο εξειδικευμένα (για τις ανάγκες του αγοραστή) και είναι δυσκολότερο να πουλήσεις ένα τέτοιο συμβόλαιο πριν τη λήξη του. Αν ο αγοραστής έχει τη δυνατότητα να πουλήσει το υποκείμενο αγαθό (χωρίς να το έχει) τότε προκύπτει ότι είναι προτιμότερο να κάνει αυτή την κίνηση τη χρονική στιγμή $n = 2$ από το να εξασκήσει το δικαίωμα. Σε κάθε περίπτωση, τη χρονική στιγμή $n = 2$ πρέπει να αποφασίσει το πώς θα εκμεταλλευτεί το συμβόλαιο που έχει στην κατοχή του.
Στην πράξη κάποιος θα μπορούσε να αγοράσει ένα συμβόλαιο μόνο και μόνο για την περίπτωση όπου η τιμή του υποκείμενου αγαθού ανέβει ή κατέβει περισσότερο από τις ιστορικές εκτιμήσεις $u, d$. Έτσι θα είναι καλυμμένος σε μια περίπτωση ακραίας συμπεριφοράς της τιμής του υποκείμενου αγαθού αλλά χαμένος στην περίπτωση όπου η τιμή του υποκείμενου αγαθού κινηθεί στα πλαίσια του παρελθόντος.

**Γενικά Σχόλια**

Διαπιστώνουμε ότι η τιμή $V_0$ εξαρτάται από τις τιμές $u, d$ που θα δώσει ο κάθε πωλητής. Όπως περιγράψαμε μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει ιστορικά δεδομένα ενός μήνα, δυο μηνών, 1 χρόνου κτλ. Σε κάθε μια περίπτωση θα υπολογίσει διαφορετικά $u, d$ και άρα θα δώσει διαφορετική τιμή $V_0$. Οι τιμές $u, d$ δεν είναι παρά μια υπόθεση για το μέλλον την οποία κανείς μπορεί να την κάνει και με γεγονότα που συνέβησαν πρόσφατα και ακόμη δεν έχουν επιδράσει στην κίνηση της μετοχής, π.χ. η εταιρεία προσέλαβε νέο προσωπικό, άνοιξε νέα υποκαταστήματα στο εξωτερικό ή αντιθέτως ένα προϊόν της παρουσίασε σοβαρά ελαττώματα και επομένως η μεταβλητότητα πρόκειται να αλλάξει ραγδαία. Τα συμβόλαια τα οποία είναι υπό διαπραγμάτευση στο οργανωμένο χρηματιστήριο πωλούνται σύμφωνα με την προσφορά και τη ζήτηση. Οι τιμές τους αντικατοπτρίζουν τις προσδοκίες των επενδυτών και στην ουσία αντικατοπτρίζεται η προσδοκία των επενδυτών όσον αφορά τη μεταβλητότητα της υποκείμενης μετοχής αλλά και την άνοδο ή κάθοδο της μετοχής στο μέλλον.
Θεωρήσαμε ως τώρα ότι ο ανατοκισμός είναι περιοδικός με επιτόκιο περιόδου $r$. Για διάφορους λόγους είναι προτιμότερο να υποθέτουμε συνεχή ανατοκισμό. Σε αυτή την περίπτωση αν $r$ είναι το ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού και $T$ (σε χρόνια) ο τελικός χρόνος για τον οποίο ενδιαφερόμαστε μπορούμε να χωρίσουμε το $[0, T]$ σε $n$ ίσα υποδιαστήματα χρονικής διάρκειας $\delta$. Τότε μια νομισματική μονάδα που τοκίζεται στον χρόνο μηδέν γίνεται $e^{r\delta}$ στον χρόνο ένα, $e^{kr\delta}$ στον χρόνο $k$ κ.τ.λ. Όλες οι σχέσεις που έχουμε αποδείξει (ή που θα αποδείξουμε παρακάτω) υποθέτοντας περιοδικό ανατοκισμό ισχύουν και στον συνεχή ανατοκισμό αντικαθιστώντας το $1+r$ με το $e^{r\delta}$.

### 8.3.4 Ελάχιστη τιμή συμβολαίου, Arbitrage και πληρότητα

Το μοντέλο που περιγράψαμε (το ότι η μετοχή μπορεί να πάρει δυο τιμές στην επόμενη χρονική περίοδο) ονομάζεται **διωνυμικό**.
Arbitrage (ή αλλιώς ευκαιρία σίγουρου κέρδους) είναι μια συγκεκριμένη ακολουθία χρηματιστηριακών κινήσεων (ή αλλιώς στρατηγική επένδυσης) που καταλήγει σε κέρδος με μηδενικό ρίσκο και μηδενικό αρχικό κεφάλαιο. Στην αγορά σπάνια παρατηρείται τέτοια ευκαιρία διότι όταν εμφανίζεται οι επενδυτές την εκμεταλλεύονται με συνέπεια να πάψει να υπάρχει.
Με τη χρήση της απουσίας ευκαιρίας σίγουρου κέρδους είμαστε σε θέση να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τις πραγματικές τιμές των μετοχών και των συμβολαίων, ιδιαίτερα για τη σχέση μεταξύ τους αλλά δυστυχώς δεν μπορούμε να έχουμε και την τιμή αυτή καθ' αυτή της μετοχής ή του συμβολαίου. Για το λόγο αυτόν αναπτύσσουμε μοντέλα (όπως το διωνυμικό) με τα οποία (και κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις) προσπαθούμε να καταγράψουμε τις τιμές των μετοχών και συμβολαίων σε κάθε πιθανή περίπτωση στο μέλλον.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 132** *Στο διωνυμικό μοντέλο δεν υπάρχουν ευκαιρίες σίγουρου κέρδους ανν* $0 < d < 1 + r < u$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.
• Έστω ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες σίγουρου κέρδους. Ας υποθέσουμε ότι το $(1 + r) \notin (d, u)$ και ας υποθέσουμε αρχικά ότι $1 + r \leq d$. Τότε μπορώ να δανειστώ χρήματα από την τράπεζα για να αγοράσω με αυτά μετοχές. Αν η τιμή της μετοχής στο χρόνο μηδέν είναι $S_0$ τότε το χαρτοφυλάκιο τη στιγμή 0 θα έχει αξία

$$V_0 = aS_0 + b = 0$$

Αυτό συμβαίνει διότι όσα χρήματα δανείστηκα τα εξαργύρωσα σε μετοχές. Οπότε συνολικά έχω μηδενικό κεφάλαιο στην κατοχή μου. Στο χρόνο 1 το χαρτοφυλάκιο θα έχει τις εξής αξίες

$$\begin{aligned} V_1^u &= auS_0 + b(1 + r) = aS_0(u - (1 + r)) > 0, \\ V_1^d &= adS_0 + b(1 + r) = aS_0(d - (1 + r)) \geq 0 \end{aligned}$$

Δηλαδή στην περίπτωση που το $1 + r \leq d$ τότε έχω τη δυνατότητα κέρδους από το μηδέν. Κατασκευάζω χαρτοφυλάκιο με δανεικά χρήματα το οποίο στη χειρότερη περίπτωση θα έχει μηδενική αξία (δεν θα έχω κέρδος αλλά ούτε ζημιά) ενώ υπάρχει η περίπτωση να έχω κέρδος χωρίς να έχω ρισκάρει. Δηλαδή έχουμε άτοπο με την αρχική μας ότι $1 + r \leq d$. Παρόμοια συλλογιστική (πουλώντας δανεισμένες μετοχές και καταθέτοντας το ποσό στην τράπεζα) μπορεί να κάνει κάποιος για την περίπτωση που $1 + r \geq u$. Αναγκαστικά λοιπόν $0 < d < 1 + r < u$.
• Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι $d < 1 + r < u$ οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι δεν μπορεί να δημιουργηθεί ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Έστω ότι μπορώ να κατασκευάσω χαρτοφυλάκιο μηδενικής αξίας στον χρόνο 0, δηλαδή

$$V_0 = aS_0 + b = 0$$

και έστω ότι $V_1^u > 0$ και $V_1^d \geq 0$. Τότε, αφού $a > 0$ (το οποίο προκύπτει από τις ανισότητες $V_1^u > 0$ και $u > 1 + r$) προκύπτει ότι $d \geq 1 + r$ το οποίο είναι άτοπο. Παρομοίως, αν υποθέσουμε ότι $V_1^u \geq 0$ και $V_1^d > 0$ □

Ας ξαναγυρίσουμε στο δέντρο τιμών μιας περιόδου. Αν $A, B$ δοσμένοι αριθμοί έχουμε κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο με αρχική αξία $V_0$ και συγκεκριμένη στρατηγική επένδυσης $(a, b)$, δηλαδή αγορά μετοχών και κατάθεση σε τράπεζα, έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο να έχει στο χρόνο 1 τις τιμές $A, B$. Προκύπτει το αντίστροφο ερώτημα. Με τα χρήματα $V_0$ μπορεί κάποιος να κατασκευάσει στρατηγική επένδυσης $(a^{'}, b^{'})$ που να τον οδηγήσει σε τιμές μεγαλύτερες των $A, B$, π.χ. $A + \varepsilon_1$, $B + \varepsilon_2$ με $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$; Δηλαδή προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} a^{'}uS_0 + b^{'}(1 + r) &= A + \varepsilon_1, \\ a^{'}ds_0 + b^{'}(1 + r) &= B + \varepsilon_2 \end{aligned}$$

όπου $a^{'}, b^{'}$ είναι τέτοια ώστε $V_0 = a^{'}S_0 + b^{'}$. Η λύση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned} a^{'} &= \frac{A - B + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(u-d)S_0} \\ b^{'} &= \frac{(B+\varepsilon_2)u - (A+\varepsilon_1)d}{(u-d)(1+r)} \end{aligned}$$

Σχηματίζουμε την ποσότητα $a^{'}S_0 + b^{'}$ και έχουμε

$$a^{'}S_0 + b^{'} = aS_0 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{u-d} + b + \frac{\varepsilon_2 u - \varepsilon_1 d}{(u-d)(1+r)} = V_0 + \frac{\varepsilon_1(1+r-d) + \varepsilon_2(u-(1+r))}{(u-d)(1+r)}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα $a, b$ είναι τέτοια ώστε $aS_0 + b = V_0$. Η ποσότητα $a^{'}S_0 + b^{'}$ πρέπει επίσης να είναι ίση με $V_0$ και για να ισχύει αυτό αρκεί $\varepsilon_1(1+r-d) + \varepsilon_2(u-(1+r)) = 0$. Διαπιστώνουμε εύκολα (κάτω από την υπόθεση $d < 1+r < u$) ότι δεν υπάρχει τέτοιο χαρτοφυλάκιο που ξεκινά με $V_0$ και οδηγεί σε τιμές μεγαλύτερες των $A, B$.

## 8.4 Διαχείριση Χαρτοφυλακίου

Υποθέστε ότι μας δίνεται το ποσό $V_0$ με το οποίο έχουμε τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκιο, να αγοράσουμε/πουλήσουμε, δηλαδή, αριθμό μετοχών και να καταθέσουμε/δανειστούμε χρήματα στην τράπεζα. Στόχος μας είναι, θεωρώντας το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου, να κάνουμε τις καλύτερες δυνατές κινήσεις έτσι ώστε στο χρόνο $n = 1$ να έχουμε την καλύτερη δυνατή απόδοση.
Έστω $p \in (0,1)$ και $q = 1 - p$ δοσμένα. Ας συμβολίσουμε με $V_1^u$ την αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή $n = 1$ στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής ανέβει και αντίστοιχα $V_1^d$ την αξία του χαρτοφυλακίου στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής κατέβει. Ψάχνουμε το κατάλληλο ζευγάρι $(a, b)$ τ.ω.

$$\begin{aligned} V_1^d &\geq 0, \\ V_1^u &\geq 0, \\ V_0 &= aS_0 + b \end{aligned}$$

και ταυτόχρονα να μεγιστοποιείται η ποσότητα

$$pV_1^u + qV_1^d$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ότι

$$pV_1^u + qV_1^d = aS_0\big(pu + qd - (1+r)\big) + V_0(1+r)$$

Από τις τρεις πρώτες σχέσεις προκύπτει ότι

$$-\frac{V_0(1+r)}{S_0(u-(1+r))} \leq a \leq \frac{V_0(1+r)}{S_0(1+r-d)}$$

Αν $pu + qd \geq 1 + r$ τότε η ζητούμενη ποσότητα μεγιστοποιείται όταν επιλέξουμε

$$a = \frac{V_0(1+r)}{S_0(1+r-d)}, \quad b = V_0 - aS_0$$

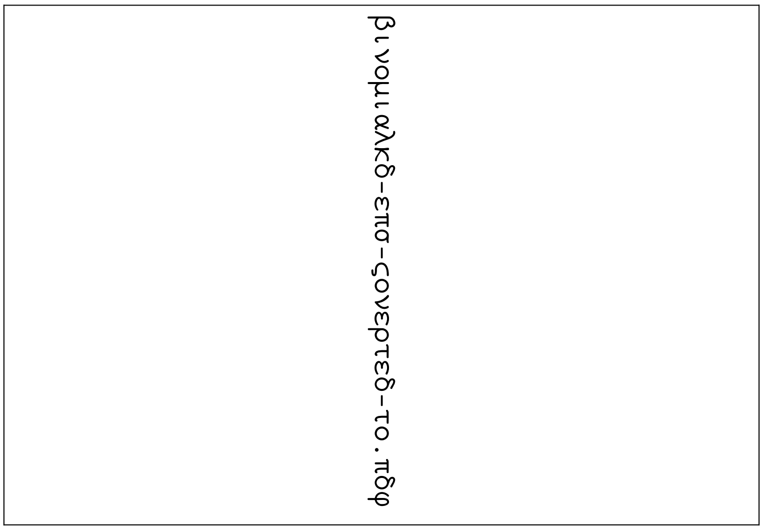
ενώ αν $pu + qd < 1 + r$ τότε η ζητούμενη ποσότητα μεγιστοποιείται όταν

$$a = -\frac{V_0(1+r)}{S_0(u-(1+r))}, \quad b = V_0 - aS_0$$

## 8.5 Το διωνυμικό μοντέλο και η εξίσωση των Black - Scholes

Χρησιμοποιώντας ένα διωνυμικό δέντρο μιας περιόδου είναι σαν να υποθέτουμε ότι στον τελικό χρόνο $T$ η μετοχή θα έχει δυο πιθανές τιμές. Αντίστοιχα σε ένα δέντρο 2 περιόδων υποθέτουμε ότι θα έχει 4 πιθανές τιμές και ούτω κάθε εξής. Στην πραγματικότητα όμως η τιμή της μετοχής στον τελικό χρόνο $T$ έχει άπειρες πιθανές τιμές. Επομένως είναι λογικό να υποψιαζόμαστε ότι αυξάνοντας τις περιόδους σε ένα διωνυμικό δέντρο και άρα πολλαπλασιάζοντας τις πιθανές τιμές της μετοχής στον χρόνο $T$ θα έχουμε ολοένα και καλύτερα αποτελέσματα, πιο κοντά στη πραγματικότητα.
Θα υποθέσουμε ότι $ud = 1$ και επομένως αρκεί να συσχετιστούν με μια μόνο παράμετρο, την $\sigma$, την οποία θα ονομάζουμε μεταβλητότητα της μετοχής. Υποθέτουμε ότι το ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι $r$. Χωρίζουμε το χρονικό διάστημα $[0, T]$ ($T$ σε χρόνια) σε $n$ ίσα υπο-διαστήματα μήκους $\delta$. Όπως είδαμε ένα ποσό $K$ με συνεχή ανατοκισμό γίνεται $Ke^{r\delta}$ σε κάθε υποδιάστημα όταν το ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι $r$ και το $\delta$ είναι σε έτη. Σημειώστε ότι όλα τα αποτελέσματα που έχουν αναφερθεί (ή που θα αναφερθούν στην συνέχεια) ισχύουν αντικαθιστώντας το $1 + r$ με $e^{r\delta}$.
Προκειμένου να αποδείξουμε ότι η δίκαιη τιμή πώλησης ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος μέσω του διωνυμικού μοντέλου συγκλίνει, υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο $\sigma > 0$ τέτοιο ώστε $u = e^{\sigma\sqrt{\delta}}$ και $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta}}$. Σημειώστε ότι αυτό δεν ισχύει γενικά και μπορεί κάποιος να το εξακριβώσει λαμβάνοντας πραγματικά δεδομένα. Γενικά, στα εφαρμοσμένα μαθηματικά, όπως στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά, δυο είναι τα βασικά βήματα που κάνουμε. Το πρώτο είναι να καταγράψουμε κάποιες υποθέσεις που αφορούν το φαινόμενο το οποίο μελετάμε και το δεύτερο είναι, με βάση τις υποθέσεις αυτές, να καταγράψουμε και να αποδείξουμε διάφορες ιδιότητες του. Στο πρώτο βήμα θα πρέπει να δικαιολογήσουμε (πειραματικά ή χρησιμοποιώντας πραγματικά δεδομένα) ότι οι υποθέσεις που έχουμε κάνει είναι λογικές και ότι το φαινόμενο το οποίο μελετούμε σχεδόν τις ικανοποιεί. Όμως, για να είναι πλήρης η μελέτη μας, θα πρέπει να εξετάσουμε πως επιδρούν οι μικρές διαφορές στις υποθέσεις στα τελικά συμπεράσματα. Διότι αν η επίδραση είναι μεγάλη τότε δεν θα έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα. Στην προκειμένη περίπτωση, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο $\sigma > 0$ τ.ω. $u = e^{\sigma\sqrt{\delta}}$ και $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta}}$, θα πρέπει να το δικαιολογήσουμε με βάση πραγματικά

δεδομένα της αγοράς. Θα δούμε ότι για μικρό $\delta$ τα πραγματικά δεδομένα σχεδόν ικανοποιούν την υπόθεση αυτή. Αυτό το «σχεδόν» όμως μπορεί να καταστρέψει εντελώς την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων μας αν δεν μελετήσουμε την επίδραση του πάνω σε αυτά. Αν δηλαδή η πραγματικότητα διαφέρει λίγο από τις υποθέσεις που κάνουμε και ταυτόχρονα τα μαθηματικά συμπεράσματα που έχουμε επίσης διαφέρουν λίγο από τη πραγματικότητα τότε είμαστε σε καλό δρόμο. Για ποιο λόγο όμως κάνουμε μια τέτοια υπόθεση; Ο λόγος είναι ότι μας διευκολύνει στους μαθηματικούς μας υπολογισμούς για αυτό το λόγο πολλές φορές είμαστε υποχρεωμένοι να υποθέσουμε κάτι (το οποίο δεν θα θέλαμε) μόνο και μόνο επειδή τα μαθηματικά μας θα γίνουν απλούστερα.



Σχήμα 8.16: Διωνυμικό δέντρο μιας περιόδου. Αν οι αξίες την χρονική στιγμή $t = k\delta + \delta$ πρέπει να ίσες με $V(t+\delta, uS)$ και $V(t+\delta, dS)$ τότε η ελάχιστη τιμή του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή $t$ είναι ίση με $V(t,S) = e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta,uS) + (1-q)V(t+\delta,dS)\Big)$ όπου $q = \frac{e^{r\delta}-d}{u-d}$ όταν $d \le e^{r\delta} \le u$. Σημειώστε ότι $V(t,S) = aS + b$ όπου $a$ είναι το πλήθος των μετοχών την χρονική στιγμή $t$ και $b$ το ποσό την χρονική στιγμή $t$ σε επένδυση χωρίς ρίσκο με επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού $r$. Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι η $V(t,S;\delta)$ συγκλίνει καθώς $\delta \to 0$ σε μια συνάρτηση $V(t,S)$ η οποία ικανοποιεί μια εξίσωση με μερικές παραγώγους παραβολικού τύπου.

Σημειώστε ότι για οποιεσδήποτε τιμές των $r, \sigma$ υπάρχει κάποιο $n$ τέτοιο ώστε από κει και πάνω να μην υπάρχει ευκαιρία σίγουρου κέρδους (δες Θεώρημα 132).
Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Taylor το οποίο είναι το εξής.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 133** *Αν η συνάρτηση $f$ έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι τάξεως $n$ στο διάστημα $[a,b]$ και η $f^{(n+1)}(x)$ υπάρχει στο ανοικτό $(a,b)$ τότε για κάθε $x_0, x \in [a,b]$ υπάρχει $\xi \in (a,b)$ τ.ω.*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ &\quad + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \end{aligned}$$

Αν αναπτύξουμε γύρω από το $x_0$ και υποθέσουμε ότι η $f^{(n)}(x_0)$ υπάρχει για κάθε $n$

τότε για $x = x_0 + h$ έχουμε ότι

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \cdots$$

αν και μόνο αν

$$R_n(h) = f^{(n+1)}(\xi)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Taylor στη συνάρτηση $f(x) = e^x$ αναπτύσσοντας γύρω από το μηδέν (δηλαδή $x_0 = 0$) και διαλέγοντας $h = \sigma\sqrt{\delta}$.
Γράφουμε τότε

$$\begin{aligned}
u &= e^{\sigma\sqrt{\delta}} = 1 + \sigma\sqrt{\delta} + \frac{\sigma^2}{2}\delta + o(\delta), \\
d &= e^{-\sigma\sqrt{\delta}} = 1 - \sigma\sqrt{\delta} + \frac{\sigma^2}{2}\delta + o(\delta), \\
e^{r\delta} &= 1 + r\delta + o(\delta), \\
q &= \frac{e^{r\delta} - d}{u - d} = 1/2 + \frac{1}{2\sigma}\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\sqrt{\delta} + o\left(\sqrt{\delta}\right)
\end{aligned}$$

όπου με $o(\delta)$ εννοούμε μια ποσότητα η οποία αν διαιρεθεί με το $\delta$ συγκλίνει στο μηδέν καθώς $\delta \to 0$.
Συμβολίζουμε με $V(t,S)$ την αξία ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου την χρονική στιγμή $t$ και όταν η τιμή της μετοχής είναι $S$. Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο έχουμε

$$V(t,S) = e^{-r\delta}\Big(qV(t+\delta, uS) + (1-q)V(t+\delta, dS)\Big)$$

Συμβολίζοντας με

$$V = V(t,S), \quad V^u = V(t+\delta, uS), \quad V^d = V(t+\delta, dS)$$

και

$$J_\delta V(t,S) = -e^{r\delta}V + qV^u + (1-q)V^d$$

έχουμε από το διωνυμικό μοντέλο ότι

$$J_\delta V(t,S) = 0$$

Στο επόμενο θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Taylor για συναρτήσεις δυο μεταβλητών το οποίο και διατυπώνουμε παρακάτω.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 134** *Έστω η συνάρτηση δυο μεταβλητών $f(x,y)$ η οποία υποθέτουμε ότι έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι $n+1$ τάξης. Τότε ισχύει το εξής,*

$$\begin{aligned}
f(a+h, b+k) &= f(a,b) + (hD_x + kD_y)f(a,b) + \cdots + \frac{1}{n!}(hD_x + kD_y)^n f(a,b) \\
&\quad + \frac{1}{(n+1)!}(hD_x + kD_y)^{n+1} f(a+\theta h, b+\theta k)
\end{aligned}$$

*όπου $\theta \in (0,1)$.*

Σημειώστε ότι

$$(hD_x + kD_y)f(a,b) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = hf_x(a,b) + kf_y(a,b)$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 135** *Αν υποθέσουμε ότι η $V(t,S)$ είναι αρκετά ομαλή τότε*

$$0 = L_{BS} = \lim_{\delta \to 0^+} \frac{J_\delta V(t,S)}{\delta} = 0$$

*όπου*

$$L_{BS}V(t,S) = V_t(t,S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS}(t,S) + rSV_S(t,S) - rV(t,S)$$

*και ονομάζεται τελεστής Black-Scholes. Επιπλέον, το πλήθος των μετοχών $a(t,S)$ που πρέπει να έχει το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο κατά την χρονική στιγμή $t$ και όταν η τιμή της μετοχής είναι $S$ είναι ίσο με $V_S(t,S)$.*

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Διαλέγουμε $h = \delta$ και $k = (u-1)S$, αναπτύσσσουμε την $V^u$ κατά Taylor γύρω από το $(t,S)$ και έπειτα αντικαθιστούμε τα $u, d$ με τα αντίστοιχα αναπτύγματα τους. Παρόμοια για την $V^d$ όπου εκεί διαλέγουμε $k = (d-1)S$. Έτσι έχουμε

$$V^u = V(t+\delta, uS) = V(t+\delta, S+(u-1)S) = V + \delta V_t + (u-1)SV_S + \frac{1}{2}(u-1)^2 S^2 V_{SS} +$$
$$V^d = V(t+\delta, dS) = V(t+\delta, S+(d-1)S) = V + \delta V_t + (d-1)SV_S + \frac{1}{2}(d-1)^2 S^2 V_{SS} +$$

Παρατηρήστε ότι ο όρος

$$\frac{1}{2}(\delta D_t + (u-1)SD_S)^2 V = \frac{1}{2}(u-1)^2 S^2 V_{SS} + o(\delta)$$

Οι υψηλότερης τάξης όροι $\frac{1}{n!}(\delta D_t + (u-1)SD_S)^n V$ για $n \geq 3$ είναι κλάσης $o(\delta)$. Παρόμοια και για την $V^d$.
Όμως

$$\begin{aligned} (u-1)S &= \sigma S\sqrt{\delta} + \sigma^2 S\delta + o(\delta) \\ (d-1)S &= -\sigma S\sqrt{\delta} + \sigma^2 S\delta + o(\delta) \end{aligned}$$

Αρα

$$\begin{aligned} V^u - V &= \sigma SV_S\sqrt{\delta} + LV\delta + o(\delta), \\ V^d - V &= -\sigma SV_S\sqrt{\delta} + LV\delta + o(\delta) \end{aligned}$$

όπου

$$LV = V_t + \frac{\sigma^2}{2}SV_S + \frac{\sigma^2 S^2}{2}V_{SS}$$

Οπότε

$$\begin{aligned} 0 = J_\delta V(t,S) &= -e^{r\delta}V + qV^u + (1-q)V^d \\ &= -(1+r\delta+o(\delta))V + qV^u + (1-q)V^d \\ &= -(q+(1-q))V - r\delta V - o(\delta)V + qV^u + (1-q)V^d \\ &= q(V^u - V) + (1-q)(V^d - V) - r\delta V - o(\delta)V \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα $V^u - V$, $V^d - V$ και $q$ με τα αναπτύγματα τους θα έχουμε τελικά

$$0 = J_\delta V(t,S) = \delta L_{BS} V + o(\delta)$$

Διαιρώντας με $\delta$ και λαμβάνοντας το όριο καθώς $\delta \to 0$ προκύπτει ότι η συνάρτηση $V(t,S)$ ικανοποιεί την εξίσωση των Black-Scholes. Δηλαδή η αξία του συμβολαίου τη χρονική στιγμή $t$ και όταν η τιμή της μετοχής είναι ίση με $S$ δίνεται από την παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση

$$V_t(t,S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS}(t,S) + rSV_S(t,S) - rV(t,S) = 0 \tag{8.1}$$

Το πλήθος των μετοχών στο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο είναι ίσο με

$$a(t,S;\delta) = \frac{V(t+\delta, uS) - V(t+\delta, dS)}{(u-d)S}$$

Χρησιμοποιώντας όπως πριν τα αναπτύγματα Taylor και λαμβάνοντας το όριο καθώς $\delta \to 0$ προκύπτει ότι $a(t,S;\delta) \to V_S(t,S)$. □

Αν συγκεκριμένα έχουμε ένα συμβόλαιο αγοράς τότε πρέπει επιπλέον να ικανοποιείται και μια τελική συνθήκη η οποία είναι

$$V(T,S) = (S-K)^+$$

όπου $K$ είναι η τιμή εξάσκησης.

## Μετασχηματισμός Fourier

**ΟΡΙΣΜΟΣ 136** *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια δοσμένη συνάρτηση. Ορίζουμε την $F(s)$ με $s \in \mathbb{R}$ ως εξής*

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt$$

*αν το ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο.*
*Η συνάρτηση $F(s)$ ονομάζεται ο* ***μετασχηματισμός Fourier*** *της $f$. Συχνά, συμβολίζεται και με $\mathcal{F}(f)(s)$.*

Σε αυτό τον ορισμό χρησιμοποιούμε την σχέση (φόρμουλα του Euler)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

**Ορισμος 137** *Μια συνάρτηση* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *ονομάζεται* **απολύτως ολοκληρώσιμη** *στο* $\mathbb{R}$ *όταν*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

*Το σύνολο των απόλυτα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο* $\mathbb{R}$ *συμβολίζεται με* $L^1(\mathbb{R})$.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 138** (Ύπαρξη Μετασχηματισμού Fourier) *Στον προηγούμενο ορισμό το απόλυτο αναφέρεται σε μιγαδικούς αριθμούς, εν γένει. Δηλαδή αν* $z = a+ib$ *ισχύει ότι* $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. *Έτσι, εύκολα βλέπουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας απόλυτα ολοκληρώσιμης συνάρτησης* $f(t)$ *υπάρχει. Πράγματι,*

$$|F(s)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)e^{-ist}|dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)||e^{-ist}|dt$$

*Επειδή* $|e^{-ist}| = \sqrt{\cos^2(st)+\sin^2(st)} = 1$ *τότε προκύπτει ότι*

$$|F(s)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt < \infty$$

## Εφαρμογή του Μετασχηματισμού στις Διαφορικές Εξισώσεις

**ΘΕΩΡΗΜΑ 139** *Έστω $f$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και $F$ ο μετασχηματισμός Fourier. Αν $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$ τότε ο μετασχηματισμός της παραγώγου της $f$ δίνεται από $\mathcal{F}(f^{'})(s) = isF(s)$.*

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 140** *Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό σε μια συνάρτηση $m$-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη προκύπτει ότι*

$$\mathcal{F}\left(f^{(m)}(t)\right)(s) = (is)^m F(s)$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 141** *Έστω ότι η $f$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$. Θα μελετήσουμε την συνήθη διαφορική εξίσωση*

$$y^{''}(x) - y(x) = f(x) \quad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

*Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στα δυο μέλη της εξίσωσης και έχουμε*

$$\left((is)^2 - 1\right) Y(s) = F(s)$$

*Αρα*

$$Y(s) = -\left(\frac{1}{1+s^2}\right) F(s)$$

*Επομένως, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier μετατρέψαμε την διαφορική εξίσωση σε αλγεβρική ως προς $Y(s)$ (εξίσωση χωρίς παραγώγους). Λύνουμε ως προς $Y(s)$ και στην συνέχεια θα πρέπει να υπολογίσουμε την $y(t)$ η οποία είναι τέτοια ώστε ο μετασχηματισμός της κατά Fourier να είναι ίσος με την $Y(s)$. Για να το κάνουμε αυτό όμως θα πρέπει να καταγράψουμε ιδιότητες και διάφορα θεωρήματα για τον μετασχηματισμό αυτό.* □

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 142** *Έστω $a > 0$. Ορίζουμε την συνάρτηση*

$$q_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{a}, & \text{όταν } |t| \leq a \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

*Η συνάρτηση $q_a$ είναι επίσης απολύτως ολοκληρώσιμη επομένως υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier. Πράγματι,*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(q_a)(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} q_a(t)e^{-ist}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} q_a(t)e^{-ist}dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} q_a(t)e^{-ist}dt + \int_{0}^{\infty} q_a(t)e^{-ist}dt \end{aligned}$$

*Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $q_a(t)$ είναι άρτια προκύπτει ότι*

$$\mathcal{F}(q_a)(s) = 2\int_0^{\infty} q_a(t)\cos st dt = 2\int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right)\cos st dt$$

*Για $s \neq 0$ χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε ότι*

$$\mathcal{F}(q_a)(s) = \frac{2}{s}\int_0^a \left(1 - \frac{t}{a}\right)(\sin st)_t' dt = \frac{2}{as^2}(1 - \cos(as)) = \frac{4\sin^2(\frac{as}{2})}{as^2}$$

*Για $s = 0$ έχουμε ότι $\mathcal{F}(q_a)(0) = a$. Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι*

$$\lim_{s \to 0} \frac{4\sin^2(\frac{as}{2})}{as^2} = a$$

*το οποίο σημαίνει ότι η $\mathcal{F}(q_a)(s)$ είναι συνεχής συνάρτηση σε όλο το $\mathbb{R}$.* □

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 143** *Θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(t) = e^{-a|t|}$ όπου $a > 0$. Έχουμε ότι*

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-ist}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-ist}dt = \frac{2a}{a^2 + s^2}$$

*Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης*

$$g_a(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{όταν } t > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

*όπου $a \in \mathbb{C}$ με $\operatorname{Re} a > 0$. Έχουμε ότι*

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t)e^{-ist}dt = \frac{1}{a + is} = \frac{a - is}{a^2 + s^2}$$

*Παρόμοια, ισχύει ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης*

$$\hat{g}_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t \geq 0 \\ e^{at}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

*είναι η συνάρτηση* $\mathcal{F}(\hat{g}_a)(s) = \frac{a+is}{a^2+s^2}$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 144 *Θα μετασχηματίσουμε την συνάρτηση* $f(t) = e^{-at^2}$ *όπου* $a > 0$ *η οποία ονομάζεται συνάρτηση του Gauss. Έχουμε λοιπόν ότι*

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{-ist} dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-at^2} \cos st dt$$

*Υπολογίζουμε την παράγωγο της συνάρτησης* $F(s)$ *(υποθέτοντας ότι η παράγωγος μπορεί να περάσει μέσα στο ολοκλήρωμα) και έχουμε*

$$\begin{aligned} F'(s) &= -2\int_{0}^{\infty} e^{-at^2} t \sin st dt \\ &= \frac{1}{a}\int_{0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(e^{-at^2}\right) \sin st dt \end{aligned}$$

*Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη προκύπτει ότι*

$$F'(s) = -\frac{s}{2a}F(s)$$

*Η λύση της γραμμικής αυτής διαφορικής εξίσωσης είναι*

$$F(s) = Ce^{-s^2/4a}$$

*Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι (δείτε άσκηση 433 του βιβλίου)*

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t\sqrt{a})^2} \sqrt{a} dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

*έχουμε τελικά*

$$F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-s^2/4a}$$

□

## Ιδιότητες του Μετασχηματισμού *Fourier*

**ΘΕΩΡΗΜΑ 145 (ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ)** *Έστω δυο συναρτήσεις $f$ και $g$ με μετασχηματισμούς Fourier τις $F(s)$ και $G(s)$ αντίστοιχα. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier του γραμμικού συνδυασμού $af(t) + bg(t)$ είναι η συνάρτηση $aF(s) + bG(s)$.*

**ΘΕΩΡΗΜΑ 146 (ΣΥΖΥΓΗΣ)** *Έστω $f$ μια συνάρτηση και $F(s)$ ο μετασχηματισμός Fourier. Τότε, ο μετασχηματισμός της $\overline{f}(t)$ είναι η συνάρτηση $\overline{F}(-s)$.*

**ΘΕΩΡΗΜΑ 147** *Έστω $f$ μια συνάρτηση και $F(s)$ ο μετασχηματισμός Fourier. Τότε για $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\mathcal{F}(f(t-a))(s) = e^{-isa}F(s)$.*

**ΘΕΩΡΗΜΑ 148** *Έστω $f$ μια συνάρτηση και $F(s)$ ο μετασχηματισμός Fourier. Για $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\mathcal{F}(e^{iat}f(t))(s) = F(s-a)$.*

**ΠΟΡΙΣΜΑ 149** *Αν $F$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $f$ τότε*

$$\mathcal{F}\Big(f(t)\cos(at)\Big)(s) = \frac{F(s-a)}{2} + \frac{F(s+a)}{2}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 150** *Αν $f(t) = p_a(t)$ τότε σύμφωνα με τα παραπάνω προκύπτει ότι*

$$\mathcal{F}\Big(p_a(t)\cos bt\Big)(s) = \frac{\sin(a(s-b)/2)}{s-b} + \frac{\sin(a(s+b)/2)}{s+b}$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 151** *Έστω $F(s)$ ο μετασχηματισμός Fourier της $f$. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της $f(ct)$ για $c \neq 0$ είναι*

$$\mathcal{F}\Big(f(ct)\Big)(s) = \frac{1}{|c|}F\left(\frac{s}{c}\right)$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 152** *Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα αυτά στην συνάρτηση $p_a(ct)$ έχουμε ότι*

$$\mathcal{F}\Big(p_a(ct)\Big)(s) = \frac{1}{c}\frac{2\sin(\frac{as}{2c})}{\frac{s}{c}} = \frac{2\sin(\frac{as}{2c})}{s}$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 153** *Έστω $f$ μια άρτια συνάρτηση. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτής δίνεται από*

$$F(s) = 2\int_0^\infty f(t)\cos st dt \quad (\text{συνημιτονικός μετασχηματισμός})$$

*η οποία είναι επίσης άρτια συνάρτηση. Αν η $f$ είναι περιττή τότε ο μετασχηματισμός Fourier δίνεται από*

$$F(s) = -2i\int_0^\infty f(t)\sin st dt \quad (\text{ημιτονικός μετασχηματισμός})$$

*η οποία είναι επίσης περιττή συνάρτηση.*

**ΘΕΩΡΗΜΑ 154** *Έστω $f$ και $g$ τμηματικά λείες συναρτήσεις και απολύτως ολοκληρώσιμες με μετασχηματισμούς Fourier $F$ και $G$ αντίστοιχα. Τότε*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)G(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)g(t)dt$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 155** *Έστω $f$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και $F$ ο μετασχηματισμός Fourier. Αν $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$ τότε ο μετασχηματισμός της παραγώγου της $f$ δίνεται από $\mathcal{F}(f^{'})(s) = isF(s)$.*

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 156** *Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό σε μια συνάρτηση $m$-φορές συνεχώς παραγωγίσιμη προκύπτει ότι*

$$\mathcal{F}\left(f^{(m)}(t)\right)(s) = (is)^m F(s)$$

**Παραδειγμα 157** *Η συνάρτηση* $f(t) = e^{-at^2}$ *είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και η παράγωγος της είναι η* $f^{'}(t) = -2ate^{-at^2}$. *Επίσης, ισχύει ότι* $\lim_{t\to\pm\infty} e^{-at^2} = 0$. *Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι*

$$\mathcal{F}\left(f^{'}(t)\right)(s) = is\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a}$$

□

**Θεωρημα 158** *Έστω* $f$ *μια απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μετασχηματισμό Fourier την* $F$. *Αν η συνάρτηση* $tf(t)$ *είναι επίσης απολύτως ολοκληρώσιμη τότε ο μετασχηματισμός Fourier της* $f$ *είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και μάλιστα*

$$F^{'}(s) = -\mathcal{F}\big(itf(t)\big)$$

Σημαντική η επόμενη παρατήρηση, ειδικά στον υπολογισμό ροπών τυχαίων μεταβλητών με συνάρτηση πυκνότητας $f(t)$.

**Παρατηρηση 159** *Αν* $t^k f(t)$ *είναι απολύτως ολοκληρώσιμη για* $k = 0, 1, 2, \cdots, m$ *τότε η* $F$ *είναι* $m$*-φορές παραγωγίσιμη και μάλιστα*

$$F^{(m)}(s) = \mathcal{F}\Big((-it)^m f(t)\Big)$$

**Παραδειγμα 160** *Η συνάρτηση* $tp_a(t)$ *ικανοποιεί το παραπάνω θεώρημα και έτσι*

$$\mathcal{F}(tp_a(t))(s) = -\frac{1}{i}F^{'}(s) = i\frac{a\cos(as/2)}{s} - i\frac{2\sin(as/2)}{s^2}$$

□

**Θεωρημα 161** *Έστω* $F$ *ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης* $f$ *η οποία είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και συνεχής. Έστω* $\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{t} f(x)dx = 0$. *Τότε για* $s \neq 0$ *έχουμε ότι*

$$\mathcal{F}\left(\int_{-\infty}^{t} f(x)dx\right) = \frac{F(s)}{is}$$

Μπορεί να αποδειχθεί το παρακάτω αποτέλεσμα.

**Θεωρημα 162** *Αν η* $f$ *είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και τμηματικά συνεχής τότε ο μετασχηματισμός Fourier της* $f$ *είναι συνεχής συνάρτηση στο* $\mathbb{R}$.

**Ορισμος 163** *Η συνέλιξη δυο συναρτήσεων* $f$ *και* $g$ *ορίζεται ως εξής*

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(t-x)dx \qquad \text{για } t \in \mathbb{R}$$

*αν το ολοκλήρωμα υπάρχει.*

**Λημμα 164** *Ισχύει ότι*

$$f * g = g * f$$

*για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f$ και $g$.*

**Λημμα 165** *Αν η συνάρτηση $f$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και η $g$ είναι φραγμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ τότε η συνέλιξη $f * g$ υπάρχει.*

**Θεωρημα 166 (Θεωρημα Συνελιξης)** *Έστω $f$ και $g$ κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες είναι απολύτως ολοκληρώσιμες και φραγμένες. Έστω $F(s)$ και $G(s)$ οι μετασχηματισμοί Fourier των $f$ και $g$ αντίστοιχα. Τότε η συνέλιξη $f * g$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση και*

$$\mathcal{F}(f * g)(s) = F(s)G(s)$$

## Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier

Ο χώρος $L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ των απόλυτα ολοκληρώσιμων και συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος όπως πολύ εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε. Ο μετασχηματισμός Fourier

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) \to \operatorname{im} \mathcal{F}$$

όπου $\operatorname{im} \mathcal{F}$ είναι η εικόνα του μετασχηματισμού, είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός το οποίο εύκολα βλέπουμε χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του ολοκληρώματος. Ο πυρήνας του μετασχηματισμού $\ker \mathcal{F}$ αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις $f$ τέτοιες ώστε $\mathcal{F}(f) = 0$, δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt = 0, \qquad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f \geq 0$ που ανήκει στον πυρήνα του μετασχηματισμού. Τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt = 0, \qquad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

Διαλέγοντας $s = 0$ προκύπτει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$$

από το οποίο εύκολα βλέπουμε ότι αναγκαστικά $f = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει γενικότερα, για οποιαδήποτε συνάρτηση $f$, το οποίο είναι το επόμενο.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 167** *Αν η συνάρτηση $f$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη και τέτοια ώστε*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ist} dt = 0, \qquad \text{για κάθε } s \in \mathbb{R}$$

*τότε αναγκαστικά $f(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.*

Επομένως, ο πυρήνας του μετασχηματισμού Fourier αποτελείται μονάχα από το μηδενικό στοιχείο.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 168** *Ένας γραμμικός μετασχηματισμός $T : V \to W$ λέγεται*

(i) *$K$-**ισομορφισμός** αν ο $T$ είναι μια $1-1$ και επί απεικόνιση*

(ii) ***μη-ιδιάζων** μετασχηματισμός αν $\ker T = \{0\}$.*

Σημειώστε ότι $1-1$ είναι μια απεικόνιση η οποία είναι τέτοια ώστε $T(v) \neq T(v')$ όταν $v \neq v'$ για κάθε $v, v' \in V$ και επί όταν για κάθε $w \in W$ υπάρχει κάποιο $v \in V$ τέτοιο ώστε $T(v) = w$.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 169** *Έστω $T : V \to W$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Τότε είναι 1-1* **ανν** *είναι μη-ιδιάζων.*

Αυτό σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 και άρα αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος είναι επίσης ένας γραμμικός μετασχηματισμός.
Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ιδιαίτερα χρήσιμο διότι αν η $F(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης τότε οφείλει να συγκλίνει στο μηδέν καθώς $s \to \pm\infty$.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 170 (Riemann-Lebesgue)** *Έστω $f$ μια απολύτως ολοκληρώσιμη και κατά τμήματα λεία συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Τότε*

$$\lim_{s\to\pm\infty} F(s) = \lim_{s\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt = 0$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 171** *Έστω ότι η συνάρτηση $f$ και ο μετασχηματισμός Fourier $F$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αν η $f$ είναι λεία συνάρτηση τότε*

$$\mathcal{F}(F)(s) = 2\pi f(-s)$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 172** *Έστω $f$ και $g$ τμηματικά λείες και απολύτως ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε το γινόμενό τους να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι οι μετασχηματισμοί Fourier $F$ και $G$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε*

$$\mathcal{F}(fg)(s) = \frac{1}{2\pi}(F * G)(s)$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό στις $f$ και $\overline{g}$ έχουμε το επόμενο πόρισμα.

**ΠΟΡΙΣΜΑ 173 (ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ Parseval)** *Έστω δυο συναρτήσεις $f$ και $g$ τμηματικά λείες. Υποθέτουμε ότι οι $f$ και $\overline{g}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες όπως επίσης και το γινόμενό τους. Υποθέτουμε επίσης ότι οι μετασχηματισμοί Fourier $F$ και $G$ των $f$ και $g$ αντίστοιχα είναι τέτοιοι ώστε οι $F$ και $\overline{G}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε ισχύει η ταυτότητα*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\overline{G(x)}dx \qquad \text{(ταυτότητα του Parseval)}$$

*Επίσης, ισχύει ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(s)|^2 ds$$

**Παραδειγμα 174** *Διαλέγοντας $f = p_a$ έχουμε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |p_a(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\sin^2(as/2)}{s^2} ds$$

*Το αριστερό ολοκλήρωμα είναι ίσο με $a$ ενώ στο δεξί κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = as/2$ και έτσι προκύπτει ότι*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 y}{y^2} dy = \frac{\pi}{2}$$

*Διαλέγοντας $f = p_a$ και $g = p_b$ με $0 < a \leq b$ έχουμε ότι*

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_a(t)p_b(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\sin(as/2)\sin(bs/2)}{s^2} ds$$

*Το αριστερό ολοκλήρωμα είναι ίσο με $a$ ενώ*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4\sin(as/2)\sin(bs/2)}{s^2} ds = \frac{4}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin(as/2)\sin(bs/2)}{s^2} ds$$

*λόγω του ότι η ολοκληρωτέα ποσότητα είναι άρτια συνάρτηση. Τελικά έχουμε ότι*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(as/2)\sin(bs/2)}{s^2} ds = \frac{\pi}{4}a$$

*Στην συνέχεια θέτοντας $y = \frac{a}{2}s$ προκύπτει ότι*

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin y \sin(\frac{b}{a}y)}{y^2} dy = \frac{\pi}{2}$$

□

**Παρατηρηση 175** *Μπορούμε να ορίσουμε ως μετασχηματισμό Fourier τον εξής*

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ist}dt$$

*οπότε ο αντίστροφος θα είναι*

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(t) = \frac{1}{2\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^{A} F(s)e^{-ist}ds$$

*το οποίο οδηγεί σε ισοδύναμα αποτελέσματα με μικρές διαφορές, όπως για παράδειγμα ο μετασχηματισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης. Επίσης, ο συντελεστής μπροστά από το ολοκλήρωμα μπορεί να επιλεγεί όπως θέλουμε αλλά έπειτα ο αντίστοιχος συντελεστής στον αντίστροφο μετασχηματισμό θα πρέπει να είναι τέτοιος ώστε το γινόμενο των δυο συντελεστών να είναι ίσο με $\frac{1}{2\pi}$. Σε πολλά βιβλία θα δούμε ότι υπάρχουν διαφορές στον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier όπως περιγράψαμε πιο πριν. Για τον λόγο αυτό θα πρέπει κανείς να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός με την χρήση των πινάκων μετασχηματισμών (δες για παράδειγμα τον πίνακα 8.1) που συνήθως υπάρχουν διότι αυτοί θα διαφέρουν από βιβλίο σε βιβλίο, ανάλογα με τον ορισμό του μετασχηματισμού που έχει δοθεί.* □

Πίνακας 8.1: Πίνακας μετασχηματισμών Fourier

| $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{ist}ds$ | $\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}dt$ |
|---|---|
| $a > 0,\ p_a(t) = \begin{cases} 1, & \text{όταν } \lvert t\rvert \leq \frac{a}{2} \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ | $\mathcal{F}(p_a)(s) = \begin{cases} \frac{2\sin(\frac{a}{2}s)}{s}, & \text{όταν } s \neq 0 \\ a, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ |
| $a > 0,\ q_a(t) = \begin{cases} 1 - \frac{\lvert t\rvert}{a}, & \text{όταν } \lvert t\rvert \leq a \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ | $\mathcal{F}(q_a)(s) = \begin{cases} \frac{4\sin^2(\frac{a}{2}s)}{as^2}, & \text{όταν } s \neq 0 \\ a, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ |
| $a > 0,\ e^{-a\lvert t\rvert}$ | $\frac{2a}{a^2+s^2}$ |
| $\mathrm{Re}\, a > 0,\ g_a(t) = \begin{cases} e^{-at}, & \text{όταν } t > 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ | $\mathcal{F}(g_a)(s) = \frac{a-is}{a^2+s^2} = \frac{1}{a+is}$ |
| $a > 0,\ e^{-at^2}$ | $\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a}$ |
| $\mathrm{Re}\, a > 0,\ \hat{g}_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } t \geq 0 \\ e^{at}, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ | $\mathcal{F}(\hat{g}_a)(s) = \frac{a+is}{a^2+s^2} = \frac{1}{a-is}$ |

## Υπολογισμός του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης, προφανώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες θεώρημα του μετασχηματισμού Fourier. Δεδομένου ότι ο απευθείας υπολογισμός του αντιστρόφου μέσω αυτού του θεωρήματος μπορεί να είναι αρκετά δύσκολος, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τον πίνακα 8.1 (ή παρόμοιους και πληρέστερους που υπάρχουν στην βιβλιογραφία). Ο πίνακας 8.1 περιέχει τους μετασχηματισμούς Fourier που έχουμε υπολογίσει στα παραδείγματα που έχουμε δώσει. Έτσι, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης $\frac{2a}{a^2+s^2}$ θα κοιτάξουμε τον πίνακα μετασχηματισμών και θα δούμε ότι προέρχεται από την συνάρτηση $e^{-a|t|}$. Λόγω του ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι 1-1 είμαστε βέβαιοι ότι δεν υπάρχει άλλη συνάρτηση τέτοια ώστε να έχει τον ίδιο μετασχηματισμό. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό μιας πιο πολύπλοκης συνάρτησης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό της συνάρτησης

$$2\frac{2a}{a^2+s^2} + 3\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a} \quad \text{όταν } a > 0$$

μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την γραμμικότητα του μετασχηματισμού Fourier και του αντιστρόφου της. Έτσι έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}^{-1}\left(2\frac{2a}{a^2+s^2}+3\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a}\right) \\ = \;& 2\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2a}{a^2+s^2}\right)+3\mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-s^2/4a}\right) \\ = \;& 2e^{-a|t|}+3e^{-at^2} \end{aligned}$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 176** *Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης*

$$F(t) = \frac{2a}{a^2 + t^2}$$

*με* $a > 0$ *θα δίνεται από*

$$\mathcal{F}(F)(s) = 2\pi e^{-a|s|}$$

*όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το θεώρημα 171 και τον πίνακα 8.1.*
*Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία στη θεωρία πιθανοτήτων και συγκεκριμένα στο μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής που ακολουθεί την Cauchy, δηλαδή η συνάρτηση πυκνότητας είναι η* $f(t) = \frac{1}{\pi(1+xt^2)}$.
*Σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχύει ότι* $\mathcal{F}(f)(s) = e^{-|s|}$. □

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 177** *Θα χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Fourier για να επιλύσουμε την διαφορική εξίσωση*

$$y^{'}(x) + 2y(x) = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

*Λαμβάνουμε τον μετασχηματισμό Fourier κατά μέλη της εξίσωσης και έχουμε*

$$(is + 2)Y(s) = \frac{2}{1 + s^2}$$

*ή αλλιώς, αναλύοντας σε απλά κλάσματα,*

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{(1+s^2)(2+is)} \\ &= \frac{1}{1+is} + \frac{1}{3(1-is)} - \frac{2}{3(2+is)} \\ &= \frac{1-is}{1+s^2} + \frac{1}{3}\frac{1+is}{1+s^2} - \frac{2}{3}\frac{2-is}{4+s^2} \end{aligned}$$

*Αρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός της* $Y$ *θα είναι*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(Y) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1-is}{1+s^2}\right) + \frac{1}{3}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1+is}{1+s^2}\right) - \frac{2}{3}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{2-is}{4+s^2}\right) \\ &= g_1(x) + \frac{1}{3}\hat{g}_1(x) - \frac{2}{3}g_2(x) \end{aligned}$$

*όπου έχουμε χρησιμοποιήσει τον πίνακα μετασχηματισμών. Δηλαδή*

$$y(x) = \begin{cases} e^{-x} - \frac{2}{3}e^{-2x}, & \text{όταν } x > 0 \\ \frac{1}{3}e^{x}, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

□

**Παραδειγμα 178** *Έστω ότι η $f$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$. Θα μελετήσουμε την συνήθη διαφορική εξίσωση*

$$y''(x) - y(x) = f(x) \quad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

*Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στα δυο μέλη της εξίσωσης και έχουμε*

$$\left((is)^2 - 1\right) Y(s) = F(s)$$

*Αρα*

$$Y(s) = -\left(\frac{1}{1+s^2}\right) F(s)$$

*Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης (δες θεώρημα 166) προκύπτει ότι*

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y) f(y) dy, \quad \text{για } x \in \mathbb{R}$$

*όπου* $k(x) = -\frac{1}{2}e^{-|x|}$. □

**Παρατηρηση 179** *Στο προηγούμενο παράδειγμα υποθέσαμε ότι η $f$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη. Αν διαλέξουμε ως $f$ την $f(x) = e^{x/2}$ διαπιστώνουμε ότι δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και επιπλέον δεν μετασχηματίζεται κατά Fourier, παρόλα αυτά ο μετασχηματισμός Fourier θα μας οδηγήσει σε μια συνάρτηση η οποία όντως είναι μια λύση του προβλήματος!*
*Από την άλλη πλευρά, αν διαλέξουμε ως $f$ την*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{όταν } x > 0 \\ 0, & \text{όταν } x \leq 0 \end{cases}$$

*η οποία είναι απολύτως ολοκληρώσιμη και επομένως μετασχηματίζεται κατά Fourier, η μέθοδος Fourier θα μας οδηγήσει σε μια συνάρτηση η οποία* **δεν είναι λύση** *του παραπάνω προβλήματος! Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;*
*Το συμπέρασμα είναι ότι ο καλύτερος τρόπος εφαρμογής του μετασχηματισμού Fourier είναι να τον εφαρμόζουμε χωρίς να ελέγχουμε αν το πρόβλημα μετασχηματίζεται κατά Fourier και στη συνέχεια να επαληθεύουμε αν η συνάρτηση που μας δίνει είναι πράγματι λύση του προβλήματος. Με τον τρόπο αυτό θα είμαστε αφενός σίγουροι για το συμπέρασμά μας και μάλιστα με αυστηρά μαθηματικό τρόπο και από την άλλη δεν θα έχουμε χάσει μια λύση αν τα δεδομένα δεν μετασχηματίζονται κατά Fourier όπως στο πρώτο παράδειγμα της παρατήρησης.* □

## Η εξίσωση θερμότητας σε άπειρο χωρίο

Θα ασχοληθούμε με την ίδια εξίσωση σε άπειρο χωρίο. Το πρόβλημα είναι το επόμενο

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \qquad k > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ u(x,t) \text{ φραγμένη και } u_x(x,t) &\to 0 \qquad \text{καθώς} \quad |x| \to \infty \end{aligned}$$

### Μοναδικότητα Λύσης

Θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Έστω ότι έχει δυο λύσεις, τις $u_1(x,t)$ και $u_2(x,t)$, τότε η διαφορά τους $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ λόγω γραμμικότητας του προβλήματος, θα ικανοποιεί το παρακάτω πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \qquad k > 0 \\ u(x,0) &= 0, \qquad x \in \mathbb{R} \\ u(x,t) \text{ φραγμένη και } u_x(x,t) &\to 0 \qquad \text{καθώς} \quad |x| \to \infty \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με $u(x,t)$ και ολοκληρώνουμε ως προς $t$ στο $(0,t)$. Στο αριστερό μέλος θα έχουμε, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $u(x,0) = 0$,

$$\int_0^t u_t(x,y)u(x,y)dy = u^2(x,t) - \int_0^t u(x,y)u_t(x,y)dy$$

Συνεπώς

$$\int_0^t u_t(x,y)u(x,y)dy = \frac{1}{2}u^2(x,t)$$

Στην συνέχεια ολοκληρώνουμε την εξίσωση ως προς $x$ σε όλο το $\mathbb{R}$. Στο δεξί μέλος θα έχουμε

$$\begin{aligned} k\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t u_{xx}(y,r)u(y,r)drdy &= k\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(y,r)u(y,r)dydr \\ &= k\int_0^t \Big(u_x(y,r)u(y,r)\Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(y,r)dy\Big)dr \\ &= -k\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(y,r)dydr \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $u_x(x,t) \to 0$ καθώς $|x| \to \infty$. Τελικά, ισχύει ότι

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u^2(y,t)dy + k\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(y,r)dydr = 0$$

το οποίο ικανοποιείται μονάχα όταν $u(x,t) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $t > 0$, δηλαδή $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ άρα το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

### Υπολογισμός της λύσης με τον μετασχηματισμό *Fourier*

Για να υπολογίσουμε την λύση, θα εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό Fourier. Δεν θα αναφερθούμε στις προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιεί η συνάρτηση $f$ για να είναι καλά ορισμένος ο μετασχηματισμός Fourier. Αρκεί η συνάρτηση που θα υπολογίσουμε να είναι πράγματι λύση του προβλήματος.
Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Fourier στην εξίσωση κατά μέλη ως προς την μεταβλητή $x$. Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα του μετασχηματισμού προκύπτει ότι

$$U_t(s,t) = -ks^2 U(s,t)$$

Η εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier στην αρχική συνθήκη είναι ως εξής

$$U(s,0) = F(s)$$

όπου $U(s,t)$ και $F(s)$ οι μετασχηματισμοί Fourier των συναρτήσεων $u(x,t)$ και $f(x)$. Το παραπάνω πρόβλημα είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης της οποίας η λύση είναι

$$U(s,t) = F(s)e^{-ks^2 t}$$

Για να βρούμε την $u(x,t)$ αντιστρέφουμε τον μετασχηματισμό και χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνέλιξης παίρνουμε

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) e^{-\frac{(x-r)^2}{4kt}} dr \tag{8.2}$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 180** *Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση*

$$g(x,t,r) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-r)^2}{4kt}}$$

*τότε παρατηρούμε ότι* $g_t = kg_{xx}$. *Αν αποδείξουμε ότι οι παράγωγοι περνούν στο ολοκλήρωμα της συνάρτησης* $u(x,t)$ *τότε προφανώς προκύπτει ότι η συνάρτηση αυτή είναι μια λύση της εξίσωσης θερμότητας. Θεωρώντας τη συνάρτηση*

$$F(x,t,r) = f(r)g(x,t,r)$$

*θα πρέπει να αποδείξουμε (εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης) ότι οι συναρτήσεις* $F_t, F_x, F_{xx}$ *είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες έτσι ώστε να έχουμε το συμπέρασμα ότι οι παράγωγοι περνούν στο ολοκλήρωμα και άρα η* $u(x,t)$ *αποτελεί λύση του προβλήματος.* □

Σημειώστε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα (και άρα και η λύση) είναι καλά ορισμένη ακόμη και σε περιπτώσεις όπου η συνάρτηση $f$ δεν είναι απολύτως ολοκληρώσιμη (αν για παράδειγμα $f(x) = e^x$) και ενδεχομένως να μην μετασχηματίζεται κατά Fourier.

Αυτό αποτελεί μια «αδυναμία» της μεθόδου εύρεσης της λύσης (δηλαδή του μετασχηματισμού Fourier) και όχι του προβλήματος. Για να διαπιστώσουμε ότι πράγματι είναι λύση του προβλήματος αρκεί να δικαιολογήσουμε το γεγονός ότι η παράγωγος περνά μέσα στο ολοκλήρωμα. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x-r}{2\sqrt{kt}}$ εύκολα αποδεικνύουμε ότι

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x)$$

Συνοψίζοντας, η απόδειξη του ότι η μοναδική λύση είναι η παραπάνω προκύπτει από την επαλήθευση της λύσης (και όχι από την εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier!), κάτι το οποίο δεν είναι καθόλου προφανές αφού περιέχει την δικαιολόγηση του γεγονότος ότι οι παράγωγοι περνούν μέσα στο ολοκλήρωμα. Σημειώστε ότι αν $f(x) = e^x$ τότε η συνάρτηση δεν μετασχηματίζεται κατά Fourier και επομένως δεν είναι μαθηματικά ορθό να εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό κατά μέλη. Σημειώστε επίσης ότι στην περίπτωση όπου $f(x) = e^{x^3}$ τότε το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν είναι καλά ορισμένο.

Για να δούμε τη σχέση μεταξύ διαφορικών εξισώσεων και θεωρίας πιθανοτήτων - στοχαστικής ανάλυσης ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή $X$ η οποία ακολουθεί τη κανονική κατανομή με μέση τιμή $x$ και διακύμανση $2kt$. Τότε

$$\mathbb{E}f(X) = \frac{1}{2\sqrt{kt\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) e^{-\frac{(x-r)^2}{4kt}} dr$$

και επομένως η μέση τιμή $\mathbb{E}f(X)$ είναι μια λύση της παραπάνω εξίσωσης θερμότητας. Με μια τέτοια συσχέτιση ανοίγει ο δρόμος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με μεθόδους στοχαστικής ανάλυσης και αντίστροφα. Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών όπως επίσης να προσεγγίσουμε τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής με τη μέθοδο Monte Carlo. Με τη παραπάνω συσχέτιση λοιπόν μπορεί κανείς να υπολογίσει τη λύση μιας μερικής διαφορικής με τη μέθοδο Monte Carlo ή τη μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 181** *Θα υπολογίσουμε μια λύση του παρακάτω προβλήματος*

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= e^{ax}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

*Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Fourier. Διαπιστώνουμε όμως ότι η συνάρτηση $e^{ax}$ δεν μετασχηματίζεται κατά Fourier και επομένως δεν είναι μαθηματικά ορθό να εφαρμόσουμε αυτό το μετασχηματισμό. Θα το κάνουμε όμως προκειμένου να έχουμε τη μορφή της λύσης και στη συνέχεια θα επαληθεύσουμε ότι πράγματι πρόκειται για μια λύση του παραπάνω προβλήματος.*
*Όπως είδαμε μια λύση (πιθανό) να έχει την εξής μορφή*

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{4kt}} e^{ay} dy \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-(x+2kta))^2}{4kt}+ax+a^2kt} dy \\ &= e^{ax+a^2kt} \end{aligned}$$

*Η μορφή της λύσης είναι απλή και μπορούμε πολύ εύκολα να επαληθεύσουμε ότι πράγματι αποτελεί μια λύση του παραπάνω προβλήματος. Πράγματι,*

$$\begin{aligned} u_t &= e^{ax+a^2kt}a^2k \\ u_x &= e^{ax+a^2kt}a \\ u_{xx} &= e^{ax+a^2kt}a^2 \end{aligned}$$

*Επομένως ισχύει ότι $u_t = ku_{xx}$ καθώς και $u(x,0) = e^{ax}$ δηλαδή αποτελεί μια λύση του προβλήματος. Σημειώστε ότι δεν έχουμε αποδείξει για τη περίπτωση αυτή μοναδικότητα λύσης. Το συμπέρασμα είναι ότι μπορεί κάποιος να εφαρμόσει το μετασχηματισμό Fourier χωρίς καν να αυτό να είναι επιτρεπτό από τα δεδομένα του προβλήματος και να δημιουργήσει τη πιθανή μορφή της λύσης. Η μαθηματικά αυστηρή απόδειξη του ότι πράγματι πρόκειται για λύση θα γίνει μέσω της επαλήθευσης!*
*Αν μελετήσουμε το παρακάτω πρόβλημα*

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) &= e^{-a|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad a > 0 \\ u(x,t) & \qquad \text{φραγμένη και } u_x(x,t) \to 0 \text{ καθώς } |x| \to \infty \end{aligned}$$

*θα δούμε ότι η μοναδική λύση του είναι η $u(x,t) = e^{-a|x|+a^2kt}$.* □

Η Εξίσωση των $Black - Scholes$

Η εξίσωση των Black-Scholes είναι η επόμενη

$$V_t(t,S) + rSV_s(t,S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{ss}(t,S) - rV(t,S) = 0, \qquad t \in [0,T],\ S > 0 \tag{8.3}$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια παραβολική εξίσωση συνεπώς με κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορούμε να την μετασχηματίσουμε στην κανονική της μορφή η οποία είναι η εξίσωση θερμότητας που έχουμε ήδη μελετήσει.

Μετασχηματισμός της εξίσωσης στην εξίσωση θερμότητας

Θα δώσουμε στην συνέχεια τους κατάλληλους μετασχηματισμούς ούτως ώστε η εξίσωση αυτή να μετασχηματισθεί στην εξίσωση θερμότητας. Θέτουμε

$$\begin{array}{lcll} t & = & T - \frac{2\tau}{\sigma^2}, & \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T] \\ S & = & e^x, & x \in \mathbb{R} \\ V(t,S) & = & v(\tau,x), & x \in \mathbb{R},\ \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T] \end{array}$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της $V$ και έχουμε, σημειώνοντας ότι $V(t,S) = v\left(\frac{\sigma^2}{2}(T-t), \ln S\right)$

$$\begin{array}{lcl} V_t & = & -\dfrac{\sigma^2}{2} v_\tau \\ V_s & = & \dfrac{1}{S} v_x \\ V_{SS} & = & -\dfrac{1}{S^2} v_x + \dfrac{1}{S^2} v_{xx} \end{array}$$

Τότε η αρχική διαφορική εξίσωση γίνεται, θέτοντας $k = \frac{2r}{\sigma^2}$,

$$v_\tau = v_{xx} + (k-1)v_x - kv$$

έχοντας χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η $V$ ικανοποιεί την 8.3.
Στην συνέχεια θέτουμε

$$v(\tau,x) = e^{ax+b\tau} u(\tau,x)$$

Αντικαθιστώντας την $v$ στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει η παρακάτω

$$bu + u_\tau = a^2 u + 2au_x + u_{xx} + (k-1)(au + u_x) - ku$$

Προκειμένου να απλουστευθεί διαλέγουμε

$$a = -\frac{1}{2}(k-1), \quad b = -\frac{1}{4}(k+1)^2$$

Τελικά προκύπτει ότι η συνάρτηση $V$ είναι λύση της 8.3 αν και μόνο αν η $u(\tau, x)$ ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας

$$u_\tau = u_{xx}, \quad \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T], \quad x \in \mathbb{R}$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε μια τελική συνθήκη στην 8.3, όπως για παράδειγμα

$$V(T, S) = F(S), \quad S > 0$$

όπου $F(\cdot)$ δοσμένη συνάρτηση, τότε η αντίστοιχη μετασχηματισμένη εξίσωση θερμότητας παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} u_\tau &= u_{xx}, & \tau \in [0, \tfrac{\sigma^2}{2}T], \; x \in \mathbb{R} \\ u(0, x) &= e^{\frac{1}{2}(k-1)x}F(e^x), & x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Συμβολίζοντας με $f(x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x}F(e^x)$ έχουμε ότι το πρόβλημα αυτό έχει ως λύση την (δείτε το αντίστοιχο εδάφιο στο [;]),

$$u(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}} dz, \quad \tau \in [0, \frac{\sigma^2}{2}T], \quad x \in \mathbb{R} \tag{8.4}$$

# Αξία Ευρωπαϊκού Συμβολαίου Αγοράς

Ας δούμε ποια είναι η αξία ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου αγοράς με βάση την συνάρτηση $V(t,S)$ που έχουμε υπολογίσει. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση $F(x) = (x-K)^+$ όπου $K$ είναι η τιμή εξάσκησης.
Θα υπολογίσουμε την συνάρτηση $u(\tau,x)$ από την σχέση 8.4 κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{z-x}{\sqrt{2\tau}}$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u(\tau,x) &= \frac{1}{2\sqrt{\tau\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}}dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy - \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $f(x) = e^{\frac{1}{2}(k-1)x}\max\{e^x - K, 0\}$.
Το πρώτο ολοκλήρωμα στην τελευταία σχέση γίνεται

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k+1)(x+y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}e^{-\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau})^2}dy \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}d\rho \\ &= e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}N(d_1) \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}u^2}du \\ &\text{και} \\ d_1 &= \frac{\ln S - \ln K}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau} = \frac{\ln\frac{S}{K} + r(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \end{aligned}$$

Παρόμοια έχουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\ln K-\ln S}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{1}{2}(k-1)(x+y\sqrt{2\tau})}e^{-\frac{1}{2}y^2}dy = e^{\frac{1}{2}(k-1)x+\frac{1}{4}(k-1)^2\tau}N(d_2)$$

όπου

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}u^2}du \quad \text{και} \quad d_2 = \frac{\ln\frac{S}{K} + r(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει την σχέση

$$N(d) = 1 - N(-d)$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} N(-d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-d} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ &= 1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ &= 1-\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{u^2}{2}}du \quad (\text{θέσαμε } t=-u) \\ &= 1-N(d) \end{aligned}$$

Οπότε

$$V(t,S) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Μπορούμε να συσχετίσουμε την $V(t,S)$ με την συνάρτηση σφάλματος $\mathrm{erf}(x)$ και να πάρουμε το εξής

$$V(t,S) = S\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{d_1}{\sqrt{2}}\right)\right) - Ke^{-r(T-t)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{d_2}{\sqrt{2}}\right)\right) \tag{8.5}$$

Η συσχέτιση αυτή προκύπτει εύκολα ως εξής

$$\begin{aligned} N(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}\sigma\sqrt{2}dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-y^2}dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{x}{\sqrt{2}}} e^{-y^2}dy \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει για Αμερικανικού τύπου συμβόλαια με τη διαφορά ότι το διωνυμικό μοντέλο συγκλίνει σε μια μεταβολική ανισότητα αντί για μερική διαφορική εξίσωση (δες [;]). Η διαφορά προκύπτει από την ύπαρξη του maximum στην αναδρομική σχέση του $H_n$ οπότε η αντίστοιχη συνάρτηση (δηλαδή η $H(t,S)$ για τα Αμερικανικά δικαιώματα) δεν είναι ούτε μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 182** *Όπως είδαμε, το πλήθος των μετοχών που ο πωλητής πρέπει να έχει κατά την χρονική στιγμή $t$ και όταν η τιμή της μετοχής είναι $S$ πρέπει να είναι ίσο με $V_S(t,S)$. Όταν η τιμή της μετοχής μεταβληθεί από $S$ στην $S+\varepsilon$ τότε θα πρέπει ακαριαία το πλήθος των μετοχών να μεταβληθεί σε $a(t+k, S+\varepsilon)$ το οποίο είναι φύσει αδύνατο να συμβεί. Αυτό δημιουργεί ανυπέρβλητα πρακτικά προβλήματα* *στη κατασκευή του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου χρησιμοποιώντας το μοντέλο των Black - Scholes. Θα περιγράψουμε παρακάτω πρακτικούς τρόπους αποτίμησης δικαιωμάτων προαίρεσης.*

## 8.6 Αναλογία αγοράς - πώλησης Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων μέσω διωνυμικού μοντέλου

Θα συμβολίζουμε με

$$\begin{aligned} a^+ &= \max\{0, a\}, \\ a^- &= -\min\{0, a\} \end{aligned}$$

Ισχύουν τα παρακάτω, για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a^- &= \max\{0, -a\} = (-a)^+, \\ a^+ &= -\min\{0, -a\} = (-a)^-, \\ a &= a^+ - a^-, \\ |a| &= a^+ + a^- \end{aligned}$$

Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης $K$ και το αντίστοιχο δικαίωμα πώλησης. Συμβολίζουμε με $V_n^{E,call}$ και $V_n^{E,put}$ τις αξίες των θεμελιωδών χαρτοφυλακίων εργαζόμενοι σε ένα διωνυμικό δέντρο $N$-περιόδων. Ισχύει η επόμενη αναλογία (put - call parity),

$$\boxed{V_n^{E,call} - V_n^{E,put} = S_n - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}}, \ n = 0, \cdots, N}$$

Πράγματι, για $n = N$ έχουμε

$$\begin{aligned} V_N^{E,call} - V_N^{E,put} &= (S_N - K)^+ - (K - S_N)^+ \\ &= (S_N - K)^+ - (S_N - K)^- \\ &= S_N - K. \end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι ισχύει για κάποιο $n$ θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n-1$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & V_{n-1}^{E,call} - V_{n-1}^{E,put} \\ = \ & \frac{\big(q(V_n^{u,E,call} - V_n^{u,E,put}) + (1-q)(V_n^{d,E,call} - V_n^{d,E,put})\big)}{1+r} \\ = \ & \frac{\Big(q(uS_{n-1} - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}}) + (1-q)(dS_{n-1} - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}})\Big)}{1+r} \\ = \ & S_{n-1} - K\frac{1}{(1+r)^{N-n+1}} \end{aligned}$$

## 8.7 Σχέση μεταξύ Ευρωπαϊκών και Αμερικανικών δικαιωμάτων

Εν γένει είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\boxed{V_n^E \leq H_n, \quad n = 0, \cdots, N}$$

Πράγματι, για $n = N$ έχουμε ότι

$$V_N^E = X_N = H_N$$

όπου $X_N$ είναι η απολαβή του αγοραστή στο χρόνο $N$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n$, δηλαδή

$$V_n^E \leq H_n$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n-1$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} H_{n-1} &= \max\left\{X_{n-1}, \frac{1}{1+r}\left(qH_n^u + (1-q)H_n^d\right)\right\} \\ &\geq \max\left\{X_{n-1}, \frac{1}{1+r}\left(qV_n^{u,E} + (1-q)V_n^{d,E}\right)\right\} \\ &= \max\{X_{n-1}, V_{n-1}^E\} \\ &\geq V_{n-1}^E \end{aligned}$$

Έστω τώρα ένα Ευρωπαϊκό συμβόλαιο αγοράς με τιμή εξάσκησης $K$ και το αντίστοιχο Αμερικανικό συμβόλαιο. Αν $r \geq 0$ τότε οι αξίες των συμβολαίων συμπίπτουν, δηλαδή

$$\boxed{V_n^{E,call} = H_n^{call} \quad (\text{όταν } r \geq 0), \quad n = 0, \cdots, N}$$

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι

$$\boxed{V_n^{E,call} \geq X_n = (S_n - K)^+ \quad (\text{όταν } r \geq 0), \quad n = 0, \cdots, N}$$

χρησιμοποιώντας επαγωγή, οπότε ξεκινάμε για $n = N$ όπου έχουμε προφανώς $V_N^{E,call} = (S_N - K)^+$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n$, δηλαδή $V_n^{E,call} \geq$

$X_n = (S_n - K)^+$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n-1$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
S_{n-1} - K &= \frac{(qu+(1-q)d)}{1+r}(S_{n-1}-K) \\
&= \frac{1}{1+r}\Big(q(uS_{n-1}-K) + (1-q)(dS_{n-1}-K)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{1+r}\Big(qK(1-u) + (1-q)K(1-d)\Big) \\
&\le \frac{1}{1+r}\Big(q(uS_{n-1}-K)^+ + (1-q)(dS_{n-1}-K)^+\Big) \\
&\quad + \frac{1}{1+r}\Big(qK(1-u) + (1-q)K(1-d)\Big) \\
&\le \frac{1}{1+r}\Big(qV_n^{u,E,call} + (1-q)V_n^{d,E,call}\Big) \\
&= V_{n-1}^{E,call}
\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $1+r = qu+(1-q)d$ και ότι

$$qK(1-u) + (1-q)K(1-d) = K - K(1+r) \le 0$$

Επειδή $V_{n-1}^{E,call} \ge 0$ τότε έχουμε ότι

$$X_{n-1} \le V_{n-1}^{E,call}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι $V_n^{E,call} = H_n^{call}$ για $n = 0, \cdots, N$ όταν $r \ge 0$. Επαγωγικά, ξεκινάμε για $n = N$ και προφανώς ισχύει η ισότητα. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n$ και θα αποδείξουμε ότι αναγκαστικά ότι θα ισχύει και για $n-1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
H_{n-1}^{call} &= \max\left\{X_{n-1}, \frac{1}{1+r}\left(qH_n^{u,call} + (1-q)H_n^{d,call}\right)\right\} \\
&= \max\left\{X_{n-1}, \frac{1}{1+r}\left(qV_n^{u,E,call} + (1-q)V_n^{d,E,call}\right)\right\} \\
&= \max\{X_{n-1}, V_{n-1}^{E,call}\} \\
&= V_{n-1}^{E,call}
\end{aligned}$$

Επομένως σε κάθε χρονική στιγμή $n$ δεν υπάρχουν επιπλέον χρήματα για τον πωλητή άρα

$$V_n^{A,call} = V_n^{AC,call}$$

Για δικαιώματα πώλησης στην περίπτωση που $r = 0$ μπορούμε να αποδείξουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Δηλαδή

$$\boxed{V_n^{E,put} = H_n^{put} \quad (\text{όταν } r = 0), \quad n = 0, \cdots, N}$$

Για να το αποδείξουμε αυτό θα δείξουμε πρώτα ότι

$$\boxed{X_n = (K - S_n)^+ \leq V_n^{E,put} \quad (\text{όταν } r = 0), \quad n = 0, \cdots, N}$$

Επαγωγικά, ξεκινώντας για $n = N$ ισχύει με προφανή τρόπο. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n-1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
K - S_{n-1} &= K - dS_{n-1} + S_{n-1}(d-1) \\
&= (1-q)(K - dS_{n-1}) + q(K - dS_{n-1}) + S_{n-1}(d-1) \\
&= (1-q)(K - dS_{n-1}) + q(K - uS_{n-1}) \\
&\quad + qS_{n-1}(u-d) + S_{n-1}(d-1) \\
&\leq (1-q)(K - dS_{n-1})^+ + q(K - uS_{n-1})^+ \\
&\quad + qS_{n-1}(u-d) + S_{n-1}(d-1) \\
&\leq V_{n-1}^{E,put}
\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το ότι $q = \frac{1-d}{u-d}$ οπότε και

$$S_{n-1}(d-1) = -qS_{n-1}(u-d)$$

Επειδή, $V_{n-1}^{E,put} \geq 0$ έχουμε ότι

$$X_{n-1} \leq V_{n-1}^{E,put}, \quad n = 1, \cdots, N$$

Επαγωγικά είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι $H_n^{put} = V_n^{E,put}$. Πράγματι, για $n = N$ ισχύει με προφανή τρόπο και υποθέτοντας ότι ισχύει για κάποιο $n$ θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n-1$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
H_{n-1}^{put} &= \max\left\{X_{n-1}, \left(qH_n^{u,put} + (1-q)H_n^{d,put}\right)\right\} \\
&= \max\left\{X_{n-1}, \left(qV_n^{u,E,put} + (1-q)V_n^{d,E,put}\right)\right\} \\
&= \max\{X_{n-1}, V_{n-1}^{E,put}\} \\
&= V_{n-1}^{E,put}
\end{aligned}$$

Τέλος, εφόσον δεν υπάρχουν επιπλέον χρήματα στο χαρτοφυλάκιο κατά το χρόνο $n$ τότε

$$V_n^{AC,put} = V_n^{A,put}, \quad (\text{όταν } r = 0).$$

## 8.8 Αναλογία αγοράς - πώλησης Αμερικανικών συμβολαίων

Θεωρούμε τώρα ένα Αμερικανικό συμβόλαιο αγοράς με τιμή εξάσκησης $K$ και το αντίστοιχο συμβόλαιο πώλησης. Η επόμενη αναλογία ισχύει σε ένα διωνυμικό μοντέλο $N$-περιόδων, όταν $r \geq 0$,

$$H_n^{call} - H_n^{put} \leq S_n - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}}, \quad n = 0, \cdots, N$$

Για να το αποδείξουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ότι $H_n^{call} = V_n^{E,call}$ και ότι $V_n^{E,put} \leq H_n^{put}$ και επομένως έχουμε

$$H_n^{call} - H_n^{put} \leq V_n^{E,call} - V_n^{E,put} = S_n - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}}$$

Η επόμενη ανισότητα επίσης ισχύει

$$S_n - K \leq H_n^{call} - H_n^{put}, \quad n = 0, \cdots, N$$

Θα την αποδείξουμε με επαγωγή. Για $n = N$ έχουμε ότι

$$H_N^{call} - X_N^{put} = S_N - K$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n$, δηλαδή

$$H_n^{call} - H_n^{put} \geq S_n - K$$

και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n-1$, δηλαδή

$$H_{n-1}^{call} - H_{n-1}^{put} \geq S_{n-1} - K$$

Σημειώστε ότι

$$\begin{aligned}
H_{n-1}^{put} &= \max\left\{(K - S_{n-1})^+, \frac{1}{1+r}\left(qH_n^{u,put} + (1-q)H_n^{d,put}\right)\right\} \\
H_{n-1}^{call} &= \max\left\{(S_{n-1} - K)^+, \frac{1}{1+r}\left(qH_n^{u,call} + (1-q)H_n^{d,call}\right)\right\}
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
& H_{n-1}^{call} - H_{n-1}^{put} \\
= \ & H_{n-1}^{call} + \min\left\{-(S_{n-1} - K)^-, \frac{-1}{1+r}\left(qH_n^{u,put} + (1-q)H_n^{d,put}\right)\right\} \\
= \ & \min\left\{H_{n-1}^{call} - (S_{n-1} - K)^-, H_{n-1}^{call} - \frac{1}{1+r}\left(qH_n^{u,put} + (1-q)H_n^{d,put}\right)\right\} \\
\geq \ & \min\left\{(S_{n-1} - K), \frac{\left(q(H_n^{u,call} - H_n^{u,put}) + (1-q)(H_n^{d,call} - H_n^{d,put})\right)}{1+r}\right\} \\
\geq \ & \min\left\{(S_{n-1} - K), \frac{(q(uS_{n-1} - K) + (1-q)(dS_{n-1} - K))}{1+r}\right\} \\
\geq \ & S_{n-1} - K
\end{aligned}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει τις προφανείς ανισότητες

$$H_{n-1}^{call} \geq (S_{n-1} - K)^+$$

και

$$H_{n-1}^{call} \geq \frac{1}{1+r}\left(qH_n^{u,call} + (1-q)H_n^{d,call}\right)$$

Συνολικά έχουμε αποδείξει τις ανισότητες - αναλογίες για τις τιμές των Αμερικανικών δικαιωμάτων (put - call parity),

$$\boxed{S_n - K \leq H_n^{call} - H_n^{put} \leq S_n - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}}, \quad n = 0, \cdots, N}$$

### 8.8.1 Φράγματα για τις αξίες των συμβολαίων

Θα αποδείξουμε το παρακάτω φράγμα,

$$V_n^{E,call} = H_n^{call} \leq S_n$$

Για $n = N$ έχουμε ότι

$$V_N^{E,call} = (S_N - K)^+ \leq S_N$$

Υποθέτουμε ότι

$$V_n^{E,call} \leq S_n$$

και θα αποδείξουμε ότι

$$V_{n-1}^{E,call} \leq S_{n-1}$$

Ισχύει το εξής

$$V_{n-1}^{E,call} = \frac{1}{1+r}\left(qV_n^{u,E,call} + (1-q)V_n^{d,E,call}\right) \leq \frac{1}{1+r}\left(quS_{n-1} + (1-q)dS_{n-1}\right) = S_{n-1}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι

$$V_n^{E,call} \geq S_n - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}}$$

Για $n = N$ ισχύει ότι

$$V_N^{E,call} = (S_N - K)^+ \geq S_N - K$$

Έστω ότι ισχύει για κάποιο $n$, δηλαδή

$$V_n^{E,call} \geq S_n - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}}$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$V_{n-1}^{E,call} \geq S_{n-1} - K\frac{1}{(1+r)^{N-n+1}}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
& V_{n-1}^{E,call} \\
= \ & \frac{\left(qV_n^{u,E,call} + (1-q)V_n^{d,E,call}\right)}{1+r} \\
\geq \ & \frac{\left(q(uS_{n-1} - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}}) + (1-q)(dS_{n-1} - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}})\right)}{1+r} \\
= \ & S_{n-1} - K\frac{1}{(1+r)^{N-n+1}}
\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε αποδείξει ότι

$$\boxed{S_n - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}} \leq V_n^{E,call} = H_n^{call} \leq S_n, \quad n = 0, \cdots, N}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι

$$\boxed{K\frac{1}{(1+r)^{N-n}} - S_n \leq V_n^{E,put} \leq K\frac{1}{(1+r)^{N-n}}, \quad n = 0, \cdots, N}$$

Για $n = N$ προφανώς ισχύει ότι

$$K - S_N \leq V_N^{E,put} \leq K$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο $n$, δηλαδή,

$$K\frac{1}{(1+r)^{N-n}} - S_n \leq V_n^{E,put} \leq K\frac{1}{(1+r)^{N-n}}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n-1$ δηλαδή

$$K\frac{1}{(1+r)^{N-n+1}} - S_{n-1} \leq V_{n-1}^{E,put} \leq K\frac{1}{(1+r)^{N-n+1}}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
V_{n-1}^{E,put} &= \frac{\left(qV_n^{u,E,put} + (1-q)V_n^{d,E,put}\right)}{1+r} \\
&\leq K\frac{1}{(1+r)^{N-n+1}}
\end{aligned}$$

ενώ

$$
\begin{aligned}
& V_{n-1}^{E,put} \\
= & \frac{\left(qV_n^{u,E,put} + (1-q)V_n^{d,E,put}\right)}{1+r} \\
\geq & \frac{\left(q(K\frac{1}{(1+r)^{N-n}} - uS_{n-1}) + (1-q)(K\frac{1}{(1+r)^{N-n}} - dS_{n-1})\right)}{1+r} \\
= & K\frac{1}{(1+r)^{N-n+1}} - S_{n-1}
\end{aligned}
$$

Τέλος για Αμερικανικά δικαιώματα πώλησης έχουμε προφανώς

$$\boxed{(K - S_n)^+ \leq H_n^{put}, \quad n = 0, \cdots, N}$$

αλλά και

$$\boxed{H_n^{put} \leq K, \quad n = 0, \cdots, N}$$

Για $n = N$ είναι προφανές. Θα υποθέσουμε ότι ισχύει για κάποιο $n$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για $n-1$, δηλαδή

$$H_{n-1}^{put} \leq K$$

Πράγματι,

$$
\begin{aligned}
H_{n-1}^{put} &= \max\left\{(K - S_{n-1})^+, \frac{1}{1+r}\left(qH_n^{u,put} + (1-q)H_n^{d,put}\right)\right\} \\
&\leq \max\left\{(K - S_{n-1})^+, \frac{1}{1+r}K\right\} \\
&\leq K
\end{aligned}
$$

□

Όλες οι παραπάνω σχέσεις, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της εργασίας [;], ικανοποιούνται και στο αντίστοιχο συνεχούς χρόνου μοντέλο, δηλαδή για τη λύση της εξίσωσης Black-Scholes για τα Ευρωπαϊκά συμβόλαια και για την αντίστοιχη μεταβολική ανισότητα για τα Αμερικανικά συμβόλαια.
Οι αναλογίες αγοράς - πώλησης, η σχέση μεταξύ Αμερικανικών και Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων καθώς και τα φράγματα αποδείχτηκαν συγκεκριμένα για το διωνυμικό μοντέλο. Χρησιμοποιώντας τη μη ύπαρξη ευκαιρίας σίγουρου κέρδους μπορεί κάποιος να αποδείξει ότι ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις και για τις πραγματικές τιμές (δες [;]).

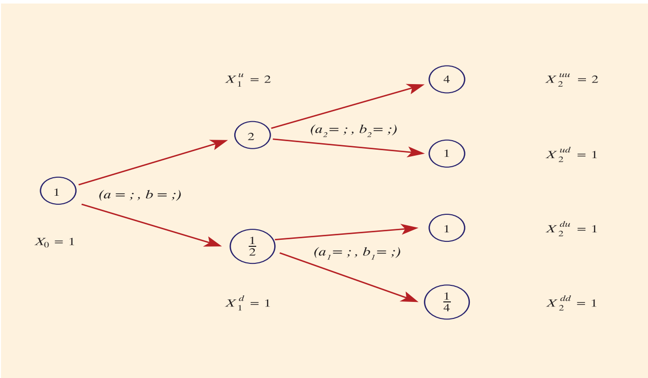
**Ασκηση 183 (Barrier options)** *Θεωρήστε ένα Αμερικανικό δικαίωμα με απολαβή*

$$X_n = \min\Big\{\max\{S_n, K_1\}, K_2\Big\}.$$

*Τα δεδομένα μας είναι* $u = 2$, $d = 1/2$, $S_0 = 1$, $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $r = 1/2$, $N = 2$. *Υπολογίστε τις αξίες του συμβολαίου σε όλες τις χρονικές στιγμές* $n$ *καθώς και τη στρατηγική επένδυσης.*

**Απάντηση.** Σχηματίζουμε το δέντρο τιμών της μετοχής, θεωρώντας ένα διωνυμικό μοντέλο δυο περιόδων, αφού πρώτα υπολογίσουμε όλες τις πιθανές απολαβές

$$\begin{aligned}
X_2^{uu} &= \min\{\max\{S_2^{uu}, 1\}, 2\} = 2,\\
X_2^{ud} &= \min\{\max\{S_2^{ud}, 1\}, 2\} = 1 = X_2^{du},\\
X_2^{dd} &= \min\{\max\{S_2^{dd}, 1\}, 2\} = 1,\\
X_1^{u} &= \min\{\max\{S_1^{u}, 1\}, 2\} = 2,\\
X_1^{d} &= \min\{\max\{S_1^{d}, 1\}, 2\} = 1,\\
X_0 &= \min\{\max\{S_0, 1\}, 2\} = 1
\end{aligned}$$




Σχήμα 8.17

Θα υπολογίσουμε τώρα την αξία του συμβολαίου σε κάθε χρονική στιγμή και σε κάθε πιθανή τιμή της μετοχής. Στο χρόνο $n = 2$ η αξία του συμβολαίου θα είναι ίση με την απολαβή διότι αν πουληθεί το συμβόλαιο εκείνη τη στιγμή θα εξασκηθεί αμέσως, επομένως, ότι χρήματα θα πάρει ο πωλητής θα πρέπει να καταβάλλει στον αγοραστή προκειμένου να μην υπάρχει ευκαιρία σίγουρου κέρδους. 'ρα

$$\begin{aligned}
H_2^{uu} &= X_2^{uu},\\
H_2^{ud} &= X_2^{ud},\\
H_2^{dd} &= X_2^{dd}
\end{aligned}$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο

$$H_n = \max\Big\{X_n, \frac{1}{1+r}\left(qH_{n+1}^u + (1-q)H_{n+1}^d\right)\Big\}, \quad n = 0, 1$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} H_1^u &= \max\left\{X_1^u, \frac{1}{1+r}\left(qH_2^{uu} + (1-q)H_2^{ud}\right)\right\}, \\ H_1^d &= \max\left\{X_1^d, \frac{1}{1+r}\left(qH_2^{du} + (1-q)H_2^{dd}\right)\right\}, \\ H_0 &= \max\left\{X_0, \frac{1}{1+r}\left(qH_1^{u} + (1-q)H_1^{d}\right)\right\} \end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε παρακάτω την αντισταθμιστική στρατηγική. Στο χρόνο $n = 0$ ο πωλητής θα πρέπει να έχει στην κατοχή του $a$ το πλήθος μετοχές και $b$ χρήματα στην τράπεζα έτσι ώστε τη χρονική στιγμή $n = 1$ η αξία του χαρτοφυλακίου του να είναι ίση ή μεγαλύτερη από την αξία του συμβολαίου. Πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω δυο εξισώσεις,

$$\begin{aligned} auS_0 + b(1+r) &= H_1^u, \\ adS_0 + b(1+r) &= H_1^d \end{aligned}$$

από όπου και υπολογίζουμε τους δυο αγνώστους $a, b$. Στη συνέχεια, και στην περίπτωση που η μετοχή ανέβει, θα υπολογίσουμε τα $a_2, b_2$ τα οποία θα είναι τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} a_2uuS_0 + b_2(1+r) &= H_2^{uu}, \\ a_2udS_0 + b_2(1+r) &= H_2^{ud} \end{aligned}$$

ενώ στην περίπτωση που η μετοχή κατέβει θα υπολογίσουμε τα $a_1, b_1$ από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_1duS_0 + b_1(1+r) &= H_2^{du}, \\ a_1ddS_0 + b_1(1+r) &= H_2^{dd} \end{aligned}$$

**Άσκηση 184 (Look-back options)** *Θεωρείστε Αμερικανικά δικαιώματα με τις παρακάτω απολαβές,*

$$\begin{aligned} X_n^1 &= \max\{S_n^{max} - K, 0\}, \\ X_n^2 &= \max\{K - S_n^{min}, 0\}, \\ X_n^3 &= S_n - S_n^{min}, \\ X_n^4 &= S_n^{max} - S_n \end{aligned}$$

*όπου* $S_n^{max} = \max\{S_0, \cdots, S_n\}$ *και* $S_n^{min} = \min\{S_0, \cdots, S_n\}$. *Τα δεδομένα μας είναι* $u = 2$, $d = 1/2$, $S_0 = 1$, $K = 3/2$, $r = 1/2$, $N = 2$. *Υπολογίστε τις αξίες των συμβολαίων σε όλες τις χρονικές στιγμές* $n$ *καθώς και τη στρατηγική επένδυσης.*

**Απάντηση.** Θα υπολογίσουμε πρώτα τα $S_n^{max}, S_n^{min}$ σε κάθε πιθανή εξέλιξη της μετοχής. Έτσι στο μονοπάτι $uu$ έχουμε ότι $S_2^{max,uu} = 4$ στο μονοπάτι $ud$ έχουμε

$S_2^{max,ud} = 2$, στο μονοπάτι $du$ έχουμε $S_2^{max,du} = 1$ και τέλος στο μονοπάτι $dd$ έχουμε $S_2^{max,dd} = 1$. Επίσης, $S_1^{max,u} = 2$ και $S_1^{max.d} = 1$. Παρόμοια για τον υπολογισμό των $S_n^{min}$. Θα υπολογίσουμε τώρα τις απολαβές $X^1$,

$$\begin{aligned}
X_2^{1,uu} &= \max(S_2^{max,uu} - K, 0) = \max(4 - 3/2, 0) = 5/2, \\
X_2^{1,ud} &= \max(S_2^{max,ud} - K, 0) = \max(2 - 3/2, 0) = 1/2, \\
X_2^{1,du} &= \max(S_2^{max,du} - K, 0) = \max(1 - 3/2, 0) = 0, \\
X_2^{1,dd} &= \max(S_2^{max,dd} - K, 0) = \max(1 - 3/2, 0) = 0, \\
X_1^{1,u} &= \max(S_1^{max,u} - K, 0) = \max(2 - 3/2, 0) = 1/2, \\
X_1^{1,d} &= \max(S_1^{max,d} - K, 0) = \max(1 - 3/2, 0) = 0, \\
X_0 &= \max(1 - 3/2, 0) = 0.
\end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε ότι $X^{1,ud} \neq X^{1,du}$ δηλαδή η απολαβή εξαρτάται όχι μόνο από τη τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή 1 αλλά και από το συγκεκριμένο μονοπάτι που ακολούθησε για να φτάσει σε αυτή την τιμή.

Για να υπολογίσουμε την αξία του συμβολαίου $H_n$ εξισώνουμε τα αντίστοιχα $H_2$ με τα $X_2^1$ και έπειτα χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο

$$H_n = \max\left\{X_n^1, \frac{1}{1+r}\left(qH_{n+1}^u + (1-q)H_{n+1}^d\right)\right\}$$

Για να υπολογίσουμε τις στρατηγικές αντιστάθμισης θα σχηματίσουμε τα αντίστοιχα συστήματα δυο εξισώσεων με δύο αγνώστους, δηλαδή,

$$\begin{aligned}
auS_0 + b(1+r) &= H_1^u, \\
adS_0 + b(1+r) &= H_1^d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2uuS_0 + b_2(1+r) &= H_2^{uu}, \\
a_2udS_0 + b_2(1+r) &= H_2^{ud}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1duS_0 + b_1(1+r) &= H_2^{du}, \\
a_1ddS_0 + b_1(1+r) &= H_2^{dd}
\end{aligned}$$

Εντελώς παρόμοια εργαζόμαστε και στις άλλες περιπτώσεις απολαβών. □

**Άσκηση 185 (Asian options)** *Θεωρείστε ένα Αμερικανικό δικαίωμα με τις παρακάτω πιθανές απολαβές,*

$$\begin{aligned}
X_n^1 &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} S_i, \ (\text{αριθμητικός μέσος όρος}) \\
X_n^2 &= \sqrt[n+1]{\prod_{i=0}^{n} S_i}, \ (\text{γεωμετρικός μέσος όρος})
\end{aligned}$$

*Τα δεδομένα μας είναι* $u = 2$, $d = 1/2$, $S_0 = 1$, $r = 1/2$, $N = 2$. *Υπολογίστε τις αξίες του συμβολαίου σε όλες τις χρονικές στιγμές* $n$ *καθώς και τη στρατηγική επένδυσης.*

**Απάντηση.** Το πρώτο που κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τις απολαβές για όλα τα πιθανά μονοπάτια της μετοχής. Έχουμε

$$\begin{aligned}
X_2^{1,uu} &= \frac{S_0 + uS_0 + uuS_0}{3} = 7/3, \\
X_2^{1,ud} &= \frac{S_0 + uS_0 + udS_0}{3} = 4/3, \\
X_2^{1,du} &= \frac{S_0 + dS_0 + duS_0}{3} = 5/6, \\
X_2^{1,dd} &= \frac{S_0 + dS_0 + ddS_0}{3} = 7/12, \\
X_1^{1,u} &= \frac{S_0 + uS_0}{2} = 3/2, \\
X_1^{1,d} &= \frac{S_0 + dS_0}{2} = 3/4, \\
X_0 &= 1
\end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε και πάλι ότι οι απολαβές εξαρτώνται όχι μόνο από την τρέχουσα τιμή της μετοχής αλλά και από τη διαδρομή που ακολούθησε μέχρι εκεί.
Για να υπολογίσουμε τις αξίες του συμβολαίου εξισώνουμε τις $H_2$ με τις αντίστοιχες $X_2$ και έπειτα χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο. Τέλος, υπολογίζουμε την αντισταθμιστική στρατηγική εντελώς παρόμοια με τις προηγούμενες ασκήσεις.
Εντελώς παρόμοια είναι και η περίπτωση του γεωμετρικού μέσου όρου. □

**Άσκηση 186 (Bermudan options)** *Θεωρείστε ένα διωνυμικό μοντέλο* $N$ *περιόδων και ένα συμβόλαιο με απολαβή* $X_n$ *σε κάθε χρονική στιγμή και το οποίο ο αγοραστής μπορεί να εξασκήσει μόνο στις χρονικές στιγμές* $n = 1$, $n = 3$ *και γενικά* $n = 2k + 1$ *καθώς και στη λήξη του συμβολαίου. Υπολογίστε τις αξίες του συμβολαίου σε όλες τις χρονικές στιγμές* $n$ *καθώς και τη στρατηγική επένδυσης.*

**Απάντηση.** Για να υπολογίσουμε την αξία του συμβολαίου σε κάθε χρονική στιγμή εξισώνουμε αρχικά τις $H_N$ με τις $X_N$ αφού ο αγοραστής μπορεί να εξασκήσει την χρονική στιγμή $n = N$.
Για τις χρονικές στιγμές $n = 2k$ εφόσον ο αγοραστής δεν μπορεί να εξασκήσει τότε τα ελάχιστα χρήματα που χρειάζεται ο πωλητής είναι αυτά για να περάσει στο επόμενο βήμα, δηλαδή,

$$H_{2k} = \frac{1}{1+r}\left(qH_{2k+1}^u + (1-q)H_{2k+1}^d\right)$$

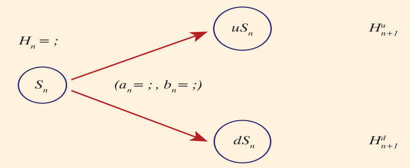
Τις χρονικές στιγμές $n = 2k + 1$ ο αγοραστής έχει το δικαίωμα να εξασκήσει αν τον συμφέρει. Επομένως, ο πωλητής χρειάζεται να έχει τουλάχιστον τα χρήματα της απολαβής για τη χρονική στιγμή $n = 2k+1$ αλλά και τα χρήματα για να προχωρήσει στο επόμενο βήμα αν χρειαστεί. Δηλαδή,

$$H_{2k+1} = \max\left\{X_{2k+1}, \frac{1}{1+r}\left(qH^u_{2k+2} + (1-q)H^d_{2k+2}\right)\right\}$$

Για να υπολογίσουμε την αντισταθμιστική στρατηγική επένδυσης δουλεύουμε ως συνήθως.

$$\begin{aligned} a_n uS_n + b_n(1+r) &= H^u_{n+1}, \\ a_n dS_n + b_n(1+r) &= H^d_{n+1} \end{aligned}$$

με $n = 0, \cdots, N-1$ όπου $a_n, b_n$ είναι το πλήθος των μετοχών και της κατάθεσης σε τράπεζα αντίστοιχα οι οποίες πρέπει να γίνουν τη χρονική στιγμή $n$ έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο να έχει τις απαιτούμενες αξίες τη χρονική στιγμή $n+1$.
Αν απομονώσουμε μια χρονική στιγμή $n$ τότε σχηματικά έχουμε



Σχήμα 8.18

□

**Άσκηση 187 (Shout options)** *Θεωρείστε ένα διωνυμικό μοντέλο $N$-περιόδων και ένα συμβόλαιο με απολαβή $X_n$ την κάθε χρονική στιγμή. Υποθέτουμε ότι ο αγοραστής έχει τη δυνατότητα να «κλειδώσει» την απολαβή μιας ενδιάμεσης χρονικής στιγμής (όποτε το επιλέξει) έστω $n_0$ και στη λήξη του συμβολαίου η απολαβή του να είναι*

$$\max(X_N, X_{n_0})$$

*Υπολογίστε την αξία του συμβολαίου σε κάθε χρονική στιγμή καθώς και την στρατηγική αντιστάθμισης.*

**Απάντηση.** Ο πωλητής δεν γνωρίζει εκ των προτέρων ποια χρονική στιγμή θα κλειδώσει ο αγοραστής επομένως δεν μπορεί παρά να υποθέσει το χειρότερο σενάριο, δηλαδή να κλειδώσει τη χρονική στιγμή όπου η απολαβή είναι η μέγιστη δυνατή για το κάθε πιθανό μονοπάτι. 'ρα η απολαβή του αγοραστή μπορούμε να υποθέσουμε ότι θα είναι

$$Y_N = \max\{X_N, \max_{n\in\{0,\cdots,N-1\}} X_n\}$$

Εξισώνοντας τις $H_N$ με $Y_N$ και χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο

$$H_n = \frac{1}{1+r}\left(qH^u_{n+1} + (1-q)H^d_{n+1}\right)$$

υπολογίζουμε την αξία του συμβολαίου σε κάθε χρονική στιγμή. Στη συνέχεια υπολογίζουμε και τη στρατηγική αντιστάθμισης με το γνωστό τρόπο.
Στην περίπτωση που μπορεί να κλειδώσει σε προκαθορισμένες χρονικές στιγμές, έστω $n_0, n_1, \cdots, n_m$ τότε αρκεί να υποθέσουμε ότι η απολαβή του αγοραστή θα είναι

$$Y_N = \max\{X_N, \max_{n\in\{n_0,n_1,\cdots,n_m\}} X_n\}$$

□

**Άσκηση 188 (Chooser options)** *Θεωρείστε $m$ συμβόλαια με απολαβές $X^1_n$, $X^2_n$ ,$\cdots$,$X^m_n$ σε κάθε χρονική στιγμή. Υποθέτοντας ένα διωνυμικό δέντρο $N$-περιόδων υπολογίστε την αξία ενός συμβολαίου στο οποίο ο αγοραστής έχει το δικαίωμα τη χρονική στιγμή $n = n_0$ (εκ των προτέρων γνωστή) να αποφασίσει ποιο από τα $m$ συγκεκριμένα συμβόλαια θα εξασκήσει στο χρόνο $N$. Τι γίνεται αν δεν είναι προκαθορισμένος ο χρόνος επιλογής $n_0$;*

**Απάντηση.** Τη χρονική στιγμή $n = n_0$ ο αγοραστής θα πρέπει να επιλέξει ποιο από όλα τα συμβόλαια θα εξασκήσει τη χρονική στιγμή $n = N$. Αρκεί να υποθέσουμε ότι η αξία του συμβολαίου τη χρονική στιγμή $N$ είναι ίση με

$$H_N = \max\{X^1_N, \cdots, X^m_N\}$$

Αν ο αγοραστής δεν επιλέξει το μέγιστο τότε ο πωλητής μπορεί να καταναλώσει τη διαφορά και να χρησιμοποιήσει τα υπόλοιπα για κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου.
Γνωρίζοντας την αξία του συμβολαίου τη χρονική στιγμή $n = N$ υπολογίζουμε τις αξίες στους χρόνους $n = 0, ..., N-1$ με τον αναδρομικό τύπο

$$H_n = \frac{1}{1+r}\left(qH^u_{n+1} + (1-q)H^d_{n+1}\right)$$

□

## 8.9 Μοντέλο Συνεχούς Χρόνου (Black - Scholes)

Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε σε μια αγορά, στην οποία διαπραγματευόμαστε μια μόνο μετοχή. Θα εργαστούμε σε αυτή περίπτωση (μια διάσταση δηλαδή), για να αποφύγουμε μαθηματικές δυσκολίες και να δούμε την ουσία.
Θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με φίλτρο $\mathcal{F}_t$ το οποίο παράγεται από την κίνηση Brown. Θα δώσουμε το μαθηματικό φορμαλισμό για την περίπτωση των

Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων. Το μοντέλο που θα περιγράψουμε ονομάζεται μοντέλο των Black-Scholes το οποίο είναι μια προσπάθεια να αποτυπωθεί η πραγματικότητα (πώς κινούνται δηλαδή οι μετοχές). Το μοντέλο αυτό περιγράφει αρκετά καλά την κίνηση των μετοχών αλλά όχι ακριβώς. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί και άλλα μοντέλα, πιο περίπλοκα. Θα ασχοληθούμε με το μοντέλο των Black-Scholes διότι είναι απλούστερο και καταλήγει σε εύκολα υπολογίσιμες ποσότητες.

Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής κατασκευάζει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από κατάθεση σε λογαριασμό τραπέζης (ή σε ομόλογα) με εξασφαλισμένη απόδοση με ετήσιο επιτόκιο $r$ συνεχούς ανατοκισμού. Αν υποθέσουμε ότι $B_t$ είναι το ποσό τη χρονική στιγμή $t$ με $B_0 = 1$ τότε θα έχουμε $B_t = e^{rt}$ όπου $t$ σε πολλαπλάσια του έτους (όχι κατά ανάγκη ακέραια). Στην περίπτωση που στην επένδυση εξασφαλισμένης απόδοσης εφαρμόζεται περιοδικός ανατοκισμός (π.χ. ετήσιο επιτόκιο $i$ μηνιαίου ανατοκισμού) τότε είτε θα πρέπει να εργαστούμε χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο είτε να υπολογίσουμε το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο $r$ συνεχούς ανατοκισμού. Στην τελευταία αυτή περίπτωση θα αποκλίνουμε λίγο από την πραγματικότητα αφού τα τοκιζόμενα ποσά θα είναι ίσα μόνο σε πολλαπλάσια του μήνα.

Υποθέτουμε επίσης ότι η κίνηση της υποκείμενης μετοχής ακολουθεί την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση,

$$S_t = S_0 + \int_0^t mS_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s$$

όπου $\sigma \neq 0$ είναι η λεγόμενη μεταβλητότητα της μετοχής. Η λύση της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (m - \sigma^2/2)t} \quad \text{(δες παράδειγμα ;;)}$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 189** *Μια στρατηγική επένδυσης είναι μια στοχαστική διαδικασία* $\phi = (a_t, b_t)$, *προσαρμοσμένη στο* $\mathcal{F}_t$ *και τέτοιες ώστε*

$$\int_0^T |a_t| dt + \int_0^T b_t^2 dt < \infty.$$

*Η αξία του χαρτοφυλακίου* $\phi = (a, b)$ *δίνεται από την στοχαστική διαδικασία,*

$$V_t(\phi) = a_t S_t + b_t B_t$$

Δηλαδή, $a_t$ είναι το πλήθος των μετοχών που υπάρχουν στο χαρτοφυλάκιο και $b_t$ η παρούσα αξία (δηλαδή στον χρόνο 0) του ποσού που έχει εξασφαλισμένη απόδοση (π.χ. κατάθεση σε τράπεζα ή επένδυση σε ομόλογα).

### 8.9.1 Αυτοχρηματοδοτούμενη Στρατηγική Επένδυσης

**ΟΡΙΣΜΟΣ 190** *Μια στρατηγική επένδυσης $\phi = (a_t, b_t)$ ονομάζεται αυτοχρηματοδοτούμενη αν*

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t b_s dB_s,$$

*όπου $dS_t = mS_t dt + \sigma S_t dW_t$ και $dB_t = re^{rt}dt$.*

Αυτό στην πράξη σημαίνει ότι αλλαγές στην τιμή του χαρτοφυλακίου συμβαίνουν μόνο μετά από αλλαγές της τιμής της μετοχής και του ομολόγου, δηλαδή δεν προστίθενται χρήματα ούτε εξαργυρώνονται από το χαρτοφυλάκιο.
Συμβολίζουμε με $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$ και $\tilde{V}_t = e^{-rt}V_t$ τις κανονικοποιημένες στοχαστικές διαδικασίες. Δηλαδή, οι κανονικοποιημένες στοχαστικές διαδικασίες είναι μετρημένες σε πολλαπλάσια του $B_t$, έχουν ως μονάδα μέτρησης το $B_t$. Κάθε μετοχή ή άλλο περιουσιακό στοιχείο που όμως έχει πάντοτε θετικές τιμές σε όλους τους χρόνους μπορεί να παίξει το ρόλο της μονάδας μέτρησης (numeraire). Η $B_t^{-1}$ ικανοποιεί

$$B_t^{-1} = 1 - r\int_0^t B_s^{-1} ds \qquad (\text{γιατί;})$$

**ΛΗΜΜΑ 191** *Για την κανονικοποιημένη $\tilde{S}_t$ έχουμε την εξής σχέση*

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + (m-r)\int_0^t \tilde{S}_s ds + \sigma\int_0^t \tilde{S}_s dW_s.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θα χρησιμοποιήσουμε τη στοχαστική ολοκλήρωση κατά μέρη για το γινόμενο $S_t e^{-rt}$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\tilde{S}_t = S_0 &+ \int_0^t (-r) S_s B_s^{-1} ds + \int_0^t S_s \cdot 0 dW_s \\ + \int_0^t m B_s^{-1} S_s ds &+ \int_0^t \sigma B_s^{-1} S_s dW_s + \int_0^t \sigma S_s \cdot 0 ds.\end{aligned}$$

□

Έχουμε την παρακάτω πρόταση που περιγράφει (και ορίζει διαφορετικά) την έννοια της αυτοχρηματοδότησης.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 192** *Μια στρατηγική $\phi = (a, b)$ είναι αυτοχρηματοδοτούμενη ανν*

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + (m-r)\int_0^t a_s \tilde{S}_s ds + \sigma\int_0^t a_s \tilde{S}_s dW_s.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Έστω ότι είναι αυτοχρηματοδοτούμενη. Τότε

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t (ma_s S_s + rb_s e^{rs}) ds + \int_0^t \sigma a_s S_s dW_s,$$

δες Ορισμό 190. Χρησιμοποιούμε τη στοχαστική ολοκλήρωση κατά μέρη στο γινόμενο $V_t e^{-rt}$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\tilde{V}_t = V_0 &+ \int_0^t V_s(-r)B_s^{-1}ds + \int_0^t V_s \cdot 0dW_s \\ &+ \int_0^t B_s^{-1}(ma_sS_s + rb_se^{rs})ds \\ &+ \int_0^t B_s^{-1}\sigma a_sS_sdW_s + \int_0^t \sigma a_sS_s \cdot 0ds.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το $V_s$ από τον ορισμό φτάνουμε στο αποτέλεσμα.
Για το αντίστροφο, θα υποθέσουμε ότι το $\tilde{V}_t$ έχει την παραπάνω μορφή και θα υπολογίσουμε (δείξτε το) τη μορφή της $V_t = e^{rt}\tilde{V}_t$ χρησιμοποιώντας πάλι την ολοκλήρωση κατά μέρη στο γινόμενο $e^{rt}\tilde{V}_t$. □

**Παρατηρηση 193** *Αν έχουμε αποφασίσει ποια είναι η αρχική τιμή $V_0$ και η στοχαστική διαδικασία $a_t$ τότε κατασκευάζουμε μια στρατηγική επένδυσης ως εξής,*

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t a_s d\tilde{S}_s, \quad b_t = \frac{V_t - a_tS_t}{B_t}.$$

*Όπως βλέπουμε η στρατηγική $(a, b)$ είναι αυτοχρηματοδοτούμενη αντικαθιστώντας το $d\tilde{S}_t = (m-r)\tilde{S}_tdt + \sigma\tilde{S}_tdW_t$. Θυμηθείτε πώς είχαμε ορίσει το $d\tilde{S}_t$ και ότι αυτό είναι κάτι συμβολικό, δεν έχει ορισθεί με μαθηματική αυστηρότητα.*

### 8.9.2 Ευκαιρία Σίγουρου Κέρδους

**Ορισμος 194** *Μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική επένδυσης $\phi$ λέγεται ότι είναι ευκαιρία σίγουρου κέρδους (arbitrage opportunity) αν*

$$\begin{aligned}V_0(\phi) &= 0, \\ V_T(\phi) &\geq 0, \\ \mathbb{P}(V_T(\phi) > 0) &> 0 \ \ (\text{ή } \mathbb{E}(V_T(\phi)) > 0)\end{aligned}$$

**Παρατηρηση 195** *Θα κατασκευάσουμε μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική επένδυσης που αποτελεί ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Θεωρούμε τις στοχαστικές διαδικασίες*

$$B_t = 1 \quad S_t = S_0 + \int_0^t dW_s$$

*Ορίζουμε την*

$$I(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{T-s}}dW_s.$$

*Αυτή είναι μια συνεχής και προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία στο* $[0, T)$. *Θεωρούμε το χρόνο στάσης*

$$\rho_a = \inf\{t \in [0, T] : I(t) = a\}.$$

*Τέλος, κατασκευάζουμε την εξής στρατηγική επένδυσης*

$$a_t = \begin{cases} (T-t)^{-1/2} S_t^{-1} \mathbb{I}_{\{t \le \rho_a\}}, & \textit{στο } N \\ 0, & \textit{στο } N^c \end{cases}$$

$$b_t = \begin{cases} I(t \wedge \rho_a) - a_t S_t, & \textit{στο } N \\ 0, & \textit{στο } N^c \end{cases}$$

*όπου* $N$ *είναι το ενδεχόμενο μηδενικής πιθανότητας* $\{\rho_a \ge T\}$. *Μπορούμε να δείξουμε ότι η* $\phi = (a_t, b_t)$ *είναι μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική επένδυσης και μάλιστα*

$$V_t(\phi) = \int_0^t a_s S_s dW_s.$$

*Επίσης,* $V_0(\phi) = 0$ *και* $V_T(\phi) = I(\rho_a) = a > 0$ *άρα η* $\phi$ *είναι μια ευκαιρία σίγουρου κέρδους.*

### 8.9.3 Ισοδύναμο Μέτρο Martingale

**ΟΡΙΣΜΟΣ 196** *Ένα ισοδύναμο martingale μέτρο για τη στοχαστική διαδικασία* $X_t$ *είναι ένα μέτρο* $P^*$ *ορισμένο στο μετρήσιμο χώρο* $(\Omega, \mathcal{F})$ *τ.ω. τα* $P, P^*$ *είναι ισοδύναμα και η* $X_t$ *είναι martingale κάτω από το* $P^*$.

Σημαντικό το επόμενο θεώρημα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 197** *Υπάρχει ισοδύναμο μέτρο* $P^*$ *για την* $\tilde{S}_t$.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Ας θυμηθούμε τη σχέση που ικανοποιεί η $\tilde{S}_t$.

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + (m-r) \int_0^t \tilde{S}_s ds + \sigma \int_0^t \tilde{S}_s dW_s.$$

Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα ;; και διαλέγοντας $H(t) = \frac{m-r}{\sigma}$ διαπιστώνουμε ότι η $\tilde{S}_t$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + \int_0^t \sigma \tilde{S}_s d\hat{W}_s$$

όπου $\hat{W}_t = W_t + \frac{(m-r)t}{\sigma}$ η οποία είναι επίσης κίνηση Brown στο νέο μέτρο $P^*$. Από το θεώρημα ;; (δες και παράδειγμα ;;) έχουμε ότι η $\tilde{S}_t$ έχει φραγμένες ροπές όλων των τάξεων επομένως παίρνοντας δεσμευμένη μέση τιμή της παραπάνω σχέσης δεδομένης της $\mathcal{F}_s$ και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ιδιότητα (ιδιότητα martingale) του στοχαστικού ολοκληρώματος έχουμε ότι η $\tilde{S}_t$ είναι martingale κάτω από το μέτρο $P^*$. □

**Άσκηση 198** *Υπάρχει ισοδύναμο μέτρο martingale για την $\tilde{V}_t$; Ποια είναι η σχέση του με το ισοδύναμο μέτρο martingale για την $\tilde{S}_t$; Είναι άραγε μοναδικό;*

**Ορισμος 199** *Μια αποδεκτή στρατηγική είναι μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική επένδυσης $\phi$ τ.ω. η $\tilde{V}_t$ είναι μη αρνητική και τέτοια ώστε*

$$\mathbb{E}_{P^*}\left(\sup_{t\in[0,T]} \tilde{V}_t\right)^2 < \infty$$

### 8.9.4 Θεμελιώδη θεωρήματα Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Θα αφήσουμε για λίγο το μοντέλο των Black-Scholes και θα δώσουμε δυο αποτελέσματα που μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε μοντέλο αγοράς. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η αγορά μας αποτελείται από μια μετοχή της οποίας η τιμή στο χρόνο $t$ είναι $S_t$. Δεν υποθέτουμε ότι ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown κατά ανάγκη. Επίσης, η αγορά μας επιτρέπει την κατάθεση ή το δανεισμό σε/από τράπεζα με επιτόκιο $r$. Το χαρτοφυλάκιό μας θα είναι

$$V_t = a_t S_t + b_t B_t$$

όπου $a_t$ είναι ο αριθμός των μετοχών που έχουμε στο χρόνο $t$, $b_t$ είναι το ποσό των χρημάτων στην τράπεζα και $B_t = e^{rt}$, δηλαδή υποθέτουμε συνεχή ανατοκισμό. Με $\tilde{V}_t = e^{-rt}V_t$ συμβολίζουμε την κανονικοποιημένη τιμή του χαρτοφυλακίου.
Εργαζόμαστε στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ μαζί με το φυσικό φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t$ που παράγεται από την κίνηση Brown. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

**Θεωρημα 200 (Πρώτο θεμελιώδες θεώρημα)** *Αν για ένα μοντέλο αγοράς υπάρχει ισοδύναμο μέτρο martingale για την $\tilde{V}_t$ τότε το μοντέλο αγοράς δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους.*

**Αποδειξη.** Όπως έχουμε δει, αν υπάρχει τέτοιο ισοδύναμο μέτρο $Q$ τότε η κανονικοποιημένη τιμή του χαρτοφυλακίου $\tilde{V}_t$ είναι martingale (δες ορισμό 196). Αυτό σημαίνει ότι $\mathbb{E}_Q(\tilde{V}_T) = V_0$. Έστω λοιπόν ένα χαρτοφυλάκιο με $V_0 = 0$. Τότε και $\mathbb{E}_Q(\tilde{V}_T) = 0$. Ας υποθέσουμε ότι

$$P(\{\tilde{V}_T < 0\}) = 0$$

Αφού το $Q$ είναι ισοδύναμο με το $P$ τότε και

$$Q(\{\tilde{V}_T < 0\}) = 0$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι και

$$Q(\{\tilde{V}_T > 0\}) = 0$$

αφού $\mathbb{E}_Q(\tilde{V}_T) = 0$. Πράγματι, ισχύει ότι

$$Q\left(\{\tilde{V}_T > 0\}\right) = Q\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tilde{V}_T > 0\}\right) = \lim_{n\to\infty} Q\left(\{\tilde{V}_T > \frac{1}{n}\}\right) = 0$$

αφού

$$Q\left(\{\tilde{V}_T > \frac{1}{n}\}\right) \leq n\mathbb{E}(\tilde{V}_T) = 0$$

Χρησιμοποιώντας πάλι την ισοδυναμία των μέτρων προκύπτει ότι και

$$P(\{\tilde{V}_T > 0\}) = 0$$

το οποίο βέβαια σημαίνει ότι $P(\{V_T = 0\}) = 1$ □

**Άσκηση 201** *Αποδείξτε ότι το μοντέλο των Black-Scholes δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους.*

**Ορισμός 202** *Ένα μοντέλο αγοράς θα ονομάζεται πλήρες αν κάθε παράγωγο μπορεί να αντισταθμιστεί.*

**Θεώρημα 203 (Δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα)** *Έστω ένα μοντέλο αγοράς για το οποίο υπάρχει ισοδύναμο μέτρο martingale για την $\tilde{V}_t$. Αν το μοντέλο είναι πλήρες τότε το ισοδύναμο μέτρο είναι μοναδικό.*

**Απόδειξη.** Υποθέτουμε ότι το μοντέλο είναι πλήρες και θα δείξουμε ότι υπάρχει αναγκαστικά μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale για την $\tilde{V}_t$. Έστω ότι υπάρχουν δυο ισοδύναμα μέτρα, τα $Q_1, Q_2$. Έστω ένα ενδεχόμενο $A \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ και έστω $X = \mathbb{I}_A e^{rT}$ (άρα η $X$ είναι $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμη). Αφού έχουμε υποθέσει ότι το μοντέλο είναι πλήρες τότε υπάρχει χαρτοφυλάκιο τ.ω. $V_T = X$. Αφού $Q_1, Q_2$ είναι και τα δυο ισοδύναμα μέτρα martingale τότε η κανονικοποιημένη $\tilde{V}_t$ θα είναι martingale κάτω και από τα δυο μέτρα. Επομένως,

$$Q_1(A) = \mathbb{E}_{Q_1}(e^{-rT}X) = \mathbb{E}_{Q_1}(e^{-rT}V_T) = V_0 = Q_2(A)$$

Αφού το $A \in \mathcal{F}$ είναι τυχαία επιλεγμένο τότε αναγκαστικά $Q_1 = Q_2$. □

Έχουμε δώσει απλοποιημένες μορφές των θεμελιωδών θεωρημάτων, για περαιτέρω πληροφορίες παραπέμπουμε στο [;].

### 8.9.5 Ευρωπαϊκά Δικαιώματα

**ΟΡΙΣΜΟΣ 204 (Ευρωπαϊκό δικαίωμα)** *Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα (European contingent claim) αντιπροσωπεύεται από μια $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή $X$. Μια στρατηγική αντιστάθμισης (hedging strategy) για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα $X$ είναι μια αποδεκτή στρατηγική $\phi$ τ.ω. $V_T(\phi) = X$.*

**ΘΕΩΡΗΜΑ 205 (Θεώρημα Αναπαράστασης Martingale)** *Έστω $M_t$ είναι μια συνεχής και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale κάτω από το μέτρο $P^*$. Τότε υπάρχει μια $\mathcal{B}_T \times \mathcal{F}_T$-μετρήσιμη και προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία $\eta_t$ τ.ω. $\int_0^T \eta_s^2 ds < \infty$ σχεδόν βέβαια και*

$$M_t = M_0 + \int_0^t \eta_s d\tilde{W}_s,$$

*όπου $\tilde{W}_t$ κίνηση Brown στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο $(\Omega, \mathcal{F}, P^*, \mathcal{F}_t)$.*

**ΘΕΩΡΗΜΑ 206** *Ένα οποιοδήποτε δικαίωμα που ορίζεται μέσω μιας $\mathcal{F}_T$ τυχαίας μεταβλητής $X$ τ.ω. $\mathbb{E}_{P^*} X^2 < \infty$ μπορεί να αντισταθμιστεί από μια στρατηγική επένδυσης (η οποία είναι μοναδική) και η τιμή του χαρτοφυλακίου τη στιγμή $t$ θα δίνεται από*

$$V_t = \mathbb{E}_{P^*}\left(e^{-r(T-t)} X | \mathcal{F}_t\right)$$

*Επομένως και η τιμή του δικαιώματος θα πρέπει να είναι (τουλάχιστον) ίση με την παραπάνω έκφραση προκειμένου να μπορεί να καλύψει ο πωλητής τον αγοραστή σε οποιαδήποτε περίπτωση.*

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Υποθέτουμε αρχικά ότι υπάρχει μια αποδεκτή στρατηγική επένδυσης $\phi = (a_t, b_t)$ που αντισταθμίζει το δικαίωμα. Η κανονικοποιημένη τιμή στο χρόνο $t$ του χαρτοφυλακίου είναι

$$\tilde{V}_t = a_t \tilde{S}_t + b_t$$

και εφόσον είναι αυτοχρηματοδοτούμενη (δες Πρόταση 192 και αντικατέστησε το $W_t = \hat{W}_t - \frac{m-r}{\sigma} t$) προκύπτει ότι

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \sigma a_s \tilde{S}_s d\hat{W}_s.$$

Επομένως, παίρνοντας δεσμευμένη μέση και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $\tilde{V}_t$ είναι martingale κάτω από το $P^*$, προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}_{P^*}\left(\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t\right) = \tilde{V}_t = V_t e^{-rt}$$

Όμως

$$\mathbb{E}_{P^*}\left(\tilde{V}_T|\mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}_{P^*}\left(e^{-rT}X|\mathcal{F}_t\right)$$

Οπότε

$$V_t = \mathbb{E}_{P^*}\left(e^{-r(T-t)}X|\mathcal{F}_t\right)$$

Πρέπει να δείξουμε όμως ότι υπάρχει αντισταθμιστική στρατηγική επένδυσης. Για το λόγο αυτό παρατηρούμε ότι κάτω από το μέτρο $P^*$ η στοχαστική διαδικασία

$$M_t = \mathbb{E}_{P^*}\left(e^{-rT}X|\mathcal{F}_t\right)$$

είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale. Πράγματι, για $s < t$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{P^*}(M_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}_{P^*}\left(\mathbb{E}_{P^*}(e^{-rT}X|\mathcal{F}_t)\right) \\
&= \mathbb{E}_{P^*}(e^{-rT}X|\mathcal{F}_s) \\
&= M_s
\end{aligned}$$

Από το θεώρημα αναπαράστασης των martingale έχουμε ότι υπάρχει μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία $k_t$ τ.ω. $\mathbb{E}_{P^*}\left(\int_0^T k_s^2 ds\right) < +\infty$ και

$$M_t = M_0 + \int_0^t k_s d\hat{W}_s, \quad t \in [0,T]$$

Ορίζουμε τη στρατηγική επένδυσης $a_t = \frac{k_t}{\sigma\tilde{S}_t}$ και $b_t = M_t - a_t\tilde{S}_t$ (οπότε $M_t = a_t\tilde{S}_t + b_t$) η οποία είναι αυτοχρηματοδοτούμενη (διότι αντικαθιστώντας το $k_t$ στο στοχαστικό ολοκλήρωμα βλέπουμε ότι η $M_t$ ικανοποιεί την ανάλογη σχέση για να είναι αυτοχρηματοδοτούμενη) και η τιμή του χαρτοφυλακίου δίνεται από

$$e^{rt}(a_t\tilde{S}_t + b_t) = e^{rt}M_t = \mathbb{E}_{P^*}\left(e^{-r(T-t)}X|\mathcal{F}_t\right) = V_t$$

Τέλος, θα δείξουμε ότι είναι και μοναδική. Πράγματι, έστω $(\hat{a}_s, \hat{b}_s)$ μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική αντιστάθμισης. Τότε

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \sigma\hat{a}_s\tilde{S}d\hat{W}_s,$$

και επομένως

$$\int_0^t \sigma(a_s - \hat{a}_s)\tilde{S}_s d\hat{W}_s = 0.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, παίρνοντας μέση τιμή και χρησιμοποιώντας την ισομετρία του Ito καταλήγουμε στο ότι το ολοκλήρωμα μιας μη αρνητικής ποσότητας είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι $a_s = \hat{a}_s$ σβ. και επομένως και $b_s = \hat{b}_s$ σβ. □

**Άσκηση 207** *Αποδείξτε ότι το ισοδύναμο μέτρο martingale για την $\tilde{V}_t$ στο μοντέλο Black-Scholes είναι μοναδικό.*

**Υπολογισμός Αξίας Δικαιώματος Αγοράς και Πώλησης**

**ΘΕΩΡΗΜΑ 208** *Έστω $X, Y$ δυο τ.μ. όπου η $Y$ είναι ανεξάρτητη από την σ-άλγεβρα $\mathcal{G}$ ενώ η $X$ είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμη τότε για κάθε μη αρνητική ή φραγμένη Borel συνάρτηση $\Phi$ η συνάρτηση που ορίζεται ως*

$$\phi(x) = \mathbb{E}(\Phi(x, Y))$$

*είναι συνάρτηση Borel και*

$$\mathbb{E}(\Phi(X, Y)|\mathcal{G}) = \phi(X).$$

Αν υποθέσουμε ότι $X = f(S_T)$ θα εκφράσουμε την $V_t$ σε σχέση με τα $t, S_t$. Έχουμε

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}_{P^*}\left(e^{-r(T-t)} f(S_T)|\mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathbb{E}_{P^*}\left(e^{-r(T-t)} f(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(\hat{W}_T - \hat{W}_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)})|\mathcal{F}_t\right) \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει διαιρώντας τις δυο επόμενες και λύνοντας ως προς $S_T$.

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (m - \frac{\sigma^2}{2})t},$$
$$S_T = S_0 e^{\sigma W_T + (m - \frac{\sigma^2}{2})T}$$

Επομένως, και αφού θυμηθούμε ότι, $\hat{W}_t = W_t + \frac{m-r}{\sigma} t$, παίρνουμε την παραπάνω σχέση.
Αφού η $S_t$ είναι προσαρμοσμένη ενώ η $\hat{W}_T - \hat{W}_t$ είναι ανεξάρτητη από την $\mathcal{F}_t$ τότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα 208 έχουμε ότι

$$V_t = F(t, S_t)$$

όπου

$$F(t, x) = \mathbb{E}_{P^*}\left(e^{-r(T-t)} f(x e^{r(T-t)} e^{\sigma(\hat{W}_T - \hat{W}_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)})\right)$$

Οπότε, γνωρίζοντας την πυκνότητα της $\hat{W}_T - \hat{W}_t$ και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $z = \frac{y}{\sqrt{T-t}}$ προκύπτει

$$F(t, x) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma z \sqrt{T-t}}\right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Συγκεκριμένα, αν $f(x) = (x - K)_+$, δηλαδή έχουμε ένα δικαίωμα αγοράς, τότε αν θέσουμε

$$\begin{aligned} l_t(x) &= \frac{\ln \frac{K}{x} - r(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t} \\ \Phi(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \end{aligned}$$

προκύπτει ότι, κάνοντας και την αλλαγή μεταβλητής $u = z - \sigma\sqrt{T-t}$,

$$\boxed{\begin{aligned} F(t,x) = \quad & x\Phi\left(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t}\right) \\ - \quad & Ke^{-r(T-t)}\Phi(-l_t(x)) \ (\mathbf{call}) \end{aligned}}$$

Δείξτε τα παραπάνω με κάθε λεπτομέρεια. 'ρα η τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς είναι

$$V_0 = F(0, S_0)$$

Παρατηρούμε ότι όλα είναι γνωστά στην παραπάνω σχέση εκτός από τη μεταβλητότητα της μετοχής $\sigma$, η οποία μπορεί να προσεγγισθεί με ιστορικά δεδομένα ή και με άλλους τρόπους (implied volatility).
Κάνοντας τους ίδιους συλλογισμούς και διαλέγοντας $f(x) = (K-x)_+$ έχουμε την τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης η οποία είναι

$$\boxed{F(t,x) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(l_t(x)) - x\Phi\left(l_t(x) - \sigma\sqrt{T-t}\right) \ (\mathbf{put})}$$

Ως άσκηση, δείξτε την αναλογία αγοράς - πώλησης (put-call parity) γνωρίζοντας τις εκφράσεις των αντίστοιχων τιμών.

**Κατασκευή χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης**

Έχουμε δείξει ότι η αξία του κανονικοποιημένου χαρτοφυλακίου θα πρέπει κάθε χρονική στιγμή να είναι ίση με

$$\tilde{V}_t = e^{-rt}F(t, S_t) = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$$

όπου $\tilde{F}(t,x) = e^{-rt}F(t, xe^{rt})$. Θα εφαρμόσουμε τη φόρμουλα του Ito στην $\tilde{V}_t$ σημειώνοντας ότι

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + \int_0^t \sigma\tilde{S}_s d\hat{W}_s.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t,\tilde{S}_t) = \quad & \tilde{F}(0,\tilde{S}_0) \\ & + \int_0^t \left(\tilde{F}_t(s,\tilde{S}_s) + \tilde{F}_x(s,\tilde{S}_s)\cdot 0 + \frac{\sigma^2}{2}\tilde{F}_{xx}(s,\tilde{S}_s)\tilde{S}_s^2\right) ds \\ & + \int_0^t \sigma\tilde{F}_x(s,\tilde{S}_s)\tilde{S}_s d\hat{W}_s. \end{aligned}$$

Όμως η $\tilde{V}_t$ είναι martingale και αυτό σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα ως προς $ds$ θα πρέπει να είναι μηδέν το οποίο προκύπτει από τη μοναδικότητα της ανάλυσης κατά Doob-Meyer (Doob-Meyer decomposition).

Επομένως,

$$\tilde{F}(t,\tilde{S}_t) = \tilde{F}(0,\tilde{S}_0) + \int_0^t \sigma \tilde{F}_x(s,\tilde{S}_s)\tilde{S}_s d\hat{W}_s.$$

'ρα είναι προφανές (δες απόδειξη θεωρήματος 206) ότι θα πρέπει να επιλέξουμε ως $a_t = \tilde{F}_x(t,\tilde{S}_t) = e^{-rt}F_x(t,\tilde{S}_t)$ και ως $b_t = \tilde{F}(t,\tilde{S}_t) - a_t\tilde{S}_t$. Διαπιστώνουμε ότι το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο.
Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$F_x(t,x) = \Phi\left(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t}\right)$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} F_x(t,x) = \quad & \Phi\left(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t}\right) \\ & + x\Phi'\left(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi'(-l_t(x)) \end{aligned}$$

Δείξτε ότι

$$\ln \frac{x\Phi'(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t})}{Ke^{-r(T-t)}\Phi'(-l_t(x))} = 0,$$

και έπειτα ότι

$$x\Phi'(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi'(-l_t(x)) = 0.$$

**Πρακτικό Συμπέρασμα** Έστω ότι είστε ο πωλητής ενός δικαιώματος αγοράς ή πώλησης. Ο αγοραστής θα σας ζητήσει ένα συμβόλαιο με λήξη στο χρόνο $T$ και τιμή εξάσκησης $K$. Εσείς, θα πρέπει σε πρώτη φάση να αποτιμήσετε αυτό το συμβόλαιο. Αν υποθέσουμε ότι γνωρίζετε τη μεταβλητότητα της μετοχής (θα δούμε παρακάτω έναν τρόπο πιθανού υπολογισμού της) τότε η τιμή του συμβολαίου (σύμφωνα με το μοντέλο των Black-Scholes) θα είναι

$$V_0 = F(0, S_0).$$

Η $S_0$ είναι η τιμή της μετοχής σήμερα, δηλαδή την ημέρα που υπογράφουμε το συμβόλαιο, άρα είναι γνωστή (την βλέπουμε στο διαδίκτυο). Αν έχουμε να υπολογίσουμε την τιμή ενός συμβολαίου αγοράς θα αντικαταστήσουμε στον ανάλογο τύπο (δες call) ενώ αν έχουμε να υπολογίσουμε την τιμή ενός συμβολαίου πώλησης θα αντικαταστήσουμε στον άλλο τύπο (δες put).
Το επόμενο που πρέπει να κάνει ο πωλητής, προκειμένου να αντισταθμίσει το δικαίωμα, είναι να προσαρμόζει καθημερινά το χαρτοφυλάκιό του. Δηλαδή, καθημερινά θα πρέπει να έχει $a_t$ μετοχές στην κατοχή του και $b_t$ χρήματα (όπου $b_t$ είναι η παρούσα αξία, δηλαδή στο χρόνο μηδέν) στην τράπεζα (αρνητικά πρόσημα επιτρέπονται και σημαίνουν δανεισμό). Ο αριθμός των μετοχών θα είναι $a_t = \tilde{F}_x(t,\tilde{S}_t)$ ενώ τα

χρήματα στην τράπεζα θα είναι $b_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) - a_t\tilde{S}_t$. Προσοχή εδώ η $F$ είναι διαφορετική για το δικαίωμα αγοράς και διαφορετική για το δικαίωμα πώλησης επομένως η στρατηγική θα είναι διαφορετική από συμβόλαιο σε συμβόλαιο. Κατασκευάστε έναν αλγόριθμο χρησιμοποιώντας μαθηματικό λογισμικό για να υπολογίζετε την αξία των συμβολαίων. Σε αυτό το πρόγραμμα θα δίνετε (input) τα $K, T, r, S_0, \sigma, put, call$ και θα επιστρέφει (output) την τιμή του κάθε συμβολαίου. Επίσης, κατασκευάστε αλγόριθμο που θα δίνει τη στρατηγική επένδυσης που πρέπει να ακολουθεί ο πωλητής. Ξαναγυρνώντας στο μοντέλο των Black-Scholes βλέπουμε ότι ικανοποιεί και τα δυο θεμελιώδη θεωρήματα των χρηματοοικονομικών μαθηματικών και άρα δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους και επίσης, αφού έχουμε δείξει ότι είναι πλήρες προκύπτει ότι το ισοδύναμο μέτρο martingale είναι μοναδικό.

**Συμπέρασμα και σχόλια** *Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε σε μια πλήρη αγορά με απουσία ευκαιριών σίγουρου κέρδους. Έστω ότι μια τράπεζα πουλάει σε έναν ιδιώτη (στην εξωχρηματιστηριακή αγορά) ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης και το κόστος του συμβολαίου είναι (τουλάχιστον) όπως υπολογίσαμε παραπάνω, τέτοιο ώστε να είναι ικανό να καλύψει το συμβόλαιο αν εξασκηθεί. Υπάρχει κάποια περίπτωση να χάσει χρήματα η τράπεζα με αυτή την κίνηση; Η απάντηση είναι όχι. 'ρα είτε θα είναι στα λεφτά της είτε θα κερδίσει κάποιο ποσό (ποιο είναι το μέγιστο;) Αυτό συνιστά ευκαιρία σίγουρου κέρδους; Όχι, διότι αυτό που πουλά η τράπεζα σε αυτή την τιμή είναι «προϊόν» και σαν τέτοιο έχει πάντα κέρδος. Ας το εξηγήσουμε και με μαθηματικούς όρους. Έχουμε υποθέσει ότι η αγορά μας αποτελείται από κατάθεση σε τράπεζα (με εξασφαλισμένη απόδοση) και από μια μετοχή η οποία υποθέσαμε ότι ακολουθεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση. Στον ορισμό της ευκαιρίας σίγουρου κέρδους αναφερόμαστε σε μια στρατηγική που αποτελείται από κατάθεση σε τράπεζα και αγορά μετοχής. Στην αγορά δεν ανήκει το συμβόλαιο άρα δεν επηρεάζεται έτσι από την οποιαδήποτε τιμή δώσουμε στο συμβόλαιο. Αν προσπαθήσουμε να ενσωματώσουμε το συμβόλαιο στην αγορά, θα είμαστε υποχρεωμένοι να δεχτούμε ότι η τιμή του ακολουθεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση. Αν δεν το δεχτούμε αυτό τότε θα πρέπει να αλλάξουμε το μοντέλο το οποίο θα περιλαμβάνει τώρα επιπλέον και μια άλλη ποσότητα που δεν ακολουθεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση αλλά ούτε είναι κατάθεση σε τράπεζα. Οπότε αντίστοιχα θα πρέπει να αλλάξει και ο ορισμός της ευκαιρίας σίγουρου κέρδους καθώς και όλα τα υπόλοιπα που στηρίζονται σε αυτόν τον ορισμό.*

*Υπάρχουν όμως και άλλα μοντέλα (που περιγράφουν ίσως καλύτερα την πραγματικότητα). Ως παράδειγμα μπορούμε να δούμε το μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας του Heston (Heston stochastic volatility model) στο οποίο υποθέτουμε ότι η μεταβλητότητα δεν είναι σταθερή (το οποίο πράγματι συμβαίνει) και ακολουθεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση. Αυτό το μοντέλο ίσως περιγράφει καλύτερα την πραγματικότητα αλλά το σίγουρο είναι ότι προσθέτει προβλήματα μαθηματικής φύσεως. Το πλεονέκτημα του μοντέλου Black-Scholes είναι ότι μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορες ποσότητες άμεσα. Υπάρχουν και άλλα μοντέλα, αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα την κίνηση Brown με μια άλλη στοχαστική διαδικασία (Jump process). Όμως και*

*εκεί τα μαθηματικά προβλήματα είναι επίσης μεγάλα.*
*Ο κάθε πωλητής (writer) ενός συμβολαίου επιλέγει να κοστολογήσει το προϊόν του με βάση κάποιο μοντέλο ή ακόμη και εμπειρικά (παίρνοντας το αντίστοιχο ρίσκο αφού δεν γνωρίζουμε κάποιο μοντέλο που περιγράφει* **ακριβώς** *την πραγματικότητα). 'ρα οι τιμές, για το ίδιο προϊόν, είναι διαφορετικές και εξαρτώμενες από τον τρόπο κοστολόγησης. Ο αγοραστής από την άλλη,* **ίσως**, *να επιλέξει το φθηνότερο πωλητή (ίσως διότι εξαρτάται και από την αξιοπιστία του κάθε πωλητή).*
*Ας υποθέσουμε τώρα, ότι η τιμή του συμβολαίου είναι $V_0$ χρησιμοποιώντας κάποιο από τα γνωστά μοντέλα. Εφόσον, αυτή η τιμή δεν είναι ακριβώς η σωστή, και αν υποθέσουμε ότι η σωστή είναι $G_0 < V_0$ τότε υπάρχει η πιθανότητα η μετοχή να ξεπεράσει την τιμή εξάσκησης (οπότε ο αγοραστής του δικαιώματος είναι κερδισμένος) και ταυτόχρονα ο πωλητής έχοντας πάρει περισσότερα από ότι χρειαζόταν τελικά να καταλήξει επίσης με κέρδος. Δηλαδή, σε αυτήν τη περίπτωση είναι και οι δυο κερδισμένοι. Αν όμως $V_0 < G_0$ τότε υπάρχει περίπτωση ο πωλητής να χάσει όταν (και αν) ο αγοραστής εξασκήσει το δικαίωμα.*
*Ξαναγυρνώντας στο μοντέλο των Black-Scholes διαπιστώνουμε ότι (θεωρητικά) το κέρδος του αγοραστή θα προέλθει από την αγορά (και όχι από την τράπεζα) ενώ αν χάσει χρήματα αυτά πάλι στην αγορά θα καταλήξουν επομένως είναι ένα «παιχνίδι» μεταξύ του αγοραστή και της υπόλοιπης αγοράς και όχι μεταξύ αγοραστή και πωλητή.*
*Ας ξαναδούμε την αναλογία αγοράς - πώλησης. Δείξαμε, κάτω από το μοντέλο Black-Scholes, ότι οι τιμές πώλησης και αγοράς ικανοποιούν αυτήν τη σχέση. Τι συμβαίνει στην πραγματικότητα; Η σχέση αυτή καθημερινά διαταράσσεται και οι επενδυτές προβαίνουν σε αντίστοιχες κινήσεις για να αποκομίσουν κέρδος με συνέπεια να ξαναγυρνά σε (σχεδόν) ισότητα. Στην πραγματικότητα όμως λόγω ύπαρξης κόστους συναλλαγών δεν συμφέρει τους επενδυτές να κινηθούν στην κατεύθυνση της διόρθωσης αυτής της αναλογίας διότι θα χάσουν περισσότερα από ότι θα κερδίσουν τελικά, όταν τα δυο μέλη της ανισότητας είναι πολύ κοντά. Αυτό που εμείς δείξαμε είναι ότι αν κάποιος πωλητής κοστολογήσει και το δικαίωμα αγοράς και το δικαίωμα πώλησης με βάση το μοντέλο των Black-Scholes τότε οι δυο αυτές τιμές θα ικανοποιούν την αναλογία αγοράς - πώλησης. Αυτό στην πράξη βέβαια δεν συμβαίνει (π.χ. στην εξω-χρηματιστηριακή αγορά (over the counter), διότι υπάρχει και η καλά οργανωμένη χρηματιστηριακή αγορά παραγώγων π.χ. Chicago Board Options Exchange) διότι ο πωλητής A θα κοστολογήσει το δικαίωμα αγοράς σε κάποια τιμή χρησιμοποιώντας (ή όχι) κάποιο μοντέλο και ο πωλητής B θα κοστολογήσει το δικαίωμα πώλησης (πάνω στην ίδια μετοχή βέβαια) χρησιμοποιώντας άλλο μοντέλο ή άλλον τρόπο ή θα εκτιμήσει με διαφορετικό τρόπο την μεταβλητότητα της μετοχής (με ιστορικά δεδομένα ή συνεπαγόμενη μεταβλητότητα ή οτιδήποτε άλλο). Αυτές οι δυο τιμές σίγουρα δεν ικανοποιούν την αναλογία αγοράς - πώλησης.*
*Δώστε παραδείγματα στα οποία να περιγράφετε τους λόγους που ο αγοραστής χρειάζεται συμβόλαιο αγοράς ή πώλησης και τι πρόκειται να κερδίσει με αυτή την κίνηση. Αντίστοιχα, δώστε παραδείγματα στα οποία να περιγράφετε λόγους που κάποιος θα*

*θέλει να είναι ο πωλητής ενός συμβολαίου. Τέλος, σκεφτείτε τις διαφορές μεταξύ ενός συμβολαίου το οποίο είναι υπό διαπραγμάτευση στο χρηματιστήριο και του ιδίου τύπου συμβολαίου το οποίο πωλείται (ως ένα προϊόν χρηματιστηριακής εταιρείας) στην εξωχρηματιστηριακή αγορά. Τι συμβαίνει όσον αφορά την τιμή πώλησης;*

### 8.9.6 Αμερικανικά Δικαιώματα

Όπως έχουμε πει τα λεγόμενα Αμερικανικά δικαιώματα διαφέρουν στο (πολύ σημαντικό) σημείο ότι ο κάτοχος του δικαιώματος μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα ανά πάσα στιγμή μέχρι το τέλος της χρονικής περιόδου. Θα δούμε, στην απλή περίπτωση που δεν καταβάλλονται μερίσματα, ότι η τιμή του Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς συμπίπτει με του Ευρωπαϊκού ενώ η τιμή του δικαιώματος πώλησης είναι διαφορετική (μεγαλύτερη).

**ΟΡΙΣΜΟΣ 209** *Μια στρατηγική επένδυσης είναι μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία $\phi = (a_t, b_t)$ με τις εξής ιδιότητες*

$$
\begin{aligned}
&i) \quad \int_0^T |a_t| dt + \int_0^T b_t^2 ds < \infty \\
&ii) \quad a_t S_t + b_t B_t = a_0 S_0 + b_0 B_0 + \int_0^t b_s dB_s + \int_0^t a_s dS_s \\
&\qquad \textit{(αυτοχρηματοδοτούμενη)}
\end{aligned}
$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 210** *Ένα Αμερικανικό δικαίωμα είναι μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία $h_t$.*

Θα υποθέτουμε, για ευκολία, ότι $h_t = \psi(S_t)$ για μια συνεχή συνάρτηση $\psi$ τ.ω. $\psi(x) \le A + Bx$ για κάθε $x \ge 0$.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 211** *Θα λέμε ότι μια στρατηγική επένδυσης $\phi$ αντισταθμίζει το Αμερικανικό δικαίωμα αν θέτοντας $V_t(\phi) = a_t S_t + b_t B_t$ έχουμε*

$$V_t(\phi) \ge \psi(S_t).$$

*Συμβολίζουμε με $\Phi^\psi$ το σύνολο των στρατηγικών επένδυσης οι οποίες αντισταθμίζουν το Αμερικανικό δικαίωμα $h_t = \psi(S_t)$.*

**ΘΕΩΡΗΜΑ 212** *Έστω $u(t,x)$ η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής*

$$u(t,x) = \sup_{\rho \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_Q \left( e^{-r(\rho - t)} \psi(x e^{\sigma(\hat{W}_\rho - \hat{W}_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(\rho - t)}) \right),$$

*όπου $\mathcal{T}_{t,T}$ είναι το σύνολο των χρόνων στάσης στο $[t,T]$. Υπάρχει μια στρατηγική $\hat{\phi} \in \Phi^\psi$ τ.ω. $V_t(\hat{\phi}) = u(t, S_t)$. Επιπλέον, για κάθε στρατηγική $\phi \in \Phi^\psi$ έχουμε $V_t(\phi) \ge u(t, S_t)$.*

Θυμηθείτε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση $F(t,x)$ για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα είναι ίδια αν αντικαταστήσουμε το $\rho$ με το $T$. Έτσι, εν γένει, το Αμερικανικό δικαίωμα κοστίζει περισσότερο. Θα δείξουμε όμως το Αμερικανικό και το Ευρωπαϊκό δικαίωμα **αγοράς** συμπίπτουν.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 213** *Αν η συνάρτηση* $\psi = (x-K)_+$ *τότε έχουμε* $u(t,S_t) = F(t,S_t)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} u(t,S_t) &\geq \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)}(S_T-K)_+) \\ &= \mathbb{E}_Q(e^{rt}(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+) = F(t,S_t) \end{aligned}$$

Στην πρώτη ανισότητα βγάλαμε το supremum και βάλαμε στη θέση του $\rho$ συγκεκριμένα το χρόνο $T$, όπου σίγουρα η ποσότητα θα είναι μικρότερη ή ίση (ίση αν το supremum επιτυγχάνεται στο χρόνο $T$, το οποίο τελικά συμβαίνει!)
Επίσης έχουμε, για οποιοδήποτε χρόνο στάσης $\rho$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q\left((\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+ | \mathcal{F}_\rho\right) &\geq \mathbb{E}_Q\left((\tilde{S}_T - e^{-rT}K) | \mathcal{F}_\rho\right) \\ &= \tilde{S}_\rho - e^{-rT}K \geq \tilde{S}_\rho - e^{-r\rho}K, \end{aligned}$$

αφού η $\tilde{S}$ είναι martingale. Επομένως,

$$\mathbb{E}_Q\left((\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+ | \mathcal{F}_\rho\right) \geq (\tilde{S}_\rho - e^{-r\rho}K)_+$$

αφού το αριστερό μέλος είναι ήδη θετικό. Τέλος, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με $e^{rt}$ και παίρνοντας μέση τιμή κατά μέλη έχουμε

$$\mathbb{E}_Q\left(e^{rt}(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+\right) \geq \mathbb{E}_Q(e^{rt}(\tilde{S}_\rho - e^{-r\rho}K)_+)$$

Η τελευταία ανισότητα ικανοποιείται για κάθε χρόνο στάσης άρα και για το supremum πάνω σε όλους τους χρόνους στάσης, οπότε ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα. □

Αν ο αγοραστής αποφασίσει να εξασκήσει τη χρονική στιγμή $t$ το δικαίωμα αγοράς τότε θα έχει κέρδος $S_t - K$. Αν όμως, αντί να το εξασκήσει, πουλήσει ανοικτά (πουλάω ανοικτά σημαίνει ότι πουλάω κάτι που δεν έχω) τις μετοχές τη χρονική στιγμή $t$ και κλείσει τη θέση του τη χρονική στιγμή $T$ (δηλαδή παραδώσει τις μετοχές) τότε θα έχει κέρδος $S_t - \min\{S_T, K\}$ διότι τη χρονική στιγμή $T$ είτε θα εξασκήσει το δικαίωμα οπότε θα κερδίσει σε αυτήν τη περίπτωση $S_t - K$ είτε δεν θα συμφέρει να το εξασκήσει, οπότε θα αγοράσει τις μετοχές στην τιμή $S_T < K$, θα τις παραδώσει και θα έχει κέρδος $S_t - S_T$. Αυτό βέβαια προϋποθέτει ότι ο αγοραστής έχει τη δυνατότητα, ανά πάσα στιγμή, να πουλήσει ανοικτά τις μετοχές που θέλει. Επομένως, (θεωρητικά) θα πρέπει να αποφασίσει στο χρόνο $T$ (και μόνο) αν θα εξασκήσει το δικαίωμα (οπότε για τον πωλητή είναι ισοδύναμο με το να έχει πουλήσει Ευρωπαϊκό δικαίωμα) με τη διαφορά βέβαια ότι στο ενδιάμεσο έχει την ευκαιρία να πουλήσει ανοικτά τις μετοχές. Την ίδια ακριβώς κίνηση μπορεί να κάνει έχοντας αγοράσει ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα. Αν όμως οι μετοχές δίνουν μερίσματα τότε είναι πιθανό να συμφέρει να έχει στα χέρια του τις μετοχές το νωρίτερο δυνατό.

### 8.9.7 Αποτίμηση μέσω μερικών διαφορικών εξισώσεων

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε το ίδιο πρόβλημα από μια άλλη οπτική γωνία. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος ικανοποιεί μια μερική διαφορική εξίσωση.

ΟΡΙΣΜΟΣ **214** *Μια στρατηγική* $(a_t, b_t)$ *λέγεται Μαρκοβιανή αν*

$$a_t = a(t, S_t), \quad b_t = b(t, S_t)$$

*όπου* $a, b$ *είναι συναρτήσεις δυο μεταβλητών συνεχώς παραγωγίσιμες στην πρώτη και δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στη δεύτερη μεταβλητή.*

'ρα λοιπόν, η τιμή του χαρτοφυλακίου σε αυτήν τη περίπτωση γράφεται

$$V_t = a(t, S_t)S_t + b(t, S_t)e^{rt}.$$

Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $u(t, x)$ μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη στο $t$ και δυο στο $x$ τ.ω. $u(t, S_t) = V_t$. Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ότι αυτή η συνάρτηση θα είναι λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης Black-Scholes.

#### Ευρωπαϊκά Δικαιώματα

ΘΕΩΡΗΜΑ **215** *Έστω* $(a, b)$ *μια αυτοχρηματοδοτούμενη Μαρκοβιανή στρατηγική. Τότε, αν υπάρχει* $u(t, x) \in C^{1,2}(D)$ *(όπου* $D = (0, T) \times (0, +\infty)$*) τ.ω.* $u(t, S_t) = V_t$, *η* $u(t, x)$ *είναι λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης*

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx}(t, x) + rxu_x(t, x) + u_t(t, x) = ru(t, x)$$

*με* $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$. *Επιπλέον,* $a(t, x) = u_x(t, x)$. *Η παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση ονομάζεται* **Black-Scholes.**

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εφόσον η $(a, b)$ είναι αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική έχουμε ότι

$$V_t = V_0 + \int_0^t (ma(s, S_s)S_s + rb(s, S_s)B_s)ds + \int_0^t \sigma a(s, S_s)S_s dW_s.$$

Εφαρμόζουμε τη φόρμουλα του Ito στην $u(t, S_t)$ και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u(t,S_t) = & \quad u(0,S_0) \\ & + \int_0^t (u_t(s,S_s) + mS_s u_x(s,S_s) + \frac{\sigma^2 S_s^2}{2} u_{xx}(s,S_s))ds \\ & + \int_0^t \sigma S_s u_x(s,S_s) dW_s. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν γράψει την $V_t$ ως διαδικασία Ito με δυο διαφορετικούς τρόπους, επομένως χρησιμοποιώντας πάλι τη μοναδικότητα της ανάλυσης κατά Doob-Meyer στη διαφορά τους (η οποία είναι μηδέν), προκύπτει ότι και τα δυο ολοκληρώματα είναι μηδέν. Επομένως, όπως σε προηγούμενο θεώρημα, παίρνουμε την ισότητα

$$a(t,S_t) = u_x(t,S_t) \text{ και άρα } b(t,S_t)B_t = u(t,S_t) - S_t u_x(t,S_t)$$

Για να μηδενιστεί και το ολοκλήρωμα ως προς $ds$ θα πρέπει αναγκαστικά η $u(t,x)$ να ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx}(t,x) + rxu_x(t,x) + u_t(t,x) = ru(t,x)$$

έχοντας αντικαταστήσει κατάλληλα το $b(t,S_t)B_t$, διότι θέλουμε να μηδενίζεται το ολοκλήρωμα για οποιαδήποτε πιθανή τροχιά της $S_t$. Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμη και η υπόθεση ότι $u \in C^{1,2}(D)$. □

Επομένως, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το δικαίωμα πώλησης θα πρέπει να επιλύσουμε την παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση με επιπλέον συνθήκη $u(s,T) = (K-s)^+$. Η εξίσωση των Black-Scholes μετασχηματίζεται στην κυματική εξίσωση.

**Προταση 216** *Έστω $k_1 = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$ και $k_2 = r + \frac{k_1^2}{2}$. Τότε η $u$ είναι λύση της Black-Scholes ανν η $f(\tau,s) = e^{k_1 s + k_2 \tau} u(T-t, e^{\sigma s})$ ικανοποιεί την*

$$f_\tau = \frac{1}{2} f_{ss} \text{ στο } (0,T) \times \mathbb{R}.$$

### Αμερικανικά Δικαιώματα

Ορίζουμε τον παρακάτω τελεστή

$$\mathcal{L}_t = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx\frac{\partial}{\partial x} - r$$

**Θεωρημα 217** *Έστω ότι η συνάρτηση $v(t,x) : \mathbb{R}_+ \times [0,T] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τ.ω. $v_t, v_x, v_{xx}$ είναι τοπικά φραγμένες. Η λύση $v(t,x)$ της παρακάτω μεταβολικής* *ανισότητας*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t v(t,x) &\leq 0\\
v(t,x) &\geq (K-x)^+\\
v(x,T) &= (K-x)^+\\
\big((K-x)^+ - v(t,x)\big)\,\mathcal{L}_t v(t,x) &= 0,
\end{aligned}$$

*είναι μοναδική και μάλιστα η $v(t,S_t)$ είναι η τιμή του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης.*

### 8.9.8 Ευαισθησία του κόστους στις παραμέτρους (Greek letters)

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις παραγώγους της τιμής του συμβολαίου αγοράς (παρόμοια γίνονται και οι υπολογισμοί για το συμβόλαιο πώλησης) σε διάφορες παραμέτρους. Έχουμε ήδη υπολογίσει την παράγωγο

$$\Delta = F_x(t,x) = \Phi(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t})$$

όπου διαπιστώνουμε ότι είναι πάντοτε θετική.
Στη συνέχεια, μπορούμε να υπολογίσουμε την δεύτερη παράγωγο ως προς $x$ όπου έχουμε

$$\Gamma = F_{xx}(t,x) = \frac{\Phi^{'}(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t})}{x\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Επίσης,

$$\rho = F_r(t,x) = (T-t)Ke^{-r(T-t)}\Phi(-l_t(x))$$

Συνεχίζοντας, έχουμε

$$\Theta = F_t(t,x) = \frac{-x\sigma}{2\sqrt{T-t}}\Phi^{'}(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t}) - rKe^{-r(T-t)}\Phi(-l_t(x)).$$

Τέλος, έχουμε την παράγωγο ως προς τη μεταβλητότητα,

$$vega = F_\sigma = x\sqrt{T-t}\Phi^{'}(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t}) > 0.$$

### 8.9.9 Συνεπαγόμενη μεταβλητότητα (implied volatility)

Όπως έχουμε αναφέρει, για να υπολογίσουμε την (μικρότερη δυνατή) τιμή ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου θα πρέπει να γνωρίζουμε τη μεταβλητότητα της μετοχής $\sigma$. Ένας τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την τιμή του δικαιώματος που προκύπτει από το μοντέλο των Black-Scholes. Έπειτα, λύνουμε ως προς $\sigma$ (στην πραγματικότητα το κάνουμε με κάποια αριθμητική μέθοδο όπως η Newton-Raphson). Πώς όμως θα γνωρίζουμε την τιμή του συμβολαίου (αφού αυτήν ψάχνουμε;) Υπάρχει συγκεκριμένη αγορά όπου διαπραγματεύονται τις τιμές για διάφορα συμβόλαια με διάφορες υποκείμενες μετοχές. Θα βρούμε τα συμβόλαια εκείνα όπου έχουν την ίδια υποκείμενη μετοχή για την οποία εμείς θέλουμε να υπολογίσουμε τη μεταβλητότητα. Θα υποθέσουμε ότι η τιμή πώλησης των συμβολαίων αυτών είναι κοντά στην τιμή που προέρχεται από το μοντέλο των Black-Scholes και άρα θα υπολογίσουμε τη μεταβλητότητα λύνοντας ως προς $\sigma$. Ως μεταβλητότητα θα δεχτούμε το μέσο όρο όλων αυτών που υπολογίσαμε. Στην πράξη διαπιστώνεται ότι η μεταβλητότητα $\sigma$ είναι εξαρτώμενη από το χρόνο αλλά και από άλλες μεταβλητές όπως η τιμή εξάσκησης. Επομένως, αυτό σημαίνει ότι έχουμε ήδη κάνει μια απλούστευση στο μοντέλο των Black-Scholes υποθέτοντας ότι είναι σταθερά.

Σε σχέση με τη διακριτή περίπτωση, η μεταβλητότητα $\sigma$ είναι ισοδύναμη με τα $u$ και $d$. Δυο πωλητές του ιδίου συμβολαίου μπορεί να εκτιμήσουν διαφορετικά τα $u, d$ αν δουλεύουν στη διακριτή περίπτωση ή το $\sigma$ αν εργάζονται στη συνεχή και έτσι να δώσουν διαφορετική τιμή παρόλο που χρησιμοποιούν το ίδιο μοντέλο.

### 8.9.10 Γενικεύσεις του μοντέλου Black – Scholes

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο και αυξάνοντας τις περιόδους, διαπιστώσαμε ότι στο όριο συγκλίνει στο μοντέλο Black-Scholes. Στην συνεχή περίπτωση το ίδιο προέκυψε υποθέτοντας ότι η μετοχή ακολουθεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$S_t = S_0 + m\int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dW_s$$

Χρησιμοποιώντας για παράδειγμα ιστορικά δεδομένα, προσπαθούμε να διαλέξουμε το $\sigma$ κατάλληλα έτσι ώστε να ταιριάζει όσο το δυνατό καλύτερα με την κίνηση της μετοχής. Για το λόγο αυτόν έχουν προταθεί και άλλες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις τις οποίες μπορεί να ακολουθεί η μετοχή, με περισσότερες παραμέτρους και άρα με μεγαλύτερη ελευθερία επιλογής. Ως παράδειγμα, μπορούμε να δούμε το παρακάτω μοντέλο γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία ως Cox model ή constant elasticity of variance model (CEV model)

$$S_t = S_0 + m\int_0^t S_s ds + a \int_0^t S_s^b dW_s,$$

όπου $b \in [0, 1]$. Εδώ υπάρχει η επιπλέον ελευθερία να επιλεγεί η παράμετρος $b$ κατάλληλα έτσι ώστε η παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση να περιγράφει καλύτερα την κίνηση μιας συγκεκριμένης μετοχής. Πράγματι, συμβαίνει κάτι τέτοιο όπως δείχνουν πειράματα που έχουν γίνει (δες [;]). Η ακριβής λύση του CEV μοντέλου δεν είναι γνωστή αλλά μπορεί να προσεγγισθεί αριθμητικά (δες [;], [;] καθώς και τις αναφορές τους). Ειδικότερα στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε τις αξίες

συμβολαίων οι οποίες εξαρτώνται από την πορεία που διαγράφει η μετοχή και όχι μόνο από την τελική τιμή (path dependent options) τότε είναι σχεδόν επιβεβλημένη η χρήση αριθμητικών μεθόδων.
Επίσης, έχει προταθεί και το παρακάτω μοντέλο γνωστό ως μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας το οποίο είναι το εξής,

$$
\begin{aligned}
S_t &= S_0 + \int_0^t f(s, S_s)ds + \int_0^t \sigma_s S_s dW_s^1, \\
\sigma_t &= \sigma_0 + \int_0^t a(s, \sigma_s)ds + \int_0^t b(s, \sigma_s)dW_s^2
\end{aligned}
$$

Έχουν προταθεί διάφορες συναρτήσεις $f, a, b$ για το παραπάνω μοντέλο και περισσότερα μπορεί να δει κάποιος στο [;]. Τέλος, υπάρχουν και μοντέλα τα οποία δεν χρησιμοποιούν την κίνηση Brown αλλά γενικότερες στοχαστικές διαδικασίες (Jump - diffusion processes).
Σε κάθε νέο μοντέλο που προτείνεται προκύπτουν ερωτήματα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης, εύρεσή της σε κλειστή μορφή, κατάλληλη αριθμητική μέθοδος αν δεν έχει βρεθεί η λύση σε ικανοποιητική κλειστή μορφή, ερωτήματα πληρότητας του μοντέλου καθώς και υπολογισμού της αξίας ενός συμβολαίου σε κλειστή μορφή, αριθμητική προσέγγιση της αξίας ενός συμβολαίου αν δεν υπάρχει ικανοποιητικός τρόπος υπολογισμού της σε κλειστή μορφή. Για αριθμητική προσέγγιση δείτε τα [;], [;].