

## Σημειώσεις Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά II

Οι σημειώσεις αυτές είναι μέρος του βιβλίου [Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Οικονομολόγους και Μηχανικούς](#)

Χρησιμοποιούμε το ελεύθερο μαθηματικό λογισμικό [Geogebra](#) για υπολογισμούς.

Μπορείτε να στείλετε παρατηρήσεις στην ηλεκτρονική διεύθυνση [Νίκος Χαλιδιάς](#).

---

---

Η αγορά διαμορφώνει τις τιμές των μετοχών (assets), συμβολαίων (options) κ.τ.λ. όπως επίσης η αγορά διαμορφώνει τα μαθηματικά μοντέλα που προσπαθούν να μοντελοποιήσουν αυτά τα φαινόμενα. Ακριβώς όπως οι καιρικές συνθήκες διαμορφώνουν τα προγνωστικά μαθηματικά μοντέλα και όχι το ανάποδο!

---

---

Θα ασχοληθούμε με τις συναλλαγές που γίνονται στο χρηματιστήριο ξεκινώντας από τις μετοχές.

**Μετοχή** (μιας εταιρείας) είναι ένας τίτλος ο οποίος αντιστοιχεί σε ένα μερίδιο αξίας της εταιρείας.

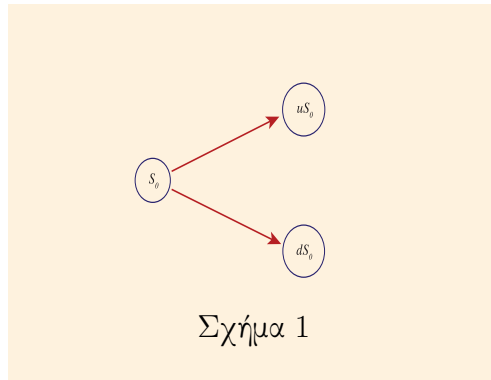
Η τιμή μιας μετοχής προκύπτει έπειτα από καθημερινή διαπραγμάτευση. Οι κάτοχοι, δηλαδή, των μετοχών που θέλουν να πουλήσουν κάποιες το δηλώνουν στο Χρηματιστήριο (δίνοντας ίσως μια κατώτερη τιμή) και οι ενδιαφερόμενοι αγοράζουν. Αν εκδηλώσουν ενδιαφέρον αγοράς για περισσότερες μετοχές από ότι πωλούνται τότε προφανώς η τιμή ανεβαίνει, αλλιώς κατεβαίνει. Η τελευταία τιμή πώλησης στη συγκεκριμένη ημέρα είναι και η τιμή της μετοχής εκείνη την ημέρα. Είναι προφανές ότι κανείς δεν μπορεί να προβλέψει την αυριανή τιμή της μετοχής όμως μπορεί να μαντέψει ότι πιθανόν αύριο να εκδηλωθεί ιδιαίτερο ενδιαφέρον αγοράς διότι η εταιρεία πρόκειται να επεκτείνει τις δραστηριότητες της κτλ. Όμως δεν μπορεί κανείς να προβλέψει πόσο θα ανέβει, αν συμβεί κάτι τέτοιο τελικά.

Μπορούμε να κάνουμε ορισμένες απλοποιήσεις και να προσπαθήσουμε να μοντελοποιήσουμε το φαινόμενο προκειμένου να εξάγουμε αργότερα κάποια συμπεράσματα.

Μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση της μετοχής τον τελευταίο χρόνο (ή και παλαιότερα) και να βγάλουμε ένα μέσο όρο για την ανοδική και καθοδική πορεία της. Δηλαδή, αν η τιμή ανέβει από την  $n$  στην  $n + 1$  ημέρα, ποιο είναι το μέσο ποσοστό ανόδου (και αντίστοιχα καθόδου). Μπορούμε έτσι να καταλήξουμε σε δυο νούμερα  $u, d$  τα οποία θα είναι οι μέσοι όροι ανόδου και καθόδου αντίστοιχα σε σχέση με την προηγούμενη ημέρα. Δηλαδή, αν η τιμή της μετοχής σήμερα είναι  $S_0$  τότε την επόμενη ημέρα θα είναι  $uS_0$  αν ανέβει και  $dS_0$  αν κατέβει. Σημειώστε όμως ότι αυτή η μέση τιμή ανόδου και καθόδου αφορά το **παρελθόν** και όχι το **μέλλον**. Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε αυτή την πληροφορία όμως θα κάνουμε μια παραδοχή. Θα **υποθέσουμε** ότι το ίδιο θα συμβεί και στο μέλλον προκειμένου να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα. Σίγουρα η υπόθεση αυτή δεν

είναι σωστή αλλά ελπίζουμε να μην αποκλίνει πολύ από αυτό που θα συμβεί στο μέλλον.

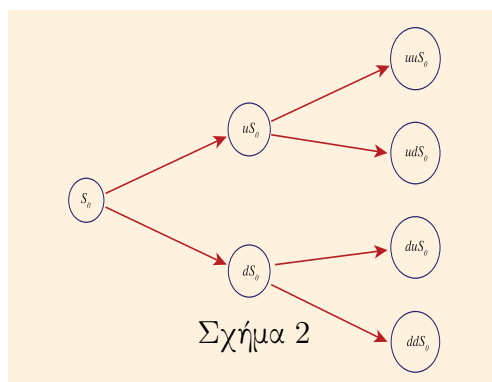
Ένας τρόπος να αποτυπώσουμε σχηματικά τα παραπάνω είναι να κατασκευάσουμε το παρακάτω δέντρο τιμών της μετοχής. Υποθέτουμε ότι σήμερα είναι η χρονική στιγμή 0 και αύριο είναι η χρονική στιγμή 1. Το παρακάτω δέντρο (μιας περιόδου) αποτυπώνει τις τιμές της μετοχής.



Σχήμα 1

Μπορούμε να μελετήσουμε την κίνηση της μετοχής στο παρελθόν και να βγάλουμε τον μέσο όρο καθόδου ή ανόδου για την περίοδο μιας εβδομάδας, ενός μήνα, εξαμήνου ή όποια άλλη περίοδο θέλουμε. Σε αυτή την περίπτωση το παραπάνω δέντρο θα αναπαριστά την κίνηση της μετοχής σε αυτήν την περίοδο, π.χ. ενός τριμήνου.

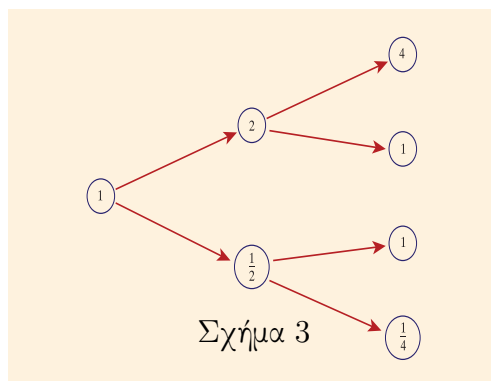
Επίσης, αν η περίοδος που θέλουμε να μελετήσουμε τη μετοχή στο μέλλον είναι μεγάλη μπορούμε να τη χωρίσουμε σε μικρότερες. Αν π.χ. θέλουμε να μελετήσουμε τη μετοχή για τον επόμενο χρόνο μπορούμε να χωρίσουμε το χρόνο σε εξάμηνα (και αφού υπολογίσουμε με ιστορικά δεδομένα τα  $u, d$  εξαμήνου) να κατασκευάσουμε το παρακάτω δέντρο



Ήρα, έχοντας κάνει την **υπόθεση** ότι στο μέλλον η μετοχή θα έχει τον ίδιο ρυθμό ανόδου και καθόδου καταγράψαμε τις πιθανές κινήσεις της μετοχής. Δεν γνωρίζουμε ποιο μονοπάτι θα ακολουθήσει η μετοχή αλλά (αν η υπόθεσή μας είναι σωστή για τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου) γνωρίζουμε όλα τα πιθανά μονοπάτια της μετοχής.

Στην πράξη, αν θέλουμε να έχουμε καλύτερη εικόνα, πρέπει να χωρίσουμε την περίοδο σε 20 με 30 υποπεριόδους και να κατασκευάσουμε το αντίστοιχο δέντρο τιμών της μετοχής. Σε τέτοιες περιπτώσεις μόνο με χρήση υπολογιστών μπορεί να γίνει η μελέτη.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1** Έστω ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε το δέντρο τιμών μιας μετοχής για τον επόμενο χρόνο χωρίζοντας το χρόνο σε εξάμηνα. Για να γίνει αυτό θα πρέπει να γνωρίζω τα  $u, d$  εξαμήνου και για να τα υπολογίσω χρησιμοποιώ στοιχεία 10 ετών (για παράδειγμα) όσον αφορά την κίνηση της μετοχής ανά εξάμηνο οπότε και υπολογίζω τους μέσους όρους καθόδου και ανόδου. Ας υποθέσουμε ότι είναι  $u = 2$  και  $d = 1/2$ . Τότε το δέντρο τιμών της μετοχής (δυο περιόδων) θα είναι



**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2** Πως υπολογίζουμε τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου; Έστω ότι έχουμε παρελθοντικές τιμές της μετοχής, για παράδειγμα, τις τιμές των τελευταίων  $N$  ημερών. Αν  $S_n$  είναι η τιμή της μετοχής για μια

συγκεκριμένη ημέρα και  $S_{n+1}$  η τιμή της για την επόμενη ημέρα, τότε υπολογίζουμε τους λόγους  $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ . Κάποιοι από αυτούς τους λόγους θα είναι μεγαλύτεροι της μονάδας και κάποιοι άλλοι μικρότεροι της μονάδας. Συμβολίζουμε με  $u_1, u_2, \dots$  τους λόγους που είναι μεγαλύτεροι της μονάδας και με  $d_1, d_2, \dots$  τους υπόλοιπους. Αυτό που θέλουμε στην ουσία να κάνουμε είναι να μαντέψουμε τους μελλοντικούς ρυθμούς ανόδου και καθόδου. Το μόνο στοιχείο που έχουμε στα χέρια μας είναι οι  $u_i, d_i$ . Ένας τρόπος είναι να θεωρήσουμε πως στο μέλλον οι ρυθμοί ανόδου και καθόδου θα είναι κοντά στη μέση τιμή των παρελθοντικών τιμών το οποίο βέβαια είναι μια αυθαίρετη υπόθεση. Μάλιστα, παρατηρούμε ότι οι παρελθοντικοί ρυθμοί δεν είναι σταθεροί αλλά κυμαινόμενοι οπότε προφανώς και στο μέλλον θα συμβεί το ίδιο. Όπως θα δούμε παρακάτω η αξία της μετοχής μεταβάλλεται εντονότερα όταν η διαφορά  $u - d$  αυξάνεται αλλά και αντίστροφα. Για ευκολία θα υποθέσουμε ότι υπάρχουν κάποιοι αριθμοί  $\sigma_i > 0$  τέτοιοι ώστε  $u_i = e^{\sigma_i \sqrt{\delta}}$  και  $d_i = e^{-\sigma_i \sqrt{\delta}}$ . Όσο μεγαλύτερη είναι η μεταβλητότητα της αξίας της μετοχής τόσο μεγα-

λύτεροι είναι και οι αριθμοί  $\sigma_i$ . Είναι επίσης προφανές ότι η μεταβλητότητα μιας μετοχής μπορεί να αλλάξει στο μέλλον και να μειωθεί ή να αυξηθεί. Αν μας ενδιαφέρει η μεταβλητότητα της μετοχής, το οποίο πράγματι ισχύει όπως θα δούμε παρακάτω, τότε είναι σκόπιμο να υποθέσουμε ότι η μελλοντική μεταβλητότητα θα είναι μεγαλύτερη από το μέσο όρο των παρελθοντικών τιμών της έτσι ώστε οι όποιες εκτιμήσεις μας να είναι ασφαλέστερες, δηλαδή να υποθέσουμε ότι οι μεταβολές των τιμών της μετοχής στο μέλλον θα είναι εντονότερες και άρα οι εκτιμήσεις μας να είναι προσαρμοσμένες σε ένα τέτοιο «κακό» σενάριο. Οπότε σε μια τέτοια περίπτωση θα διαλέξουμε ως  $\sigma$  να είναι τέτοιο ώστε η πιθανότητα η μελλοντική μεταβλητότητα να την ξεπεράσει να είναι μικρή, για παράδειγμα διαλέγοντας  $\sigma = \max\{\sigma_i\}$  αντί για  $\sigma$  το μέσο όρο των  $\sigma_i$ .  $\square$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3** Ας υποθέσουμε ότι κάποιος έχει τοποθετήσει τα χρήματά του σε ένα αγαθό με χαμηλή μεταβλητότητα ή και μηδενική, όπως ένας τραπεζικός λογαριασμός. Σε μια τέτοια περίπτωση δεν υπάρχει

σχεδόν καμία ανασφάλεια εκ μέρους του επενδυτή και επομένως δεν θα χρειαστεί να εξασφαλιστεί με κάποιο τρόπο. Το κέρδος είναι σχεδόν σίγουρο αλλά βέβαια μικρό. Σε αντίθετη περίπτωση, αν κάποιος επενδύσει σε ένα αγαθό με μεγάλη μεταβλητότητα τότε στο άμεσο μέλλον θα μπορούσε να έχει μεγάλη ζημιά αλλά βέβαια και μεγάλο κέρδος. Σε αυτές τις περιπτώσεις κανείς αναζητά τρόπους εξασφάλισης έναντι μιας πιθανής ζημιάς, δηλαδή ένα τρόπο μεταφοράς του ρίσκου. Η άλλη πλευρά η οποία θα αποδεχθεί να εξασφαλίσει τον επενδυτή ουσιαστικά θα αναλάβει το ρίσκο με κάποιο αντίτιμο. Ο τρόπος υπολογισμού αυτού του αντιτίμου είναι μια δύσκολη υπόθεση η οποία απαιτεί μαθηματική αλλά και στατιστική μελέτη του φαινομένου. Είναι επίσης προφανές ότι το αντίτιμο αυτό θα είναι μεγάλο όσο μεγάλη είναι και η μεταβλητότητα.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι κάποιος έχει αγοράσει μερικές μετοχές η αξία των οποίων είχε μεγάλη μεταβλητότητα στο παρελθόν. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι το ίδιο θα συμβεί και στο μέλλον αλλά είναι λογικό να το υποθέσει κανείς. Στο άμεσο μέλλον

θα μπορούσε η αξία της μετοχής να πέσει κατακόρυφα οπότε ο επενδυτής θα έχει μεγάλη ζημιά. Γνωρίζοντας την πιθανότητα αυτή ο επενδυτής θα αναζητήσει τρόπους εξασφάλισης, ίσως μερικής εξασφάλισης. Παρόμοια, ένας επενδυτής μπορεί να έχει δανειστεί μετοχές σήμερα, να τις έχει πουλήσει και τα χρήματα να τα έχει επενδύσει κάπου αλλού. Μετά από ένα χρονικό διάστημα θα πρέπει να επιστρέψει τις μετοχές οπότε θα τις αγοράσει στη τρέχουσα τιμή. Η τιμή αυτή όμως μπορεί να είναι πολύ πιο μεγάλη από την τιμή που είχαν όταν τις δανείστηκε και τις πούλησε επομένως η ζημιά μπορεί να είναι επίσης μεγάλη και μάλιστα δεν είναι άνω φραγμένη. Σε μια τέτοια περίπτωση ο επενδυτής θα χρειαστεί να εξασφαλιστεί έναντι μιας μεγάλης ζημιάς ή ακόμη και χρεοκοπίας. Όσο μεγαλύτερη είναι η μεταβλητότητα τόσο μεγαλύτερη είναι και η πιθανή ζημιά και επομένως τόσο μεγαλύτερο θα είναι και το αντίτιμο για να αγοράσει μια τέτοια εξασφάλιση. □

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος θέλει να επενδύσει τα χρήματά του σε μια μετοχή και σε κατάθεση σε τράπεζα με επιτόκιο περιόδου  $r$ . Αγοράζει λοιπόν ένα πλήθος  $a$  μετοχών τη χρονική στιγμή  $0$  και καταθέτει και ένα ποσό  $b$  στην τράπεζα. Λέμε τότε ότι έχει κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο με συγκεκριμένη αξία τη χρονική στιγμή  $0$  η οποία είναι

$$V_0 = aS_0 + b$$

Δηλαδή, πολλαπλασιάζουμε το πλήθος των μετοχών με την (γνωστή) τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή  $0$  και προσθέτουμε και τα χρήματα που κατέθεσε στην τράπεζα. Η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή  $0$  συμβολίζεται με  $V_0$ . Ποια θα είναι η αξία του χαρτοφυλακίου στο μέλλον; Προφανώς εξαρτάται από την τιμή της μετοχής, διότι το ποσό στην τράπεζα θα έχει προκαθορισμένη αξία μετά τους υπολογισμούς των τόκων.

Για το λόγο αυτόν θα κάνουμε την κατασκευή του δέντρου τιμών της μετοχής, έχοντας κάνει όπως περιγράψαμε τις απαραίτητες υποθέσεις και υπολογισμούς.

Τη χρονική στιγμή 1 η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$V_1^u = a(uS_0) + b(1 + r)$$

$$V_1^d = a(dS_0) + b(1 + r)$$

Η  $V_1^u$  είναι για την περίπτωση που η μετοχή ανέβει ενώ η  $V_1^d$  είναι για την περίπτωση που η μετοχή κατέβει. Αντίστοιχα, υπολογίζουμε την αξία του χαρτοφυλακίου για τη χρονική στιγμή 2 η οποία θα είναι

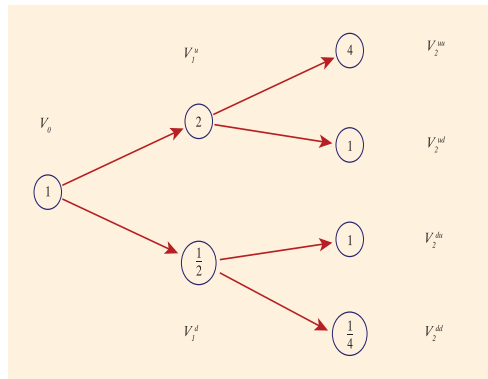
$$V_2^{uu} = a(uuS_0) + b(1 + r)^2$$

$$V_2^{ud} = a(udS_0) + b(1 + r)^2$$

$$V_2^{du} = a(duS_0) + b(1 + r)^2$$

$$V_2^{dd} = a(ddS_0) + b(1 + r)^2$$

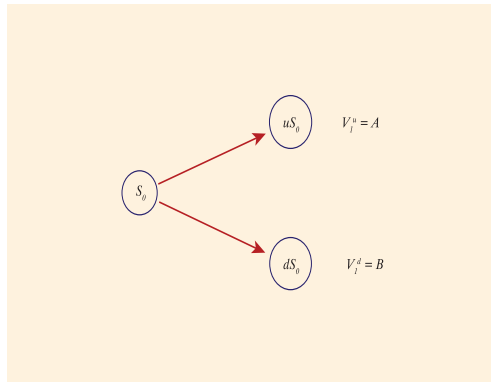
Τις αξίες του χαρτοφυλακίου μαζί με τις τιμές της μετοχής μπορούμε αν θέλουμε να τις αποτυπώσουμε στο αντίστοιχο δέντρο τιμών.



Σχήμα 4

### Κατασκευή Χαρτοφυλακίου Προκαθορισμένης Αξίας

Ας ξαναγυρίσουμε στο μοντέλο μιας περιόδου και ας υποθέσουμε ότι μας δίνονται συγκεκριμένες τιμές  $A, B$  οι οποίες πρέπει να είναι ίσες με την αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή 1, δηλαδή να ισχύει  $V_1^u = A$  και  $V_1^d = B$ . Σχηματικά,



Σχήμα 5

Το ερώτημα είναι ποιο πρέπει να είναι το ποσό  $V_0$ , πόσες μετοχές πρέπει να αγοράσει ή να δανειστεί ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου και πόσα χρήματα να τοποθετήσει ή να δανειστεί από/στην τράπεζα με επιτόκιο περιόδου  $r$ ;

Ας υποθέσουμε ότι αγοράζει  $a$  μετοχές τη στιγμή 0 και καταθέτει  $b$  ποσό στην τράπεζα. Τότε το χαρτοφυλάκιο θα έχει αξία

$$V_0 = aS_0 + b$$

τη χρονική στιγμή 0 ενώ τη χρονική στιγμή 1 οι πιθανές αξίες θα είναι

$$V_1^u = a(uS_0) + b(1+r) = A,$$

$$V_1^d = a(dS_0) + b(1+r) = B$$

Απαιτώντας οι αξίες του χαρτοφυλακίου να έχουν συγκεκριμένη τιμή προκύπτουν οι παραπάνω δυο εξισώσεις με δυο αγνώστους. Για να υπολογίσουμε την λύση, αφαιρούμε την δεύτερη εξίσωση από την πρώτη και έχουμε

$$a(u-d)S_0 = A - B \Rightarrow a = \frac{A - B}{(u-d)S_0}$$

Αντικαθιστώντας το  $a$  στην πρώτη εξίσωση, υπολογίζουμε και το  $b$ . Συνεπώς, η λύση του συστήματος είναι

$$a = \frac{A - B}{(u - d)S_0},$$

$$b = \frac{Bu - Ad}{(u - d)(1 + r)}$$

Η αξία του χαρτοφυλακίου είναι  $V_0 = aS_0 + b$  την χρονική στιγμή 0. Αντικαθιστώντας τα  $a$  και  $b$  που υπολογίσαμε έχουμε

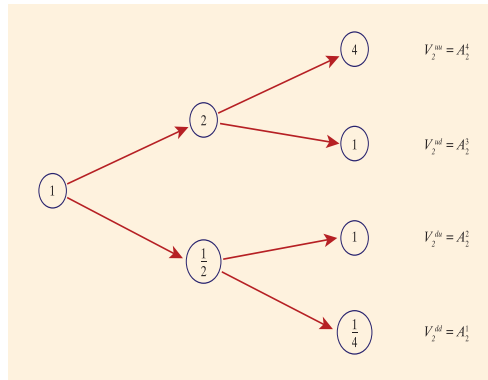
$$\begin{aligned} V_0 = aS_0 + b &= \frac{A - B}{(u - d)S_0}S_0 + \frac{Bu - Ad}{(u - d)(1 + r)} \\ &= \frac{(A - B)(1 + r) + Bu - Ad}{(u - d)(1 + r)} \\ &= \frac{A(1 + r - d) + B(u - (1 + r))}{(u - d)(1 + r)} \end{aligned}$$

Επομένως, η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με

$$V_0 = \frac{1}{1 + r}(qA + (1 - q)B)$$

όπου  $q = \frac{1+r-d}{u-d}$ .

Μπορούμε να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα αυτό και για ένα δέντρο δυο περιόδων και να απαιτήσουμε (σχηματικά) το εξής



Σχήμα 6

όπου  $A_2^4, A_2^3, A_2^2, A_2^1$  είναι δοσμένοι αριθμοί. Με τον τρόπο που περιγράψαμε πριν υπολογίζουμε τις αξίες που πρέπει να έχει τη στιγμή 1,

$$V_1^u = \frac{1}{1+r}(qA_2^4 + (1-q)A_2^3)$$

$$V_1^d = \frac{1}{1+r}(qA_2^2 + (1-q)A_2^1)$$

Δηλαδή, από τις εξισώσεις

$$V_2^{uu} = a_1^u(uuS_0) + b_1^u(1+r) = A_2^{uu}$$

$$V_2^{ud} = a_1^u(udS_0) + b_1^u(1+r) = A_2^{ud}$$

προκύπτει εύκολα ότι

$$a_1^u = \frac{A_2^{uu} - A_2^{ud}}{(u - d)uS_0}$$
$$b_1^u = \frac{A_2^{ud} - A_2^{uu}}{(u - d)(1 + r)}$$

Εφόσον

$$V_1^u = a_1^u(uS_0) + b_1^u$$

αντικαθιστώντας τα  $a_1^u$  και  $b_1^u$  προκύπτει ο παραπάνω τύπος για το  $V_1^u$ . Εντελώς παρόμοια προκύπτει και ο τύπος για το  $V_1^d$ .

Αντίστοιχα μπορούμε να υπολογίσουμε το πλήθος των μετοχών που πρέπει να έχει στην κατοχή του καθώς και το ποσό στην τράπεζα σε κάθε περίπτωση. Στην συνέχεια, μπορούμε να υπολογίσουμε την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου καθώς και το αρχικό πλήθος μετοχών και ποσού που πρέπει να έχει στην τράπεζα.

Με λίγα λόγια έχουμε απαντήσει στο εξής ερώτημα. Ποιες κινήσεις πρέπει να κάνω (αγορά μετοχών, κατάθεση σε τράπεζα) στο χρόνο μηδέν για να φτάσω στο χρόνο 2 σε δοσμένες αξίες του χαρτοφυλακίου. Σημειώστε, ότι αν διαλέξετε συγκεκριμένες τιμές των  $A_2^i$  υπάρχει η πιθανότητα να προκύψει κάπου αρνητικός αριθμός μετοχών (το οποίο σημαίνει δανεισμό μετοχών) ή και αρνητικό ποσό κατάθεσης στην τράπεζα (το οποίο σημαίνει δανεισμό ποσού από τράπεζα με επιτόκιο  $r$ ).

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4** Έχουμε υποθέσει ότι το επιτόκιο δανεισμού είναι ίσο με το επιτόκιο κατάθεσης κάτι το οποίο δεν είναι σωστό εν γένει. Παρόλα αυτά μπορούμε να το δικαιολογήσουμε ως εξής: μπορεί κάποιος να έχει ένα ποσό σε ένα τραπεζικό λογαριασμό με επιτόκιο  $r$  από όπου μπορεί να αφαιρεί ή να προσθέτει χρήματα ανά πάσα στιγμή χωρίς να αλλάζει το επιτόκιο. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να καταθέτεις με επιτόκιο  $r$  αλλά και να δανείζεσαι (από τον δικό σου λογαριασμό) με το ίδιο επιτόκιο.  $\square$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5** Υποθέστε ότι μας δίνονται τα  $u = 2$ ,  $d = 1/2$  και το  $r = 0.03$  καθώς και  $A_2^4 = 2$ ,  $A_2^3 = A_2^2 = A_2^1 = 0$ . Να υπολογίσετε (σε ένα δυο περιόδων δέντρο τιμών) την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου καθώς και το πλήθος των μετοχών και κατάθεσης σε τράπεζα ούτως ώστε το χαρτοφυλάκιο να έχει αξίες τις τιμές  $A_2^i$ . Τέλος υποθέστε ότι η σημερινή τιμή της μετοχής είναι  $S_0 = 1$ .

**Απάντηση.** Υπολογίζουμε πρώτα το  $q = \frac{1+r-d}{u-d} = 0.35$  ενώ το  $1 - q = 0.65$ . Έπειτα υπολογίζουμε τις

αξίες

$$V_1^u = \frac{1}{1+r}(qA_2^4 + (1-q)A_2^3) = \frac{0.35 \cdot 2}{1.03} = \frac{0.7}{1.03} = 0.67$$

$$V_1^d = \frac{1}{1+r}(qA_2^2 + (1-q)A_2^1) = 0.$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου

$$V_0 = \frac{1}{1+r}(qV_1^u + (1-q)V_1^d) = \frac{0.35 \cdot 0.7}{1.03} = 0.23$$

Στη συνέχεια θα καταγράψουμε τις απαραίτητες κινήσεις που πρέπει να κάνει ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου για να έχει την προκαθορισμένη αξία.

Αντικαθιστώντας στους τύπους προκύπτει ότι

$$a = \frac{V_1^u - V_1^d}{(u-d)S_0} = 0.44$$

$$b = \frac{uV_1^d - dV_1^u}{(u-d)(1+r)} = -0.21$$

Αυτό σημαίνει ότι την χρονική στιγμή 0 με το ποσό  $V_0 = 0.23$  θα αγοράσει 0.44 μετοχές και θα δανειστεί από την τράπεζα 0.21.

Στη συνέχεια, την περίοδο 1 (μετά από ένα εξάμηνο για παράδειγμα) ο κάτοχος του χαρτοφυλακίου θα πρέπει να αναδιοργανώσει το χαρτοφυλάκιό του ανάλογα με την κατάσταση. Τη χρονική στιγμή 1 η τιμή της μετοχής είτε θα έχει ανέβει είτε θα έχει κατέβει. Στην περίπτωση που έχει ανέβει θα πρέπει να αναδιοργανώσει το χαρτοφυλάκιο ως εξής,

$$a_2 = \frac{A_2^4 - A_2^3}{(u - d)(uS_0)} = 2/3$$

$$b_2 = \frac{uA_2^3 - dA_2^4}{(u - d)(1 + r)} = -0.64$$

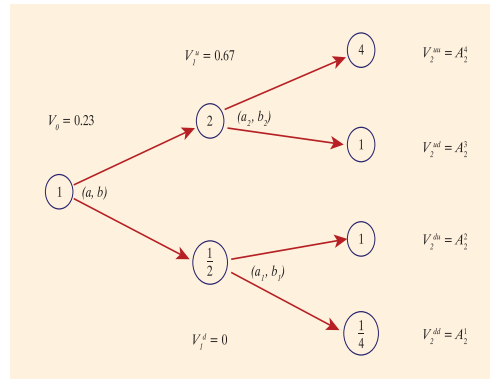
ενώ στην περίπτωση που η μετοχή έχει κατέβει θα πρέπει να αναδιοργανώσει το χαρτοφυλάκιό του ως εξής

$$a_1 = \frac{A_2^2 - A_2^1}{(u - d)(dS_0)} = 0$$

$$b_1 = \frac{uA_2^1 - dA_2^2}{(u - d)(1 + r)} = 0$$

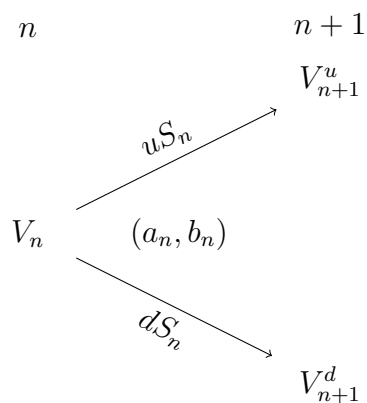
το οποίο είναι λογικό αφού η αξία του χαρτοφυλακίου

του είναι μηδενική σε αυτή την περίπτωση. Σχηματικά έχουμε



Σχήμα 7





Σχήμα 8: Γενικότερα, κατά τη χρονική στιγμή  $n$  η αξία του χαρτοφυλακίου συμβολίζεται με  $V_n$  επομένως οι πιθανές αξίες του κατά τη χρονική στιγμή  $n + 1$  συμβολίζονται με  $V_{n+1}^u$  και  $V_{n+1}^d$ . Εφαρμόζοντας το προηγούμενο σκεπτικό διαπιστώνουμε ότι αρκεί

$$V_n = \frac{1}{1+r} (qV_{n+1}^u + (1-q)V_{n+1}^d)$$

και επιπλέον

$$a_n = \frac{V_{n+1}^u - V_{n+1}^d}{(u-d)S_n} \quad b_n = \frac{uV_{n+1}^d - dV_{n+1}^u}{(u-d)(1+r)}$$

όπου  $S_n$  είναι η τρέχουσα αξία της μετοχής.

---

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το matlab για να κάνουμε τους παραπάνω υπολογισμούς ως εξής.

```
>> syms x y S
```

```
1 u =  
2  
3     2  
4  
5 >> d=1/2  
6  
7 d =  
8  
9     0.5000  
10  
11 >> r=0.03  
12  
13 r =  
14  
15     0.0300  
16  
17 >> q=(1+r-d)/(u-d)  
18  
19 q =  
20  
21     0.3533
```

Στη συνέχεια δημιουργούμε τρεις συναρτήσεις. Η μια θα είναι για τον υπολογισμό της αξίας του χαρτοφυλακίου και οι άλλες δυο για τον υπολογισμό των

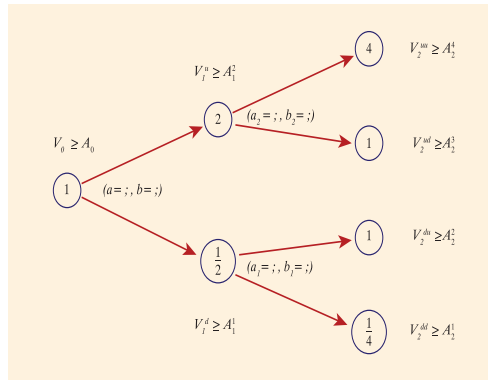
*a, b.*

```
1 >> V(x,y)=1/(1+r)*(q*x+(1-q)*y)
2
3 V(x, y) =
4
5 (106*x)/309 + (194*y)/309
6 >> a(x,y,S)=(x-y)/((u-d)*S)
7
8 a(x, y, S) =
9
10 (2*(x - y))/(3*S)
11
12 >> b(x,y)=(d*x-u*y)/((u-d)*(1+r))
13
14 b(x, y) =
15
16 (100*x)/309 - (400*y)/309
```



## Κατασκευή Χαρτοφυλακίου Προκαθορισμένης Αξίας με Ενδιάμεσες Απαιτήσεις

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας ζητείται να κατασκευάσουμε το μικρότερο χαρτοφυλάκιο με αξίες στο τέλος της δεύτερης περιόδου μεγαλύτερες ή ίσες από δοσμένες τιμές αλλά επιπλέον μας ζητείται οι αξίες του χαρτοφυλακίου να υπερβαίνουν συγκεκριμένες ποσότητες στους ενδιάμεσους χρόνους. Δηλαδή, θέλουμε χαρτοφυλάκιο του οποίου οι αξίες στη δεύτερη περίοδο να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από  $A_2^4, A_2^3, A_2^2, A_2^1$  και επίσης στη χρονική στιγμή 1 οι αξίες του χαρτοφυλακίου να υπερβαίνουν τις  $A_1^2, A_1^1$  δοσμένες τιμές και τέλος τη χρονική στιγμή 0 να ισχύει ότι  $V_0 \geq A_0$  για δοσμένο  $A_0$ . Σχηματικά, μας ζητείται το εξής

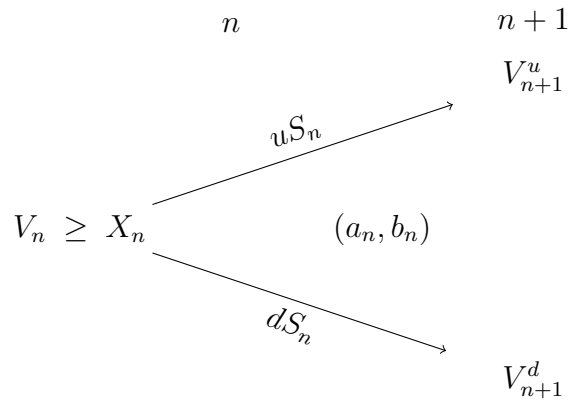


Σχήμα 9

Σκεπτόμενοι όπως πριν η αξία του χαρτοφυλακίου  $V_1^u$  θα πρέπει να είναι ίση με την  $E_1^u = \frac{1}{1+r}(qA_2^4 + (1-q)A_2^3)$  και επιπλέον μεγαλύτερη ή ίση της  $A_1^2$  επομένως είναι λογικό να απαιτήσω η αξία  $V_1^u = \max\{A_1^2, E_1^u\}$ . Παρόμοια και για τις υπόλοιπες αξίες. Δηλαδή

$$V_1^d = \max\{A_1^1, E_1^d\}$$

$$V_0 = \max\left\{A_0, \frac{1}{1+r}(qV_1^u + (1-q)V_1^d)\right\}$$



Σχήμα 10: Αν κατά τη χρονική στιγμή  $n$  η αξία του χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση μιας δεδομένης τιμής  $X_n$  τότε θα πρέπει να είναι ίση με  $\max\{X_n, \frac{1}{1+r}(qV_{n+1}^u + (1-q)V_{n+1}^d)\}$  έτσι ώστε να ισχύει αυτή η προϋπόθεση και ταυτόχρονα να είναι αρκετή έτσι ώστε στην επόμενη χρονική στιγμή να έχει τις απαιτούμενες αξίες.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6** Κατασκευάστε χαρτοφυλάκιο τ.ω. οι αξίες του στο χρόνο 2 να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από  $A_2^4 = 2, A_2^3 = A_2^2 = A_2^1 = 0$  και επίσης οι αξίες τη χρονική στιγμή 1 να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από  $A_1^2 = 3/2$  και  $A_1^1 = 1$ . Θεωρούμε τα υπόλοιπα δεδομένα τα ίδια με το προηγούμενο παράδειγμα.

**Απάντηση.** Το  $q = 0.35$  και το  $1 - q = 0.65$ . Αν οι αξίες στη χρονική στιγμή 1 είναι ίσες με

$$V_1^u = \frac{1}{1+r}(qA_2^4 + (1-q)A_2^3) = \frac{0.35 \cdot 2}{1.03} = \frac{0.7}{1.03} = 0.67$$

$$V_1^d = \frac{1}{1+r}(qA_2^2 + (1-q)A_2^1) = 0.$$

τότε, όπως έχουμε δει, στο χρόνο 2 οι αξίες θα είναι ίσες με τις απαιτούμενες. Όμως, εδώ μας ζητείται επιπλέον οι αξίες  $V_1^u, V_1^d$  να είναι μεγαλύτερες ή ίσες από  $3/2, 1$  αντίστοιχα. Επομένως, απαιτώ οι αξίες να είναι ως εξής

$$V_1^u = \max\{3/2, 0.67\} = 3/2$$

$$V_1^d = \max\{1, 0\} = 1$$

Υπολογίζω τώρα την αρχική αξία του χαρτοφυλακίου

$$V_0 = \frac{1}{1+r}(qV_1^u + (1-q)V_1^d) = 1.14$$

Στη συνέχεια υπολογίζω τη σύσταση του χαρτοφυλακίου σε κάθε περίπτωση. Στο χρόνο μηδέν θα πρέπει να έχει το χαρτοφυλάκιο

$$a = \frac{V_1^u - V_1^d}{(u-d)S_0} = 1/3$$

$$b = \frac{uV_1^d - dV_1^u}{(u-d)(1+r)} = 0.80$$

Συνεχίζοντας, υπολογίζουμε τα  $a_2, b_2, a_1, b_1$  όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα.

**ΑΣΚΗΣΗ 7** Ένας επενδυτής μας ζητά να επενδύσει ένα ποσό σε αγορά μετοχών και σε κατάθεση σε τράπεζα έτσι ώστε (σε ένα δέντρο μιας περιόδου) μετά την πάροδο μιας περιόδου η απόδοση της επένδυσης αυτής να ξεπερνά την απόδοση κατάθεσης σε τράπεζα του ίδιου ποσού. Μπορείτε να μετατρέψετε το πρόβλημα αυτό σε ένα μαθηματικό πρόβλημα και στην συνέχεια να δώσετε τις κατάλληλες απαντήσεις στον επενδυτή; Υποθέστε ότι η τιμή της μετοχής σήμερα είναι  $S_0$ , οι ρυθμοί ανόδου και καθόδου είναι  $u, d$  και το επιτόκιο περιόδου είναι  $r$ .

**Απάντηση.** Έστω ότι θα επενδύσουμε το ποσό  $V_0$  σήμερα. Μετά από μια περίοδο η αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι  $V_1^u = V_0 + A$  ή  $V_1^d = V_0 + B$ . Αυτό που στην πραγματικότητα θέλει ο επενδυτής (στην γλώσσα των μαθηματικών) είναι  $V_0 \cdot r < \min\{A, B\}$ . Πράγματι, το ποσό  $V_0 \cdot r$  είναι το κέρδος του μετά από μια περίοδο στην περίπτωση που καταθέσει το ποσό  $V_0$  σήμερα στην τράπεζα. Ενώ αν επενδύσει σε κάποιο χαρτοφυλάκιο όπως περιγράψαμε πριν το κέρδος του

θα είναι τουλάχιστον το ποσό  $\min\{A, B\}$ . Αυτό λοιπόν που επιθυμεί ο επενδυτής είναι η επένδυση του σε χαρτοφυλάκιο να ξεπερνά σε απόδοση την αντίστοιχη κατάθεση σε τράπεζα, δηλαδή  $V_0 \cdot r < \min\{A, B\}$ . Ας δούμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις είναι εφικτό.

Όπως γνωρίζουμε, αν επενδύσουμε σήμερα το ποσό  $V_0$  και θέλουμε να έχει τελικές αξίες  $V_1^u = V_0 + A$  ή  $V_1^d = V_0 + B$  τότε θα πρέπει να ισχύει η σχέση

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{1+r} (q(V_0 + A) + (1-q)(V_0 + B)) \Rightarrow \\ (1+r)V_0 &= qV_0 + qA + (1-q)V_0 + (1-q)B \Rightarrow \\ V_0 r &= q(A - B) + B \end{aligned}$$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

- $\min\{A, B\} = B$ . Εφόσον πρέπει  $V_0 r < B$  έπεται ότι  $q(A - B) + B < B$  το οποίο σημαίνει ότι (αφού  $A - B > 0$ ) θα πρέπει να ισχύει ότι  $q < 0$  δηλαδή  $1 + r < d$ .

- $\min\{A, B\} = A$ . Εφόσον πρέπει  $V_0 r < A$  έπεται ότι  $q(A - B) + B < A$  το οποίο σημαίνει ότι (αφού  $A - B < 0$ ) θα πρέπει να ισχύει ότι  $q > 1$  ή αλλιώς

$1 + r - d > u - d$  δηλαδή  $1 + r > u$ .

• Αν  $A = B$  τότε προκύπτει ότι  $V_0 r = B$  και επομένως δεν γίνεται  $V_0 r < \min\{A, B\} = B$ .

Τελικά είναι εφικτή η κατασκευή ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου αρκεί

$$1 + r \notin (d, u)$$

Στην πρώτη περίπτωση όπου  $A > B$  ο επενδυτής θα αγοράσει σήμερα μετοχές και θα τις πουλήσει στο τέλος της περιόδου προκειμένου να έχει το ζητούμενο κέρδος. Όταν αυτή η δυνατότητα γίνει αντιληπτή στο ευρύ επενδυτικό κοινό πολλοί θα θελήσουν να αποκομίσουν κέρδος με αυτό τον τρόπο. Αυτό όμως θα σημαίνει ότι όλοι αυτοί θα θελήσουν να πουλήσουν τις μετοχές τους στο τέλος της πρώτης περιόδου με συνέπεια ο ρυθμός καθόδου  $d$  να ελαττωθεί και έτσι κάποια στιγμή να γίνει μικρότερος του  $1 + r$ . Παρόμοιος συλλογισμός μπορεί να διατυπωθεί στην περίπτωση που  $A < B$ . Τέτοιες ευκαιρίες σίγουρου κέρδους, όπως ονομάζονται, παρουσιάζονται συχνά στην αγορά αλλά διατηρούνται για μικρό χρονικό διάστημα.



## Προθεσμιακά Συμβόλαια και Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης

Τα προθεσμιακά συμβόλαια λαμβάνουν μέρος μεταξύ δυο ενδιαφερομένων οι οποίοι έχουν την υποχρέωση μετά την πάροδο καθορισμένου χρόνου να ανταλλάξουν περιουσιακά στοιχεία με προκαθορισμένο τρόπο. Έστω ότι ο  $A$  υποχρεούται να πουλήσει στον  $B$  μετά από έναν χρόνο 100 μετοχές μιας συγκεκριμένης εταιρείας στην τιμή (παράδοσης)  $K$  ανά μετοχή την οποία συμφωνούν την ημέρα που υπογράφουν το συμβόλαιο. Σημειώστε ότι κανείς δεν γνωρίζει την τιμή της μετοχής μετά από ένα χρόνο επομένως υπάρχει και για τους δυο ένα ρίσκο. Παρόμοιο είναι και το συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης με τη διαφορά ότι τέτοια συμβόλαια είναι υπό διαπραγμάτευση στο χρηματιστήριο. Είναι δηλαδή τυποποιημένα συμβόλαια (π.χ. 100 μετοχές της εταιρείας  $A$  μετά από τρεις μήνες) και διαπραγματεύονται την τιμή  $K$ .

Για ποιον λόγο υπάρχουν αυτά τα συμβόλαια; Υπο-

θέστε ότι ο επενδυτής  $A$  διαισθάνεται ότι η τιμή μιας μετοχής πρόκειται να κατέβει κατά τη διάρκεια του συμβολαίου ενώ από την άλλη μεριά ένας άλλος επενδυτής  $B$  φοβάται ότι η τιμή της μετοχής θα είναι υψηλή στο τέλος του συμβολαίου. Σε αυτή την περίπτωση μπορούν να συνάψουν ένα συμβόλαιο όπως παραπάνω και προφανώς κερδισμένος θα πρέπει να είναι (όταν η τιμή παράδοσης είναι λογική) αυτός του οποίου η διαίσθηση επαληθευτεί.

Ποιες είναι οι κινήσεις του  $A$  και ποιες του  $B$  μετά τη σύναψη του συμβολαίου; Ο  $B$  μπορεί να καταθέσει στην τράπεζα οποιαδήποτε στιγμή  $t \in [0, T]$  το ποσό  $Ke^{-r(T-t)}$  το οποίο στη λήξη του συμβολαίου θα είναι ίσο με την τιμή παράδοσης. Ο  $A$  προκειμένου να πουλήσει τη μετοχή στον  $B$  θα πρέπει πρώτα να την αγοράσει αν δεν είναι ήδη στην κατοχή του. Ποια είναι η καταλληλότερη στιγμή αγοράς της μετοχής; Προφανώς συμφέρει να την αγοράσει όταν η μετοχή πάρει τη μικρότερη τιμή κατά τη διάρκεια του συμβολαίου αλλά μην γνωρίζοντας το μέλλον δεν μπορεί να είναι σίγουρος πότε είναι η κατάλληλη στιγμή. Διαπιστώνουμε

ότι μετά τη σύναψη του συμβολαίου μόνο ο  $A$  έχει τη δυνατότητα να ρισκάρει προκειμένου να κερδίσει περισσότερα και αυτό επιλέγοντας το χρόνο αγοράς των μετοχών.

Ο επενδυτής  $A$  θα μπορούσε να καταθέσει το ποσό  $S_0$  στην τράπεζα τη χρονική στιγμή μηδέν και να λάβει  $S_0 e^{rT}$  χωρίς ρίσκο τη χρονική στιγμή  $T$ . Αν η τιμή παράδοσης  $K$  είναι μεγαλύτερη αυτού του ποσού τότε ο  $A$  μπορεί να αγοράσει τις μετοχές τη στιγμή μηδέν και στη λήξη του να τις πουλήσει στην τιμή  $K > S_0 e^{rT}$  ανεξάρτητα από το πώς θα κινηθεί η μετοχή. Θα έχει επομένως σίγουρο κέρδος, χωρίς ρίσκο, μεγαλύτερο από την τοποθέτηση σε τράπεζα, κάτι το οποίο δεν είναι δίκαιο. Με το ποσό, λοιπόν,  $S_0 e^{rT}$  ο  $A$  έχει εκμηδενίσει το ρίσκο. Αν ο  $B$  μπορεί να πουλήσει στο χρόνο μηδέν δανεισμένες μετοχές τοποθετεί το ποσό αυτό στην τράπεζα και στο χρόνο  $T$  είναι ίσο με  $S_0 e^{rT}$ . Στο χρόνο  $T$  αγοράζει τις μετοχές από τον  $A$  (και τις επιστρέφει αφού τις είχε δανειστεί) στην τιμή  $S_0 e^{rT}$ , επομένως και ο  $B$  μπορεί να εκμηδενίσει το ρίσκο. Έτσι το ποσό  $S_0 e^{rT}$  θεωρείται η δίκαιη τιμή παράδοσης

αφού και οι δυο μπορούν να αντισταθμίσουν το ρίσκο όταν ο  $B$  έχει τη δυνατότητα να πουλήσει δανεισμένες μετοχές. Αν δεν έχει αυτή τη δυνατότητα τότε οι δυο αντισυμβαλλόμενοι δεν είναι ισοδύναμοι απέναντι στο ρίσκο όταν η τιμή παράδοσης είναι  $S_0 e^{rT}$ .

Τα συμβόλαια αυτά είναι υπό διαπραγμάτευση (είτε στο χρηματιστήριο είτε εξωχρηματιστηριακά) και επομένως η τιμή παράδοσης  $K$  μπορεί να διαφέρει από την  $S_0 e^{rT}$ . Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό που διαχωρίζει αυτές τις έννοιες.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 8** Το ποσό  $S_0 e^{rT}$  ονομάζεται **αξία** παράδοσης ενώ το ποσό  $K$  θα το ονομάζουμε **τιμή** παράδοσης ενός προθεσμιακού συμβολαίου ή συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης.

Η **αξία** παράδοσης είναι η λεγόμενη δίκαιη τιμή κατά την οποία κανένα από τα δυο συμβαλλόμενα μέρη δεν είναι κερδισμένο (εκ των προτέρων) ενώ η **τιμή** παράδοσης είναι η τιμή που θα συμφωνήσουν μετά την διαπραγμάτευση. Η **τιμή** μπορεί να διαφέρει από την **αξία** ανάλογα με τις προσδοκίες των επενδυτών όσον

αφορά το υποκείμενο αγαθό. Αν οι επενδυτές διαπιστώνονται ότι η τιμή της μετοχής θα ανέβει πολύ πάνω από την σημερινή τιμή τότε η **τιμή** παράδοσης μπορεί να συμφωνηθεί να είναι αρκετά μεγαλύτερη από την **αξία** παράδοσης. Οι παραπάνω ισχυρισμοί ταιριάζουν για οποιαδήποτε περίπτωση αγαθού στη θέση της μετοχής.

Ένα παράδειγμα το οποίο δεν αναφέρεται σε αγοραπωλησία μετοχών αλλά αγαθών είναι η συμφωνία πώλησης και παράδοσης πετρελαίου. Υποθέστε ότι ο Α είναι πωλητής πετρελαίου και ο Β επιχειρηματίας ο οποίος χρησιμοποιεί το πετρέλαιο ως βασική πηγή ενέργειας. Ο Β χρειάζεται συγκεκριμένη ποσότητα πετρελαίου κάθε χρόνο χωρίς όμως να είναι σε θέση να αγοράσει μεγαλύτερη ποσότητα για λόγους αποθήκευσης και φύλαξης. Ο Β για να είναι εξασφαλισμένος ότι τον επόμενο χρόνο θα αγοράσει το πετρέλαιο που χρειάζεται στη σημερινή τιμή και όχι στην μελλοντική η οποία μπορεί να είναι αρκετά υψηλότερη, χρειάζεται ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με το οποίο θα εξασφαλίζει την τιμή αλλά και το ότι θα του παραδοθεί τον

επόμενο χρόνο. Ο Α επίσης, με ένα τέτοιο συμβόλαιο θα είναι σίγουρος για τις μελλοντικές του πωλήσεις και έτσι αποθηκεύει την απαραίτητη ποσότητα πετρελαίου και ταυτόχρονα «κλειδώνει» την τιμή πώλησης της ποσότητας αυτής.

## Δικαιώματα Προαίρεσης

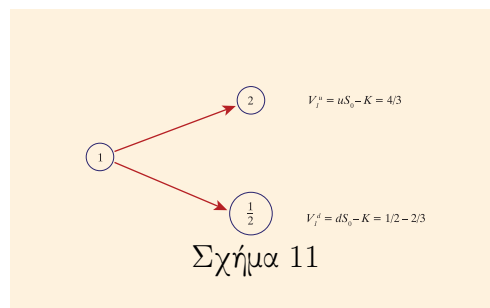
Ιδιαίτερο μαθηματικό ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα λεγόμενα δικαιώματα προαίρεσης. Υποθέστε ότι ο  $A$  συνάπτει ένα συμβόλαιο με τον  $B$  το οποίο να **υποχρεώνει** τον  $A$  να πουλήσει στον  $B$  ένα συγκεκριμένο αριθμό μετοχών σε συγκεκριμένη τιμή (τιμή εξάσκησης) και σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον (λήξη του συμβολαίου). Ο  $B$  από την άλλη δεν είναι υποχρεωμένος να το κάνει αλλά έχει το **δικαίωμα** ανάλογα αν τον συμφέρει. Αν π.χ. η τιμή της μετοχής στη λήξη του συμβολαίου, έστω  $S_T$ , είναι μεγαλύτερη της  $K$  τότε ο  $B$  θα αγοράσει μετοχές από τον  $A$  φθηνότερα από ότι πωλούνται στην αγορά με συνέπεια να κερδίσει την διαφορά τιμών.

Είναι προφανές ότι ο  $B$  βρίσκεται σε πλεονεκτική θέση έναντι του  $A$  και επομένως κανένας δεν πρόκειται να βρεθεί στη θέση του  $A$  χωρίς κάποιο αντίτιμο. Έτσι λοιπόν ο  $A$  συμφωνεί να βρεθεί σε αυτή τη μειονεκτική θέση αν του δοθεί ένα ποσό από τον  $B$ .

Το ερώτημα για τον  $A$  είναι ποιο ποσό πρέπει να

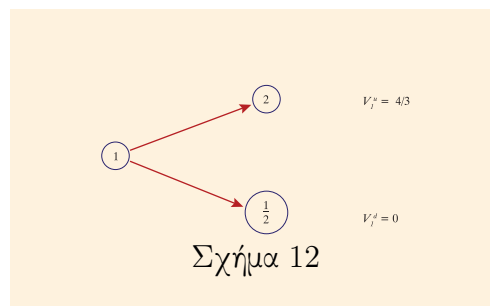
ζητήσει από τον Β. Αυτό εξαρτάται από το πώς θα χρησιμοποιήσει τα χρήματα αυτά για να καλύψει τον Β στην περίπτωση που εξασκήσει το δικαίωμα. Αν π.χ. η τιμή της μετοχής ανέβει ψηλότερα από  $K$  τότε το ποσό που διεκδικεί στην πραγματικότητα ο Β είναι το  $S_T - K$  (για κάθε μετοχή). Επομένως ο Α ουσιαστικά πρέπει να καταβάλλει στον Β το ποσό αυτό.

Ας το δούμε σε ένα δέντρο μιας περιόδου. Ας υποθέσουμε ότι ο Α πρέπει να παραδώσει στον Β μια μετοχή στο χρόνο 1 και σε τιμή  $K$ . Υποθέτουμε επίσης ότι  $S_0 = 1$ ,  $u = 2$  και  $d = 1/2$ ,  $K = 2/3$ . Επομένως, το ποσό που θα κερδίσει ο Β στο χρόνο 1 φαίνεται σχηματικά



Εφόσον ο Β έχει το δικαίωμα να εξασκήσει το συμβόλαιο αν τον συμφέρει διαπιστώνουμε ότι δεν θα το

κάνει αν η τιμή της μετοχής πέσει ενώ θα το εξασκήσει αν ανέβει με κέρδος  $4/3$ . Σχηματικά, φαίνεται παρακάτω τα χρήματα που πρέπει να έχει στη διάθεσή του ο Α σε κάθε περίπτωση



Πώς θα έχει αυτά τα χρήματα; Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσει κατάλληλα τα χρήματα από την πώληση του συμβολαίου έτσι ώστε να κατασκευάσει κατάλληλο χαρτοφυλάκιο με αξίες τη χρονική στιγμή 1 αυτές που χρειάζεται. Όπως ήδη είδαμε ο Α μπορεί να υπολογίσει το ποσό που του χρειάζεται για να κατασκευάσει τέτοιο χαρτοφυλάκιο και αυτό το ποσό ακριβώς θα ζητήσει από τον Β για να υπογράψει ένα τέτοιο συμβόλαιο. Αν υποθέσουμε ότι  $r = 0.03$  τότε το ποσό

που χρειάζεται είναι

$$V_0 = \frac{1}{1+r} \left( q \frac{4}{3} + (1-q)0 \right) = \frac{0.35 \cdot 4}{3 \cdot 1.03} = 0.45$$

ανά μετοχή. Με το ποσό αυτό θα αγοράσει μετοχές και θα κάνει κατάθεση στην τράπεζα σύμφωνα με τους τύπους

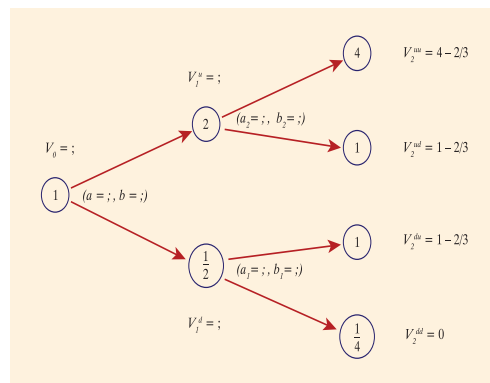
$$a = \frac{4/3 - 0}{(2 - 1/2) \cdot 1} = 8/9$$
$$b = \frac{2 \cdot 0 - 1/2 \cdot 4/3}{(2 - 1/2) \cdot 1.03} = -0.43$$

Δηλαδή θα αγοράσει 0.88 μετοχές και θα δανειστεί 0.43 από την τράπεζα, πάντοτε ανά μετοχή.

Αν η επιλογή των  $u, d$  προκύψει σωστή τότε είναι σίγουρο ότι ο A θα είναι σε θέση να καλύψει τον B σε κάθε περίπτωση. Θυμηθείτε όμως ότι τα  $u, d$  υπολογίστηκαν με βάση την παρελθοντική συμπεριφορά της μετοχής και επομένως δεν είναι καθόλου σίγουρο αν ακολουθήσει την ίδια και στο μέλλον.

Προφανώς παρόμοιοι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν και σε ένα δέντρο δυο περιόδων και το πρόβλημα α-

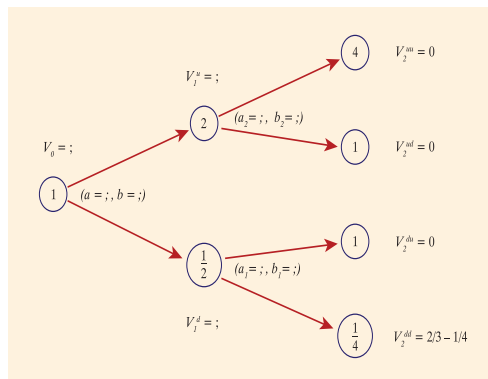
νάγεται στο να υπολογίσουμε τις τιμές  $A_2^4$ ,  $A_2^3$ ,  $A_2^2$ ,  $A_2^1$  που πρέπει να έχει το χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή 2 και επομένως ανάγεται στην κατασκευή χαρτοφυλακίου προκαθορισμένης αξίας. Ας το δούμε σχηματικά,



Σχήμα 13

Το συμβόλαιο που περιγράψαμε λέγεται Ευρωπαϊκό συμβόλαιο αγοράς. Με τον όρο Ευρωπαϊκό εννοούμε ότι ο αγοραστής (ο B) του συμβολαίου μπορεί να εξασκήσει το συμβόλαιο μόνο τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή, στη λήξη του. Ο όρος Ευρωπαϊκό δεν είναι γεωγραφικός όρος, τέτοια συμβόλαια χρησιμοποιούνται παντού. Επίσης το λέμε συμβόλαιο αγοράς

διότι ο αγοραστής έχει το δικαίωμα να αγοράσει μετοχές από τον A. Υπάρχει και το λεγόμενο Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με το οποίο ο B έχει δικαίωμα να πουλήσει στον A μετοχές σε προκαθορισμένη τιμή. Σε ένα τέτοιο συμβόλαιο ο B θα είναι κερδισμένος αν η μετοχή πέσει κάτω από την τιμή K (πουλώντας τη στον A ακριβότερα). Για τον A το μόνο που αλλάζει είναι ο υπολογισμός των  $A_2^i$  ούτως ώστε να αποφασίσει για την τιμή πώλησης  $V_0$  του συμβολαίου. Σχηματικά, για ένα Ευρωπαϊκό συμβόλαιο πώλησης έχουμε το παρακάτω



Σχήμα 14

έχοντας υποθέσει τα συνηθισμένα νούμερα.

### Αμερικανικά Συμβόλαια

Τα συμβόλαια αυτά έχουν τη διαφορά με τα αντίστοιχα Ευρωπαϊκά ότι ο αγοραστής του συμβολαίου έχει το δικαίωμα να εξασκήσει το συμβόλαιο ανά πάσα στιγμή μέχρι τη λήξη του. Δηλαδή, σε ένα δέντρο τιμών 2 περιόδων έχει το δικαίωμα να εξασκήσει το συμβόλαιο τις χρονικές στιγμές 1 ή 2, όποτε τον συμφέρει. Σε ένα δικαίωμα αγοράς το ποσό που θα εισπράξει θα είναι  $S_t - K$  αν αυτό είναι θετικό αλλιώς δεν θα το εξασκήσει. Συνοπτικά, γράφουμε ότι το ποσό που θα εισπράξει (και άρα το ποσό που πρέπει να έχει διαθέσιμο ο πωλητής του συμβολαίου) είναι

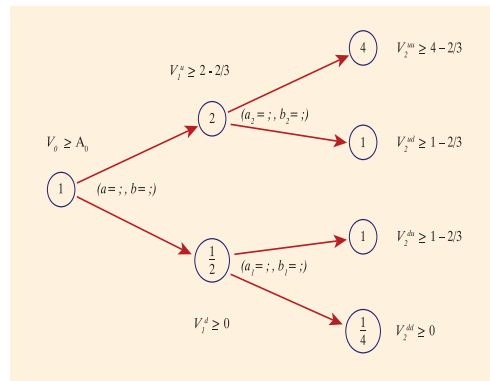
$$\max\{S_t - K, 0\}$$

για το συμβόλαιο αγοράς, ενώ για το συμβόλαιο πώλησης θα είναι

$$\max\{K - S_t, 0\}$$

όπου  $S_t$  είναι η τιμή της μετοχής τη στιγμή που θα επιλέξει να το εξασκήσει. Το πρόβλημα για την τι-

μή που θα δώσει ο Α ανάγεται πάλι στην κατασκευή χαρτοφυλακίου προκαθορισμένης αξίας με ενδιάμεσες απαιτήσεις. Ας το δούμε σχηματικά, για ένα Αμερικανικό συμβόλαιο αγοράς



Σχήμα 15

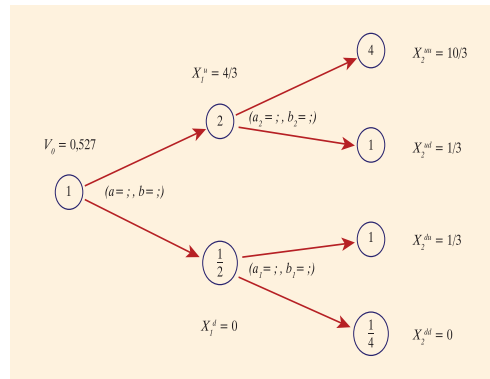
Γενικά, ο Β σε ένα Αμερικανικό συμβόλαιο θα εξασκήσει όποτε τον συμφέρει. Δεν γνωρίζει το μέλλον όμως για να επιλέξει εκ των προτέρων τη χρονική στιγμή εξάσκησης, επομένως ένα λογικό κριτήριο για να εξασκήσει είναι να εξετάσει αν ισχύει η ανισότητα

$$X_n > V_0(1+r)^n$$

όπου με  $X_n$  συμβολίζουμε το κέρδος του Β αν εξα-

σικήσει στο χρόνο  $n$ . Αν αυτό το κέρδος υπερβαίνει το ποσό  $V_0(1+r)^n$  (το οποίο είναι το κόστος του συμβολαίου τοκισζόμενο για  $n$  χρονικές περιόδους) τότε τον συμφέρει να το εξασκήσει τη χρονική στιγμή εκείνη διότι θα έχει κερδίσει περισσότερα από ότι αν τοποθετούσε τα  $V_0$  στην τράπεζα.

Στο παραπάνω παράδειγμα, κάνοντας τους υπολογισμούς έχουμε σχηματικά



Σχήμα 16

Κάνοντας τους υπολογισμούς και αν η μετοχή ακολουθήσει συνεχή ανοδική πορεία τότε ο Β θα έχει μεγαλύτερο κέρδος από κατάθεση σε τράπεζα αν εξα-

σκήσει τη χρονική στιγμή 2. Σε κάθε άλλη περίπτωση κίνησης της μετοχής είτε θα έχει χάσει το ποσό των 0.527 που κατέβαλε για την αγορά του συμβολαίου είτε η απολαβή του θα είναι μικρότερη από κατάθεση σε τράπεζα.

### Κατάλληλος χρόνος εξάσκησης

Έστω ένα Αμερικανικό συμβόλαιο αγοράς με  $K = 5/2$ ,  $N = 3$ ,  $u = 2$ ,  $d = 1/2$  και  $r = 1/2$ . Ας υποθέσουμε ότι η μετοχή κινείται ανοδικά στις δυο πρώτες περιόδους. Ο κάτοχος του δικαιώματος, στο χρόνο  $n = 2$ , πρέπει να αποφασίσει αν θα εξασκήσει το δικαίωμα ή όχι. Κάνοντας τους υπολογισμούς φαίνεται ότι πρέπει να εξασκήσει στο χρόνο  $n = 2$  διότι το κέρδος του τότε θα είναι

$$(S_2^{uu} - K) - V_0(1 + r)^2 = 3/2 - 0.48(1 + 1/2)^2 > 0$$

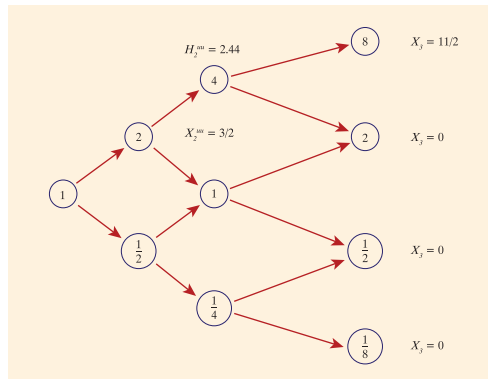
Ας σημειώσουμε ότι αν για κάποιο  $n$  ισχύει ότι  $V_n^A = X_n$  και αν υποθέσουμε ότι ο κάτοχος δεν εξασκήσει σε αυτόν το χρόνο τότε ο πωλητής έχει περισσότερα χρήματα στο χαρτοφυλάκιό του από ότι χρειάζεται για να προχωρήσει στο επόμενο βήμα.

Συμβολίζουμε με  $H_n$  την παρακάτω ακολουθία,

$$H_n = \begin{cases} X_N, & \text{για } n = N, \\ \max\{X_n, \frac{1}{1+r} (qH_{n+1}^u + (1-q)H_{n+1}^d)\}, & \text{για } n = N-1, \dots, 0 \end{cases}$$

Λέμε ότι η  $H_n$  είναι η δίκαιη τιμή (ή η αξία) του Αμερικανικού συμβολαίου κατά το χρόνο  $n$ . Η τιμή  $H_n$  είναι λοιπόν το ελάχιστο ποσό που χρειάζεται ο πωλητής τη χρονική στιγμή  $n$  για να είναι καλυμμένος για τις επόμενες χρονικές στιγμές.

Διαπιστώνουμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή  $n = 2$  είναι  $V_{2,2} = 2.44 > X_{2,2}$  και επομένως ο πωλητής είναι επίσης κερδισμένος.



Σχήμα 17

Στην περίπτωση που ο κάτοχος δεν εξασκήσει το συμβόλαιο τη χρονική στιγμή  $n = 2$  τότε ο πωλητής έχει στην κατοχή του περισσότερα χρήματα από ότι χρειάζεται για να προχωρήσει στην επόμενη χρονική στιγμή. Έτσι λοιπόν, μπορεί να επενδύσει μόνο αυτά που χρειάζεται και να κρατήσει τα υπόλοιπα (πόσα χρειάζεται και πόσα θα κρατήσει;) ή μπορεί να τα επενδύσει όλα.

Αν το συμβόλαιο είναι υπό διαπραγμάτευση στο χρηματιστήριο τότε ενδέχεται ο αγοραστής να μπορεί να πουλήσει το συμβόλαιο σε μεγαλύτερη τιμή από την απολαβή αν το εξασκήσει. Η αξία του συμβολαίου τη στιγμή  $n = 2$  είναι πράγματι μεγαλύτερη από την απολαβή και αποδεικνύεται παρακάτω ότι συμβαίνει πάντα στα Αμερικανικά δικαιώματα αγοράς για κάθε  $n$ . Στην εξωχρηματιστηριακή αγορά, τα συμβόλαια που πωλούνται είναι συνήθως πιο εξειδικευμένα (για τις ανάγκες του αγοραστή) και είναι δυσκολότερο να πουλήσεις ένα τέτοιο συμβόλαιο πριν τη λήξη του. Αν ο αγοραστής έχει τη δυνατότητα να πουλήσει το υποκείμενο αγαθό (χωρίς να το έχει) τότε προκύπτει ότι είναι προτιμότε-

ρο να κάνει αυτή την κίνηση τη χρονική στιγμή  $n = 2$  από το να εξασκήσει το δικαίωμα. Σε κάθε περίπτωση, τη χρονική στιγμή  $n = 2$  πρέπει να αποφασίσει το πώς θα εκμεταλλευτεί το συμβόλαιο που έχει στην κατοχή του.

Στην πράξη κάποιος θα μπορούσε να αγοράσει ένα συμβόλαιο μόνο και μόνο για την περίπτωση όπου η τιμή του υποκείμενου αγαθού ανέβει ή κατέβει περισσότερο από τις ιστορικές εκτιμήσεις  $u, d$ . Έτσι θα είναι καλυμμένος σε μια περίπτωση ακραίας συμπεριφοράς της τιμής του υποκείμενου αγαθού αλλά χαμένος στην περίπτωση όπου η τιμή του υποκείμενου αγαθού κινηθεί στα πλαίσια του παρελθόντος.

### Γενικά Σχόλια

Διαπιστώνουμε ότι η τιμή  $V_0$  εξαρτάται από τις τιμές  $u, d$  που θα δώσει ο κάθε πωλητής. Όπως περιγράψαμε μπορεί κάποιος να χρησιμοποιήσει ιστορικά δεδομένα ενός μήνα, δυο μηνών, 1 χρόνου κτλ. Σε κάθε μια περίπτωση θα υπολογίσει διαφορετικά  $u, d$  και άρα θα δώσει διαφορετική τιμή  $V_0$ . Οι τιμές  $u, d$

δεν είναι παρά μια υπόθεση για το μέλλον την οποία κανείς μπορεί να την κάνει και με γεγονότα που συνέβησαν πρόσφατα και ακόμη δεν έχουν επιδράσει στην κίνηση της μετοχής, π.χ. η εταιρεία προσέλαβε νέο προσωπικό, άνοιξε νέα υποκαταστήματα στο εξωτερικό ή αντιθέτως ένα προϊόν της παρουσίασε σοβαρά ελαττώματα και επομένως η μεταβλητότητα πρόκειται να αλλάξει ραγδαία. Τα συμβόλαια τα οποία είναι υπό διαπραγμάτευση στο οργανωμένο χρηματιστήριο πωλούνται σύμφωνα με την προσφορά και τη ζήτηση. Οι τιμές τους αντικατοπτρίζουν τις προσδοκίες των επενδυτών και στην ουσία αντικατοπτρίζεται η προσδοκία των επενδυτών όσον αφορά τη μεταβλητότητα της υποκείμενης μετοχής αλλά και την άνοδο ή κάθοδο της μετοχής στο μέλλον.

Θεωρήσαμε ως τώρα ότι ο ανατοκισμός είναι περιοδικός με επιτόκιο περιόδου  $r$ . Για διάφορους λόγους είναι προτιμότερο να υποθέτουμε συνεχή ανατοκισμό. Σε αυτή την περίπτωση αν  $r$  είναι το ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού και  $T$  (σε χρόνια) ο τελικός χρόνος για τον οποίο ενδιαφερόμαστε μπορούμε να χω-

ρίσουμε το  $[0, T]$  σε  $n$  ίσα υποδιαστήματα χρονικής διάρκειας  $\delta$ . Τότε μια νομισματική μονάδα που τοκίζεται στον χρόνο μηδέν γίνεται  $e^{r\delta}$  στον χρόνο ένα,  $e^{kr\delta}$  στον χρόνο  $k$  κ.τ.λ. Όλες οι σχέσεις που έχουμε αποδείξει (ή που θα αποδείξουμε παρακάτω) υποθέτοντας περιοδικό ανατοκισμό ισχύουν και στον συνεχή ανατοκισμό αντικαθιστώντας το  $1 + r$  με το  $e^{r\delta}$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9** *Ας θεωρήσουμε ένα Αμερικανικό συμβόλαιο πώλησης με τιμή εξάσκησης  $K = 1$ ,  $u = 2$ ,  $d = 1/2$  και  $r = 0.03$  σε ένα διωνυμικό δέντρο δυο περιόδων. Κάνοντας τους υπολογισμούς έχουμε ότι η αρχική αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου είναι ίση με  $V_0 = 0.3139$ . Στην περίπτωση που η μετοχή κατέβει κατά τη χρονική στιγμή  $n = 1$  η απολαβή είναι ίση με  $X_1^d = 0.5$  ενώ τα χρήματα που χρειάζεται να έχει το χαρτοφυλάκιο για την επόμενη χρονική στιγμή είναι  $E_1^d = 0.4709$  και επομένως η αξία του χαρτοφυλακίου σε αυτό το χρονικό σημείο είναι ίση με  $V_1^d = 0.5$ . Αν ο αγοραστής δεν εξασκήσει σε αυτή τη χρονική στιγμή τότε περισσεύουν χρήματα στο χαρτοφυλάκιο ( $0.5 - 0.4709$ ) τα οποία ο πωλητής (και κάτοχος του χαρτοφυλακίου) μπορεί να τα καταναλώσει.*

*Για ποιο λόγο ο αγοραστής θα αγοράσει ένα τέτοιο συμβόλαιο και όχι να δημιουργήσει μόνος του ένα τέτοιο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο; Ένας πιθανός λόγος είναι ότι ο πωλητής μπορεί να έχει τη δυνατότητα να κατασκευάσει αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο με λιγότερα χρήματα, αν για παράδειγμα έχει τη δυνατότητα να δα-*

νείζει με μεγαλύτερο επιτόκιο. Ένας ακόμη λόγος είναι ότι ο αγοραστής του συμβολαίου θα πάρει τα χρήματα τα οποία έχει συμφωνήσει ανεξάρτητα αν το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο έχει αυτή την αξία. Ο πωλητής του συμβολαίου μπορεί να πέσει έξω στους υπολογισμούς των  $u, d$  με συνέπεια το αντισταθμιστικό του χαρτοφυλάκιο να έχει μικρότερη αξία από την απολαβή του αγοραστή. Παρόλα αυτά θα είναι υποχρεωμένος να πληρώσει στον αγοραστή την απολαβή που έχει συμφωνηθεί. Με αυτό το τρόπο δηλαδή, ο αγοραστής μεταθέτει τον κίνδυνο στον πωλητή.

Ένα ακόμη ερώτημα είναι το εξής: Η αρχική αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου όπως κατασκευάστηκε είναι η μικρότερη δυνατή ή μήπως μπορούμε με λιγότερα χρήματα να κατασκευάσουμε αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο; Σε αυτό θα απαντήσουμε παρακάτω και θα δώσουμε τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες είναι πράγματι η μικρότερη δυνατή τιμή. Στην ουσία, συμβολίζοντας με  $E_n$  το ποσό που χρειάζεται να έχει το χαρτοφυλάκιο για να προχωρήσει στην επόμενη χρονική στιγμή, αρκεί να μελετήσουμε τις προϋποθέσεις

κάτω από τις οποίες το ποσό  $E_n$  μπορεί να είναι μικρότερο.  $\square$

Ελάχιστη τιμή συμβολαίου, Arbitrage και πληρότητα

Το μοντέλο που περιγράψαμε (το ότι η μετοχή μπορεί να πάρει δυο τιμές στην επόμενη χρονική περίοδο) ονομάζεται **διωνυμικό**.

Arbitrage (ή αλλιώς ευκαιρία σίγουρου κέρδους) είναι μια συγκεκριμένη ακολουθία χρηματιστηριακών κινήσεων (ή αλλιώς στρατηγική επένδυσης) που καταλήγει σε κέρδος με μηδενικό ρίσκο και μηδενικό αρχικό κεφάλαιο. Στην αγορά σπάνια παρατηρείται τέτοια ευκαιρία διότι όταν εμφανίζεται οι επενδυτές την εκμεταλλεύονται με συνέπεια να πάψει να υπάρχει.

Με τη χρήση της απουσίας ευκαιρίας σίγουρου κέρδους είμαστε σε θέση να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τις πραγματικές τιμές των μετοχών και των συμβολαίων, ιδιαίτερα για τη σχέση μεταξύ τους αλλά δυστυχώς δεν μπορούμε να έχουμε και την τιμή αυτή καθ' αυτή της μετοχής ή του συμβολαίου. Για το λόγο αυτόν αναπτύσσουμε μοντέλα (όπως το διωνυ-

μικό) με τα οποία (και κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις) προσπαθούμε να καταγράψουμε τις τιμές των μετοχών και συμβολαίων σε κάθε πιθανή περίπτωση στο μέλλον.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 10** Στο διωνυμικό μοντέλο δεν υπάρχουν ευκαιρίες σίγουρου κέρδους αν  $0 < d < 1 + r < u$ .

#### ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

• Έστω ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες σίγουρου κέρδους. Ας υποθέσουμε ότι το  $(1 + r) \notin (d, u)$  και ας υποθέσουμε αρχικά ότι  $1 + r \leq d$ . Τότε μπορώ να δανειστώ χρήματα από την τράπεζα για να αγοράσω με αυτά μετοχές. Αν η τιμή της μετοχής στο χρόνο μηδέν είναι  $S_0$  τότε το χαρτοφυλάκιο τη στιγμή 0 θα έχει αξία

$$V_0 = aS_0 + b = 0$$

Αυτό συμβαίνει διότι όσα χρήματα δανείστηκα τα εξαργύρωσα σε μετοχές. Οπότε συνολικά έχω μηδενικό κεφάλαιο στην κατοχή μου. Στο χρόνο 1 το χαρτοφυ-

λάκιο θα έχει τις εξής αξίες

$$V_1^u = auS_0 + b(1+r) = aS_0(u - (1+r)) > 0,$$

$$V_1^d = adS_0 + b(1+r) = aS_0(d - (1+r)) \geq 0$$

Δηλαδή στην περίπτωση που το  $1+r \leq d$  τότε έχω τη δυνατότητα κέρδους από το μηδέν. Κατασκευάζω χαρτοφυλάκιο με δανεικά χρήματα το οποίο στη χειρότερη περίπτωση θα έχει μηδενική αξία (δεν θα έχω κέρδος αλλά ούτε ζημιά) ενώ υπάρχει η περίπτωση να έχω κέρδος χωρίς να έχω ρισκάρει. Δηλαδή έχουμε άτοπο με την αρχική μας ότι  $1+r \leq d$ . Παρόμοια συλλογιστική (πουλώντας δανεισμένες μετοχές και καταθέτοντας το ποσό στην τράπεζα) μπορεί να κάνει κάποιος για την περίπτωση που  $1+r \geq u$ . Αναγκαστικά λοιπόν  $0 < d < 1+r < u$ .

• Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι  $d < 1+r < u$  οπότε πρέπει να αποδείξουμε ότι δεν μπορεί να δημιουργηθεί ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Έστω ότι μπορώ να κατασκευάσω χαρτοφυλάκιο μηδενικής αξίας στον χρόνο 0, δηλαδή

$$V_0 = aS_0 + b = 0$$

και έστω ότι  $V_1^u > 0$  και  $V_1^d \geq 0$ . Τότε, αφού  $a > 0$  (το οποίο προκύπτει από τις ανισότητες  $V_1^u > 0$  και  $u > 1 + r$ ) προκύπτει ότι  $d \geq 1 + r$  το οποίο είναι άτοπο. Παρομοίως, αν υποθέσουμε ότι  $V_1^u \geq 0$  και  $V_1^d > 0$  □

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 11** *Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τα αριθμητικά στοιχεία από μια τράπεζα που αφορούν τα δάνεια (καταναλωτικά, πιστωτικές κάρτες κ.τ.λ.) των τελευταίων 20 ετών. Δηλαδή γνωρίζουμε σε κάθε έτος ότι δάνεισε το ποσό  $A$  και εισέπραξε το ποσό  $B$  μέσω πληρωμών των δανείων. Αν τα τελευταία 20 χρόνια τα ποσά  $B$  είναι πάντοτε μεγαλύτερα από τα ποσά  $A$  τότε μπορούμε να πούμε ότι για τη συγκεκριμένη τράπεζα ο δανεισμός ήταν μια επένδυση χωρίς ρίσκο. Σε αυτή τη περίπτωση θα έχει νόημα να μετρήσουμε το μέσο επιτόκιο του κέρδους, το οποίο συμβολίζουμε με  $R$ . Αν μετρήσουμε επίσης τους ετήσιους ρυθμούς ανόδου και καθόδου των μετοχών για τα τελευταία 20 χρόνια, ενδέχεται να βρούμε κάποια μετοχή για την οποία να ίσχυε  $u \leq 1 + R$ . Αυτό θα σημαίνει ότι υπήρχε*

ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Ας σημειώσουμε ότι αυτή την ευκαιρία σίγουρου κέρδους δεν μπορούν να την εκμεταλλευτούν πολλοί και επομένως μπορεί να παραμείνει για σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα. Γενικά λοιπόν εμφανίζονται συχνά ευκαιρίες σίγουρου κέρδους και αυτές διατηρούνται για χρονικό διάστημα το οποίο είναι αντιστρόφως ανάλογο με την ένταση εκμετάλλευσης της.  $\square$

Ας ξαναγυρίσουμε στο δέντρο τιμών μιας περιόδου. Αν  $A, B$  δοσμένοι αριθμοί έχουμε κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο με αρχική αξία  $V_0$  και συγκεκριμένη στρατηγική επένδυσης  $(a, b)$ , δηλαδή αγορά μετοχών και κατάθεση σε τράπεζα, έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο να έχει στο χρόνο 1 τις τιμές  $A, B$ . Προκύπτει το αντίστροφο ερώτημα. Με τα χρήματα  $V_0$  μπορεί κάποιος να κατασκευάσει στρατηγική επένδυσης  $(a', b')$  που να τον οδηγήσει σε τιμές μεγαλύτερες των  $A, B$ , π.χ.  $A + \varepsilon_1, B + \varepsilon_2$  με  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$ ; Δηλαδή προκύπτει το

σύστημα

$$\begin{aligned}a' u S_0 + b'(1+r) &= A + \varepsilon_1, \\a' d S_0 + b'(1+r) &= B + \varepsilon_2\end{aligned}$$

όπου  $a', b'$  είναι τέτοια ώστε  $V_0 = a' S_0 + b'$ . Η λύση του συστήματος είναι

$$\begin{aligned}a' &= \frac{A - B + \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(u - d)S_0} \\b' &= \frac{(B + \varepsilon_2)u - (A + \varepsilon_1)d}{(u - d)(1 + r)}\end{aligned}$$

Σχηματίζουμε την ποσότητα  $a' S_0 + b'$  και έχουμε

$$\begin{aligned}a' S_0 + b' &= a S_0 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{u - d} + b + \frac{\varepsilon_2 u - \varepsilon_1 d}{(u - d)(1 + r)} \\&= V_0 + \frac{\varepsilon_1(1 + r - d) + \varepsilon_2(u - (1 + r))}{(u - d)(1 + r)}\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα  $a, b$  είναι τέτοια ώστε  $a S_0 + b = V_0$ . Η ποσότητα  $a' S_0 + b'$  πρέπει επίσης να είναι ίση με  $V_0$  και για να ισχύει αυτό αρκεί  $\varepsilon_1(1 + r - d) + \varepsilon_2(u - (1 + r)) = 0$ . Διαπιστώνουμε εύκολα (κάτω από την υπόθεση  $d < 1 + r < u$ ) ότι

δεν υπάρχει τέτοιο χαρτοφυλάκιο που ξεκινά με  $V_0$  και οδηγεί σε τιμές μεγαλύτερες των  $A, B$ .

## Ευκαιρία σίγουρου κέρδους και δίκαιη τιμή πώλησης ενός συμβολαίου

Τα παρακάτω προέρχονται από την εργασία [On the Option Pricing by the Binomial Model](#).

Έστω ένα παράγωγο με χρόνο λήξης  $T$ . Διαμερίζουμε το χρονικό διάστημα σε υποδιαστήματα μήκους  $\delta > 0$  έτσι ώστε  $N\delta = T$  για κάποιο  $N \in \mathbb{N}$ . Αν  $\hat{r}$  είναι το ετήσιο επιτόκιο ανατοκισμού της χωρίς ρίσκο επένδυσης τότε θεωρούμε το ισοδύναμο επιτόκιο  $r$  συνεχούς ανατοκισμού, δηλαδή είναι τέτοιο ώστε  $e^r = 1 + \hat{r}$ . Αρα 1 Ευρώ σε κάθε χρονική περίοδο  $\delta$  τοκισζόμενο γίνεται  $e^{r\delta}$ .

Συμβολίζουμε με  $X$  ένα οποιοδήποτε παράγωγο και με  $X_n$  την απολαβή του την χρονική στιγμή  $n$ . Υποθέτουμε ότι ο κάτοχος του παραγώγου έχει δικαίωμα να το εξασκήσει κατά τις χρονικές στιγμές  $e_0 < e_1 < \dots < e_m = T$  όπου  $e_0 > 0$ , δηλαδή δεν έχει δικαίωμα να το εξασκήσει στην χρονική στιγμή 0. Οι υπόλοιπες χρονικές στιγμές κατά τις οποίες δεν έχει δικαίωμα εξάσκησης συμβολίζονται με

$0 = k_0 < k_1 < \dots < k_l < T$ . Το παράγωγο  $X$  μπορεί να είναι οποιουδήποτε τύπου, δηλαδή η απολαβή του μπορεί να εξαρτάται από όλες τις τιμές της μετοχής στο συγκεκριμένο μονοπάτι.

Μας ενδιαφέρει να δώσουμε ένα λογικό ορισμό για την δίκαιη τιμή πώλησης ενός τέτοιου παραγώγου. Ένας συνηθισμένος τρόπος που υπάρχει στην βιβλιογραφία είναι εφαρμόζοντας no arbitrage τεχνικές οπότε σε αυτή την περίπτωση υπολογίζουμε την λεγόμενη arbitrage free τιμή του συμβολαίου. Σκοπός μας εδώ είναι να δώσουμε ένα λογικό ορισμό της δίκαιης τιμής πώλησης αλλά και τις συνθήκες στις οποίες μπορεί να γίνει αυτό, χρησιμοποιώντας απλά μαθηματικά εργαλεία αλλά όχι no arbitrage τεχνικές. Το σκεπτικό που θα ακολουθήσουμε στηρίζεται στα λεγόμενα αντισταθμιστικά χαρτοφυλάκια, δηλαδή στην κατασκευή χαρτοφυλακίου προκαθορισμένης αξίας με ενδιάμεσες απαιτήσεις.

Είναι εύκολο να δούμε ότι ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο για το παράγωγο  $X$  με πιθανή κατανάλωση

είναι το επόμενο,

$$V_N = X_N$$

για  $n = 0, \dots, N - 1$  θέτουμε

$$V_n = \begin{cases} \max\{X_{e_j}, e^{-r\delta}(qV_{e_j+1}^u + (1-q)V_{e_j+1}^d)\} & \text{όταν } n = e_j, \text{ για κάποιο } j = 0, \dots, m-1 \\ e^{-r\delta}(qV_{k_i+1}^u + (1-q)V_{k_i+1}^d), & \text{όταν } n = k_i \text{ για κάποιο } i = 0, \dots, l \end{cases}$$

$$a_n = \frac{V_{n+1}^u - V_{n+1}^d}{(u-d)S_n},$$

$$b_n = \frac{V_{n+1}^d u - V_{n+1}^u d}{(u-d)e^{r\delta}},$$

$$c_n = \begin{cases} \max\{X_{e_n} - e^{-r\delta}(qV_{e_n+1}^u + (1-q)V_{e_n+1}^d), 0\}, & \text{όταν } n = e_j, \text{ για κάποιο } j = 0, \dots, m-1 \\ 0, & \text{όταν } n = k_i \text{ για κάποιο } i = 0, \dots, l \end{cases}$$

Η σχέση που συνδέει τα παραπάνω είναι  $V_n = a_n S_n + b_n + c_n$  για  $n = 0, \dots, N - 1$  ενώ  $V_N = X_N$ . Παρατηρήστε ότι ο αγοραστής ενδέχεται να μην εξασκήσει το δικαίωμα σε κάποια χρονική στιγμή  $e_n$  για την οποία ισχύει  $V_{e_n} = X_{e_n} > e^{-r\delta}(qV_{e_n+1}^u + (1-q)V_{e_n+1}^d)$ . Αυτό σημαίνει ότι ο πωλητής μπορεί να καταναλώσει το ποσό  $c_n$ . Η αξία του χαρτοφυλακίου  $V_n$  όπως δίνεται παραπάνω είναι μετά την κατανάλωση του ποσού  $\sum_{k=1}^{n-1} c_k$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 12** Ονομάζουμε το παραπάνω χαρτοφυλάκιο θεμελιώδες και το συμβολίζουμε με  $(a^X, b^X)$ .

□

**ΟΡΙΣΜΟΣ 13** Λέμε ότι το χαρτοφυλάκιο  $(a_k, b_k)$  αντισταθμίζει το παράγωγο  $X$  αν  $V_{e_n} \geq X_{e_n}$ , για  $n = 0, \dots, m$ . Λέμε ότι το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο  $(a_k, b_k)$  είναι αποδεκτό από τον πωλητή αν αντισταθμίζει το παράγωγο χωρίς να χρειάζεται να προσθέτει κατά την διάρκεια του συμβολαίου επιπλέον χρήματα αλλά να αφήνει το περιθώριο για κατανάλωση συγκεκριμένου ποσού. Τέλος ένα αποδεκτό από τον πωλητή χαρτοφυλάκιο θα ονομάζεται **τίμιο** αν ο αγοραστής μπορεί να εξασκήσει κατάλληλα έτσι ώστε η απολαβή του να είναι ακριβώς ίση με την αξία του χαρτοφυλακίου και επιπλέον η συνολική κατανάλωση να είναι μηδενική, δηλαδή να υπάρχει κάποιος χρόνος  $e_n$  έτσι ώστε  $V_{e_n} = X_{e_n}$  και ταυτόχρονα  $\sum_{k=1}^{e_n} c_k = 0$ .

Προφανώς το θεμελιώδες χαρτοφυλάκιο είναι αποδεκτό από τον πωλητή και θα αποδείξουμε παρακάτω ότι είναι πάντοτε τίμιο. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε ως δίκαιη τιμή πώλησης την αρχική τιμή του θεμελιώδες χαρτοφυλακίου διότι ο πωλητής θα μπορεί να αποπληρώσει τον αγοραστή σε κάθε περίπτωση. Μια εύλογη

όμως ερώτηση είναι η εξής: μήπως υπάρχει άλλο αποδεκτό αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο με μικρότερη αρχική αξία; Αν υπάρχει τότε ο πωλητής μπορεί να καλυφθεί με λιγότερα χρήματα. Παρακάτω θα εξετάσουμε ακριβώς αυτό το ερώτημα και θα δώσουμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορούμε να ορίσουμε την δίκαιη τιμή πώλησης.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 14** Το ποσό  $V = e^{-r\delta} (qV_{n+1}^u + (1-q)V_{n+1}^d)$  είναι ίσο με την ελάχιστη δυνατή αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή  $n$  έτσι ώστε οι αξίες του την χρονική στιγμή  $n+1$  να είναι τουλάχιστον ίσες με  $V_{n+1}^u$  και  $V_{n+1}^d$  αν και μόνο αν  $d \leq e^{r\delta} \leq u$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Η  $V_n$  είναι η αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή  $n$  το οποίο αποτελείται από  $a_n$  το πλήθος μετοχές και  $b_n$  ποσό σε επένδυση χωρίς ρίσκο, δηλαδή  $V_n = a_n S_n + b_n$ . Οι αξίες του χαρτοφυλακίου, την χρονική στιγμή  $n+1$ , θα είναι  $a_n u S_n + b_n e^{r\delta}$  και  $a_n d S_n + b_n e^{r\delta}$ . Σχηματίζουμε το σύστημα των εξι-

σώσεων

$$\begin{aligned}a_n u S_n + b_n e^{r\delta} &= V_{n+1}^u \\a_n d S_n + b_n e^{r\delta} &= V_{n+1}^d\end{aligned}$$

Λύνοντας το σύστημα με αγνώστους τα  $a_n, b_n$  προκύπτει ότι

$$a_n = \frac{V_{n+1}^u - V_{n+1}^d}{(u - d)S_n}, \quad b_n = \frac{V_{n+1}^d u - V_{n+1}^u d}{(u - d)e^{r\delta}}$$

Παρατηρήστε ότι το σύστημα αυτό έχει πάντοτε λύση και ότι είναι μοναδική (δείτε την ορίζουσα του συστήματος).

Με απλούς υπολογισμούς, αντικαθιστώντας τα  $a_n, b_n$ , προκύπτει ότι

$$V_n = e^{-r\delta} \left( q V_{n+1}^u + (1 - q) V_{n+1}^d \right)$$

Δηλαδή, αν την χρονική στιγμή  $n + 1$  οι αξίες του χαρτοφυλακίου πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσες με  $V_{n+1}^u$  και  $V_{n+1}^d$ , τότε με το ποσό  $e^{-r\delta} \left( q V_{n+1}^u + (1 - q) V_{n+1}^d \right)$  μπορούμε να κατασκευάσουμε κατάλληλο χαρτοφυλάκιο για να έχουμε τις ζητούμενες τελικές αξίες.

• (Ευθύ) Έστω ότι  $d \leq e^{r\delta} \leq u$ . Θα αποδείξουμε ότι το ποσό  $V_n = e^{-r\delta} \left( qV_{n+1}^u + (1-q)V_{n+1}^d \right)$  είναι το ελάχιστο δυνατό έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο να έχει αξίες την χρονική στιγμή  $n$  τουλάχιστον ίσες με  $V_{n+1}^u$  και  $V_{n+1}^d$ . Έστω ότι υπάρχουν  $\varepsilon > 0$  και  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$  τέτοια ώστε με το ποσό  $V_n - \varepsilon$  να μπορούμε να βρούμε κατάλληλα  $a', b'$  με  $V_n - \varepsilon = a'S_n + b'$  και  $a'uS_n + b'e^{r\delta} = V_{n+1}^u + \varepsilon_1$ ,  $a'dS_n + b'e^{r\delta} = V_{n+1}^d + \varepsilon_2$ .

Λύνοντας τις εξισώσεις με αγνώστους τα  $a', b'$  προκύπτει ότι

$$a' = a_n + \underbrace{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{(u-d)S_n}}_{V_1}$$

$$b' = b_n + \underbrace{\frac{\varepsilon_2 u - \varepsilon_1 d}{(u-d)e^{r\delta}}}_{V_2}$$

Θα πρέπει να ισχύει επίσης ότι

$$V_n - \varepsilon = a'S_n + b' = a_n S_n + b_n + V_1 S_n + V_2 = V_n + V_1 S_n + V_2$$

Αντικαθιστώντας τα  $V_1$  και  $V_2$  προκύπτει η ισότητα

$$\frac{\varepsilon_1(e^{r\delta} - d) + \varepsilon_2(u - e^{r\delta})}{(u - d)e^{r\delta}} = -\varepsilon \quad (1)$$

Η ισότητα αυτή μπορεί να ικανοποιηθεί μόνο αν  $e^{r\delta} \notin [d, u]$  οπότε οδηγούμαστε σε άτοπο.

• **(Αντίστροφο)** Υποθέτουμε ότι το ποσό  $e^{-r\delta} \left( qV_{n+1}^u + (1 - q)V_{n+1}^d \right)$  είναι το ελάχιστο δυνατό όπως το περιγράψαμε παραπάνω. Θα αποδείξουμε ότι υποχρεωτικά ισχύει η ανισότητα  $d \leq e^{r\delta} \leq u$ . Έστω ότι δεν ισχύει και ας υποθέσουμε ότι  $e^{r\delta} < d$ . Τότε, για οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$  διαλέγουμε  $\varepsilon_2 = 0$  και  $\varepsilon_1 = \varepsilon \frac{(u-d)e^{r\delta}}{d-e^{r\delta}}$  και επομένως τα  $a', b'$  όπως κατασκευάστηκαν παραπάνω οδηγούν στις ζητούμενες τελικές αξίες οπότε οδηγούμαστε σε άτοπο με την υπόθεση ότι το ποσό  $e^{-r\delta} \left( qV_{n+1}^u + (1 - q)V_{n+1}^d \right)$  είναι το ελάχιστο δυνατό. Παρόμοια και στην περίπτωση που  $u < e^{r\delta}$ .  $\square$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 15** Στην περίπτωση που δεν ισχύει η ανισότητα  $d \leq e^{r\delta} \leq u$  τότε παρατηρούμε ότι με οποιοδήποτε ποσό  $V_0 \in \mathbb{R}$  στον χρόνο  $n$  (δηλαδή ακόμη και

αρνητικό) μπορούμε να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκιο με αξίες στον χρόνο  $n + 1$  τουλάχιστον ίσες με  $V_{n+1}^u$  και  $V_{n+1}^d$ .  $\square$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 16** Συμβολίζουμε με  $R^X$  το υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  το οποίο περιέχει τις σημερινές αξίες όλων των αποδεκτών από τον πωλητή χαρτοφυλακίων που αντισταθμίζουν το παράγωγο  $X$ , δηλαδή τις τιμές  $V_0^{(a_k, b_k)}$  όπου  $(a_k, b_k)$  οποιοδήποτε αποδεκτό από τον πωλητή αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο του  $X$ .  $\square$

Σημειώστε ότι το  $R^X$  είναι μη κενό αφού περιέχει το ποσό  $V_0^{(a^X, b^X)}$ .

**ΠΟΡΙΣΜΑ 17** Ισχύει ότι  $d \leq e^{r\delta} \leq u$  ανν το σύνολο  $R^X$  είναι κάτω φραγμένο. Στην περίπτωση που το  $R^X$  είναι κάτω φραγμένο τότε το κάτω φράγμα του είναι το  $V_0^{(a^X, b^X)}$ .  $\square$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Έχουμε υποθέσει ότι ο αγοραστής δεν μπορεί να εξασκήσει στον χρόνο 0 άρα  $V_0 = e^{-r\delta}(qV_1^u + (1 - q)V_1^d)$ .

- (Ευθύ) Έστω ότι  $d \leq e^{r\delta} \leq u$ . Τότε εφαρμόζοντας επανειλημμένα το θεώρημα 14 για  $n = N - 1, \dots, 0$  προκύπτει ότι το  $R^X$  είναι κάτω φραγμένο και μάλιστα το κάτω φράγμα του είναι το ποσό  $V_0^{(a^X, b^X)}$ .

- (Αντίστροφο) Έστω ότι το σύνολο  $R^X$  είναι κάτω φραγμένο. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η ανισότητα  $d \leq e^{r\delta} \leq u$ . Αν δεν ισχύει τότε από το θεώρημα 14 προκύπτει ότι το  $R^X$  δεν είναι κάτω φραγμένο διότι έχουμε υποθέσει ότι ο αγοραστής δεν μπορεί να εξασκήσει στον χρόνο 0 και επομένως με οποιοδήποτε ποσό (ακόμη και αρνητικό) μπορούμε να κατασκευάσουμε κατάλληλο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο. Δηλαδή έχουμε άτοπο με την αρχική μας υπόθεση.

Στην περίπτωση που το  $R^X$  είναι κάτω φραγμένο τότε ικανοποιείται η ανισότητα  $d \leq e^{r\delta} \leq u$  οπότε το κάτω φράγμα του είναι το ποσό  $V_0^{(a^X, b^X)}$ .  $\square$

### ΟΡΙΣΜΟΣ 18 (Δίκαιη Τιμή Πώλησης Συμβολαίου)

Αν  $d \leq e^{r\delta} \leq u$  τότε η  $V_0^{(a^X, b^X)}$  ορίζεται να είναι η δίκαιη τιμή πώλησης του παραγώγου  $X$ .  $\square$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 19** Σημειώστε ότι στην περίπτωση όπου  $e^{r\delta} \notin [d, u]$  δεν μπορούμε να ορίσουμε την δίκαιη τιμή πώλησης του παραγώγου  $X$  με κανένα τρόπο διότι μπορούμε να κατασκευάσουμε αποδεκτό αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο με οσοδήποτε μικρή αρχική αξία. Επίσης, έχουμε δώσει τον ορισμό της δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου ακόμη και στην περίπτωση όπου  $e^{r\delta} = d$  το οποίο σημαίνει ότι το επιτόκιο είναι αρνητικό. Δηλαδή έχουμε συμπεριλάβει περισσότερες περιπτώσεις από ότι (ίσως) στην πραγματικότητα συμβαίνουν. Τέλος, θα μπορούσε κάποιος να δώσει ένα διαφορετικό ορισμό της δίκαιης τιμής πώλησης ενός συμβολαίου μόνο στην περίπτωση που  $e^{r\delta} \notin [d, u]$ . Αυτός όμως ο ορισμός θα είχε νόημα αν η τιμή πώλησης ήταν μικρότερη από αυτή που έχουμε ορίσει παραπάνω ή αν η μαθηματική πολυπλοκότητα του ορισμού ήταν μικρότερη!

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 20** Αν  $d = e^{r\delta}$  τότε με το ποσό  $e^{-r\delta} \left( qV_{n+1}^u + (1-q)V_{n+1}^d \right)$ , θέτοντας  $\varepsilon = \varepsilon_2 = 0$ , μπορούμε να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκιο με τελικές αξίες  $V_{n+1}^u + \varepsilon_1$

και  $V_{n+1}^d$  για οποιοδήποτε  $\varepsilon_1$ . Δηλαδή, ενώ δεν μπορούμε με μικρότερο ποσό να έχουμε τις ζητούμενες τελικές αξίες μπορούμε με το ποσό αυτό να έχουμε μεγαλύτερη αξία στην περίπτωση που η μετοχή ανέβει. Παρόμοια και στην περίπτωση που  $u = e^{r\delta}$ . Δηλαδή σε αυτές τις δυο περιπτώσεις υπάρχει μονοπάτι (της τιμής της μετοχής) στο οποίο ο αγοραστής δεν μπορεί να εξασκήσει κατάλληλα έτσι ώστε να μην περισσέψουν χρήματα στο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο και άρα το χαρτοφυλάκιο δεν είναι τίμιο.  $\square$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 21** Το θεμελιώδες χαρτοφυλάκιο  $(a^X, b^X)$  είναι πάντοτε τίμιο. Στο διωνυμικό μοντέλο ισχύει ότι  $d < e^{r\delta} < u$  ανν το σύνολο  $R^X$  είναι κάτω φραγμένο (στην περίπτωση αυτή το ελάχιστο είναι το ποσό  $V_0^{(a^X, b^X)}$ ) και ταυτόχρονα με το ποσό  $V_0^{(a^X, b^X)}$  δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε αποδεκτό χαρτοφυλάκιο το οποίο να μην είναι τίμιο.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Σημειώστε ότι  $V_{e_k} \geq X_{e_k}$  για κάθε  $k = 0, \dots, m$ . Θα αποδείξουμε ότι το θεμελιώδες αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο είναι τίμιο αποδεικνύοντας

ότι υπάρχει κάποιος  $j = 0, \dots, m$  τέτοιος ώστε  $V_{e_j} = X_{e_j}$  και  $\sum_{i=0}^{e_j} c_i = 0$ . Συμβολίζουμε με

$$j = \min\{k \in \{0, \dots, m\} : V_{e_k} = X_{e_k}\}$$

Από την κατασκευή του θεμελιώδους αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου έχουμε ότι  $V_N = X_N$  οπότε  $e_j \leq N$ . Για το  $j$  αυτό προφανώς ισχύει ότι  $V_{e_j} = X_{e_j}$  και ότι  $c_n = 0$  για  $n = 0, \dots, e_j$ . Επομένως υπάρχει πάντοτε κάποιος  $j \in \{0, \dots, m\}$  τέτοιος ώστε  $V_{e_j} = X_{e_j}$  και  $\sum_{i=0}^{e_j} c_i = 0$ .

- Έστω  $d < e^{r\delta} < u$ . Από το Πόρισμα 17 προκύπτει ότι το  $R^X$  είναι κάτω φραγμένο και το ελάχιστο είναι το ποσό  $V_0^{(a^X, b^X)}$ . Επιπλέον, από την απόδειξη του θεωρήματος 14 προκύπτει ότι  $\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2$  επομένως με το ποσό  $V_0^{(a^X, b^X)}$  δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε αποδεκτό χαρτοφυλάκιο το οποίο να μην είναι τίμιο.

- Έστω ότι το  $R^X$  είναι κάτω φραγμένο, σε αυτή την περίπτωση το ελάχιστο θα είναι το ποσό  $V_0^{(a^X, b^X)}$ , και υποθέτουμε ότι με το ποσό αυτό δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε αποδεκτό χαρτοφυλάκιο το οποίο να

μην είναι τίμιο. Από το Πόρισμα 17 έχουμε την ανισότητα  $d \leq e^{r\delta} \leq u$ . Έστω ότι  $d = e^{r\delta}$  ή ότι  $u = e^{r\delta}$ . Τότε από την Παρατήρηση 20 προκύπτει ότι με το ποσό  $V_0^{(a^X, b^X)}$  μπορούμε να κατασκευάσουμε αποδεκτό χαρτοφυλάκιο το οποίο δεν είναι τίμιο επομένως έχουμε άτοπο. Δηλαδή υποχρεωτικά οι ανισότητες είναι αυστηρές.  $\square$

Συχνά στην βιβλιογραφία ο χρόνος  $e_j$  όπως ορίστηκε στην παραπάνω απόδειξη, δηλαδή η πρώτη φορά που η αξία του χαρτοφυλακίου είναι ίση με την απολαβή και ταυτόχρονα ο κάτοχος του συμβολαίου έχει δικαίωμα εξάσκησης, ονομάζεται **βέλτιστος χρόνος εξάσκησης**. Αυτό δεν έχει να κάνει με το βέλτιστο κέρδος του αγοραστή αλλά με το ότι εξασκώντας σε αυτή την χρονική στιγμή δεν περισσεύουν χρήματα στο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο. Για τον ιδανικό χρόνο εξάσκησης, όσον αφορά τον αγοραστή, δείτε το εδάφιο ;;;, όπου εκεί είναι ξεκάθαρο ότι στο μονοπάτι  $uud$  είναι προτιμότερο να εξασκήσει στον χρόνο  $n = 2$  ενώ ο βέλτιστος χρόνος εξάσκησης είναι ο  $n = 3$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 22** Ο ορισμός της δίκαιης τιμής πώλησης όπως ορίσθηκε παραπάνω είναι ανεξάρτητος από την δυνατότητα ο αγοραστής του συμβολαίου να κατασκευάσει αντίθετο ή παρόμοιο χαρτοφυλάκιο και είναι καλά ορισμένος ακόμη και στις περιπτώσεις όπου  $d = e^{r\delta}$  ή  $u = e^{r\delta}$ . Παρατηρήστε ότι καθώς το  $\delta \rightarrow 0$  η δίκαιη τιμή αλλάζει. Παρακάτω, κάνοντας ακόμη μια υπόθεση, θα αποδείξουμε ότι συγκλίνει. Η παραπάνω οπτική είναι ιδιαίτερα απλή συγκρινόμενη με την αντίστοιχη πιθανοθεωρητική προσέγγιση. Στην περίπτωση των Αμερικανικών συμβολαίων μάλιστα θα λέγαμε ότι η πιθανοθεωρητική προσέγγιση είναι «απαγορευτική» από την άποψη της μαθηματικής πολυπλοκότητας (δείτε για παράδειγμα το [;], Θεώρημα 423). □

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 23** Θεωρείστε ένα *call option* με τιμή εξάσκησης  $K = 1$  και υποκείμενο αγαθό με σημερινή αξία  $S_0 = 1$ . Εργαστείτε με το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου για να αποτιμήσετε αυτό το συμβόλαιο θεωρώντας ότι  $r = 0$  για ευκολία. Υποθέστε ότι έχετε

εκτιμήσει τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου και είναι  $u = 2$  και  $d = 1/2$ . Έστω όμως ότι στην πράξη οι ρυθμοί προκύπτουν διαφορετικοί και ας τους συμβολίσουμε με  $\hat{u}$  και  $\hat{d}$ . Με το χαρτοφυλάκιο που θα έχετε κατασκευάσει θα είσαστε καλυμμένοι; Πόσα επιπλέον χρήματα πρέπει να δώσετε εκτός από την αξία του χαρτοφυλακίου στον αγοραστή στην περίπτωση που η αξία της μετοχής ανέβει και όταν  $\hat{u} > u$ ; Αν  $\hat{u} \rightarrow \infty$  η ζημιά μήπως συγκλίνει στο άπειρο; Ο πωλητής και ο αγοραστής είναι ισοδύναμοι απέναντι στον κίνδυνο; Αποδείξτε ότι ο πωλητής θα έχει κέρδος αν  $\hat{u} < u$  ενώ θα έχει μηδενικό κέρδος ή και ζημιά αν  $\hat{u} \geq u$ . Συνεπώς, επειδή ο λόγος που κάποιος θα βρεθεί στη θέση του πωλητή είναι κερδοσκοπικός, ο πωλητής θα πρέπει να επιλέξει ως  $u$  κάποιον αριθμό μεγαλύτερο του  $\hat{u}$ . Τον  $\hat{u}$  όμως θα τον γνωρίζει όταν θα έχει λήξει το συμβόλαιο για αυτό το λόγο λέμε ότι πρόκειται για ένα παιχνίδι πρόβλεψης.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 24** Θεωρείστε ένα *put option* με τιμή εξάσκησης  $K = 1$  και υποκείμενο αγαθό με σημερινή

αξία  $S_0 = 1$ . Εργαστείτε με το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου για να αποτιμήσετε αυτό το συμβόλαιο θεωρώντας ότι  $r = 0$  για ευκολία. Υποθέστε ότι έχετε εκτιμήσει τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου και είναι  $u = 2$  και  $d = 1/2$ . Έστω όμως ότι στην πράξη οι ρυθμοί προκύπτουν διαφορετικοί και ας τους συμβολίσουμε με  $\hat{u}$  και  $\hat{d}$ . Προφανώς η απολαβή ενός τέτοιου συμβολαίου είναι άνω φραγμένη από το  $K$  επομένως ο πωλητής δεν διατρέχει κίνδυνο χρεοκοπίας. Αν όμως κατασκευάσει αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο τότε θα πρέπει να δανεισθεί μετοχές το οποίο όμως είναι εξαιρετικά επικίνδυνο στη περίπτωση που το  $\hat{u}$  είναι πολύ μεγαλύτερο του  $u$ . Αυτό σημαίνει ότι ενώ η απολαβή είναι άνω φραγμένη ο κίνδυνος χρεοκοπίας εμφανίζεται με την κατασκευή του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου! Σε μια τέτοια περίπτωση ο πωλητής θα μπορούσε να αγοράσει και αντίστοιχο πλήθος call option έτσι ώστε να φράξει από πάνω την πιθανή ζημιά. Αποδείξτε ότι ο πωλητής θα έχει κέρδος αν  $\hat{u} < u$  ενώ θα έχει μηδενικό κέρδος ή και ζημιά αν  $\hat{u} \geq u$ . Συνεπώς, επειδή ο λόγος που κάποιος θα βρεθεί

στη θέση του πωλητή είναι κερδοσκοπικός, ο πωλητής θα πρέπει να επιλέξει ως  $u$  κάποιον αριθμό μεγαλύτερο του  $\hat{u}$ . Τον  $\hat{u}$  όμως θα τον γνωρίζει όταν θα έχει λήξει το συμβόλαιο για αυτό το λόγο λέμε ότι πρόκειται για ένα παιχνίδι πρόβλεψης.  $\square$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 25** Μελετήσαμε το διωνυμικό μοντέλο για την κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου. Ο λόγος που υπάρχουν τέτοια συμβόλαια είναι καθαρά κερδοσκοπικός και για τις δυο πλευρές αν και στην πλευρά του αγοραστή υπάρχει επιπλέον και ο λόγος της εξασφάλισης. Αν η μελλοντική μεταβλητότητα της μετοχής προκύψει ίδια με αυτή που υπέθεσε ο πωλητής τότε το κέρδος του θα είναι μηδενικό. Αν προκύψει μικρότερη θα έχει κέρδος ενώ αν προκύψει μεγαλύτερη θα έχει ζημιά. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να δώσει ιδιαίτερο βάρος στην εκτίμηση της μελλοντικής μεταβλητότητας.

Τα συμβόλαια μπορούμε να τα χωρίσουμε σε δυο ομάδες: σε αυτά των οποίων οι απολαβές δεν είναι άνω φραγμένες, όπως τα συμβόλαια αγοράς, και σε αυτά

των οποίων οι απολαβές είναι άνω φραγμένες, όπως τα συμβόλαια πώλησης. Στην πρώτη περίπτωση υπάρχει ο κίνδυνος χρεοκοπίας για τον πωλητή αφού το ποσό που θα πρέπει να καταβάλλει μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλο. Στη δεύτερη περίπτωση το ποσό της απολαβής είναι άνω φραγμένο οπότε ο κίνδυνος χρεοκοπίας είναι μηδενικός. Όμως, αν ο πωλητής κατασκευάσει αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο δανειζόμενος μετοχές τότε αυτομάτως δημιουργείται κίνδυνος χρεοκοπίας διότι θα πρέπει να επιστρέψει τις μετοχές σε τιμή η οποία μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλη! Δηλαδή σε μια τέτοια περίπτωση ίσως είναι καλύτερο να μη κατασκευάσει αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο! Αυτό είναι ένα μειονέκτημα της μεθόδου τιμολόγησης μέσω αντισταθμιστικών χαρτοφυλακίων αλλά όχι το μοναδικό. Σε κάθε αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου υπάρχουν τα κόστη συναλλαγής τα οποία επίσης θα πρέπει να υπολογισθούν και να προστεθούν στην αρχική αξία. Επίσης, τα πιθανά μερίσματα των δανεισμένων μετοχών μπορούν να δημιουργήσουν προβλήματα αλλά και ο δανεισμός μετοχών μπορεί να είναι ανέφικτος στην πράξη. Υπάρχουν

δηλαδή πολλά πρακτικά προβλήματα στην εφαρμογή των αντισταθμιστικών μεθόδων τιμολόγησης τα οποία ο πωλητής θα πρέπει να λάβει υπόψη του.

Αν θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα συμβόλαιο με περισσότερα από ένα υποκείμενα αγαθά μέσω αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου μπορούμε να κάνουμε το εξής: να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή 0 έτσι ώστε

$$V_0 = a_1 S_1 + \dots + a_d S_d + b$$

όπου  $S_1, \dots, S_d$  είναι οι σημερινές τιμές των αγαθών και  $b$  ποσό σε τράπεζα. Θα πρέπει να υπολογίσουμε τα  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}_+$  και  $b \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε με την ελάχιστη αρχική αξία  $V_0$  να ισχύει ότι οι τελικές αξίες να είναι τ.ω.  $V_T \geq P_T$ . Διαλέξαμε τα  $a_1, \dots, a_d$  θετικά για να αποφύγουμε δανεισμό μετοχών. Αν όμως θέλουμε να το κάνουμε αυτό μπορούμε να αγοράσουμε και ένα call option για κάθε δανεισμένη μετοχή προκειμένου να εξασφαλιστούμε. Υπολογίζουμε και τα διάφορα κόστη για την κατασκευή αυτού του χαρτοφυλακίου πριν δώσουμε την προσφορά μας στον αγοραστή. Για την κατασκευή

αυτού του χαρτοφυλακίου θα χρειαστεί να εκτιμήσουμε τις μελλοντικές μεταβλητότητες των μετοχών. Ο πωλητής θα επιλέξει αν αυτές θα είναι ο μέσος όρος των παρελθοντικών μεταβλητοτήτων ή μεγαλύτερες. Όσο μεγαλύτερες μεταβλητότητες υποθέσει τόσο πιο σίγουρο είναι το κέρδος αλλά ταυτόχρονα και πιο ακριβό το χαρτοφυλάκιο.  $\square$

Ας δούμε όμως και έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο τιμολόγησης οποίος δεν στηρίζεται σε κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου και επομένως δεν προβληματίζουν τα κόστη συναλλαγής, το αν μπορεί να δανεισθεί χρήματα ή μετοχές ανά πάσα στιγμή κ.τ.λ. Ο πωλητής μπορεί να σκεφτεί ως εξής: με ποιο ποσό κατά πάσα πιθανότητα θα είμαι καλυμμένος, ειδικά αν πρόκειται για συμβόλαιο του οποίου η απολαβή δεν είναι άνω φραγμένη; Ας δούμε μια πιθανή απάντηση σε αυτό μέσω του επόμενου παραδείγματος.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 26** Έστω ότι έχουμε δυο υποκείμενα αγαθά με αξίες  $S, V$  και έστω ότι θέλουμε να αποτιμήσουμε ένα συμβόλαιο με απολαβή  $X = \max\{S -$

$V, 0\}$  κατά το χρόνο λήξης  $T$  με  $S_0 = V_0 = 1$ . Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το διωνυμικό μοντέλο για να υπολογίσουμε πιθανές αξίες οι οποίες θα ήταν αποδεκτές από τον πωλητή. Υποθέτουμε για ευκολία ότι εφαρμόζουμε το διωνυμικό μοντέλο για μια περίοδο και ότι έχουμε υπολογίσει τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου της κάθε μετοχής, δηλαδή  $u_1 = 2, d_1 = 1/2$  και  $u_2 = 3/2, d_2 = 2/3$  καθώς και την πιθανότητα ανόδου της κάθε μετοχής, δηλαδή  $p_1 = 2/3$  και  $p_2 = 1/2$ . Θα υπολογίσουμε τις απολαβές μετά από μια περίοδο καθώς και την πιθανότητα να έχει αυτή την απολαβή το συμβόλαιο. Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned}
 P^{u_1 u_2} &= \max\{S^{u_1} - V^{u_2}, 0\} = \{2 - 3/2, 0\} = 1/2, & w^{u_1 u_2} &= p_1 p_2 = 1/3 \\
 P^{u_1 d_2} &= \max\{S^{u_1} - V^{d_2}, 0\} = \{2 - 2/3, 0\} = 4/3, & w^{u_1 d_2} &= p_1(1 - p_2) = 1/3 \\
 P^{d_1 u_2} &= \max\{S^{d_1} - V^{u_2}, 0\} = \{1/2 - 3/2, 0\} = 0, & w^{d_1 u_2} &= (1 - p_1)p_2 = 1/6 \\
 P^{d_1 d_2} &= \max\{S^{d_1} - V^{d_2}, 0\} = \{1/2 - 2/3, 0\} = 0, & w^{d_1 d_2} &= (1 - p_1)(1 - p_2) = 1/6
 \end{aligned}$$

όπου  $P$  είναι οι πιθανές απολαβές και  $w$  οι αντίστοιχες πιθανότητες τους. Τοποθετούμε τις απολαβές μαζί με τις αντίστοιχες πιθανότητες κατά σειρά, ως εξής

$$\begin{array}{cc}
 4/3 & 1/3 \\
 1/2 & 1/3 \\
 0 & 1/6 \\
 0 & 1/6
 \end{array}$$

Διαλέγοντας ως τιμή πώλησης την  $1/2$  η πιθανότητα η απολαβή να είναι μεγαλύτερη αυτής είναι ίση με  $1 - 1/3 - 1/6 - 1/6$ . Προφανώς, για να έχουμε καλύτερη εκτίμηση θα πρέπει να διακριτοποιήσουμε σε περισσότερες χρονικές υποπεριόδους το χρονικό διάστημα  $[0, T]$ .  $\square$

Ο πωλητής, ο οποίος θα διακινδυνεύσει τα χρήματά του, θα αποφασίσει τελικά με ποιο τρόπο θα σκεφθεί προκειμένου να αποφασίσει για τη τιμή πώλησης ενός συμβολαίου. Εμείς (οι επιστήμονες) είμαστε υποχρεωμένοι να του δώσουμε όλες τις εναλλακτικές προσεγγίσεις που γνωρίζουμε, τους κινδύνους που έχουν καθώς και πως θα εφαρμοστούν στην πράξη (π.χ. αναδιαμόρφωση χαρτοφυλακίου) .

## 1 Διαχείριση Χαρτοφυλακίου

Υποθέστε ότι μας δίνεται το ποσό  $V_0$  με το οποίο έχουμε τη δυνατότητα να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκιο, να αγοράσουμε/πουλήσουμε, δηλαδή, αριθμό μετοχών

και να καταθέσουμε/δανειστούμε χρήματα στην τράπεζα. Στόχος μας είναι, θεωρώντας το διωνυμικό μοντέλο μιας περιόδου, να κάνουμε τις καλύτερες δυνατές κινήσεις έτσι ώστε στο χρόνο  $n = 1$  να έχουμε την καλύτερη δυνατή απόδοση.

Έστω  $p \in (0, 1)$  και  $q = 1 - p$  δοσμένα. Ας συμβολίσουμε με  $V_1^u$  την αξία του χαρτοφυλακίου τη χρονική στιγμή  $n = 1$  στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής ανέβει και αντίστοιχα  $V_1^d$  την αξία του χαρτοφυλακίου στην περίπτωση που η τιμή της μετοχής κατέβει. Ψάχνουμε το κατάλληλο ζευγάρι  $(a, b)$  τ.ω.

$$\begin{aligned} V_1^d &\geq 0, \\ V_1^u &\geq 0, \\ V_0 &= aS_0 + b \end{aligned}$$

και ταυτόχρονα να μεγιστοποιείται η ποσότητα

$$pV_1^u + qV_1^d$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει ότι

$$pV_1^u + qV_1^d = aS_0(pu + qd - (1 + r)) + V_0(1 + r)$$

Από τις τρεις πρώτες σχέσεις προκύπτει ότι

$$-\frac{V_0(1+r)}{S_0(u-(1+r))} \leq a \leq \frac{V_0(1+r)}{S_0(1+r-d)}$$

Αν  $pu + qd \geq 1 + r$  τότε η ζητούμενη ποσότητα μεγιστοποιείται όταν επιλέξουμε

$$a = \frac{V_0(1+r)}{S_0(1+r-d)}, \quad b = V_0 - aS_0$$

ενώ αν  $pu + qd < 1 + r$  τότε η ζητούμενη ποσότητα μεγιστοποιείται όταν

$$a = -\frac{V_0(1+r)}{S_0(u-(1+r))}, \quad b = V_0 - aS_0$$

## 2 Το διωνυμικό μοντέλο και η εξίσωση των Black - Scholes

Χρησιμοποιώντας ένα διωνυμικό δέντρο μιας περιόδου είναι σαν να υποθέτουμε ότι στον τελικό χρόνο  $T$  η μετοχή θα έχει δυο πιθανές τιμές. Αντίστοιχα σε ένα δέντρο 2 περιόδων υποθέτουμε ότι θα έχει 4 πιθανές τιμές και ούτω κάθε εξής. Στην πραγματικότητα όμως η

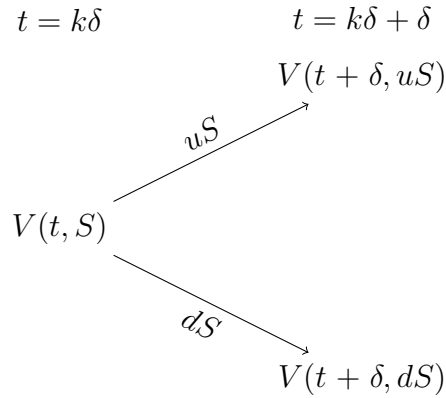
τιμή της μετοχής στον τελικό χρόνο  $T$  έχει άπειρες πιθανές τιμές. Επομένως είναι λογικό να υποψιαζόμαστε ότι αυξάνοντας τις περιόδους σε ένα διωνυμικό δέντρο και άρα πολλαπλασιάζοντας τις πιθανές τιμές της μετοχής στον χρόνο  $T$  θα έχουμε ολοένα και καλύτερα αποτελέσματα, πιο κοντά στη πραγματικότητα.

Θα υποθέσουμε ότι  $ud = 1$  και επομένως αρκεί να συσχετιστούν με μια μόνο παράμετρο, την  $\sigma$ , την οποία θα ονομάζουμε μεταβλητότητα της μετοχής. Υποθέτουμε ότι το ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι  $r$ . Χωρίζουμε το χρονικό διάστημα  $[0, T]$  ( $T$  σε χρόνια) σε  $n$  ίσα υπο-διαστήματα μήκους  $\delta$ . Όπως είδαμε ένα ποσό  $K$  με συνεχή ανατοκισμό γίνεται  $Ke^{r\delta}$  σε κάθε υποδιάστημα όταν το ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού είναι  $r$  και το  $\delta$  είναι σε έτη. Σημειώστε ότι όλα τα αποτελέσματα που έχουν αναφερθεί (ή που θα αναφερθούν στην συνέχεια) ισχύουν αντικαθιστώντας το  $1 + r$  με  $e^{r\delta}$ .

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι η δίκαιη τιμή πώλησης ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος μέσω του διωνυμικού μοντέλου συγκλίνει, υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιο

$\sigma > 0$  τέτοιο ώστε  $u = e^{\sigma\sqrt{\delta}}$  και  $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta}}$ . Σημειώστε ότι αυτό δεν ισχύει γενικά και μπορεί κάποιος να το εξακριβώσει λαμβάνοντας πραγματικά δεδομένα. Γενικά, στα εφαρμοσμένα μαθηματικά, όπως στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά, δυο είναι τα βασικά βήματα που κάνουμε. Το πρώτο είναι να καταγράψουμε κάποιες υποθέσεις που αφορούν το φαινόμενο το οποίο μελετάμε και το δεύτερο είναι, με βάση τις υποθέσεις αυτές, να καταγράψουμε και να αποδείξουμε διάφορες ιδιότητες του. Στο πρώτο βήμα θα πρέπει να δικαιολογήσουμε (πειραματικά ή χρησιμοποιώντας πραγματικά δεδομένα) ότι οι υποθέσεις που έχουμε κάνει είναι λογικές και ότι το φαινόμενο το οποίο μελετούμε σχεδόν τις ικανοποιεί. Όμως, για να είναι πλήρης η μελέτη μας, θα πρέπει να εξετάσουμε πως επιδρούν οι μικρές διαφορές στις υποθέσεις στα τελικά συμπεράσματα. Διότι αν η επίδραση είναι μεγάλη τότε δεν θα έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα. Στην προκειμένη περίπτωση, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο  $\sigma > 0$  τ.ω.  $u = e^{\sigma\sqrt{\delta}}$  και  $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta}}$ , θα πρέπει να το δικαιολογήσουμε με βάση

πραγματικά δεδομένα της αγοράς. Θα δούμε ότι για μικρό  $\delta$  τα πραγματικά δεδομένα σχεδόν ικανοποιούν την υπόθεση αυτή. Αυτό το «σχεδόν» όμως μπορεί να καταστρέψει εντελώς την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων μας αν δεν μελετήσουμε την επίδραση του πάνω σε αυτά. Αν δηλαδή η πραγματικότητα διαφέρει λίγο από τις υποθέσεις που κάνουμε και ταυτόχρονα τα μαθηματικά συμπεράσματα που έχουμε επίσης διαφέρουν λίγο από τη πραγματικότητα τότε είμαστε σε καλό δρόμο. Για ποιο λόγο όμως κάνουμε μια τέτοια υπόθεση; Ο λόγος είναι ότι μας διευκολύνει στους μαθηματικούς μας υπολογισμούς για αυτό το λόγο πολλές φορές είμαστε υποχρεωμένοι να υποθέσουμε κάτι (το οποίο δεν θα θέλαμε) μόνο και μόνο επειδή τα μαθηματικά μας θα γίνουν απλούστερα.



Σχήμα 18: Διωνυμικό δέντρο μιας περιόδου. Αν οι αξίες την χρονική στιγμή  $t = k\delta + \delta$  πρέπει να ίσες με  $V(t + \delta, uS)$  και  $V(t + \delta, dS)$  τότε η ελάχιστη τιμή του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή  $t = k\delta$  είναι ίση με  $V(t, S) = e^{-r\delta} \left( qV(t + \delta, uS) + (1 - q)V(t + \delta, dS) \right)$  όπου  $q = \frac{e^{r\delta} - d}{u - d}$  όταν  $d \leq e^{r\delta} \leq u$ . Σημειώστε ότι  $V(t, S) = aS + b$  όπου  $a$  είναι το πλήθος των μετοχών την χρονική στιγμή  $t$  και  $b$  το ποσό την χρονική στιγμή  $t$  σε επένδυση χωρίς ρίσκο με επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού  $r$ . Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι η  $V(t, S; \delta)$  συγκλίνει καθώς  $\delta \rightarrow 0$  σε μια συνάρτηση  $V(t, S)$  η οποία ικανοποιεί μια εξίσωση με μερικές παραγώγους παραβολικού τύπου.

Σημειώστε ότι για οποιεσδήποτε τιμές των  $r, \sigma$  υπάρχει κάποιο  $n$  τέτοιο ώστε από κει και πάνω να μην υπάρχει ευκαιρία σίγουρου κέρδους (δες Θεώρημα 10).

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του

Taylor το οποίο είναι το εξής.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 27** Αν η συνάρτηση  $f$  έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι τάξεως  $n$  στο διάστημα  $[a, b]$  και η  $f^{(n+1)}(x)$  υπάρχει στο ανοικτό  $(a, b)$  τότε για κάθε  $x_0, x \in [a, b]$  υπάρχει  $\xi \in (a, b)$  τ.ω.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Αν αναπτύξουμε γύρω από το  $x_0$  και υποθέσουμε ότι η  $f^{(n)}(x_0)$  υπάρχει για κάθε  $n$  τότε για  $x = x_0 + h$  έχουμε ότι

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \dots$$

αν και μόνο αν

$$R_n(h) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Taylor στη συνάρτηση  $f(x) = e^x$  αναπτύσσοντας γύρω από το μηδέν (δηλαδή  $x_0 = 0$ ) και διαλέγοντας  $h = \sigma\sqrt{\delta}$ .

Γράφουμε τότε

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta}} = 1 + \sigma\sqrt{\delta} + \frac{\sigma^2}{2}\delta + o(\delta),$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta}} = 1 - \sigma\sqrt{\delta} + \frac{\sigma^2}{2}\delta + o(\delta),$$

$$e^{r\delta} = 1 + r\delta + o(\delta),$$

$$q = \frac{e^{r\delta} - d}{u - d} = 1/2 + \frac{1}{2\sigma} \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \sqrt{\delta} + o(\sqrt{\delta})$$

όπου με  $o(\delta)$  εννοούμε μια ποσότητα η οποία αν διαιρεθεί με το  $\delta$  συγκλίνει στο μηδέν καθώς  $\delta \rightarrow 0$ .

Συμβολίζουμε με  $V(t, S)$  την αξία ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου την χρονική στιγμή  $t$  και όταν η τιμή της μετοχής είναι  $S$ . Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο έχουμε

$$V(t, S) = e^{-r\delta} \left( qV(t + \delta, uS) + (1 - q)V(t + \delta, dS) \right)$$

Συμβολίζοντας με

$$V = V(t, S), \quad V^u = V(t + \delta, uS), \quad V^d = V(t + \delta, dS)$$

και

$$J_\delta V(t, S) = -e^{r\delta}V + qV^u + (1 - q)V^d$$

έχουμε από το διωνυμικό μοντέλο ότι

$$J_\delta V(t, S) = 0$$

Στο επόμενο θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Taylor για συναρτήσεις δυο μεταβλητών το οποίο και διατυπώνουμε παρακάτω.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 28** Έστω η συνάρτηση δυο μεταβλητών  $f(x, y)$  η οποία υποθέτουμε ότι έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι  $n + 1$  τάξης. Τότε ισχύει το εξής,

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + (hD_x + kD_y)f(a, b) + \dots + \frac{1}{n!}(hD_x + kD_y)^n f(a, b) + \frac{1}{(n+1)!}(hD_x + kD_y)^{n+1} f(a + \theta h, b + \theta k)$$

όπου  $\theta \in (0, 1)$ .

Σημειώστε ότι

$$(hD_x + kD_y)f(a, b) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = hf_x(a, b) + kf_y(a, b)$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 29** Αν υποθέσουμε ότι η  $V(t, S)$  είναι αρκετά ομαλή τότε

$$0 = L_{BS} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{J_\delta V(t, S)}{\delta} = 0$$

όπου

$$L_{BS}V(t, S) = V_t(t, S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS}(t, S) + rSV_S(t, S) - rV(t, S)$$

και ονομάζεται τελεστής *Black-Scholes*. Επιπλέον, το πλήθος των μετοχών  $a(t, S)$  που πρέπει να έχει το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο κατά την χρονική στιγμή  $t$  και όταν η τιμή της μετοχής είναι  $S$  είναι ίσο με  $V_S(t, S)$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Διαλέγουμε  $h = \delta$  και  $k = (u - 1)S$ , αναπτύσσουμε την  $V^u$  κατά Taylor γύρω από το  $(t, S)$  και έπειτα αντικαθιστούμε τα  $u, d$  με τα αντίστοιχα αναπτύγματα τους. Παρόμοια για την  $V^d$  όπου εκεί διαλέγουμε  $k = (d - 1)S$ . Έτσι έχουμε

$$V^u = V(t + \delta, uS) = V(t + \delta, S + (u - 1)S) = V + \delta V_t + (u - 1)SV_S + \frac{1}{2}(u - 1)^2 S^2 V_{SS} + o(\delta)$$

$$V^d = V(t + \delta, dS) = V(t + \delta, S + (d - 1)S) = V + \delta V_t + (d - 1)SV_S + \frac{1}{2}(d - 1)^2 S^2 V_{SS} + o(\delta)$$

Παρατηρήστε ότι ο όρος

$$\frac{1}{2}(\delta D_t + (u - 1)SD_S)^2 V = \frac{1}{2}(u - 1)^2 S^2 V_{SS} + o(\delta)$$

Οι υψηλότερης τάξης όροι  $\frac{1}{n!}(\delta D_t + (u - 1)SD_S)^n V$  για  $n \geq 3$  είναι κλάσης  $o(\delta)$ . Παρόμοια και για την  $V^d$ .

Όμως

$$\begin{aligned}(u-1)S &= \sigma S\sqrt{\delta} + \sigma^2 S\delta + o(\delta) \\ (d-1)S &= -\sigma S\sqrt{\delta} + \sigma^2 S\delta + o(\delta)\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}V^u - V &= \sigma SV_S\sqrt{\delta} + LV\delta + o(\delta), \\ V^d - V &= -\sigma SV_S\sqrt{\delta} + LV\delta + o(\delta)\end{aligned}$$

όπου

$$LV = V_t + \frac{\sigma^2}{2}SV_S + \frac{\sigma^2 S^2}{2}V_{SS}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}0 = J_\delta V(t, S) &= -e^{r\delta}V + qV^u + (1-q)V^d \\ &= -(1+r\delta + o(\delta))V + qV^u + (1-q)V^d \\ &= -(q + (1-q))V - r\delta V - o(\delta)V + qV^u + (1-q)V^d \\ &= q(V^u - V) + (1-q)(V^d - V) - r\delta V - o(\delta)V\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα  $V^u - V$ ,  $V^d - V$  και  $q$  με τα αναπτύγματα τους θα έχουμε τελικά

$$0 = J_\delta V(t, S) = \delta L_{BS}V + o(\delta)$$

Διαιρώντας με  $\delta$  και λαμβάνοντας το όριο καθώς  $\delta \rightarrow 0$  προκύπτει ότι η συνάρτηση  $V(t, S)$  ικανοποιεί την εξίσωση των Black-Scholes. Δηλαδή η αξία του συμβολαίου τη χρονική στιγμή  $t$  και όταν η τιμή της μετοχής είναι ίση με  $S$  δίνεται από την παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση

$$V_t(t, S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2} V_{SS}(t, S) + rSV_S(t, S) - rV(t, S) = 0 \quad (2)$$

Το πλήθος των μετοχών στο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο είναι ίσο με

$$a(t, S; \delta) = \frac{V(t + \delta, uS) - V(t + \delta, dS)}{(u - d)S}$$

Χρησιμοποιώντας όπως πριν τα αναπτύγματα Taylor και λαμβάνοντας το όριο καθώς  $\delta \rightarrow 0$  προκύπτει ότι  $a(t, S; \delta) \rightarrow V_S(t, S)$ .  $\square$

Αν συγκεκριμένα έχουμε ένα συμβόλαιο αγοράς τότε πρέπει επιπλέον να ικανοποιείται και μια τελική συνθήκη η οποία είναι

$$V(T, S) = (S - K)^+$$

όπου  $K$  είναι η τιμή εξάσκησης.

Για την επίλυση της εξίσωσης Black-Scholes μπορείτε να δείτε το εδάφιο ;;

Παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει για Αμερικανικού τύπου συμβόλαια με τη διαφορά ότι το διωνυμικό μοντέλο συγκλίνει σε μια μεταβολική ανισότητα αντί για μερική διαφορική εξίσωση (δες [;]). Η διαφορά προκύπτει από την ύπαρξη του maximum στην αναδρομική σχέση του  $H_n$  οπότε η αντίστοιχη συνάρτηση (δηλαδή η  $H(t, S)$  για τα Αμερικανικά δικαιώματα) δεν είναι ούτε μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη.

### 3 Αναλογία αγοράς - πώλησης Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων

Θα συμβολίζουμε με

$$\begin{aligned} a^+ &= \max\{0, a\}, \\ a^- &= -\min\{0, a\} \end{aligned}$$

Ισχύουν τα παρακάτω, για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}a^- &= \max\{0, -a\} = (-a)^+, \\a^+ &= -\min\{0, -a\} = (-a)^-, \\a &= a^+ - a^-, \\|a| &= a^+ + a^-\end{aligned}$$

Έστω ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης  $K$  και το αντίστοιχο δικαίωμα πώλησης. Συμβολίζουμε με  $V_n^{E,call}$  και  $V_n^{E,put}$  τις αξίες των θεμελιωδών χαρτοφυλακίων εργαζόμενοι σε ένα διωνυμικό δέντρο  $N$ -περιόδων. Θα αποδείξουμε διάφορες σχέσεις που ικανοποιούνται μεταξύ αυτών των αξιών. Οι σχέσεις αυτές αποδεικνύεται ότι ικανοποιούνται (περίπου, διότι στη πράξη υπάρχει και το κόστος συναλλαγής) και από τις πραγματικές τιμές των συμβολαίων όταν ισχύει  $1 + r \in [d, u]$ .

Ισχύει η επόμενη αναλογία (put - call parity),

$$V_n^{E,call} - V_n^{E,put} = S_n - K \frac{1}{(1+r)^{N-n}}, \quad n = 0, \dots, N$$

Πράγματι, για  $n = N$  έχουμε

$$\begin{aligned} V_N^{E,call} - V_N^{E,put} &= (S_N - K)^+ - (K - S_N)^+ \\ &= (S_N - K)^+ - (S_N - K)^- \\ &= S_N - K. \end{aligned}$$

Υποθέτοντας ότι ισχύει για κάποιο  $n$  θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για  $n - 1$ . Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & V_{n-1}^{E,call} - V_{n-1}^{E,put} \\ = & \frac{(q(V_n^{u,E,call} - V_n^{u,E,put}) + (1 - q)(V_n^{d,E,call} - V_n^{d,E,put}))}{1 + r} \\ = & \frac{\left( q(uS_{n-1} - K \frac{1}{(1+r)^{N-n}}) + (1 - q)(dS_{n-1} - K \frac{1}{(1+r)^{N-n}}) \right)}{1 + r} \\ = & S_{n-1} - K \frac{1}{(1 + r)^{N-n+1}} \end{aligned}$$

#### 4 Σχέση μεταξύ Ευρωπαϊκών και Αμερικανικών δικαιωμάτων

Εν γένει είναι εύκολο να δούμε ότι

$$V_n^E \leq H_n, \quad n = 0, \dots, N$$

Πράγματι, για  $n = N$  έχουμε ότι

$$V_N^E = X_N = H_N$$

όπου  $X_N$  είναι η απολαβή του αγοραστή στο χρόνο  $N$ . Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο  $n$ , δηλαδή

$$V_n^E \leq H_n$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για  $n - 1$ . Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} H_{n-1} &= \max \left\{ X_{n-1}, \frac{1}{1+r} (qH_n^u + (1-q)H_n^d) \right\} \\ &\geq \max \left\{ X_{n-1}, \frac{1}{1+r} (qV_n^{u,E} + (1-q)V_n^{d,E}) \right\} \\ &= \max \{ X_{n-1}, V_{n-1}^E \} \\ &\geq V_{n-1}^E \end{aligned}$$

Έστω τώρα ένα Ευρωπαϊκό συμβόλαιο αγοράς με τιμή εξάσκησης  $K$  και το αντίστοιχο Αμερικανικό συμ-

βόλαιο. Αν  $r \geq 0$  τότε οι αξίες των συμβολαίων συμπίπτουν, δηλαδή

$$V_n^{E,call} = H_n^{call} \quad (\text{όταν } r \geq 0), \quad n = 0, \dots, N$$

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι

$$V_n^{E,call} \geq X_n = (S_n - K)^+ \quad (\text{όταν } r \geq 0), \quad n = 0, \dots, N$$

χρησιμοποιώντας επαγωγή, οπότε ξεκινάμε για  $n = N$  όπου έχουμε προφανώς  $V_N^{E,call} = (S_N - K)^+$ . Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο  $n$ , δηλαδή  $V_n^{E,call} \geq X_n = (S_n - K)^+$  και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για

$n - 1$ . Έχουμε

$$\begin{aligned}
S_{n-1} - K &= \frac{(qu + (1 - q)d)}{1 + r}(S_{n-1} - K) \\
&= \frac{1}{1 + r} \left( q(uS_{n-1} - K) + (1 - q)(dS_{n-1} - K) \right) \\
&\quad + \frac{1}{1 + r} \left( qK(1 - u) + (1 - q)K(1 - d) \right) \\
&\leq \frac{1}{1 + r} \left( q(uS_{n-1} - K)^+ + (1 - q)(dS_{n-1} - K)^+ \right) \\
&\quad + \frac{1}{1 + r} \left( qK(1 - u) + (1 - q)K(1 - d) \right) \\
&\leq \frac{1}{1 + r} \left( qV_n^{u,E,call} + (1 - q)V_n^{d,E,call} \right) \\
&= V_{n-1}^{E,call}
\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι  $1 + r = qu + (1 - q)d$  και ότι

$$qK(1 - u) + (1 - q)K(1 - d) = K - K(1 + r) \leq 0$$

Επειδή  $V_{n-1}^{E,call} \geq 0$  τότε έχουμε ότι

$$X_{n-1} \leq V_{n-1}^{E,call}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι  $V_n^{E,call} = H_n^{call}$  για  $n = 0, \dots, N$  όταν  $r \geq 0$ . Επαγωγικά, ξεκινάμε για  $n = N$  και προφανώς ισχύει η ισότητα. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο  $n$  και θα αποδείξουμε ότι αναγκαστικά ότι θα ισχύει και για  $n - 1$ .

Πράγματι,

$$\begin{aligned} H_{n-1}^{call} &= \max \left\{ X_{n-1}, \frac{1}{1+r} (qH_n^{u,call} + (1-q)H_n^{d,call}) \right\} \\ &= \max \left\{ X_{n-1}, \frac{1}{1+r} (qV_n^{u,E,call} + (1-q)V_n^{d,E,call}) \right\} \\ &= \max \{ X_{n-1}, V_{n-1}^{E,call} \} \\ &= V_{n-1}^{E,call} \end{aligned}$$

Επομένως σε κάθε χρονική στιγμή  $n$  δεν υπάρχουν επιπλέον χρήματα για τον πωλητή άρα

$$V_n^{A,call} = V_n^{AC,call}$$

Για δικαιώματα πώλησης στην περίπτωση που  $r = 0$  μπορούμε να αποδείξουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Δηλαδή

$$V_n^{E,put} = H_n^{put} \quad (\text{όταν } r = 0), \quad n = 0, \dots, N$$

Για να το αποδείξουμε αυτό θα δείξουμε πρώτα ότι

$$X_n = (K - S_n)^+ \leq V_n^{E,put} \quad (\text{όταν } r = 0), \quad n = 0, \dots, N$$

Επαγωγικά, ξεκινώντας για  $n = N$  ισχύει με προφανή τρόπο. Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο  $n$  και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για  $n - 1$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned} K - S_{n-1} &= K - dS_{n-1} + S_{n-1}(d - 1) \\ &= (1 - q)(K - dS_{n-1}) + q(K - dS_{n-1}) + S_{n-1}(d - 1) \\ &= (1 - q)(K - dS_{n-1}) + q(K - uS_{n-1}) \\ &\quad + qS_{n-1}(u - d) + S_{n-1}(d - 1) \\ &\leq (1 - q)(K - dS_{n-1})^+ + q(K - uS_{n-1})^+ \\ &\quad + qS_{n-1}(u - d) + S_{n-1}(d - 1) \\ &\leq V_{n-1}^{E,put} \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το ότι  $q = \frac{1-d}{u-d}$  οπότε και

$$S_{n-1}(d - 1) = -qS_{n-1}(u - d)$$

Επειδή,  $V_{n-1}^{E,put} \geq 0$  έχουμε ότι

$$X_{n-1} \leq V_{n-1}^{E,put}, \quad n = 1, \dots, N$$

Επαγωγικά είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι  $H_n^{put} = V_n^{E,put}$ . Πράγματι, για  $n = N$  ισχύει με προφανή τρόπο και υποθέτοντας ότι ισχύει για κάποιο  $n$  θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για  $n - 1$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned} H_{n-1}^{put} &= \max \left\{ X_{n-1}, (qH_n^{u,put} + (1-q)H_n^{d,put}) \right\} \\ &= \max \left\{ X_{n-1}, (qV_n^{u,E,put} + (1-q)V_n^{d,E,put}) \right\} \\ &= \max \{ X_{n-1}, V_{n-1}^{E,put} \} \\ &= V_{n-1}^{E,put} \end{aligned}$$

Τέλος, εφόσον δεν υπάρχουν επιπλέον χρήματα στο χαρτοφυλάκιο κατά το χρόνο  $n$  τότε

$$V_n^{AC,put} = V_n^{A,put}, \quad (\text{όταν } r = 0).$$

## 5 Αναλογία αγοράς - πώλησης Αμερικανικών συμβολαίων

Θεωρούμε τώρα ένα Αμερικανικό συμβόλαιο αγοράς με τιμή εξάσκησης  $K$  και το αντίστοιχο συμβόλαιο πώλησης. Η επόμενη αναλογία ισχύει σε ένα διωνυμικό μοντέλο  $N$ -περιόδων, όταν  $r \geq 0$ ,

$$H_n^{call} - H_n^{put} \leq S_n - K \frac{1}{(1+r)^{N-n}}, \quad n = 0, \dots, N$$

Για να το αποδείξουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ότι  $H_n^{call} = V_n^{E,call}$  και ότι  $V_n^{E,put} \leq H_n^{put}$  και επομένως έχουμε

$$H_n^{call} - H_n^{put} \leq V_n^{E,call} - V_n^{E,put} = S_n - K \frac{1}{(1+r)^{N-n}}$$

Η επόμενη ανισότητα επίσης ισχύει

$$S_n - K \leq H_n^{call} - H_n^{put}, \quad n = 0, \dots, N$$

Θα την αποδείξουμε με επαγωγή. Για  $n = N$  έχουμε ότι

$$H_N^{call} - X_N^{put} = S_N - K$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο  $n$ , δηλαδή

$$H_n^{call} - H_n^{put} \geq S_n - K$$

και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για  $n - 1$ , δηλαδή

$$H_{n-1}^{call} - H_{n-1}^{put} \geq S_{n-1} - K$$

Σημειώστε ότι

$$H_{n-1}^{put} = \max \left\{ (K - S_{n-1})^+, \frac{1}{1+r} (qH_n^{u,put} + (1-q)H_n^{d,put}) \right\}$$

$$H_{n-1}^{call} = \max \left\{ (S_{n-1} - K)^+, \frac{1}{1+r} (qH_n^{u,call} + (1-q)H_n^{d,call}) \right\}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} & H_{n-1}^{call} - H_{n-1}^{put} \\ &= H_{n-1}^{call} + \min \left\{ -(S_{n-1} - K)^-, \frac{-1}{1+r} (qH_n^{u,put} + (1-q)H_n^{d,put}) \right\} \\ &= \min \left\{ H_{n-1}^{call} - (S_{n-1} - K)^-, H_{n-1}^{call} - \frac{1}{1+r} (qH_n^{u,put} + (1-q)H_n^{d,put}) \right\} \\ &\geq \min \left\{ (S_{n-1} - K), \frac{(q(H_n^{u,call} - H_n^{u,put}) + (1-q)(H_n^{d,call} - H_n^{d,put}))}{1+r} \right\} \\ &\geq \min \left\{ (S_{n-1} - K), \frac{(q(uS_{n-1} - K) + (1-q)(dS_{n-1} - K))}{1+r} \right\} \\ &\geq S_{n-1} - K \end{aligned}$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει τις προφανείς ανισότητες

$$H_{n-1}^{call} \geq (S_{n-1} - K)^+$$

και

$$H_{n-1}^{call} \geq \frac{1}{1+r} (qH_n^{u,call} + (1-q)H_n^{d,call})$$

Συνολικά έχουμε αποδείξει τις ανισότητες - αναλογίες για τις τιμές των Αμερικανικών δικαιωμάτων (put - call parity),

$$S_n - K \leq H_n^{call} - H_n^{put} \leq S_n - K \frac{1}{(1+r)^{N-n}}, \quad n = 0, \dots, N$$

### 5.1 Φράγματα για τις αξίες των συμβολαίων

Θα αποδείξουμε το παρακάτω φράγμα,

$$V_n^{E,call} = H_n^{call} \leq S_n$$

Για  $n = N$  έχουμε ότι

$$V_N^{E,call} = (S_N - K)^+ \leq S_N$$

Υποθέτουμε ότι

$$V_n^{E,call} \leq S_n$$

και θα αποδείξουμε ότι

$$V_{n-1}^{E,call} \leq S_{n-1}$$

Ισχύει το εξής

$$V_{n-1}^{E,call} = \frac{1}{1+r} (qV_n^{u,E,call} + (1-q)V_n^{d,E,call}) \leq \frac{1}{1+r} (quS_{n-1} + (1-q))$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι

$$V_n^{E,call} \geq S_n - K \frac{1}{(1+r)^{N-n}}$$

Για  $n = N$  ισχύει ότι

$$V_N^{E,call} = (S_N - K)^+ \geq S_N - K$$

Έστω ότι ισχύει για κάποιο  $n$ , δηλαδή

$$V_n^{E,call} \geq S_n - K \frac{1}{(1+r)^{N-n}}$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$V_{n-1}^{E,call} \geq S_{n-1} - K \frac{1}{(1+r)^{N-n+1}}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
 & V_{n-1}^{E,call} \\
 = & \frac{(qV_n^{u,E,call} + (1-q)V_n^{d,E,call})}{1+r} \\
 \geq & \frac{\left(q(uS_{n-1} - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}}) + (1-q)(dS_{n-1} - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}})\right)}{1+r} \\
 = & S_{n-1} - K\frac{1}{(1+r)^{N-n+1}}
 \end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε αποδείξει ότι

$$S_n - K\frac{1}{(1+r)^{N-n}} \leq V_n^{E,call} = H_n^{call} \leq S_n, \quad n = 0, \dots, N$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι

$$K\frac{1}{(1+r)^{N-n}} - S_n \leq V_n^{E,put} \leq K\frac{1}{(1+r)^{N-n}}, \quad n = 0, \dots, N$$

Για  $n = N$  προφανώς ισχύει ότι

$$K - S_N \leq V_N^{E,put} \leq K$$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για κάποιο  $n$ , δηλαδή,

$$K \frac{1}{(1+r)^{N-n}} - S_n \leq V_n^{E,put} \leq K \frac{1}{(1+r)^{N-n}}$$

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για  $n-1$  δηλαδή

$$K \frac{1}{(1+r)^{N-n+1}} - S_{n-1} \leq V_{n-1}^{E,put} \leq K \frac{1}{(1+r)^{N-n+1}}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} V_{n-1}^{E,put} &= \frac{(qV_n^{u,E,put} + (1-q)V_n^{d,E,put})}{1+r} \\ &\leq K \frac{1}{(1+r)^{N-n+1}} \end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned} &V_{n-1}^{E,put} \\ &= \frac{(qV_n^{u,E,put} + (1-q)V_n^{d,E,put})}{1+r} \\ &\geq \frac{\left( q \left( K \frac{1}{(1+r)^{N-n}} - uS_{n-1} \right) + (1-q) \left( K \frac{1}{(1+r)^{N-n}} - dS_{n-1} \right) \right)}{1+r} \\ &= K \frac{1}{(1+r)^{N-n+1}} - S_{n-1} \end{aligned}$$

Τέλος για Αμερικανικά δικαιώματα πώλησης έχουμε προφανώς

$$(K - S_n)^+ \leq H_n^{put}, \quad n = 0, \dots, N$$

αλλά και

$$H_n^{put} \leq K, \quad n = 0, \dots, N$$

Για  $n = N$  είναι προφανές. Θα υποθέσουμε ότι ισχύει για κάποιο  $n$  και θα αποδείξουμε ότι ισχύει και για  $n - 1$ , δηλαδή

$$H_{n-1}^{put} \leq K$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} H_{n-1}^{put} &= \max \left\{ (K - S_{n-1})^+, \frac{1}{1+r} (qH_n^{u,put} + (1-q)H_n^{d,put}) \right\} \\ &\leq \max \left\{ (K - S_{n-1})^+, \frac{1}{1+r} K \right\} \\ &\leq K \end{aligned}$$

□

Όλες οι παραπάνω σχέσεις, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της εργασίας [;], ικανοποιούνται και στο αντίστοιχο συνεχούς χρόνου μοντέλο, δηλαδή για τη λύση της εξίσωσης Black-Scholes για τα Ευρωπαϊκά συμβόλαια και για την αντίστοιχη μεταβολική ανισότητα για τα Αμερικανικά συμβόλαια.

Οι αναλογίες αγοράς - πώλησης, η σχέση μεταξύ Αμερικανικών και Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων καθώς και τα φράγματα αποδείχτηκαν συγκεκριμένα για το διωνυμικό μοντέλο. Χρησιμοποιώντας τη μη ύπαρξη ευκαιρίας σίγουρου κέρδους μπορεί κάποιος να αποδείξει ότι ισχύουν οι παραπάνω σχέσεις και για τις πραγματικές τιμές (δες [;]) και επομένως ως συμπέρασμα έχουμε ότι το διωνυμικό μοντέλο εκφράζει αρκετά καλά την πραγματικότητα. Σημειώστε ότι δεν γνωρίζουμε τις πραγματικές τιμές μετοχών και συμβολαίων αλλά γνωρίζουμε τη σχέση που πρέπει να έχουν μεταξύ τους έτσι ώστε να μην εμφανίζεται ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Με το διωνυμικό μοντέλο (και άλλα μοντέλα) προσπα-

θούμε να εκτιμήσουμε και τις πιθανές τιμές των μετοχών και συμβολαίων (μαντεύοντας τα  $u, d$ ) και μέσω αυτών προκύπτουν και οι παραπάνω σχέσεις μεταξύ τους. Αν τα πραγματικά  $u, d$  τελικά είναι πολύ διαφορετικά από αυτά που εκτιμήσαμε οι τιμές των μετοχών και των συμβολαίων θα είναι και αυτές πολύ διαφορετικές από αυτές που εκτιμήσαμε αλλά οι σχέσεις μεταξύ τους παραμένουν ίδιες.

#### 5.1.1 Σχόλια

Δείξαμε με απλά μαθηματικά ότι στο διωνυμικό μοντέλο δεν υπάρχει ευκαιρία σίγουρου κέρδους αν  $d < 1 + r < u$  και ότι είναι πλήρες μοντέλο. Επιπλέον υπολογίσαμε τις μικρότερες δυνατές τιμές πώλησης των Ευρωπαϊκών και Αμερικανικών δικαιωμάτων έτσι ώστε ο πωλητής να καταστρώσει στρατηγική αντιστάθμισης την οποία επίσης περιγράψαμε. Αυτό σημαίνει ότι πουλώντας σε αυτή την τιμή ο πωλητής δεν θα έχει ποτέ κέρδος (αλλά δεν θα χάσει επίσης) αν τοποθετήσει τα χρήματα αυτά σε χαρτοφυλάκιο όπως περιγράψαμε. Αν

ο αγοραστής έχει την δυνατότητα κατασκευής του αντίθετου χαρτοφυλακίου λέμε τότε ότι η τιμή αυτή είναι η **δίκαιη** τιμή πώλησης. Για την περίπτωση όπου ο αγοραστής δεν έχει την δυνατότητα κατασκευής του αντίθετου χαρτοφυλακίου μπορεί να δει κάποιος μερικές σκέψεις στην εργασία [;]. Όλα αυτά με την παραδοχή ότι τα  $u, d$  προκύψουν όπως τα προέβλεψε.

Για την περαιτέρω και βαθύτερη μελέτη τέτοιων συμβολαίων απαιτείται είτε η χρήση θεωρίας πιθανοτήτων και στοχαστικών διαδικασιών είτε θεωρία μερικών διαφορικών εξισώσεων και μεταβολικών ανισοτήτων. Δεν θεωρείται κάποια από τις δυο τεχνικές περισσότερο ικανή αλλά μάλλον αλληλοσυμπληρώνονται.

**ΑΣΚΗΣΗ 30 (Barrier options)** θεωρήστε ένα Αμερικανικό δικαίωμα με απολαβή

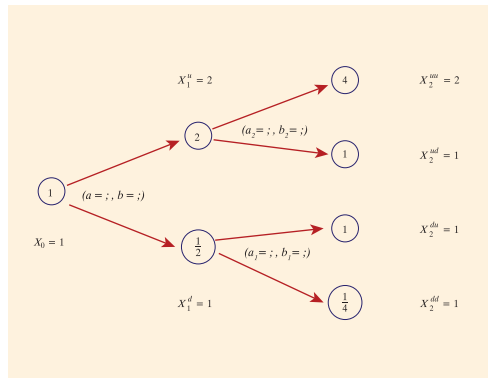
$$X_n = \min \left\{ \max\{S_n, K_1\}, K_2 \right\}.$$

Τα δεδομένα μας είναι  $u = 2, d = 1/2, S_0 = 1, K_1 = 1, K_2 = 2, r = 1/2, N = 2$ . Υπολογίστε

τις αξίες του συμβολαίου σε όλες τις χρονικές στιγμές  $n$  καθώς και τη στρατηγική επένδυσης.

**Απάντηση.** Σχηματίζουμε το δέντρο τιμών της μετοχής, θεωρώντας ένα διωνυμικό μοντέλο δυο περιόδων, αφού πρώτα υπολογίσουμε όλες τις πιθανές απολαβές

$$\begin{aligned}X_2^{uu} &= \min\{\max\{S_2^{uu}, 1\}, 2\} = 2, \\X_2^{ud} &= \min\{\max\{S_2^{ud}, 1\}, 2\} = 1 = X_2^{du}, \\X_2^{dd} &= \min\{\max\{S_2^{dd}, 1\}, 2\} = 1, \\X_1^u &= \min\{\max\{S_1^u, 1\}, 2\} = 2, \\X_1^d &= \min\{\max\{S_1^d, 1\}, 2\} = 1, \\X_0 &= \min\{\max\{S_0, 1\}, 2\} = 1\end{aligned}$$



Σχήμα 19

Θα υπολογίσουμε τώρα την αξία του συμβολαίου σε κάθε χρονική στιγμή και σε κάθε πιθανή τιμή της μετοχής. Στο χρόνο  $n = 2$  η αξία του συμβολαίου θα είναι ίση με την απολαβή διότι αν πουληθεί το συμβόλαιο εκείνη τη στιγμή θα εξασκηθεί αμέσως, επομένως, ότι χρήματα θα πάρει ο πωλητής θα πρέπει να καταβάλλει στον αγοραστή προκειμένου να μην υπάρχει ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Έρα

$$\begin{aligned}
 H_2^{uu} &= X_2^{uu}, \\
 H_2^{ud} &= X_2^{ud}, \\
 H_2^{dd} &= X_2^{dd}
 \end{aligned}$$

Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο

$$H_n = \max \left\{ X_n, \frac{1}{1+r} (qH_{n+1}^u + (1-q)H_{n+1}^d) \right\}, \quad n = 0, 1$$

δηλαδή

$$H_1^u = \max \left\{ X_1^u, \frac{1}{1+r} (qH_2^{uu} + (1-q)H_2^{ud}) \right\},$$

$$H_1^d = \max \left\{ X_1^d, \frac{1}{1+r} (qH_2^{du} + (1-q)H_2^{dd}) \right\},$$

$$H_0 = \max \left\{ X_0, \frac{1}{1+r} (qH_1^u + (1-q)H_1^d) \right\}$$

Θα υπολογίσουμε παρακάτω την αντισταθμιστική στρατηγική. Στο χρόνο  $n = 0$  ο πωλητής θα πρέπει να έχει στην κατοχή του  $a$  το πλήθος μετοχές και  $b$  χρήματα στην τράπεζα έτσι ώστε τη χρονική στιγμή  $n = 1$  η αξία του χαρτοφυλακίου του να είναι ίση ή μεγαλύτερη από την αξία του συμβολαίου. Πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω δυο εξισώσεις,

$$auS_0 + b(1+r) = H_1^u,$$

$$adS_0 + b(1+r) = H_1^d$$

από όπου και υπολογίζουμε τους δυο αγνώστους  $a, b$ .  
 Στη συνέχεια, και στην περίπτωση που η μετοχή ανέβει, θα υπολογίσουμε τα  $a_2, b_2$  τα οποία θα είναι τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} a_2 u u S_0 + b_2 (1 + r) &= H_2^{uu}, \\ a_2 u d S_0 + b_2 (1 + r) &= H_2^{ud} \end{aligned}$$

ενώ στην περίπτωση που η μετοχή κατέβει θα υπολογίσουμε τα  $a_1, b_1$  από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} a_1 d u S_0 + b_1 (1 + r) &= H_2^{du}, \\ a_1 d d S_0 + b_1 (1 + r) &= H_2^{dd} \end{aligned}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 31 (Look-back options)** Θεωρείστε Αμερικανικά δικαιώματα με τις παρακάτω απολαβές,

$$\begin{aligned} X_n^1 &= \max\{S_n^{max} - K, 0\}, \\ X_n^2 &= \max\{K - S_n^{min}, 0\}, \\ X_n^3 &= S_n - S_n^{min}, \\ X_n^4 &= S_n^{max} - S_n \end{aligned}$$

όπου  $S_n^{max} = \max\{S_0, \dots, S_n\}$  και  $S_n^{min} = \min\{S_0, \dots, S_n\}$ .  
 Τα δεδομένα μας είναι  $u = 2, d = 1/2, S_0 = 1,$

$K = 3/2$ ,  $r = 1/2$ ,  $N = 2$ . Υπολογίστε τις αξίες των συμβολαίων σε όλες τις χρονικές στιγμές  $n$  καθώς και τη στρατηγική επένδυσης.

**Απάντηση.** Θα υπολογίσουμε πρώτα τα  $S_n^{max}$ ,  $S_n^{min}$  σε κάθε πιθανή εξέλιξη της μετοχής. Έτσι στο μονοπάτι  $uu$  έχουμε ότι  $S_2^{max,uu} = 4$  στο μονοπάτι  $ud$  έχουμε  $S_2^{max,ud} = 2$ , στο μονοπάτι  $du$  έχουμε  $S_2^{max,du} = 1$  και τέλος στο μονοπάτι  $dd$  έχουμε  $S_2^{max,dd} = 1$ . Επίσης,  $S_1^{max,u} = 2$  και  $S_1^{max,d} = 1$ . Παρόμοια για τον υπολογισμό των  $S_n^{min}$ . Θα υπολογίσουμε τώρα τις απολαβές  $X^1$ ,

$$X_2^{1,uu} = \max(S_2^{max,uu} - K, 0) = \max(4 - 3/2, 0) = 5/2,$$

$$X_2^{1,ud} = \max(S_2^{max,ud} - K, 0) = \max(2 - 3/2, 0) = 1/2,$$

$$X_2^{1,du} = \max(S_2^{max,du} - K, 0) = \max(1 - 3/2, 0) = 0,$$

$$X_2^{1,dd} = \max(S_2^{max,dd} - K, 0) = \max(1 - 3/2, 0) = 0,$$

$$X_1^{1,u} = \max(S_1^{max,u} - K, 0) = \max(2 - 3/2, 0) = 1/2,$$

$$X_1^{1,d} = \max(S_1^{max,d} - K, 0) = \max(1 - 3/2, 0) = 0,$$

$$X_0 = \max(1 - 3/2, 0) = 0.$$

Διαπιστώνουμε ότι  $X^{1,ud} \neq X^{1,du}$  δηλαδή η απολαβή

εξαρτάται όχι μόνο από τη τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή 1 αλλά και από το συγκεκριμένο μονοπάτι που ακολουθήσε για να φτάσει σε αυτή την τιμή.

Για να υπολογίσουμε την αξία του συμβολαίου  $H_n$  εξισώνουμε τα αντίστοιχα  $H_2$  με τα  $X_2^1$  και έπειτα χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο

$$H_n = \max \left\{ X_n^1, \frac{1}{1+r} (qH_{n+1}^u + (1-q)H_{n+1}^d) \right\}$$

Για να υπολογίσουμε τις στρατηγικές αντιστάθμισης θα σχηματίσουμε τα αντίστοιχα συστήματα δυο εξισώσεων με δύο αγνώστους, δηλαδή,

$$\begin{aligned} auS_0 + b(1+r) &= H_1^u, \\ adS_0 + b(1+r) &= H_1^d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2uuS_0 + b_2(1+r) &= H_2^{uu}, \\ a_2udS_0 + b_2(1+r) &= H_2^{ud} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1duS_0 + b_1(1+r) &= H_2^{du}, \\ a_1ddS_0 + b_1(1+r) &= H_2^{dd} \end{aligned}$$

Εντελώς παρόμοια εργαζόμαστε και στις άλλες περιπτώσεις απολαβών.  $\square$

**ΑΣΚΗΣΗ 32 (Asian options)** Θεωρείστε ένα Αμερικανικό δικαίωμα με τις παρακάτω πιθανές απολαβές,

$$X_n^1 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n S_i, \text{ (αριθμητικός μέσος όρος)}$$

$$X_n^2 = \sqrt[n+1]{\prod_{i=0}^n S_i}, \text{ (γεωμετρικός μέσος όρος)}$$

Τα δεδομένα μας είναι  $u = 2$ ,  $d = 1/2$ ,  $S_0 = 1$ ,  $r = 1/2$ ,  $N = 2$ . Υπολογίστε τις αξίες του συμβολαίου σε όλες τις χρονικές στιγμές  $n$  καθώς και τη στρατηγική επένδυσης.

**Απάντηση.** Το πρώτο που κάνουμε είναι να υπολογίσουμε τις απολαβές για όλα τα πιθανά μονοπάτια της

μετοχής. Έχουμε

$$\begin{aligned}X_2^{1,uu} &= \frac{S_0 + uS_0 + uuS_0}{3} = 7/3, \\X_2^{1,ud} &= \frac{S_0 + uS_0 + udS_0}{3} = 4/3, \\X_2^{1,du} &= \frac{S_0 + dS_0 + duS_0}{3} = 5/6, \\X_2^{1,dd} &= \frac{S_0 + dS_0 + ddS_0}{3} = 7/12, \\X_1^{1,u} &= \frac{S_0 + uS_0}{2} = 3/2, \\X_1^{1,d} &= \frac{S_0 + dS_0}{2} = 3/4, \\X_0 &= 1\end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε και πάλι ότι οι απολαβές εξαρτώνται όχι μόνο από την τρέχουσα τιμή της μετοχής αλλά και από τη διαδρομή που ακολούθησε μέχρι εκεί.

Για να υπολογίσουμε τις αξίες του συμβολαίου εξισώνουμε τις  $H_2$  με τις αντίστοιχες  $X_2$  και έπειτα χρησιμοποιούμε τον αναδρομικό τύπο. Τέλος, υπολογίζουμε την αντισταθμιστική στρατηγική εντελώς παρόμοια με τις προηγούμενες ασκήσεις.

Εντελώς παρόμοια είναι και η περίπτωση του γεωμετρικού μέσου όρου.  $\square$

**ΑΣΚΗΣΗ 33 (Bermudan options)** Θεωρείστε ένα διωνυμικό μοντέλο  $N$  περιόδων και ένα συμβόλαιο με απολαβή  $X_n$  σε κάθε χρονική στιγμή και το οποίο ο αγοραστής μπορεί να εξασκήσει μόνο στις χρονικές στιγμές  $n = 1, n = 3$  και γενικά  $n = 2k + 1$  καθώς και στη λήξη του συμβολαίου. Υπολογίστε τις αξίες του συμβολαίου σε όλες τις χρονικές στιγμές  $n$  καθώς και τη στρατηγική επένδυσης.

**Απάντηση.** Για να υπολογίσουμε την αξία του συμβολαίου σε κάθε χρονική στιγμή εξισώνουμε αρχικά τις  $H_N$  με τις  $X_N$  αφού ο αγοραστής μπορεί να εξασκήσει την χρονική στιγμή  $n = N$ .

Για τις χρονικές στιγμές  $n = 2k$  εφόσον ο αγοραστής δεν μπορεί να εξασκήσει τότε τα ελάχιστα χρήματα που χρειάζεται ο πωλητής είναι αυτά για να περάσει στο επόμενο βήμα, δηλαδή,

$$H_{2k} = \frac{1}{1+r} (qH_{2k+1}^u + (1-q)H_{2k+1}^d)$$

Τις χρονικές στιγμές  $n = 2k + 1$  ο αγοραστής έχει το δικαίωμα να εξασκήσει αν τον συμφέρει. Επομένως, ο πωλητής χρειάζεται να έχει τουλάχιστον τα χρήματα της απολαβής για τη χρονική στιγμή  $n = 2k + 1$  αλλά και τα χρήματα για να προχωρήσει στο επόμενο βήμα αν χρειαστεί. Δηλαδή,

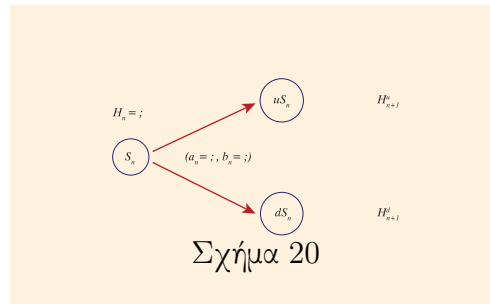
$$H_{2k+1} = \max \left\{ X_{2k+1}, \frac{1}{1+r} (qH_{2k+2}^u + (1-q)H_{2k+2}^d) \right\}$$

Για να υπολογίσουμε την αντισταθμιστική στρατηγική επένδυσης δουλεύουμε ως συνήθως.

$$\begin{aligned} a_n u S_n + b_n (1+r) &= H_{n+1}^u, \\ a_n d S_n + b_n (1+r) &= H_{n+1}^d \end{aligned}$$

με  $n = 0, \dots, N - 1$  όπου  $a_n, b_n$  είναι το πλήθος των μετοχών και της κατάθεσης σε τράπεζα αντίστοιχα οι οποίες πρέπει να γίνουν τη χρονική στιγμή  $n$  έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο να έχει τις απαιτούμενες αξίες τη χρονική στιγμή  $n + 1$ .

Αν απομονώσουμε μια χρονική στιγμή  $n$  τότε σχηματικά έχουμε



□

**ΑΣΚΗΣΗ 34 (Shout options)** Θεωρείστε ένα διωνυμικό μοντέλο  $N$ -περιόδων και ένα συμβόλαιο με απολαβή  $X_n$  την κάθε χρονική στιγμή. Υποθέτουμε ότι ο αγοραστής έχει τη δυνατότητα να «κλειδώσει» την απολαβή μιας ενδιάμεσης χρονικής στιγμής (όποτε το επιλέξει) έστω  $n_0$  και στη λήξη του συμβολαίου η απολαβή του να είναι

$$\max(X_N, X_{n_0})$$

Υπολογίστε την αξία του συμβολαίου σε κάθε χρονική στιγμή καθώς και την στρατηγική αντιστάθμισης.

**Απάντηση.** Ο πωλητής δεν γνωρίζει εκ των προτέρων ποια χρονική στιγμή θα κλειδώσει ο αγοραστής

επομένως δεν μπορεί παρά να υποθέσει το χειρότερο σενάριο, δηλαδή να κλειδώσει τη χρονική στιγμή όπου η απολαβή είναι η μέγιστη δυνατή για το κάθε πιθανό μονοπάτι. Ήρα η απολαβή του αγοραστή μπορούμε να υποθέσουμε ότι θα είναι

$$Y_N = \max\{X_N, \max_{n \in \{0, \dots, N-1\}} X_n\}$$

Εξισώνοντας τις  $H_N$  με  $Y_N$  και χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό τύπο

$$H_n = \frac{1}{1+r} (qH_{n+1}^u + (1-q)H_{n+1}^d)$$

υπολογίζουμε την αξία του συμβολαίου σε κάθε χρονική στιγμή. Στη συνέχεια υπολογίζουμε και τη στρατηγική αντιστάθμισης με το γνωστό τρόπο.

Στην περίπτωση που μπορεί να κλειδώσει σε προκαθορισμένες χρονικές στιγμές, έστω  $n_0, n_1, \dots, n_m$  τότε αρκεί να υποθέσουμε ότι η απολαβή του αγοραστή θα είναι

$$Y_N = \max\{X_N, \max_{n \in \{n_0, n_1, \dots, n_m\}} X_n\}$$

□

**ΑΣΚΗΣΗ 35 (Chooser options)** Θεωρείστε  $m$  συμβόλαια με απολαβές  $X_n^1, X_n^2, \dots, X_n^m$  σε κάθε χρονική στιγμή. Υποθέτοντας ένα διωνυμικό δέντρο  $N$ -περιόδων υπολογίστε την αξία ενός συμβολαίου στο οποίο ο αγοραστής έχει το δικαίωμα τη χρονική στιγμή  $n = n_0$  (εκ των προτέρων γνωστή) να αποφασίσει ποιο από τα  $m$  συγκεκριμένα συμβόλαια θα εξασκήσει στο χρόνο  $N$ . Τι γίνεται αν δεν είναι προκαθορισμένος ο χρόνος επιλογής  $n_0$ ;

**Απάντηση.** Τη χρονική στιγμή  $n = n_0$  ο αγοραστής θα πρέπει να επιλέξει ποιο από όλα τα συμβόλαια θα εξασκήσει τη χρονική στιγμή  $n = N$ . Αρκεί να υποθέσουμε ότι η αξία του συμβολαίου τη χρονική στιγμή  $N$  είναι ίση με

$$H_N = \max\{X_N^1, \dots, X_N^m\}$$

Αν ο αγοραστής δεν επιλέξει το μέγιστο τότε ο πωλητής μπορεί να καταναλώσει τη διαφορά και να χρησιμοποιήσει τα υπόλοιπα για κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου.

Γνωρίζοντας την αξία του συμβολαίου τη χρονική στιγμή  $n = N$  υπολογίζουμε τις αξίες στους χρόνους  $n = 0, \dots, N - 1$  με τον αναδρομικό τύπο

$$H_n = \frac{1}{1+r} (qH_{n+1}^u + (1-q)H_{n+1}^d)$$

□

## Γενικά Σχόλια

Για την τιμολόγηση συμβολαίων χρησιμοποιήσαμε το διωνυμικό μοντέλο καθώς και το μοντέλο Black-Scholes. Σε αυτά ουσιαστικά υποθέσαμε ότι τα παρελκόμενα έξοδα κατασκευής αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου είναι μηδενικά, όπως π.χ. τα κόστη συναλλαγής. Αν δεν είναι μηδενικά θα πρέπει να υπολογισθούν όλα τα παρελκόμενα έξοδα και να προστεθούν στην αρχική αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου. Να σημειώσουμε ότι πρακτική αξία έχει το διωνυμικό μοντέλο καθώς μπορεί όντως κάποιος να αναδιαμορφώνει το χαρτοφυλάκιο σε διακριτό χρόνο (π.χ. κάθε εβδομάδα) ενώ το μοντέλο Black-Scholes έχει **μόνο θεωρητική αξία** καθώς δεν είναι πρακτικά δυνατό κάποιος να αναδιαμορφώνει το χαρτοφυλάκιο σε χρόνο συνεχής. Επίσης, υποθέσαμε ότι ο κατασκευαστής ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου έχει τη δυνατότητα να δανείζεται όσες μετοχές ή χρήματα θέλει ανά πάσα στιγμή. Μια χρήσιμη πληροφορία που έρχεται από την θεωρητική τιμολόγηση μέσω του μοντέλου Black-Scholes είναι ότι η

αξία του χαρτοφυλακίου αυξάνεται όσο αυξάνεται η μεταβλητότητα του υποκείμενου αγαθού όπως επίσης και ο χρόνος λήξης του συμβολαίου. Η συσχέτιση αυτή θα πρέπει να ληφθεί υπόψη στην περίπτωση που κάποιος θέλει να τιμολογήσει με διαφορετικό τρόπο ένα συμβόλαιο.

Οι αξίες των συμβολαίων τα οποία είναι διαπραγματεύσιμα στην χρηματιστηριακή αγορά παραγώγων, δηλαδή των call και put, προκύπτουν σύμφωνα με τη προσφορά και τη ζήτηση, ακριβώς όπως και οι τιμές των μετοχών σε αντίθεση με τα εξωχρηματιστηριακά συμβόλαια. Ο πωλητής ενός εξωχρηματιστηριακού συμβολαίου έχει ως στόχο να δώσει μια προσφορά για την τιμή της πώλησης η οποία να τον καλύπτει με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο. Για παράδειγμα, υποθέτοντας ότι τα παρελκόμενα έξοδα είναι μηδενικά και ότι έχει τη δυνατότητα να δανείζεται όσες μετοχές ή χρήματα θέλει ανά πάσα στιγμή, μπορεί να πουλήσει το συγκεκριμένο συμβόλαιο στην αρχική τιμή του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου. Το ρίσκο που αναλαμβάνει σε μια τέτοια περίπτωση είναι η εκτίμηση των μελλοντικών

ρυθμών ανόδου και καθόδου του υποκείμενου αγαθού ενώ ο αγοραστής μεταθέτει αυτό το ρίσκο στον πωλητή και ουσιαστικά αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο δεν κατασκευάζει μόνος ένα τέτοιο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο.

Τι γίνεται στη περίπτωση που δεν μπορεί κάποιος να δανείζεται όσες μετοχές χρειάζεται ανά πάσα στιγμή; Μπορούμε να δώσουμε μια πρώτη απλή απάντηση σε αυτό το ερώτημα ως εξής:

Ας υποθέσουμε ότι το συμβόλαιο έχει γενικότερα  $d$  το πλήθος υποκείμενα αγαθά και ας υποθέσουμε ότι τα παρελκόμενα έξοδα είναι μηδενικά ή θα υπολογισθούν και θα προστεθούν στο τέλος στην αξία του συμβολαίου. Ο πωλητής θέλει να κατασκευάσει ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο και για ευκολία θα εργαστούμε σε μια περίοδο. Βεβαίως θα πρέπει να γνωρίζουμε τον τύπο της απολαβής, π.χ. για ένα συγκεκριμένο συμβόλαιο με δυο υποκείμενα αγαθά, ο τύπος της απολαβής μπορεί να είναι ο  $X = \max\{S - V, 0\}$  όπου  $S, V$  οι αξίες των αγαθών την χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει.

Τότε ο πωλητής θα κατασκευάσει στο χρόνο μηδέν ένα χαρτοφυλάκιο ως εξής:

$$V_0 = a_1 S_1 + a_2 S_2 + \cdots + a_d S_d + b$$

όπου  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}_+$  και  $b \in \mathbb{R}$ , δηλαδή υποθέτουμε ότι δεν μπορεί να δανείζεται μετοχές αλλά μπορεί να δανείζεται χρήματα. Εδώ  $a_i$  είναι το πλήθος των μετοχών της μετοχής  $S_i$  και  $b$  το ποσό σε τράπεζα. Το μαθηματικό πρόβλημα είναι: για ποια  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}_+$  και  $b \in \mathbb{R}$  το ποσό  $V_0$  είναι το ελάχιστο δυνατό για την κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου με τον παραπάνω τρόπο, δηλαδή τέτοιο ώστε  $V_T \geq X$  όπου  $X$  η απολαβή του συμβολαίου; Το πρόβλημα αυτό προφανώς έχει πάντοτε λύση. Όταν ο πωλητής υπολογίσει την αξία αυτή τότε μπορεί να προσθέσει και τα παρελκόμενα έξοδα, να το πουλήσει στη τιμή που θα προκύψει και στη συνέχεια (αν θέλει) να κατασκευάσει και το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο. Ενδεχομένως, να μπορεί κάποιος να κατασκευάσει αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο με μικρότερη αρχική αξία προσθέτοντας όμως ακόμη κάποιες παραμέτρους (π.χ. συνδιακύμαν-

ση μετοχών κ.α.)

Ας δούμε όμως και έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο τιμολόγησης οποίος δεν στηρίζεται σε κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου και επομένως δεν προβληματίζουν τα κόστη συναλλαγής, το αν μπορεί να δανεισθεί χρήματα ή μετοχές ανά πάσα στιγμή κ.τ.λ. Ο πωλητής μπορεί να σκεφτεί ως εξής: με ποιο ποσό κατά πάσα πιθανότητα θα είμαι καλυμμένος, ειδικά αν πρόκειται για συμβόλαιο του οποίου η απολαβή δεν είναι άνω φραγμένη; Ας δούμε μια πιθανή απάντηση σε αυτό μέσω του επόμενου παραδείγματος.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 36** Έστω ότι έχουμε δυο υποκείμενα αγαθά με αξίες  $S, V$  και έστω ότι θέλουμε να αποτιμήσουμε ένα συμβόλαιο με απολαβή  $X = \max\{S - V, 0\}$  κατά το χρόνο λήξης  $T$  με  $S_0 = V_0 = 1$ . Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το διωνυμικό μοντέλο για να υπολογίσουμε πιθανές αξίες οι οποίες θα ήταν αποδεκτές από τον πωλητή. Υποθέτουμε για ευκολία ότι εφαρμόζουμε το διωνυμικό μοντέλο για μια περίοδο και ότι έχουμε υπολογίσει τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου της κάθε μετοχής, δηλαδή  $u_1 = 2, d_1 = 1/2$  και  $u_2 = 3/2, d_2 = 2/3$  καθώς και την πιθανότητα ανόδου

της κάθε μετοχής, δηλαδή  $p_1 = 2/3$  και  $p_2 = 1/2$ . Θα υπολογίσουμε τις απολαβές μετά από μια περίοδο καθώς και την πιθανότητα να έχει αυτή την απολαβή το συμβόλαιο. Έτσι θα έχουμε

$$\begin{aligned} P^{u_1u_2} &= \max\{S^{u_1} - V^{u_2}, 0\} = \{2 - 3/2, 0\} = 1/2, & w^{u_1u_2} &= p_1p_2 = 1/3 \\ P^{u_1d_2} &= \max\{S^{u_1} - V^{d_2}, 0\} = \{2 - 2/3, 0\} = 4/3, & w^{u_1d_2} &= p_1(1 - p_2) = 1/3 \\ P^{d_1u_2} &= \max\{S^{d_1} - V^{u_2}, 0\} = \{1/2 - 3/2, 0\} = 0, & w^{d_1u_2} &= (1 - p_1)p_2 = 1/6 \\ P^{d_1d_2} &= \max\{S^{d_1} - V^{d_2}, 0\} = \{1/2 - 2/3, 0\} = 0, & w^{d_1d_2} &= (1 - p_1)(1 - p_2) = 1/6 \end{aligned}$$

όπου  $P$  είναι οι πιθανές απολαβές και  $w$  οι αντίστοιχες πιθανότητες τους. Τοποθετούμε τις απολαβές μαζί με τις αντίστοιχες πιθανότητες κατά σειρά, ως εξής

$$\begin{array}{cc} 4/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/6 \\ 0 & 1/6 \end{array}$$

Διαλέγοντας ως τιμή πώλησης την  $1/2$  η πιθανότητα η απολαβή να είναι μεγαλύτερη αυτής είναι ίση με  $1 - 1/3 - 1/6 - 1/6$ . Προφανώς, για να έχουμε καλύτερη εκτίμηση θα πρέπει να διακριτοποιήσουμε σε περισσότερες χρονικές υποπεριόδους το χρονικό διάστημα  $[0, T]$ .

*Η τιμολόγηση μέσω αντισταθμιστικών χαρτοφυλακίων υποθέτει ότι δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγής (που υπάρχουν!) ότι δεν υπάρχουν μερίσματα (που υπάρχουν!) ότι μπορούμε να δανειζόμαστε όσα χρήματα ή μετοχές χρειαζόμαστε ανά πάσα στιγμή (δεν είναι τόσο προφανές αυτό) κ.τ.λ. Αντίθετα, η τιμολόγηση με το παραπάνω σκεπτικό δεν υποθέτει τίποτε από αυτά.*

*Βάλτε τον εαυτό σας στη θέση του πωλητή ενός συμβολαίου. Αν αυτό είναι κάποιο συμβόλαιο το οποίο είναι διαπραγματεύσιμο στο χρηματιστήριο παραγώγων και θέλετε σήμερα να το πουλήσετε τότε θα το πουλήσετε στη τρέχουσα τιμή η οποία προκύπτει σύμφωνα με την προσφορά και τη ζήτηση και όχι μέσω κάποιας μαθηματικής μεθόδου. Αν το συμβόλαιο θέλετε να το πουλήσετε στην εξωχρηματιστηριακή αγορά θα πρέπει να δώσετε μια προσφορά στους αγοραστές. Η προσφορά που θα δώσετε σε τι θα προτιμούσατε να στηρίζεται; Στη συνέχεια βάλτε τον εαυτό σας στη θέση του αγοραστή ενός εξωχρηματιστηριακού συμβολαίου. Σε ποια τιμή θα αγοράζατε; Θα λάβετε υπόψη σας την αξιοπι-*

*στία του πωλητή;*



## 6 Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης ενός χαρτοφυλακίου στην περίπτωση που αυτό αποτελείται από δυο και περισσότερες μετοχές. Για να αναπτύξουμε την κατάλληλη θεωρία θα παρουσιάσουμε αρχικά τα βασικά μαθηματικά εργαλεία που προέρχονται κυρίως από τη θεωρία πιθανοτήτων.

Ξεκινάμε με την έννοια της συνδιακύμανσης δυο τυχαίων μεταβλητών  $X, Y$  η οποία περιγράφει τον τρόπο που αλλάζει η μια τυχαία μεταβλητή σε σχέση με την άλλη. Ορίζεται ως εξής,

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τη συνδιακύμανση.

- $\text{Cov}(X, X) = \text{Var}(X)$ ,
- $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ ,

- $\text{Cov}(X + Y, Z) = \text{Cov}(X, Z) + \text{Cov}(Y, Z),$
- $\text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^m Y_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_i),$
- $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(X_i, X_j).$

Έστω ότι μπορούμε να επενδύσουμε το ποσό  $V$  σε  $n$  το πλήθος μετοχές. Δηλαδή, θέλουμε να αγοράσουμε  $k_i$  μετοχές από την  $S_i$  όπου  $i = 1, \dots, n$ . Συμβολίζουμε με

$$w_i = \frac{k_i S_i^0}{\sum_{j=1}^n k_j S_j^0}$$

όπου ισχύει προφανώς ότι

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

δηλαδή θα ξοδέψουμε το ποσό  $w_i V$  για αγορά  $k_i$  μετοχών της  $S_i$ . Ψάχνουμε να βρούμε τα  $w_i$  τέτοια ώστε

το κέρδος μας στο χρόνο  $T$  να είναι το μέγιστο με το ελάχιστο δυνατόν ρίσκο.

Η απόδοση της κάθε μετοχής  $\mu_i$  στη χρονική περίοδο  $[0, T]$  είναι μια τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε

$$\frac{S_i^T}{S_i^0} = 1 + \mu_i$$

όπου  $S_i^0$  και  $S_i^T$  είναι η τιμή της μετοχής στο χρόνο 0 και στο χρόνο  $T$  αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε από ιστορικά δεδομένα τη μέση τιμή  $m_i$  της απόδοσης  $\mu_i$ , τη διακύμανση  $\sigma_i$  της απόδοσης καθώς και την συνδιακύμανση  $\sigma_{ij}$  των αποδόσεων των μετοχών  $S_i$  και  $S_j$ . Θα υποθέσουμε ότι οι ίδιες τιμές θα ισχύουν και στη χρονική περίοδο  $[0, T]$ . Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκιο τη χρονική στιγμή 0 έτσι ώστε τη χρονική στιγμή  $T$  να έχει τη μέγιστη απόδοση κατά μέση τιμή  $m$  και τη μικρότερη δυνατή διακύμανση.

Η απόδοση  $\mu$  του χαρτοφυλακίου συνολικά θα είναι τ.ω.

$$\frac{V^T}{V} = 1 + \mu$$

οπότε

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n k_i (S_i^T - S_i^0)}{V} = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i k_i S_i^0}{V} = \sum_{i=1}^n \mu_i w_i$$

Επομένως, η μέση τιμή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου θα

$$m = \mathbb{E}(\mu) = \sum_{i=1}^n w_i \mathbb{E}(\mu_i)$$

Η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με

$$\sigma = \text{Var}(\mu) = \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n w_i \mu_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}$$

Αν θέσουμε  $\mathbf{w}^t = (w_1, \dots, w_n)$ ,  $\mathbf{\Sigma} = [\sigma_{ij}]$  και  $\mathbf{m}^t = (m_1, \dots, m_n)$  τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^t \mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t \mathbf{m} &= m, \\ \mathbf{w}^t \mathbf{\Sigma} \mathbf{w} &= \sigma \end{aligned}$$

όπου  $\mathbf{1}^t = (1, \dots, 1)$  και  $\mathbf{w}^t$  είναι ο ανάστροφος του  $\mathbf{w}$ . Σημειώστε ότι, αφού η διακύμανση του χαρτοφυλακίου είναι πάντοτε θετικός αριθμός τότε, ο πίνακας συνδιακυμάνσεων  $\Sigma$  είναι θετικά ορισμένος.

Το πρόβλημά μας έχει αναχθεί σε ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης με προϋποθέσεις. Θεωρούμε ως  $m_0$  μια απαιτούμενη μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου μας και θέλουμε να υπολογίσουμε τα  $w_i$  έτσι ώστε να έχουμε την ελάχιστη δυνατή διακύμανση του χαρτοφυλακίου, δηλαδή επίλυση του παρακάτω προβλήματος

$$\min \mathbf{w}^t \Sigma \mathbf{w}$$

κάτω από τις προϋποθέσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{1}^t \mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t \mathbf{m} &= m_0 \end{aligned} \tag{3}$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange λαμβάνουμε τις παρακάτω εξισώσεις,

$$\begin{aligned} 2\Sigma \mathbf{w} &= \lambda_1 \mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{m}, \\ \mathbf{1}^t \mathbf{w} &= 1, \\ \mathbf{w}^t \mathbf{m} &= m_0 \end{aligned}$$

Αν ο πίνακας  $\Sigma$  είναι αντιστρέψιμος τότε λύνουμε ως προς  $\mathbf{w}$  την πρώτη εξίσωση και έχουμε

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\lambda_1\mathbf{1} + \lambda_2\mathbf{m}) = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}] \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Οι εξισώσεις  $\mathbf{1}^t\mathbf{w} = 1$  και  $\mathbf{w}^t\mathbf{m} = m_0$  γράφονται και ως

$$[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t\mathbf{w} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζοντας την 4 με τον  $[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t$  προκύπτει ότι

$$[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t\mathbf{w} = \frac{1}{2}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t\Sigma^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}] \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Θέτουμε  $\mathbf{A} = [\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]^t\Sigma^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}]$  και εύκολα αποδεικνύουμε ότι είναι θετικά ορισμένος. Πράγματι,

$$[y_1 \quad y_2]\mathbf{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = [y_1\mathbf{m} + y_2\mathbf{1}]^t\Sigma^{-1}[y_1\mathbf{m} + y_2\mathbf{1}]^t$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο λόγω του ότι ο πίνακας  $\Sigma^{-1}$  είναι θετικά ορισμένος. Σημειώστε ότι ο  $\Sigma$  είναι

αντιστρέψιμος αν  $\mathbf{w}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} = \sigma > 0$  διότι από το θεώρημα ;; προκύπτει ότι όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα  $\boldsymbol{\Sigma}$  είναι αυστηρά θετικές και από τις ανάλογες ιδιότητες των ιδιοτιμών (δες ;;) προκύπτει ότι είναι αντιστρέψιμος. Επίσης, ο αντίστροφος του θα έχει ως ιδιοτιμές τις  $\frac{1}{\lambda_i}$  οι οποίες θα είναι όλες θετικές και επομένως πάλι από το θεώρημα (από το αντίστροφο του τώρα) ;; προκύπτει ότι είναι και αυτός θετικά ορισμένος.

Αντικαθιστώντας τον πίνακα  $\mathbf{A}$  προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} \mathbf{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

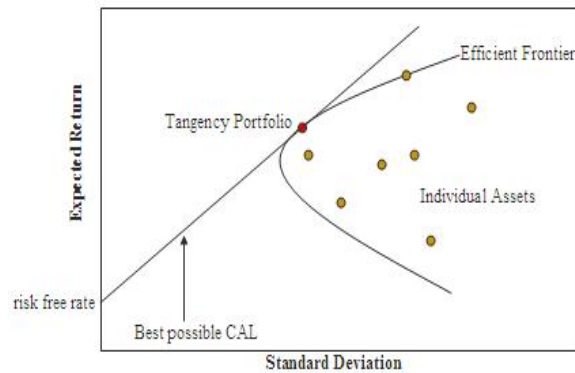
Αντιστρέφοντας τον  $\mathbf{A}$  υπολογίζουμε το διάνυσμα  $\mathbf{w}$  και έχουμε

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1} [\mathbf{m} \quad \mathbf{1}] \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} m_0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την διακύμανση έχοντας το διάνυσμα  $\mathbf{w}$ . Έχουμε ότι

$$\sigma^2 = \mathbf{w}^t \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} = \frac{A_{11} - 2A_{12}m_0 + A_{14}m_0^2}{|A|}$$

όπου  $\mathbf{A}$  ο  $2 \times 2$  που ορίσαμε παραπάνω. Λύνοντας ως προς  $m_0$  παίρνουμε δυο λύσεις. Το γράφημα του  $m_0$  συναρτήσει της  $\sigma^2$  είναι στο σχήμα 21.



Σχήμα 21: Μπορούμε να σχεδιάσουμε την μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου συναρτήσει της διακύμανσης του οπότε θα έχουμε το παραπάνω σχήμα. Τα χαρτοφυλάκια τα οποία βρίσκονται στο πάνω μέρος της καμπύλης είναι χαρτοφυλάκια ελάχιστης διακύμανσης και ονομάζονται αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια ενώ η καμπύλη ονομάζεται αποτελεσματική μεθόριος.

Επιπλέον μπορεί να αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα, δείτε [;] το οποίο αναφέρεται σε χαρτοφυλάκια με τον ίδιο πίνακα συνδιακυμάνσεων και τις ίδιες μέσες τιμές των αποδόσεων των μετοχών.

### ΘΕΩΡΗΜΑ 37 (θεώρημα διαχωρισμού δυο κεφαλαίων)

Έστω  $x_1$  και  $x_2$  δυο χαρτοφυλάκια ελάχιστης διακύμανσης με μέσες αποδόσεις  $m_1$  και  $m_2$  αντίστοιχα και τέτοιες ώστε  $m_1 \neq m_2$ . Τότε

- (i) κάθε χαρτοφυλάκιο  $x_3$  ελάχιστης διακύμανσης θα είναι γραμμικός συνδυασμός των χαρτοφυλακίων  $x_1$  και  $x_2$ .
- (ii) κάθε χαρτοφυλάκιο  $x_3$  το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός των  $x_1$  και  $x_2$ , δηλαδή  $x_3 = ax_1 + (1-a)x_2$ , είναι χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης.
- (iii) κάθε χαρτοφυλάκιο  $x_3$  τέτοιο ώστε  $x_3 = ax_1 + (1-a)x_2$  όπου  $a \in [0, 1]$  και  $x_1, x_2$  αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια είναι επίσης αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θα χρησιμοποιήσουμε την μορφή της λύσης του προβλήματος βελτιστοποίησης.

- (i) Έστω ότι  $m_3$  είναι η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου  $x_3$ . Διαλέγουμε κάποιο  $a \in \mathbb{R}$  τέτοιο ώστε

$$m_3 = am_1 + (1 - a)m_2$$

Θα αποδείξουμε ότι  $x_3 = ax_1 + (1-a)x_2$ . Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \Sigma^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}] \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} m_3 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \Sigma^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}] \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} am_1 + (1-a)m_2 \\ a + (1-a) \end{pmatrix} \\
 &= a\Sigma^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}] \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} m_1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-a)\Sigma^{-1}[\mathbf{m} \quad \mathbf{1}] \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} m_2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= ax_1 + (1-a)x_2
 \end{aligned}$$

(ii) Η απόδειξη γίνεται με την αντίστροφη λογική όπως στο πρώτο μέρος.

(iii) Παρόμοια με το (ii) με την επιπλέον παρατήρηση ότι  $m_1 \leq m_3 \leq m_2$  όταν  $m_1 \leq m_2$  και  $a \in [0, 1]$ .

□

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 38** Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα βελτιστοποίησης ορισμένα από τα  $w_i$  μπορεί να προκύψουν αρνητικά. Αυτό σημαίνει ότι ο επενδυτής θα δανεισθεί πλήθος μετοχών της  $i$  μετοχής, θα τις πουλήσει στην

σημερινή τιμή της αγοράς αλλά θα είναι υποχρεωμένος να τις επιστρέψει στο μέλλον στον δανειστή του (*short selling*). Η κίνηση αυτή μπορεί να έχει απεριόριστη ζημιά στον επενδυτή, αφού η αξία της μετοχής μπορεί (θεωρητικά) να αυξηθεί απεριόριστα στο μέλλον ενώ ο επενδυτής θα είναι υποχρεωμένος να αγοράσει ακριβά τις μετοχές τις οποίες δανείστηκε και πρέπει να επιστρέψει. Προκειμένου η πιθανή ζημιά του επενδυτή να είναι άνω φραγμένη θα πρέπει να αγοράσει και ένα συμβόλαιο αγοράς (*call option*) ανά μετοχή προκειμένου να εξασφαλιστεί. Τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης έχουν κυρίως τον ρόλο της εξασφάλισης του επενδυτή. Παρόλα αυτά όμως μπορεί κάποιος να τα χρησιμοποιήσει για λόγους κερδοσκοπίας ακριβώς όπως τις μετοχές, ειδικά όταν αυτά τα συμβόλαια είναι διαπραγματεύσιμα στην χρηματιστηριακή αγορά. Για παράδειγμα μπορεί κάποιος να αγοράσει ένα συμβόλαιο αγοράς ή πώλησης με την προσδοκία ότι θα ανέβει η αξία του συμβολαίου και θα το πουλήσει ακριβότερα, πριν την λήξη του προφανώς. □

Στην περίπτωση που επιπλέον απαιτήσουμε τα  $w_i \geq 0$  τότε αυτό πρέπει να συμπεριληφθεί στις προϋποθέσεις **3** (δείτε [;]).

Στην συνέχεια θα δώσουμε τρεις οπτικές βελτιστοποιήσεις χαρτοφυλακίου με την επιπλέον προϋπόθεση ότι  $w_i \geq 0$  θεωρώντας χαρτοφυλάκια με μικρό πλήθος μετοχών έτσι ώστε οι υπολογισμοί να είναι εφικτοί.

#### 6.0.1 Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου ελάχιστης διακύμανσης με τρεις μετοχές

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διακύμανσης το οποίο να αποτελείται από τρεις μετοχές. Η διακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι ως εξής

$$\begin{aligned}\sigma &= f(w_1, w_2, w_3) \\ &= w_1^2\sigma_1 + w_2^2\sigma_2 + w_3^2\sigma_3 + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23}\end{aligned}$$

όπου  $\sigma_i = \sigma_{ii}$ . Η μέση τιμή της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι ίση με

$$m_1w_1 + m_2w_2 + m_3w_3 = m_0 \quad (6)$$

Δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τίποτε όταν ισχύει  $m_1 = m_2 = m_3$  οπότε θα υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι  $m_1 \neq m_2$ .

Προφανώς θα πρέπει να ισχύει ότι

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1 \quad (7)$$

Από τις 6 και 7 προκύπτει ότι

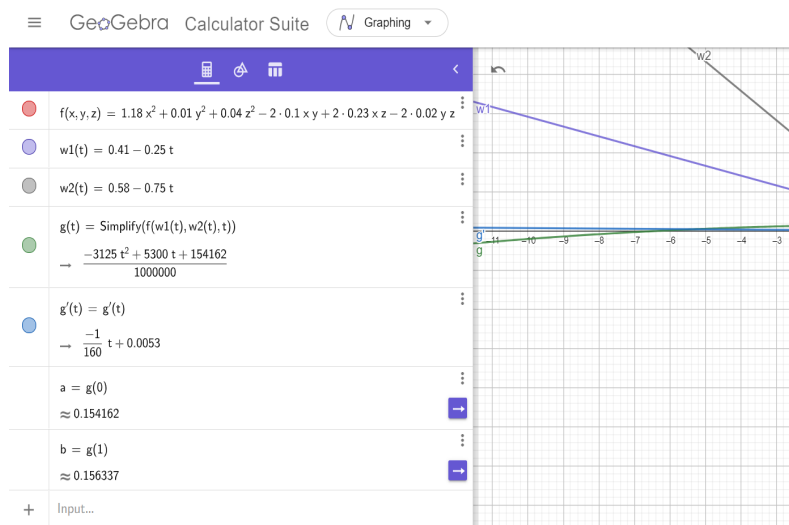
$$w_1 = \frac{t(m_2 - m_3) + m_0 - m_2}{m_1 - m_2}$$
$$w_2 = \frac{t(m_3 - m_1) + m_1 - m_0}{m_1 - m_2}$$

όπου  $t = w_3$ . Στην συνέχεια αντικαθιστούμε τα  $w_1, w_2$  στην  $f(w_1, w_2, w_3)$  οπότε προκύπτει συνάρτηση μιας μεταβλητής, της μεταβλητής  $t$ . Δηλαδή θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση ως προς  $t$  σε όλο το  $\mathbb{R}$  αν δεν έχουμε κάποια επιπλέον απαίτηση για τα  $w_1, w_2, w_3$ .

Αν επιπλέον θέλουμε τα  $w_1, w_2, w_3$  να είναι θετικά τότε θα πρέπει να απαιτήσουμε το  $t$  να κινείται στο κατάλληλο υποσύνολο του  $[0, 1]$  στο οποίο τα  $w_1, w_2$

να είναι θετικά και άρα να ελαχιστοποιήσουμε την διακύμανση ορισμένη στο διάστημα αυτό. Αν  $m_1 - m_2 > 0$  τότε η απαίτηση  $w_1 \geq 0$  σημαίνει ότι  $t(m_2 - m_3) + m_0 - m_2 \geq 0$  και η απαίτηση  $w_2 \geq 0$  σημαίνει ότι  $t(m_3 - m_1) + m_1 - m_0 \geq 0$ . Διαλέγουμε το διάστημα στο οποίο θα κινείται το  $t$  έτσι ώστε να είναι υποσύνολο του  $[0, 1]$  και ταυτόχρονα να ικανοποιούνται και οι δυο απαιτήσεις. Αν αυτό δεν γίνεται τότε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης δεν έχει λύση. Παρόμοια και στην περίπτωση που  $m_1 - m_2 < 0$ .

Στο επόμενο σχήμα δείτε πως μπορούμε να υπολογίσουμε μέσω του Geogebra την συνάρτηση  $g(t) = f(w_1, w_2, t)$  θέτοντας  $w_3 = t$  και αντικαθιστώντας τα  $w_1, w_2$ .



Σχήμα 22

### 6.0.2 Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου μέγιστης απόδοσης με δυο μετοχές

Μια άλλη οπτική βελτιστοποίησης είναι να βρεθεί το διάνυσμα  $w = (w_1, w_2)$  έτσι ώστε η διακύμανση του χαρτοφυλακίου να είναι ίση με ένα δοσμένο αριθμό  $\sigma_0$  και να μεγιστοποιηθεί η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου. Δηλαδή το μαθηματικό πρόβλημα είναι ως εξής:

$$\max_{(w_1, w_2)} (w_1 m_1 + w_2 m_2)$$

δεδομένου

$$\sigma = \sigma_1 w_1^2 + \sigma_2 w_2^2 + 2\sigma_{12} w_1 w_2 = \sigma_0$$

$$w_1 + w_2 = 1$$

$$w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0$$

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα μπορούμε να θέσουμε  $w_2 = t$  και άρα  $w_1 = 1 - t$  οπότε αντικαθιστούμε στην ισότητα της διακύμανσης. Τελικά θα έχουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\max_{t \in [0, 1]} (m_1(1 - t) + m_2 t)$$

$$\sigma_1(1 - t)^2 + \sigma_2 t^2 + 2\sigma_{12}(1 - t)t - \sigma_0 = 0$$

Η δεύτερη ισότητα θα έχει πιθανόν δυο λύσεις, έστω  $t_1, t_2$ . Θα διαλέξουμε εκείνη η οποία ανήκει στο διάστημα  $[0, 1]$  (αν υπάρχει) και ταυτόχρονα μεγιστοποιεί την ζητούμενη ποσότητα.

### 6.0.3 Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου μέγιστης διαφοράς απόδοσης και διακύμανσης

Μια ακόμη οπτική είναι να μεγιστοποιήσουμε την διαφορά της μέσης τιμής και της διακύμανσης. Δηλαδή

$$\max_{(w_1, w_2)} (m_1 w_1 + m_2 w_2 - \lambda(\sigma_1 w_1^2 + \sigma_2 w_2^2 + 2\sigma_{12} w_1 w_2))$$

δεδομένου  $w_1 + w_2 = 1$   
 $w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0$

για κάποιο δοσμένο  $\lambda > 0$ . Για να επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό μπορούμε να θέσουμε  $w_2 = t$  και άρα  $w_1 = 1 - t$ . Οπότε το αρχικό μας πρόβλημα ανάγεται στο

$$\max_{t \in [0,1]} (m_1(1 - t) + m_2 t - \lambda(\sigma_1(1 - t)^2 + \sigma_2 t^2 + 2\sigma_{12}(1 - t)t))$$

### 6.0.4 Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου αποτελούμενου από μετοχές και χωρίς ρίσκο επένδυση

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις μπορούμε να κατασκευάσουμε κατάλληλα χαρτοφυλάκιο το οποίο να αποτελείται από μετοχές αλλά και από μια επένδυση

χωρίς ρίσκο με γνωστή απόδοση  $\hat{m}$ . Προφανώς από μαθηματικής άποψης δεν θα αλλάξει τίποτε αφού μπορούμε να δούμε την χωρίς ρίσκο επένδυση ως μια επένδυση η οποία είναι τέτοια ώστε η διακύμανση της θα είναι ίση με το μηδέν καθώς και η συνδιακύμανση με οποιαδήποτε άλλη μετοχή θα είναι μηδέν.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 39** Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις μπορούμε να βελτιστοποιήσουμε χαρτοφυλάκια αποτελούμενα από περισσότερες μετοχές αλλά τότε θα πρέπει να στραφούμε σε κατάλληλο μαθηματικό λογισμικό· ειδικά στην περίπτωση όπου απαιτούμε τα βάρη  $w_1, \dots, w_n$  να είναι θετικά. Παρατηρήστε ότι τα χαρτοφυλάκια ελάχιστης διακύμανσης με την επιπλέον προϋπόθεση  $w_i \geq 0$  δεν είναι, εν γένει, αποτελεσματικά χαρτοφυλάκια.

Στο βιβλίο [;] μπορεί κανείς να δει περισσότερα για τη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίου σε συνεχή χρόνο.

#### 6.0.5 Κίνδυνος Χρεοκοπίας

Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο του οποίου έχουμε υπολογίσει την μέση τιμή και την δια-

κύμανση της απόδοσης. Τα στοιχεία αυτά αναφέρονται σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο, π.χ. ανά ημέρα, ανά μήνα κ.τ.λ.

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι: σε μια ημέρα, ποια είναι η μέγιστη ζημιά (σε Ευρώ) με πιθανότητα  $a$ ;

Αν συμβολίσουμε με  $V_0$  την σημερινή αξία του χαρτοφυλακίου και με  $V_t$  την αυριανή τότε το παραπάνω ερώτημα μετατρέπεται σε μαθηματικό πρόβλημα ως εξής: ποιο είναι το  $x > 0$  (ποσό σε Ευρώ) έτσι ώστε

$$P(V_t - V_0 \leq -x) = 1 - a$$

Χρησιμοποιώντας την απόδοση του χαρτοφυλακίου, η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = 1 - a$$

όπου  $\mu_t = \frac{V_t - V_0}{V_0}$  είναι η ημερήσια απόδοση του χαρτοφυλακίου.

Γνωρίζουμε την μέση τιμή  $m_0$  και την διακύμανση  $\sigma^2$  της απόδοσης και υποθέτουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $m_0$  και διακύμανση

$\sigma^2$ . Με την υπόθεση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε το κατάλληλο  $x > 0$  το οποίο συνήθως συμβολίζεται με  $VaR_a(t)$  όπου  $t$  είναι η χρονική περίοδος που μας ενδιαφέρει, π.χ. ανά ημέρα.

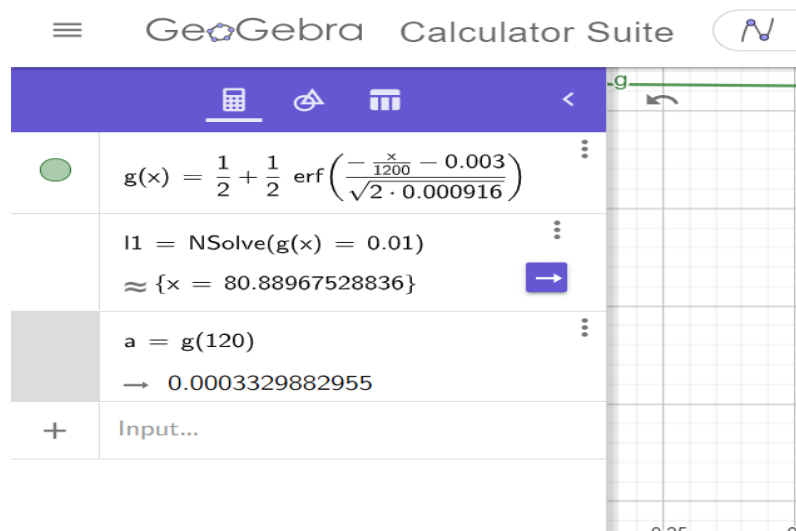
Εφόσον η απόδοση ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $m_0$  και διακύμανση  $\sigma^2$  τότε

$$P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{V_0}} e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma^2}} dt \quad (8)$$

Μπορούμε να συσχετίσουμε τα παραπάνω με την συνάρτηση σφάλματος  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  μέσω της σχέσης

$$P(Y \leq x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{x - m_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

όπου η  $Y$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $m_0$  και διακύμανση  $\sigma^2$ .



Σχήμα 23: Θέτουμε την συνάρτηση  $g(x)$  όπως περιγράψαμε. Για την ερώτηση ποια είναι η ελάχιστη ζημιά με πιθανότητα 0.01 δίνουμε την εντολή  $NSolve(g(x) = 0.01)$  ενώ για την ερώτηση ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε ζημιά τουλάχιστον 120 Ευρώ γράφουμε  $g(120)$ .

Θα αποδείξουμε την σχέση αυτή με τον εξής τρόπο

$$\begin{aligned}
 P(Y \leq x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m_0)^2}{2\sigma^2}} dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} \sigma\sqrt{2} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-y^2} dy + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-m_0}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-y^2} dy \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{x - m_0}{\sigma\sqrt{2}} \right)
 \end{aligned}$$

Ξαναγυρνώντας στην 8 έχουμε

$$g(x) = P\left(\frac{V_t - V_0}{V_0} \leq -\frac{x}{V_0}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{-\frac{x}{V_0} - m_0}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

Στο σχήμα ;; φαίνεται πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Geogebra για τους παραπάνω υπολογισμούς.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή της ζημιάς δεδομένου ότι η ζημιά θα ξεπεράσει ένα δεδομένο ποσό  $p < 0$ . Θα ισχύει

$$\mathbb{E}(V_t - V_0 | \{V_t - V_0 < p\}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi V^2 \sigma^2}} \int_{-\infty}^p x e^{-\frac{(x-m_0V)^2}{2V^2\sigma^2}} dx}{\frac{1}{\sqrt{2\pi V^2 \sigma^2}} \int_{-\infty}^p e^{-\frac{(x-m_0V)^2}{2V^2\sigma^2}} dx}$$

## 7 Γενικές Ασκήσεις

### Πρώτο Θέμα

Έστω ότι έχουμε τις τιμές μιας μετοχής ανά δεκαπενθήμερο για τον τελευταίο χρόνο. Έστω ότι αυτές οι

τιμές είναι

$$\begin{aligned} S_{24} = 0.99, S_{23} = 1.0, S_{22} = 0.98, S_{21} = 0.97, S_{20} = 0.96, S_{19} = 0.97, S_{18} = 0.98, \\ S_{17} = 0.99, S_{16} = 1.0, S_{15} = 0.99, S_{14} = 0.98, S_{13} = 0.99, \\ S_{12} = 0.98, S_{11} = 1.0, S_{10} = 1.01, S_9 = 1.02, \\ S_8 = 1.03, S_7 = 1.04, S_6 = 1.03, S_5 = 1.02, S_4 = 1.01, S_3 = 1.0, \\ S_2 = 0.99, S_1 = 1.0, S_0 = 1.0 \end{aligned}$$

όπου  $S_{24}$  είναι η τιμή της μετοχής πριν ένα έτος, οι υπόλοιπες είναι ανά 15 ημέρες και  $S_0$  η σημερινή τιμή της μετοχής. Υπολογίστε τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου  $u, d$  αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι η τράπεζα εφαρμόζει ένα από τα τρία επιτόκια  $\tau_1 = 0.04, \tau_2 = 0.01, \tau_3 = -0.05$  ανά δεκαπενθήμερο. Εργαζόμενοι σε ένα δέντρο 2 περιόδων κατασκευάστε χαρτοφυλάκιο με τελικές αξίες  $A_2^{uu} = 4, A_2^{ud} = 5, A_2^{du} = 6, A_2^{dd} = 7$  μετά από 30 ημέρες από σήμερα. Εργαστείτε και με τα τρία επιτόκια.

## Δεύτερο Θέμα

Έστω ότι έχουμε τις τιμές μιας μετοχής του προηγούμενου έτους. Αν μετρήσουμε τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου ανά εξάμηνο, τρίμηνο, μήνα, εβδομάδα, ημέρα, ώρα, λεπτό κ.τ.λ. διαπιστώνουμε ότι αλλάζουν.

Προσπαθήστε να δικαιολογήσετε το γεγονός ότι συγκλίνουν στην μονάδα καθώς η περίοδος μικραίνει. Ο ρυθμός ανόδου συγκλίνει στην μονάδα από πάνω και ο ρυθμός καθόδου συγκλίνει στην μονάδα από κάτω. Για τον λόγο αυτό το γινόμενο  $ud$  συγκλίνει στην μονάδα, εν γένει ταλαντευόμενο γύρω από αυτή. Αρα, αν η περίοδος είναι πολύ μικρή τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι  $ud \simeq 1$ . Παρόλα αυτά, δεν είμαστε σίγουροι για το πόσο μικρή πρέπει να είναι η περίοδος καθότι εξαρτάται από το πόσο έντονα μεταβάλλεται η μετοχή.

### Τρίτο Θέμα

Αναζητήστε στην βιβλιογραφία ή στο διαδίκτυο πληροφορίες που αφορούν αρνητικά επιτόκια κατάθεσης ([negative interest rates](#)). Προσπαθήστε να καταλάβετε τους λόγους για τους οποίους αυτό συμβαίνει. Επίσης, συγκρίνετε τα επιτόκια κατάθεσης και δανεισμού. Διαπιστώστε ότι είναι διαφορετικά μεταξύ τους και προσπαθήστε να δικαιολογήσετε το γεγονός αυτό.

### Τέταρτο Θέμα

Όπως έχουμε αναφέρει, αν οι ρυθμοί ανόδου και καθόδου που έχουμε υπολογίσει μέσω ιστορικών δεδομένων προκύψουν ίδιοι και στο μέλλον τότε η κατασκευή του χαρτοφυλακίου προκαθορισμένης τελικής αξίας θα είναι πετυχημένη. Ενδέχεται όμως από τον χρόνο 0 ως τον ζητούμενο τελικό χρόνο οι ρυθμοί αυτοί να αλλάξουν δραματικά (**Time-Varying Volatility**) με συνέπεια ο αρχικός σχεδιασμός του χαρτοφυλακίου να μην είναι αποδεκτός. Αυτό σημαίνει ότι στην πραγματικότητα έχει αλλάξει το  $q = \frac{1+r-d}{u-d}$ . Σε ένα δέντρο δυο περιόδων εξετάστε το ενδεχόμενο να λάβετε υπόψη τις αλλαγές αυτές με τα νέα δεδομένα και άρα να επικαιροποιήσετε τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου κατά την λήξη της πρώτης περιόδου. Σε μια τέτοια περίπτωση θα αλλάξει το  $q$  και αυτό θα έχει ως συνέπεια την ανάλογη αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου. Παρόμοια, σε ένα δέντρο  $N$  περιόδων, η αντίστοιχη επικαιροποίηση μπορεί να γίνει κατά την λήξη της κάθε περιόδου οπότε, εν γένει, σε κάθε περίοδο θα έχουμε και διαφορετικό  $q$ , δηλαδή μια ακολουθία  $q_1, q_2, \dots, q_{N-1}$ . Διαπιστώστε ότι το πλεονέκτημα της επικαιροποίησης

αυτής είναι ότι οι τελικές αξίες του χαρτοφυλακίου θα είναι πιο κοντά στις απαιτούμενες τελικές αξίες από την περίπτωση που δεν γινόταν επικαιροποίηση. Στην περίπτωση της επικαιροποίησης θα εμφανιστεί το επόμενο μαθηματικό πρόβλημα: Έστω  $A, B$  δεδομένες τελικές αξίες και έστω ότι η αξία του χαρτοφυλακίου τώρα είναι  $V_0$ . Πως πρέπει να αναδιαθρώσω το χαρτοφυλάκιο έτσι ώστε η τελική αξία του να είναι όσο πιο κοντά στις ζητούμενες αξίες  $A$  και  $B$ ; Με άλλα λόγια να υπολογίσω τα κατάλληλα  $a, b$  με  $V_0 = aS_0 + b$  και έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα  $(A - V_1^u) + (B - V_1^d) = (A - auS_0 - b(1 + r)) + (B - adS_0 - b(1 + r)) =: f(a, b)$  όπου  $u, d$  είναι οι επικαιροποιημένοι ρυθμοί ανόδου και καθόδου. Δηλαδή προκύπτει πρόβλημα ελαχιστοποίησης συνάρτησης δυο μεταβλητών (της  $f(a, b)$ ) υπό προϋποθέσεις (την προϋπόθεση  $V_0 = aS_0 + b$ ). Για το σκοπό αυτό δείτε και το εδάφιο «Διαχείριση Χαρτοφυλακίου».

### Πέμπτο Θέμα

Έστω ότι  $d \leq 1 + r \leq u$  και έστω  $A, B$  δοσμένοι αριθ-

μοί. Αποδείξτε ότι το ποσό  $V_0 = \frac{1}{1+r}(qA + (1 - q)B)$  είναι το ελάχιστο δυνατό ποσό με το οποίο μπορεί κανείς να κατασκευάσει χαρτοφυλάκιο με τελικές αξίες τουλάχιστον ίσες με  $A, B$ . Αντίθετα, αν  $1 + r \notin [d, u]$ , με το ποσό  $V_0$  μπορούμε να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκιο το οποίο να καταλήγει σε μεγαλύτερα από τα  $A, B$  ποσά. Στην πραγματική αγορά είναι δυνατό να συμβεί  $1 + r \notin [d, u]$ ; Για να το διαπιστώσετε αυτό δεν έχετε παρά να πάρετε πραγματικά δεδομένα. Για παράδειγμα στην ιστοσελίδα [τιμές μετοχών](#) μπορείτε να βρείτε τις τιμές διάφορων μετοχών, τόσο τις σημερινές όσο και παρελθοντικές (αλλά δυστυχώς όχι τις μελλοντικές!). Κατασκευάζοντας κατάλληλο αρχείο *excel* μπορείτε να υπολογίσετε τους παρελθοντικούς ρυθμούς ανόδου και καθόδου της κάθε μετοχής, ανά μήνα, τρίμηνο, εξάμηνο, έτος κ.τ.λ. Μπορείτε να εντοπίσετε περιπτώσεις όπου  $1 + r \notin [d, u]$ ; Αν εντοπίσετε τέτοια περίπτωση τι μπορείτε να κάνετε; Σε αυτό το σημείο μπορείτε να δείτε το [Arbitrage](#) αλλά και την περιγραφή των [Arbitrageurs](#).

## Έκτο Θέμα

Έστω ένα Ευρωπαϊκό συμβόλαιο αγοράς με τιμή εξάσκησης  $K$  και έστω ότι εργαζόμαστε στο διωνυμικό μοντέλο σε ένα δέντρο μιας περιόδου. Θέτουμε  $A = \max(uS_0 - K, 0)$  και  $B = \max(dS_0 - K, 0)$ . Αν  $d \leq 1 + r \leq u$  τότε το ποσό  $V_0 = \frac{1}{1+r}(qA + (1 - q)B)$  είναι το ελάχιστο δυνατό ποσό που χρειάζεται κάποιος για να κατασκευάσει χαρτοφυλάκιο με τελικές αξίες τις  $A, B$ . Το ποσό αυτό ορίζεται ως η **δίκαιη τιμή** πώλησης του συγκεκριμένου συμβολαίου μιας και ο πωλητής μπορεί να το επενδύσει κατάλληλα και έτσι στη λήξη του συμβολαίου να είναι σε θέση να αποπληρώσει τον αγοραστή του συμβολαίου. Ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από την δυνατότητα ή όχι του αγοραστή να κατασκευάσει το αντίθετο ή παρόμοιο χαρτοφυλάκιο. Σημειώστε ότι ο αγοραστής και ο πωλητής ενός συμβολαίου δεν είναι ισοδύναμοι απέναντι στον κίνδυνο. Ο αγοραστής στην χειρότερη περίπτωση θα χάσει ένα συγκεκριμένο ποσό (την αξία του συμβολαίου) ενώ ο πωλητής μπορεί να έχει απεριόριστη ζημι-

ά στην περίπτωση που οι ρυθμοί ανόδου και καθόδου αλλάξουν δραματικά. Για παράδειγμα σε ένα συμβόλαιο αγοράς ο πωλητής θα πρέπει ουσιαστικά να πληρώσει το ποσό  $S_T - K$  το οποίο δεν είναι άνω φραγμένο σε αντίθεση με τον αγοραστή ο οποίος θα χάσει το ποσό  $V_0$  το πολύ. Αν δεν ισχύει η ανισότητα  $d \leq 1 + r \leq u$  τότε δεν υπάρχει ελάχιστη τιμή χαρτοφυλακίου με αυτές τις τελικές αξίες και ως εκ τούτου δεν ορίζεται η δίκαιη τιμή του συμβολαίου. Παρόμοια για Αμερικανικά, [Bermudan](#) και άλλα εξωτικά συμβόλαια ([exotic options](#)).

Μελετώντας τις τιμές της αγοράς και συγκρίνοντας την τιμή ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου αγοράς με την τιμή του αντίστοιχου συμβολαίου πώλησης διαπιστώνουμε ότι ισχύει μια συγκεκριμένη σχέση η οποία ονομάζεται [αναλογία αγοράς - πώλησης \(put - call parity\)](#). Μελετήστε την εξήγηση για το ότι η παραπάνω αναλογία ισχύει στις τιμές της αγοράς. Αν υπολογίσω την τιμή ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου αγοράς μέσω του διωνυμικού μοντέλου είναι σωστό να υπολογίσω από αυτή την τιμή μέσω της put - call par-

ity και την αξία του συμβολαίου πώλησης; Με άλλα λόγια, το διωνυμικό μοντέλο ικανοποιεί την ιδιότητα αυτή; Αν ναι, αποδείξτε το (δείτε [An Elementary Approach to the Option Pricing Problem](#)). Παρόμοιες σχέσεις ισχύουν και για Αμερικανικά δικαιώματα.

Το διωνυμικό μοντέλο προβλέπει ότι η αξία ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου αγοράς σε κάθε χρονική στιγμή κυμαίνεται μεταξύ δυο ποσοτήτων που εξαρτώνται από την τρέχουσα τιμή της μετοχής. Αποδείξτε αυτή την σχέση και στην συνέχεια ελέγξτε αν ικανοποιείται και από τις πραγματικές τιμές της αγοράς λαμβάνοντας πραγματικά δεδομένα από την [αγορά παραγώγων](#).

### Έβδομο Θέμα

Έχουμε δει ότι καθώς πολλαπλασιάζουμε το πλήθος των περιόδων μέχρι τον ζητούμενο χρόνο λήξης προκύπτουν όλο και περισσότερες πιθανές τιμές της μετοχής. Επειδή στην πραγματικότητα οι πιθανές τιμές της μετοχής κατά την λήξη του χρόνου είναι άπειρες προκύπτει ότι όσο περισσότερες περιόδους έχουμε τόσο πιο κοντά στην πραγματικότητα είμαστε. Στην πε-

ρίπτωση Ευρωπαϊκών συμβολαίων η αξία του χαρτοφυλακίου μέσω του διωνυμικού μοντέλου συγκλίνει, καθώς το πλήθος των περιόδων τείνει στο άπειρο, στην τιμή που δίνει το μοντέλο των [Black-Scholes](#) (μελετήστε την απόδειξη, είναι μια εφαρμογή των σειρών Taylor). Επομένως, είναι προτιμότερο για τέτοια συμβόλαια να εργαζόμαστε με το μοντέλο των Black-Scholes. Στην περίπτωση όμως Αμερικανικών συμβολαίων η αξία του συμβολαίου μέσω του διωνυμικού μοντέλου δεν συγκλίνει στο μοντέλο των Black-Scholes αλλά σε κάτι άλλο πιο πολύπλοκο (ψάξτε στην βιβλιογραφία ή στο διαδίκτυο) το οποίο δεν είναι δυνατό να επιλυθεί αναλυτικά. Για τον λόγο αυτό, για την αποτίμηση πιο περίπλοκων δικαιωμάτων, ίσως το διωνυμικό μοντέλο είναι βολικότερο (δείτε όμως και [Convergence of Binomial Trees](#)). Πόσες περιόδους πρέπει να παρεμβάλουμε μέχρι την λήξη του ζητούμενου χρόνου για να έχουμε σχετικά καλά αποτελέσματα;

### Όγδοο Θέμα

Τα συμβόλαια που έχουμε περιγράψει χωρίζονται

σε δυο κατηγορίες όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο γίνεται η αγοραπωλησία τους. Η πρώτη κατηγορία είναι τα συμβόλαια τα οποία μπορούν να αγοραστούν ή να πωληθούν στο **χρηματιστήριο παραγώγων** και η άλλη κατηγορία είναι τα συμβόλαια τα οποία μπορούν να αγοραστούν ή να πωληθούν στην **εξωχρηματιστηριακή αγορά**. Στην πρώτη κατηγορία οι τιμές των συμβολαίων προκύπτουν ανάλογα με την προσφορά και την ζήτηση, ακριβώς όπως και οι μετοχές, επομένως η αποτίμηση τέτοιων συμβολαίων ίσως δεν έχει νόημα. Στην δεύτερη κατηγορία οι τιμές των συμβολαίων προκύπτουν μετά από συμφωνία των δυο μερών (τράπεζα με ιδιώτη, μεταξύ δυο εταιριών κ.τ.λ.) Ο αγοραστής ενός συμβολαίου πώλησης (**put option**) ουσιαστικά θέλει να ελαχιστοποιήσει την ζημιά που θα έχει στην περίπτωση πτώσης της τιμής μιας μετοχής ή ενός αγαθού. Αν ο αγοραστής του συμβολαίου μπορεί να κατασκευάσει χαρτοφυλάκιο όπως έχουμε περιγράψει τότε αντί να αγοράσει ένα τέτοιο συμβόλαιο μπορεί απλά να το κατασκευάσει ο ίδιος έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει την πιθανή ζημιά. Το αποτέλεσμα θα

είναι το ίδιο με την προϋπόθεση ότι οι ρυθμοί ανόδου και καθόδου προκύψουν όπως τους έχει υπολογίσει. Στην πράξη όμως αυτό δεν συμβαίνει πάντοτε οπότε αγοράζοντας το συμβόλαιο από κάποιον άλλο μεταθέτει στον πωλητή το ρίσκο αυτό. Ακόμη όμως και αν θέλει να αναλάβει το ρίσκο αυτό ίσως δεν είναι δυνατό να κατασκευάσει ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο. Μια τράπεζα δανείζει χρήματα με μεγαλύτερο επιτόκιο από ότι ένας ιδιώτης και επίσης δανείζεται χρήματα με πολύ μικρότερο επιτόκιο από ότι ένας ιδιώτης. Επομένως είναι γενικά ευκολότερο από την πλευρά των τραπεζών να κατασκευάσουν το ζητούμενο **αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο** με μικρότερη αρχική αξία.

### Ένατο Θέμα

Στο θέμα αυτό θα πρέπει να αποτιμήσετε μέσω του διωνυμικού μοντέλου ένα Ευρωπαϊκό συμβόλαιο αγοράς σε «πραγματικές» συνθήκες. Δηλαδή έχετε ως δεδομένα τα πιθανά επιτόκια καθώς και παρελθοντικές τιμές της υποκείμενης μετοχής. Θα πρέπει μόνοι σας να αποφασίσετε ποιους ρυθμούς ανόδου και καθόδου

της μετοχής θα χρησιμοποιήσετε καθώς και σε πόσες υποπεριόδους θα χωρίσετε το χρονικό διάστημα.

Έστω ότι έχουμε τις τιμές μιας μετοχής ανά δεκαπενθήμερο για τον τελευταίο χρόνο. Έστω ότι αυτές οι τιμές είναι [

$$\begin{aligned}
 S_{24} = 0.99, S_{23} = 1.0, S_{22} = 0.98, S_{21} = 0.97, S_{20} = 0.96, S_{19} = 0.97, S_{18} = 0.98, \\
 S_{17} = 0.99, S_{16} = 1.0, S_{15} = 0.99, S_{14} = 0.98, S_{13} = 0.99, \\
 S_{12} = 0.98, S_{11} = 1.0, S_{10} = 1.01, S_9 = 1.02, \\
 S_8 = 1.03, S_7 = 1.04, S_6 = 1.03, S_5 = 1.02, S_4 = 1.01, S_3 = 1.0, \\
 S_2 = 0.99, S_1 = 1.0, S_0 = 1.0
 \end{aligned}$$

όπου  $S_{24}$  είναι η τιμή της μετοχής πριν ένα έτος, οι υπόλοιπες είναι ανά 15 ημέρες και  $S_0$  η σημερινή τιμή της μετοχής. Ας υποθέσουμε ότι η τράπεζα εφαρμόζει ένα από τα τρία ετήσια επιτόκια  $\tau_1 = 0.4$ ,  $\tau_2 = 0.1$ ,  $\tau_3 = -0.5$ . Αν  $K = 1.01$  να αποτιμήσετε την αξία ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου αγοράς με τιμή εξάσκησης  $K$  το οποίο λήγει σε τρεις μήνες από τώρα και με τα τρία δοθέντα επιτόκια.

### Δέκατο Θέμα

Αποτιμήστε ένα Αμερικανικό συμβόλαιο πώλησης 1.000 μετοχών χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο. Η

διάρκεια του συμβολαίου είναι 3 μήνες, η τιμή εξάσκησης είναι  $K = 0.95 \cdot S$  όπου  $S$  η σημερινή τιμή της μετοχής και υποκείμενη μετοχή είναι η μετοχή της Εθνικής Τράπεζας. Μπορείτε να έχετε παρελθοντικές τιμές της μετοχής από [εδώ](#) (το σύμβολο της μετοχής είναι ΕΤΕ.ΑΤΗ). Προκειμένου να αποτιμήσετε το συμβόλαιο αυτό σκεφτείτε αν μπορείτε να κατασκευάσετε συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο το οποίο να έχει αξία σε κάθε μελλοντική χρονική στιγμή ίση (ή μεγαλύτερη) από την απολαβή του αγοραστή. Το χαρτοφυλάκιο αυτό θα αποτελείται από κατάλληλο πλήθος μετοχών, [άλλοτε θετικό \(long position\)](#) και [άλλοτε αρνητικό \(short position\)](#), και επένδυσης ποσού χωρίς ρίσκο. Η επένδυση χωρίς ρίσκο μπορεί να είναι [κατάθεση σε τράπεζα](#) ή [αγορά ομολόγου](#) ή οτιδήποτε άλλο νομίζετε ότι δεν έχει ρίσκο. Μπορείτε άραγε να επενδύσετε σε ομόλογα τα οποία λήγουν σε 5 χρόνια ενώ το συμβόλαιο σε τρεις μήνες; Ψάξτε στο διαδίκτυο για όλες τις πιθανές επενδύσεις χωρίς ρίσκο με το μεγαλύτερο δυνατόν επιτόκιο. Για την κατασκευή αυτού του χαρτοφυλακίου θα χρειαστείτε τους μελλοντικούς ρυθμούς ανόδου και

καθόδου της μετοχής καθώς και το επιτόκιο (αλλά και την περίοδο ανατοκισμού) της χωρίς ρίσκο επένδυσης. Αν το επιτόκιο αυτό είναι, για παράδειγμα, ετήσιου ανατοκισμού θα χρειαστεί να υπολογίσετε το ισοδύναμο επιτόκιο που αφορά την περίοδο που θα χρησιμοποιήσετε στο διωνυμικό μοντέλο. **Μικρές αποκλίσεις που προέρχονται από τον τρόπο υπολογισμού των τόκων επικαλύπτονται από την έντονη «ασάφεια» των ρυθμών ανόδου και καθόδου.** Τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου της μετοχής θα πρέπει ουσιαστικά να τους μαντέψετε και ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσετε παρελθοντικά δεδομένα. Τέλος, θα πρέπει να υπολογίσετε την ελάχιστη δυνατή τιμή πώλησης του συμβολαίου αυτού, μια πληροφορία η οποία θα είναι χρήσιμη κατά την διάρκεια της διαδικασίας πώλησης («παζάρι») του συμβολαίου!

## 11 Θέμα

Έστω ότι στις 6 Ιουλίου του 2020 αποτιμήσατε ένα συμβόλαιο πώλησης 1.000 μετοχών με υποκείμενη μετοχή την μετοχή της Εθνικής Τράπεζας και τιμή ε-

ξάσκησης  $K = 0.95 \cdot S$  όπου  $S$  η τιμή της μετοχής την ημέρα εκείνη. Για το λόγο αυτό υπολογίσατε τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου της μετοχής ανά μήνα με ιστορικά στοιχεία ενός έτους, δηλαδή μέχρι τον Ιούλιο του 2019. Το συμβόλαιο έληγε μετά από 4 μήνες, δηλαδή τον Νοέμβριο του 2020. Οι ρυθμοί ανόδου και καθόδου που προβλέψατε με ιστορικά στοιχεία ενός έτους προέκυψαν τελικά όπως προβλέψατε και αν όχι πόσο κοντά ήταν; Αν τον Ιούλιο του 2020 είχατε τα στοιχεία που θα είχατε τον Νοέμβριο του 2020 (δηλαδή κατά την λήξη του συμβολαίου) ποια τιμή θα δίνατε ως αξία του συμβολαίου και πόση διαφορά έχει αυτή από την τιμή που τελικά δώσατε;

## 12 Θέμα

Αποτιμήστε ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα που αφορά 1.000 μετοχές του ΟΤΕ (σύμβολο ΗΤΟ.ΑΤΗ). Η διάρκεια του συμβολαίου είναι 3 μήνες, η απολαβή είναι τύπου Lookback και είναι ίση με  $X = S^{max} - K$  ανά μετοχή όπου  $K = 1.05 \cdot S$  και  $S$  η σημερινή αξία της μετοχής, χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο

τριών περιόδων. Αφού υπολογίσετε την αξία του συμβολαίου αποδείξτε ότι είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή που μπορείτε να δώσετε, αν φυσικά είναι.

### 13 Θέμα

Αποτιμήστε ένα δικαίωμα τύπου Bermudan που αφορά 1.000 μετοχές του ΟΠΑΠ (σύμβολο ΟΡΑΡ.ΑΤΗ) το οποίο μπορεί να εξασκηθεί ανά μήνα. Η διάρκεια του συμβολαίου είναι 3 μήνες, η απολαβή είναι τύπου Barrier και είναι ίση με  $X = \min\{\max\{\hat{S}, K_1\}, K_2\}$  ανά μετοχή όπου  $K_1 = 0.95 \cdot S$ ,  $K_2 = 1.05 \cdot S$ ,  $S$  η σημερινή αξία της μετοχής και  $\hat{S}$  η τρέχουσα αξία της μετοχής, χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο τριών περιόδων. Αφού υπολογίσετε την αξία του συμβολαίου αποδείξτε ότι είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή που μπορείτε να δώσετε, αν φυσικά είναι.

### 14 Θέμα

Προκειμένου να κατασκευάσετε ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο θα χρειαστεί να επιλέξετε ένα τρόπο επένδυσης χωρίς ρίσκο. Σημειώστε ότι κατά την αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου θα χρειαστεί, εν γένει,

τόσο να επενδύσετε όσο και να δανειστείτε (το  $b$  άλλοτε θα είναι θετικό και άλλοτε αρνητικό). Το μαθηματικό πρόβλημα που δημιουργείται σε αυτό το σημείο είναι το ότι το επιτόκιο επένδυσης και το επιτόκιο δανεισμού διαφέρουν.

Επίσης, θα πρέπει να ελέγξετε το επιτόκιο  $r$  της επένδυσης αυτής. Αυτό μπορεί να είναι ετήσιου ανατοκισμού ή κάτι άλλο. Αν το επιτόκιο είναι ετήσιου ανατοκισμού και είναι ίσο με  $r$  ενώ για παράδειγμα η περίοδος του διωνυμικού δέντρου είναι μικρότερη του ενός έτους ποιος είναι ο τόκος που αναλογεί σε επένδυση 1 Ευρώ για την περίοδο αυτή; Αν δεν μπορούμε να έχουμε την πληροφορία αυτή (από τους όρους της συγκεκριμένης επένδυσης) τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον τόκο με έναν από τους παρακάτω τρόπους.

- i*) 1 Ευρώ θα γίνει  $1 + r \cdot t$ , όπου  $t$  σε χρόνια (εξίσωση απλού τόκου).
- ii*) 1 Ευρώ θα γίνει  $1 + \hat{r}$ , όπου  $\hat{r}$  είναι το ισοδύναμο επιτόκιο περιόδου.
- iii*) 1 Ευρώ θα γίνει  $e^{\hat{r}t}$ , όπου  $\hat{r}$  είναι το ισοδύναμο ε-

πιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού και  $t$  σε χρόνια. Η τελευταία αυτή περίπτωση είναι βολική για μαθηματικούς υπολογισμούς και περισσότερο σε θεωρητικό επίπεδο μιας και στην πράξη ο ανατοκισμός είναι περιοδικός (π.χ. ετήσιος, εξαμηνιαίος κ.τ.λ.)

Ο καθένας από τους παραπάνω τρόπους θα δώσει και ένα διαφορετικό αποτέλεσμα. Αν η περίοδος του διωνυμικού δέντρου είναι μικρή το ίδιο μικρή θα είναι και η απόκλιση των αποτελεσμάτων. Όπως και να έχει όμως η οποιαδήποτε απόκλιση από τον υπολογισμό των τόκων επικαλύπτεται από τον (υποχρεωτικά από τους νόμους της φύσης!) ασαφή τρόπο υπολογισμού των μελλοντικών ρυθμών ανόδου και καθόδου.

## 15 Θέμα

Όπως γνωρίζουμε, οι τιμές των συμβολαίων τα οποία πωλούνται στο **χρηματιστήριο παραγώγων**, προκύπτουν σύμφωνα με την αγορά και την ζήτηση ακριβώς όπως και οι μετοχές. Ας υποθέσουμε ότι οι τιμές αυτές συμβαδίζουν με αυτές του διωνυμικού μοντέλου τριών περιόδων. Σκοπός του θέματος αυτού είναι να

υπολογίσουμε το επιτόκιο το οποίο εφαρμόζεται. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να υπολογίσετε τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου της μετοχής που αντιστοιχεί στην κάθε περίοδο και στην συνέχεια έχοντας την τιμή  $V_0$  από το χρηματιστήριο να λύσετε ως προς το  $r$ . Αυτό θα είναι το επιτόκιο που αναφέρεται στην περίοδο του διωνυμικού μοντέλου. Μπορείτε να κάνετε την ίδια μελέτη υποθέτοντας ότι οι τιμές των συμβολαίων συμβαδίζουν με αυτές του μοντέλου Black-Scholes και επομένως να εκτιμήσετε και με αυτό τον τρόπο το επιτόκιο  $r$  το οποίο όμως σε αυτή την περίπτωση θα είναι το ετήσιο επιτόκιο συνεχούς ανατοκισμού. Συγκρίνετε τα αποτελέσματα που προκύπτουν μέσω του διωνυμικού μοντέλου τριών περιόδων με αυτά που προκύπτουν μέσω του μοντέλου Black-Scholes. Η ίδια μελέτη μπορεί να γίνει για όλα τα συμβόλαια (call - put) και με όλες τις υποκείμενες μετοχές. Ποια είναι η σχέση των επιτοκίων που προκύπτει για κάθε τέτοιο συμβόλαιο με διαφορετική υποκείμενη μετοχή;

## 16 Θέμα

Έστω ότι γνωρίζουμε το επιτόκιο της χωρίς ρίσκο επένδυσης καθώς και σημερινές τιμές συμβολαίων μιας συγκεκριμένης υποκείμενης μετοχής, για παράδειγμα την σημερινή τιμή ενός συμβολαίου αγοράς. Έστω ότι εργαζόμαστε με το διωνυμικό μοντέλο και έστω ότι η περίοδος του είναι αρκετά μικρή έτσι ώστε να ισχύει ότι  $u = e^{\sigma\sqrt{\delta}}$ ,  $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta}}$  για κάποιο  $\sigma > 0$  και για αρκετά μικρό  $\delta > 0$ . Το  $\delta$  είναι η χρονική περίοδος του διωνυμικού μοντέλου ενώ το  $\sigma$  μετρά ουσιαστικά το πόσο έντονα μεταβάλλεται η μετοχή σε κάθε χρονική περίοδο για αυτό και ονομάζεται μεταβλητότητα της μετοχής. Εφόσον γνωρίζουμε την τιμή του συμβολαίου  $V_0$  και το επιτόκιο  $r$  τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την μεταβλητότητα  $\sigma$  από την σχέση που τα συνδέουν. Όταν υπολογίζουμε με τον τρόπο αυτό την μεταβλητότητα τότε αυτή ονομάζεται συνεπαγόμενη μεταβλητότητα και είναι ένας διαφορετικός τρόπος υπολογισμού της μεταβλητότητας σε σχέση με τα ιστορικά δεδομένα. Την ίδια μελέτη μπορούμε να κάνουμε και με το μοντέλο των Black - Scholes. Υπολογίστε την συνεπαγόμενη μεταβλητότητα όπως προκύπτει α-

πό πραγματικά δεδομένα για διαφορετικές ημέρες. Πως μεταβάλλεται;

## 17 Θέμα

Έστω ότι τον Μάρτιο του 2019 είχατε επενδύσει σε τρεις μετοχές το ποσό των 1.000 Ευρώ. Το ποσό αυτό το είχατε καταναίμει κατάλληλα (χρησιμοποιώντας το εργαλείο Excel) έτσι ώστε να έχετε μια ζητούμενη μέση απόδοση με την ελάχιστη δυνατή διακύμανση του χαρτοφυλακίου. Μετά από δυο χρόνια ποια είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου σας; Επαναλάβετε την ίδια μελέτη με διαφορετικές μετοχές κάθε φορά.

## 18 Θέμα

Ενδιαφέρομαι να επενδύσω το ποσό των 1.500 Ευρώ στις μετοχές με σύμβολα VIO.ATH, OLYMP.ATH, GEBKA.ATH. Πόσες μετοχές πρέπει να αγοράσω από την κάθε μια; Τι μπορώ να κάνω για να εξασφαλίστώ σε μια απότομη μελλοντική πτώση της τιμής μιας εκ των μετοχών παραπάνω; Ποια είναι η μέγιστη ζημιά που μπορεί να έχω σε μια ημέρα; Απαντήστε με

πιθανότητα 0.98 και περιγράψτε πως υπολογίσατε την μέγιστη ζημιά. Σε περίπτωση που κάποια μέρα έχω ζημιά ποια είναι η μέση τιμή της ζημιάς; Επαναλάβετε την ίδια μελέτη με διαφορετικές τριάδες μετοχών.

## 19 Θέμα

Έχουμε αποδείξει ότι όταν  $d \leq 1 + r \leq u$  τότε η αξία ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου όταν υπολογίζεται μέσω της ακολουθίας

$$\begin{aligned} V_{n-1} &= \frac{1}{1+r} (qV_n^u + (1-q)V_n^d), \\ V_N &= X_N \quad (\text{όπου } X_N \text{ η απολαβή}) \end{aligned} \quad (9)$$

είναι η μικρότερη δυνατή. Στην λήξη του συμβολαίου η αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου θα είναι πάντοτε ίση με την απολαβή του αγοραστή. Στα Αμερικανικά δικαιώματα η αντίστοιχη ακολουθία είναι

$$\begin{aligned} V_{n-1}^A &= \max\{X_{n-1}, E_n\} \\ V_N^A &= X_N \end{aligned} \quad (10)$$

όπου  $E_n = \frac{1}{1+r} (qV_n^{u,A} + (1-q)V_n^{d,A})$ . Μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι υπάρχει κάποιο  $k \in \{0, 1, \dots, N\}$

τέτοιο ώστε  $V_k^A = X_k$  δηλαδή ο αγοραστής έχει την επιλογή να εξασκήσει κατάλληλα έτσι ώστε η απολαβή του να είναι ίση με την αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου και επομένως να μην περισσέψουν χρήματα στον πωλητή. Πράγματι, έστω ότι  $E_k > X_{k-1}$  για κάθε  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$  άρα

$$V_{n-1}^A = \frac{1}{1+r} (qV_n^{u,A} + (1-q)V_n^{d,A}), \quad \text{για κάθε } n = 1, 2, \dots, N$$

$$V_N^A = X_N$$

Προκύπτει λοιπόν, στην περίπτωση που  $E_k > X_{k-1}$  για  $k = 1, \dots, N$ , ότι οι αναδρομικές ακολουθίες 9 και 10 συμπίπτουν. Αυτό σημαίνει ότι στην λήξη του συμβολαίου η αξία του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου θα είναι ίση με την απολαβή του αγοραστή και άρα ακόμη και σε αυτή την περίπτωση ο αγοραστής μπορεί να εξασκήσει κατάλληλα έτσι ώστε να μην περισσέψουν χρήματα στο αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο θα είναι ίσο κάποια στιγμή με την απολαβή και εφόσον  $d < 1 + r < u$  προκύπτει ότι η αξία του

συμβολαίου μέσω της ακολουθίας 10 είναι η μικρότερη δυνατή οπότε ορίζεται και ως η δίκαιη τιμή πώλησης ενός τέτοιου συμβολαίου. Παρόμοια βέβαια και στην περίπτωση των Bermudan δικαιωμάτων.

Για να αποδείξει κανείς ότι είναι η ελάχιστη τιμή όταν  $d < 1 + r < u$  αρκεί να εργαστεί αναδρομικά από τον χρόνο  $N$  ως τον χρόνο  $0$  με το ίδιο ακριβώς σκεπτικό όπως και στα Ευρωπαϊκά δικαιώματα.

## 20 Θέμα

### Τα πρώτα βήματα ενός Arbitrageur!

Έχουμε αποδείξει την αναλογία αγοράς - πώλησης των τιμών όπως προκύπτουν από το διωνυμικό μοντέλο και είναι η επόμενη

$$V_n^{E,call} - V_n^{E,put} = S_n - K \frac{1}{(1+r)^{N-n}}, \quad n = 0, \dots, N$$

Ας υποθέσουμε ότι παρατηρούμε στην πραγματική αγορά τις τιμές αυτών των συμβολαίων με την ίδια υποκείμενη μετοχή, τον ίδιο χρόνο λήξης και την ίδια τιμή εξάσκησης και διαπιστώνουμε ότι δεν ισχύει η παρα-

πάνω ισότητα αλλά για παράδειγμα η επόμενη

$$V_n^{E,call} - V_n^{E,put} > S_n - K \frac{1}{(1+r)^{N-n}}, \quad n = 0, \dots, N$$

κατά τη χρονική στιγμή  $n$ . Αυτό μπορεί να συμβεί στην πράξη αν για παράδειγμα υπάρξει ξαφνικά μεγάλη ζήτηση σε συγκεκριμένα συμβόλαια αγοράς οπότε και οι αντίστοιχες τιμές θα αυξηθούν απότομα αφού εξαρτώνται από την προσφορά και τη ζήτηση (και όχι από το διωνυμικό μοντέλο!) Τότε δημιουργείται μια ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να δανειστούμε ένα συμβόλαιο αγοράς και να το πουλήσουμε στη τρέχουσα αξία δηλαδή  $V_n^{E,call}$ . Τα χρήματα αυτά τα τοποθετούμε σε χωρίς ρίσκο επένδυση με επιτόκιο  $r$ . Αγοράζουμε επίσης ένα συμβόλαιο πώλησης και μια μετοχή στη τρέχουσα αξία αφού δανειστούμε το αντίστοιχο ποσό με επιτόκιο  $r$ . Οι κινήσεις αυτές έγιναν με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο δανειζόμενοι τα αντίστοιχα ποσά. Στο χρόνο  $N$  δυο περιπτώσεις έχουμε: η αξία της μετοχής να είναι μικρότερη του  $K$  οπότε σε αυτή την περίπτωση το συμβόλαιο αγοράς δεν κοστίζει τίποτε και επομένως δεν χρειάζεται

να επιστρέψουμε κάτι στο δανειστή. Έχουμε το ποσό  $V_n^{E,call}(1+r)^{N-n}$  στην κατοχή μας όπως επίσης ένα συμβόλαιο πώλησης και μια μετοχή αλλά χρωστάμε το ποσό  $(V_n^{E,put} + S_n)(1+r)^{N-n}$ . Μπορούμε να εξασκήσουμε το συμβόλαιο πώλησης οπότε θα έχουμε επιπλέον το ποσό  $K$  άρα το συνολικό ποσό που κατέχουμε υπερβαίνει το ποσό που χρωστάμε. Παρόμοια και στην περίπτωση όπου η τιμή της μετοχής ξεπεράσει το ποσό  $K$ . Στη περίπτωση που δεν μπορούμε να δανειστούμε ένα συμβόλαιο αγοράς αλλά το έχουμε στη κατοχή μας δημιουργείται πάλι ευκαιρία σίγουρου κέρδους.

Το συμπέρασμα είναι ότι και στην πραγματική αγορά θα ισχύει (περίπου) η παραπάνω αναλογία. Δεν θα ισχύει ποτέ ακριβώς διότι υπάρχουν και τα κόστη συναλλαγών. Αρα το διωνυμικό μοντέλο προβλέπει σωστά αυτή την αναλογία κάτι το οποίο δεν είναι προφανές ότι σε κάθε μοντέλο θα ισχύει κάτι τέτοιο.

Χρησιμοποιήστε παρόμοια επιχειρήματα για την περίπτωση που στην αγορά παρατηρήσετε την αντίστροφη ανισότητα. Επίσης χρησιμοποιήστε παρόμοια επι-

χειρήματα για όλες τις σχέσεις που έχουν αποδειχτεί παραπάνω και έτσι καταγράψτε τις περιπτώσεις ευκαιρίας σίγουρου κέρδους καθώς και τις χρηματιστηριακές κινήσεις που θα κάνετε σε κάθε τέτοια περίπτωση. Όπως είναι κατανοητό, αν υποθέσουμε ότι αναθέτουμε σε έναν υπολογιστή να κάνει αυτούς τους ελέγχους στις τιμές της αγοράς τότε ο υπολογιστής επίσης μπορεί να πραγματοποιήσει αυτόματα τις αντίστοιχες χρηματιστηριακές κινήσεις για εμάς!

Σημειώστε επίσης ότι υποθέσαμε ότι επιτόκιο δανεισμού είναι το ίδιο με το επιτόκιο επένδυσης. Αυτό στη πράξη δεν συμβαίνει ποτέ και μάλιστα για μια χρηματιστηριακή τράπεζα το επιτόκιο επένδυσης είναι πολύ μεγαλύτερο από ότι το επιτόκιο δανεισμού. Επομένως οι ευκαιρίες σίγουρου κέρδους είναι συχνότερες από την οπτική αυτών των χρηματιστηριακών τραπεζών συγκριτικά με έναν ιδιώτη όπου τα αντίστοιχα επιτόκια είναι αντίστροφα. Παρατηρήστε επίσης ότι αν αυτές οι χρηματιστηριακές κινήσεις γίνουν λίγο πριν την λήξη των συμβολαίων τότε τα επιτόκια δανεισμού και κατάθεσης είναι πρακτικά μηδέν!

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 40** Όταν γράφουμε **σημερινή αξία μετοχής** εννοούμε την αξία της μετοχής κατά την ημέρα της σύναψης του συμβολαίου ενώ όταν γράφουμε **τρέχουσα αξία μετοχής** εννοούμε την αξία της μετοχής κατά την μελλοντική χρονική περίοδο που μελετούμε. Σημειώστε ότι το όνομα του δικαιώματος και η αντίστοιχη απολαβή (π.χ. *Barrier*) μπορεί να διαφέρουν από βιβλίο σε βιβλίο. Σημασία βέβαια έχει ο τύπος της απολαβής καθώς και να τον εφαρμόζουμε σωστά.

---

---

Η αγορά διαμορφώνει τις τιμές των μετοχών (assets), συμβολαίων (options) κ.τ.λ. όπως επίσης η αγορά διαμορφώνει τα μαθηματικά μοντέλα που προσπαθούν να μοντελοποιήσουν αυτά τα φαινόμενα. Ακριβώς όπως οι καιρικές συνθήκες διαμορφώνουν τα προγνωστικά μαθηματικά μοντέλα και όχι το ανάποδο!

---

---



## Βήματα για την αποτίμηση δικαιωμάτων

Τα βήματα για να αποτιμήσετε ένα δικαίωμα χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο είναι τα παρακάτω,

1. Αποφασίζετε σε πόσες περιόδους θα διαμερίσετε την χρονική διάρκεια του συμβολαίου.
2. Μαντεύετε τους ρυθμούς ανόδου και καθόδου της μετοχής που αντιστοιχούν στην περίοδο που επιλέξατε, συνήθως από ιστορικά δεδομένα ή μέσω της συνεπαγόμενης μεταβλητότητας.
3. Αποφασίζετε ποια θα είναι η χωρίς ρίσκο επένδυση που θα κάνετε και πως θα υπολογίζετε τους τόκους που αναλογούν σε χρονική περίοδο που θα είναι κλάσμα του χρόνου ανατοκισμού.
4. Εφαρμόζετε το διωνυμικό μοντέλο με τα παραπάνω δεδομένα.
5. Αποδεικνύετε ότι η τιμή που υπολογίσατε είναι η μικρότερη δυνατή.

Σημειώστε ότι η ελάχιστη τιμή που υπολογίσατε μεταβάλλεται όταν: α) μεταβληθεί το πλήθος των περιόδων του διωνυμικού δέντρου, β) μεταβληθούν οι ρυθμοί ανόδου και καθόδου (π.χ. τους υπολογίσατε με ιστορικά δεδομένα 2 ετών αντί για ένα έτος κ.τ.λ.), γ) μεταβληθεί το επιτόκιο της χωρίς ρίσκο επένδυσης.



**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 41** Αν αποτιμήσουμε ένα δικαίωμα με ιστορικά δεδομένα ή μέσω της συνεπαγόμενης μεταβλητότητας τότε θα πάρουμε διαφορετική τιμή για το συμβόλαιο κάθε φορά που αλλάζουμε τρόπο υπολογισμού της μεταβλητότητας. Ένας τρόπος θα ήταν να αποτιμήσουμε το συμβόλαιο με διαφορετικά ιστορικά δεδομένα (π.χ. μηνός, τριμήνου, εξαμήνου κ.τ.λ.) καθώς και μέσω της συνεπαγόμενης μεταβλητότητας και να θεωρήσουμε ως δίκαιη τιμή το μέσο όρο αυτών και μάλιστα με κάποιο βάρος. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να βάλουμε μεγαλύτερο βάρος στην συνεπαγόμενη μεταβλητότητα, ύστερα στη μεταβλητότητα που προκύπτει από τα ιστορικά δεδομένα μηνός κ.τ.λ. □

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 42** Για ποιο λόγο μας ενδιαφέρει να εκτιμήσουμε την αξία ενός συμβολαίου; Μιλώντας πάντοτε για την εξωχρηματοστηριακή αγορά, ο πωλητής ενός τέτοιου συμβολαίου χρειάζεται μια τάξη μεγέθους (1 Ευρώ, 10 Ευρώ, 100 Ευρώ κ.τ.λ.) του ποσού που ενδέχεται να καταβάλλει στον αγοραστή. Ο αγοραστής επίσης χρειάζεται μια τέτοια εκτίμηση προκειμένου να γνωρίζει αν τυχόν είναι υπερτιμημένο από κάποιον πωλητή.

Ένας διαφορετικός λόγος είναι για τον υπολογισμό της *συνεπαγόμενης μεταβλητότητας* μια μετοχής ή ενός αγαθού. Αν γνωρίζουμε την αξία ενός συμβολαίου με υποκείμενη μετοχή τη ζητούμενη τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτή συμπίπτει με το μαθηματικό μοντέλο το οποίο μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε. Οπότε λύνοντας ως προς τη μεταβλητότητα θα προκύψει η λεγόμενη συνεπαγόμενη μεταβλητότητα η οποία εξαρτάται από το μαθηματικό μοντέλο από το οποίο προέκυψε. Δηλαδή, άλλη συνεπαγόμενη μεταβλητότητα θα προκύψει αν εργαστώ με το διωνυμικό μοντέλο  $k$  περιόδων (θα έχει εξάρτηση και από το  $k$ ), άλλη με το

μοντέλο των *Black-Scholes* και άλλη με κάποιο άλλο μοντέλο. Η συνεπαγόμενη μεταβλητότητα είναι η μεταβλητότητα της μετοχής που σήμερα οι επενδυτές θεωρούν ότι έχει χωρίς αυτό βεβαίως να σημαίνει ότι και στο μέλλον θα είναι η ίδια. Μπορούμε όμως να κάνουμε τη λογική υπόθεση ότι αυτή δεν θα αλλάξει πολύ στο αμέσως επόμενο μικρό χρονικό διάστημα. Για παράδειγμα έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την αξία ενός *Lookback* Αμερικανικού συμβολαίου (το οποίο δεν είναι διαπραγματεύσιμο στο χρηματιστήριο) με υποκείμενη μετοχή την  $A$ . Μπορούμε να πάρουμε τιμές από το χρηματιστήριο των συμβολαίων αγοράς και πώλησης με υποκείμενη μετοχή την  $A$  και να υπολογίσουμε από κει τη συνεπαγόμενη μεταβλητότητα της.  $\square$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 43** Αν κάποιος θέλει να μελετήσει περαιτέρω την αποτίμηση δικαιωμάτων θα πρέπει να στραφεί σε αποτίμηση συμβολαίων η απολαβή των οποίων εξαρτάται από  $k$  το πλήθος υποκείμενα αγαθά. Μια πρώτη ιδέα αποτίμησης τους είναι να μελετήσει κανείς την απολαβή ενός συγκεκριμένου συμβολαίου στο παρελθόν και να υπολογίσει τη μέση τιμή κ.τ.λ. Ας υποθέσουμε ότι ένας πελάτης θέλει να αγοράσει από εμάς ένα συμβόλαιο με τρεις υποκείμενες μετοχές η απολαβή του οποίου θα είναι  $X = \max\left(\frac{S_1+S_2+S_3}{3} - K, 0\right)$  όπου  $K$  δοσμένο και  $S_i$  η τιμή της μετοχής  $i$  την ημέρα της εξάσκησης. Πως θα έχω μια τάξη μεγέθους της αξίας ενός τέτοιου συμβολαίου; Μια ιδέα είναι να υποθέσω ότι έχω πουλήσει τέτοιου είδους συμβόλαιο στο παρελθόν και να υπολογίσω τις απολαβές του τις τελευταίες  $N$  ημέρες. Με τον τρόπο αυτό θα έχω μια τάξη μεγέθους της αξίας αυτού του συμβολαίου μέσω των ποσών που θα έπρεπε κάθε φορά να καταβάλλω στον αγοραστή. Παρατηρώντας τις αξίες των συμβολαίων αγοράς και πώλησης τα οποία είναι διαπραγμα-

τεύσιμα στο χρηματιστήριο παραγώγων διαπιστώνουμε ότι η αξία τους αυξάνεται όσο αυξάνεται ο χρόνος μέχρι την λήξη τους. Αυτό συμβαίνει διότι η απολαβή ενός συμβολαίου γίνεται όλο και πιο αβέβαιη με την πάροδο του χρόνου. Δηλαδή αν η χθεσινή απολαβή ήταν  $X$  τότε περιμένουμε ότι η σημερινή απολαβή θα είναι κοντά στο  $X$  (το πόσο κοντά εξαρτάται και από την διακύμανση των απολαβών) ενώ καθώς ο χρόνος μέχρι τη λήξη αυξάνεται η αβεβαιότητα γίνεται μεγαλύτερη. Επομένως, αν η χθεσινή απολαβή ήταν ίση με  $X$  τότε θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι η αξία του συμβολαίου με χρόνο λήξης  $t$  χρόνια από σήμερα είναι ίση με  $X + m_t + z\sigma_t$  όπου  $z > 0$  μια κατάλληλη παράμετρος η οποία θα πρέπει να εκτιμηθεί,  $t$  ο χρόνος λήξης του συμβολαίου και  $m_t, \sigma_t$  η μέση τιμή και διακύμανση των απολαβών (δείτε [την εργασία](#)). Είναι εύκολο να καταλήξουμε στο παραπάνω συμπέρασμα. Συμβολίζουμε με  $V_t$  την απολαβή του συμβολαίου κατά την μελλοντική χρονική στιγμή  $t$  και με  $V_0$  την σημερινή απολαβή. Αν το συμβόλαιο είναι Ευρωπαϊκού τύπου και λήγει στο χρόνο  $T$  τότε η διαφορά  $V_T - V_0 = X$  είναι μια τυχαία

μεταβλητή της οποίας βεβαίως δεν γνωρίζουμε την τιμή. Μπορούμε όμως να υποθέσουμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με παραμέτρους  $m_T$  και  $\sigma_T$  για να πάρουμε κάποια συμπεράσματα.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 44** Έστω  $V_t$  η απολαβή του συμβολαίου στο χρόνο  $t$  και έστω  $Y$  το ποσό πώλησης του συμβολαίου. Λέμε ότι αυτό το ποσό είναι ασφαλές για τον πωλητή αν

$$P(V_t > Y) = 1 - a$$

για κάποιο  $a \in (0, 1)$  το οποίο ορίζεται από τον πωλητή.

**Υπόθεση Α** Υποθέτουμε ότι υπάρχουν αριθμοί  $m_T$  και  $\sigma_T$  τέτοιοι ώστε

$$V_T - V_0 = X \sim \mathcal{N}(m_T, \sigma_T^2)$$

Κάτω από την υπόθεση Α μπορούμε να έχουμε την παρακάτω εκτίμηση, για κάθε  $y > 0$ ,

$$\begin{aligned} P(X \leq y) &= \frac{1}{\sigma_T \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{(x-m_T)^2}{2\sigma_T^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{y-m_T}{\sigma_T}} e^{-\frac{r^2}{2}} dr \end{aligned}$$

Επομένως ο πωλητής μπορεί να διαλέξει  $y$  έτσι ώστε η παραπάνω πιθανότητα να είναι ίση με κάποιο δοσμένο  $a \in (0, 1)$  κοντά στη μονάδα. Έστω  $z$  τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{r^2}{2}} dr = a$$

Μια ασφαλής τιμή πώλησης του συμβολαίου είναι η επόμενη

$$Y = V_0 + y = V_0 + m_T + z\sigma_T$$

Δηλαδή, κάτω από την υπόθεση  $A$ , ισχύει

$$P(\{V_t > Y = V_0 + m_T + z\sigma_T\}) = 1 - a$$

Μπορούμε να εκτιμήσουμε τους  $m_T$  και  $\sigma_T$  από παρελθοντικά δεδομένα εργαζόμενοι μονάχα πάνω στις τιμές των απολαβών και όχι στις τιμές των μετοχών. Σημειώστε ότι, κάτω από την υπόθεση  $A$ , αν κάποιος πουλήσει το συμβόλαιο φθηνότερα από  $V_0 + m_T$  τότε η πιθανότητα ζημιάς είναι μεγαλύτερη από  $1/2$ . Σε αυτή τη περίπτωση θα πρέπει να επενδύσει κατάλληλα αυτό το ποσό για να ελαχιστοποιήσει αυτό το επιπλέον

ρίσκο, τοποθετώντας το για παράδειγμα σε μια χωρίς ρίσκο επένδυση ή δημιουργώντας ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο. Πουλώντας στην ασφαλή τιμή ο πωλητής αναλαμβάνει ουσιαστικά το ρίσκο της εκτίμησης των μελλοντικών παραμέτρων  $m_T, \sigma_T$  ενώ ο αγοραστής μεταθέτει αυτό το ρίσκο στον πωλητή πληρώνοντας το αντίστοιχο τίμημα.

Ασφαλώς όμως ενδέχεται να υπάρχουν και άλλα **μαθηματικά μοντέλα** τα οποία προβλέπουν με μεγαλύτερη ακρίβεια τις μελλοντικές αξίες ενός συγκεκριμένου συμβολαίου.

Ο ενδιαφερόμενος αγοραστής ενός τέτοιου συμβολαίου μπορεί να κάνει την αντίστοιχη μελέτη για να υπολογίσει τη μέση τιμή των παρελθοντικών απολαβών. Επομένως μπορεί να τοποθετήσει το αντίστοιχο ποσό σε μια χωρίς ρίσκο επένδυση ή σε μια οποιαδήποτε επένδυση θελήσει αντί να αγοράσει ένα τέτοιο συμβόλαιο από μια χρηματιστηριακή τράπεζα. Η διαφορά είναι ότι ενδέχεται η απολαβή να προκύψει πολύ μεγαλύτερη οπότε να έχει μεγάλη ζημιά. Αγοράζοντας όμως το συμβόλαιο από κάποια χρηματιστηριακή τράπε-

ζα μεταθέτει αυτό το ρίσκο στον πωλητή του συμβολαίου χάνοντας βέβαια το ποσό που αντιστοιχεί στην αξία του συμβολαίου.

Στον αγοραστή ενός συμβολαίου προκύπτουν τα ερωτήματα: χρειάζομαι πραγματικά ένα τέτοιο συμβόλαιο και αν ναι από ποιον μπορώ να το αγοράσω; Ποιος είναι ο φθηνότερος πωλητής αλλά ταυτόχρονα αξιόπιστος;

Στον πωλητή προκύπτουν τα ερωτήματα: ποιο είναι το ασφαλέστερο μαθηματικό μοντέλο για να αποτιμήσω ένα τέτοιο συμβόλαιο έτσι ώστε δηλαδή η πιθανότητα μεγάλης ζημιάς να είναι η μικρότερη δυνατή; Είμαι ανταγωνιστικός;

Σε μας τους ακαδημαϊκούς (Καθηγητές και φοιτητές!) προκύπτουν τα ερωτήματα: ποιο από τα μαθηματικά μοντέλα τελικά προτιμούν οι ενδιαφερόμενοι για να αποτιμήσουν τέτοια συμβόλαια; Στην πράξη, ποια μαθηματικά μοντέλα έχουν χρησιμοποιηθεί και ποια αποδίδουν καλύτερα; □

## Θεωρία Πιθανοτήτων

### 8 Πιθανότητες

Έστω ένα πείραμα τύχης (π.χ. ρίψιμο ζαριών, στρίψιμο νομίσματος κτλ) για το οποίο γνωρίζουμε όλα τα πιθανά αποτελέσματα. Το σύνολο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων ονομάζεται δειγματικός χώρος.

Ας δούμε το στρίψιμο ενός νομίσματος. Όπως γνωρίζουμε έχει δυο πιθανά αποτελέσματα, κορώνα ή γράμματα και το σύνολο των αποτελεσμάτων το συμβολίζουμε με

$$\Omega = \{K, \Gamma\}$$

Στο ρίξιμο ενός ζαριού, ο δειγματικός χώρος όπως γνωρίζουμε είναι ο

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Επίσης, ένα άλλο πείραμα τύχης είναι να μετρήσει

κανείς το χρόνο ζωής ενός λαμπτήρα. Ο δειγματικός χώρος σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\Omega = \{t : 0 \leq t < \infty\}$$

Ο δειγματικός χώρος επομένως δεν είναι πάντα ένα διακριτό σύνολο, αλλά μπορεί να είναι υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  ή κάτι άλλο.

Έστω  $\Omega$  δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και έστω  $E, F$  δυο οποιαδήποτε υποσύνολά του. Μπορούμε να ορίσουμε δυο ακόμη υποσύνολα, τα  $E \cup F$  και  $E \cap F$  τα οποία είναι η ένωση και η τομή αντίστοιχα των υποσυνόλων.

Για την ένωση και την τομή, ισχύουν τα παρακάτω,

(Αντιμεταθετική)

$$E \cup F = F \cup E,$$

(Προσεταιριστική)

$$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G),$$

(Επιμεριστική)

$$(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$$

Οι ίδιες ιδιότητες ικανοποιούνται αντιστρέφοντας τους ρόλους της ένωσης και της τομής. Ισχύει και ο νόμος

De Morgan,

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c, \quad \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^c$$

Αν υποθέσουμε ότι όλα τα στοιχεία ενός δειγματικού χώρου είναι το ίδιο πιθανά, τότε μπορούμε να ορίσουμε την πιθανότητα ενός υποσυνόλου  $E$  ως εξής,

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)}, \quad E \subseteq \Omega,$$

όπου  $N(E)$ ,  $N(\Omega)$  είναι το πλήθος των στοιχείων του  $E$  και του  $\Omega$  αντίστοιχα. Αυτό ισχύει βέβαια, στην περίπτωση που τα  $E$ ,  $\Omega$  είναι διακριτά σύνολα και μπορούμε να μετρήσουμε το πλήθος τους. Σε άλλη περίπτωση, η πιθανότητα θα ορισθεί διαφορετικά. Για παράδειγμα, στην περίπτωση όπου ο δειγματικός χώρος είναι υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος να μετρούμε τα υποσύνολα του  $\mathbb{R}$ . Υπάρχουν αρκετά προβλήματα σε αυτή τη διαδικασία και δεν είναι καθόλου

απλή όπως η προηγούμενη. Δεν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  κάποιον αριθμό, με λογικό τρόπο, χωρίς να δημιουργούνται άλλες τεχνικές δυσκολίες. Σε αυτό το επίπεδο, η Θεωρία Μέτρου, είναι αυτή ακριβώς που χρειάζεται για να ξεπεραστούν οι δυσκολίες αυτές και για να κατασκευασθεί, αξιωματικά, η Θεωρία Πιθανοτήτων με ενιαίο τρόπο για όλες τις περιπτώσεις.

Για τους παραπάνω λόγους θα προχωρήσουμε στην αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Πιθανοτήτων.

### 8.1 Άλγεβρα, σ-άλγεβρα και Πιθανότητα

**ΟΡΙΣΜΟΣ 45** Έστω  $\Omega$  ένα οποιοδήποτε σύνολο και  $\mathcal{F}$  μια οικογένεια υποσυνόλων του. Θα λέμε ότι η  $\mathcal{F}$  είναι άλγεβρα στο  $\Omega$  αν

$$(i) \quad \Omega \in \mathcal{F},$$

$$(ii) \quad \text{Αν } A \in \mathcal{F}, \text{ τότε } A^c \in \mathcal{F},$$

(iii) Αν  $A, B \in \mathcal{F}$  τότε  $A \cup B \in \mathcal{F}$ .

Τα στοιχεία μιας άλγεβρας ονομάζονται ενδεχόμενα και μόνο αυτά. Για παράδειγμα το  $\{\emptyset, \Omega\}$  είναι άλγεβρα στο  $\Omega$ , όπως και το  $\{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$  όταν  $A \subseteq \Omega$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 46** Έστω  $\mathcal{F}$  άλγεβρα. Δείξτε ότι,  $\emptyset \in \mathcal{F}$ , αν  $A, B \in \mathcal{F}$  τότε  $A \cap B \in \mathcal{F}$  και  $A \setminus B \in \mathcal{F}$ . Τέλος, αν  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  είναι άλγεβρες τότε και  $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$  είναι επίσης άλγεβρα.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Αφού  $\Omega \in \mathcal{F}$  τότε και  $\Omega \setminus \Omega \in \mathcal{F}$  το οποίο είναι το κενό σύνολο.

Η τομή  $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$  και χρησιμοποιούμε τη δεύτερη και τρίτη ιδιότητα της άλγεβρας για να τελειώσουμε την απόδειξη.

Η διαφορά  $A \setminus B = A \cap B^c$  και προκύπτει επίσης ότι ανήκει στην άλγεβρα.

Έστω  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  άλγεβρες. Θα δείξουμε ότι η τομή τους είναι επίσης άλγεβρα. Προφανώς  $\Omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ . Έστω  $A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ , τότε και  $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  άρα και  $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ . Παρόμοια και η τρίτη ιδιότητα.  $\square$

Παρακάτω, θα ορίσουμε την έννοια της πιθανότητας σε μια άλγεβρα και για το λόγο αυτό ονομάζεται πεπερασμένα προσθετική πιθανότητα.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 47** Έστω  $\mathcal{F}$  μια άλγεβρα του  $\Omega$ . Μια απεικόνιση  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  ονομάζεται πεπερασμένα προσθετική πιθανότητα όταν,

$$(i) \quad P(\Omega) = 1,$$

$$(ii) \quad \text{για κάθε } A, B \in \mathcal{F} \text{ με } A \cap B = \emptyset \text{ έχουμε } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Λέμε ότι η  $P(A)$  είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου  $A$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 48** Δείξτε ότι  $P(\emptyset) = 0$ , αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ ,  $P(A^c) = 1 - P(A)$ , αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(A) \leq P(B)$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Εύκολα βλέπουμε ότι  $P(\Omega) = P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega)$ . Οπότε  $P(\emptyset) = 0$ .

Παρατηρούμε ότι  $B = A \cup (B \setminus A)$  επομένως  $P(A) + P(B \setminus A) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(B)$  άρα  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ .

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο έχουμε ότι  $P(B) - P(A) = P(B \setminus A) \geq 0$ .  $\square$

**ΑΣΚΗΣΗ 49** Δείξτε ότι  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Η ένωση  $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ , άρα  $P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B \setminus A) + P(A \cap B)$ . Όμως  $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$  και παρόμοια η  $P(B \setminus A)$  και αντικαθιστώντας έχουμε τελειώσει.  $\square$

Θα ορίσουμε παρακάτω την έννοια της σ-άλγεβρας η οποία είναι γενικότερη της έννοιας της άλγεβρας.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 50** Έστω  $\Omega$  ένα οποιοδήποτε σύνολο και  $\mathcal{F}$  μια οικογένεια υποσυνόλων του. Θα λέμε ότι η  $\mathcal{F}$  είναι σ-άλγεβρα στο  $\Omega$  αν

(i)  $\Omega \in \mathcal{F}$ ,

(ii) Αν  $A \in \mathcal{F}$ , τότε  $A^c \in \mathcal{F}$ ,

(iii) Αν  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  τότε  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

Τα στοιχεία μιας  $\sigma$ -άλγεβρας ονομάζονται ενδεχόμενα και το ζευγάρι  $(\Omega, \mathcal{F})$  ονομάζεται μετρήσιμος χώρος.

**ΑΣΚΗΣΗ 51** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F})$  μετρήσιμος χώρος. Δείξτε ότι αν  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  τότε και  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Από το νόμο του de Morgan έχουμε ότι

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega \setminus \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i^c) = \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c$$

και άρα με τη δεύτερη και τρίτη ιδιότητα τελειώνουμε την απόδειξη.  $\square$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 52** Έστω  $\mathcal{A}$  μια οικογένεια υποσυνόλων του  $\Omega$ , όχι κατά ανάγκη  $\sigma$ -άλγεβρα. Τότε με  $\sigma(\mathcal{A})$  συμβολίζουμε τη μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα που περιέχει την  $\mathcal{A}$ . Η  $\sigma(\mathcal{A})$  ονομάζεται η  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από την  $\mathcal{A}$ .

Προφανώς, αν η  $\mathcal{A}$  είναι  $\sigma$ -άλγεβρα τότε  $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{A})$ .  
Ειδικότερα, έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 53** Όταν  $\Omega = \mathbb{R}$  και το  $\mathcal{A}$  είναι η οικογένεια όλων των ανοικτών διαστημάτων, τότε ονομάζουμε την  $\sigma(\mathcal{A})$  την  $\sigma$ -άλγεβρα των συνόλων Borel και τη συμβολίζουμε με  $\mathcal{B}$ . Τα σύνολα που ανήκουν στην  $\mathcal{B}$  ονομάζονται σύνολα Borel.

**ΑΣΚΗΣΗ 54** Δείξτε ότι τα παρακάτω σύνολα είναι σύνολα Borel:  $(a, b)$ ,  $(a, \infty)$ ,  $[a, b]$ ,  $\{a\}$ , κάθε πεπερασμένο σύνολο, κάθε αριθμήσιμο σύνολο, το σύνολο των ρητών καθώς και των άρρητων αριθμών.

Ορίζουμε τώρα την έννοια της πιθανότητας πάνω σε μια  $\sigma$ -άλγεβρα. Έστω  $(\Omega, \mathcal{F})$  μετρήσιμος χώρος.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 55** Έστω μια απεικόνιση  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  με τις παρακάτω ιδιότητες,

(i)  $P(\Omega) = 1$ ,

(ii) για κάθε ακολουθία  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  ανά δύο ξένα, έχουμε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Αυτή ονομάζεται μέτρο πιθανότητας και η τριάδα  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ονομάζεται χώρος πιθανότητας.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 56** Χρησιμοποιώντας το μέτρο *Lebesgue* από τη θεωρία Μέτρου μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μέτρο πιθανότητας. Ας πάρουμε το  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$  δηλαδή τα σύνολα *Borel* που είναι υποσύνολα του  $\Omega$  και  $P = \text{Leb}$  το μέτρο *Lebesgue* όπως ορίζεται στη θεωρία Μέτρου. Το μέτρο αυτό έχει τη βασική ιδιότητα  $\text{Leb}[a, b] = b - a$ . Τότε η τριάδα  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  είναι ένας χώρος πιθανότητας.

**ΛΗΜΜΑ 57** Αν  $A_1, A_2, \dots$  είναι μια αύξουσα (φθίνουσα)

ακολουθία ενδεχομένων, τότε

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(A_k), \quad (\text{αύξουσα})$$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(A_k) \quad (\text{φθίνουσα})$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θέτουμε  $B_k = A_{k+1} \setminus A_k$  και  $B_0 = A_1$  τα οποία είναι ανά δύο ξένα. Επίσης έχουμε

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

και

$$\bigcup_{k=0}^n B_k = A_{n+1}.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} B_k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(B_k) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n P(B_k) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n B_k\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_{n+1}).
\end{aligned}$$

Για την περίπτωση της φθίνουσας ακολουθίας συνόλων έχουμε, διαπιστώνοντας ότι  $A_k^c$  είναι αύξουσα

ακολουθία συνόλων,

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right) \\ &= 1 - \lim_{k \rightarrow \infty} P(A_k^c) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - P(A_k^c)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} P(A_k) \end{aligned}$$

□

**ΑΣΚΗΣΗ 58** Δείξτε ότι

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Επίσης, αν  $P(A_n) = 0$  τότε

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

Τέλος, αν  $P(A_n) = 1$  τότε

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θέτουμε  $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ . Τότε

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) \text{ αφού } B_n \text{ αύξουσα} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_{n+1}). \end{aligned}$$

Τα άλλα δύο αφήνονται ως άσκηση. □

**ΟΡΙΣΜΟΣ 59** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F})$  μετρήσιμος χώρος. Ορίζουμε το άνω και το κάτω όριο μιας ακολουθίας συνόλων  $A_1, A_2, \dots \subseteq \Omega$  ως εξής,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \end{aligned}$$

Ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα για τα παραπάνω όρια.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 60** Έστω  $A_1, A_2, \dots \subseteq \mathcal{F}$  όπου  $\mathcal{F}$  σ-άλγεβρα.  
Ισχύει ότι

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Το πρώτο λήμμα των Borel-Cantelli είναι το επόμενο.

**ΛΗΜΜΑ 61 (Λήμμα των Borel-Cantelli)** Αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty,$$

τότε

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n.$$

Άρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) &\leq P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \rightarrow 0 \text{ καθώς } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Αυτό συμβαίνει διότι η ακολουθία  $S_n = \sum_{k=1}^n A_k$  συγκλίνει στο  $S$ , άρα  $\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) = S - \sum_{k=1}^{n-1} A_k \rightarrow 0$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 62** Ορίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου  $A \in \Omega$  ως εξής,

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \omega \in A \\ 0, & \text{αν } \omega \notin A \end{cases}$$

## 8.2 Ανεξαρτησία

Θα εξετάσουμε την έννοια της ανεξαρτησίας δυο και περισσοτέρων ενδεχομένων καθώς και σχετικά θέματα. Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  χώρος πιθανότητας.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 63** Έστω  $P(B) > 0$ . Τότε η

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα του  $A$  δεδομένου του  $B$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 64** Δείξτε ότι  $P(A|\Omega) = P(A)$ . Αν  $B \subseteq A$  και  $P(B) > 0$ , τότε  $P(A|B) = 1$ . Αν  $A \cap B = \emptyset$  και  $P(B) > 0$ , τότε  $P(A|B) = 0$ . Αν  $A \cap B = \emptyset$  και  $P(C) > 0$  τότε  $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$ . Δείξτε ότι  $A \rightarrow P(A|B)$  είναι μέτρο πιθανότητας στο  $\mathcal{F}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 65** Έστω  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ . Δείξτε ότι

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\dots P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Θα δώσουμε καταρχήν μερικά χρήσιμα αποτελέσματα και ορισμούς.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 66** Λέμε ότι τα ενδεχόμενα  $H_1, H_2, \dots$  παριστούν μια διαμέριση του  $\Omega$  αν είναι ανά δύο ξένα και  $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} H_n$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 67 (Ολικής πιθανότητας)** Έστω  $H_1, H_2, \dots$  μια διαμέριση του  $\Omega$  τ.ω.  $P(H_n) \neq 0$  για κάθε  $n$ . Τότε για κάθε ενδεχόμενο  $A$ , έχουμε

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|H_n)P(H_n).$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 68 (Τύπος του Bayes)** Έστω  $H_1, H_2, \dots$  μια διαμέριση του  $\Omega$  τ.ω.  $P(H_n) \neq 0$  και έστω  $P(A) > 0$ . Τότε,

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(A|H_n)P(H_n)}.$$

Παρακάτω δίνουμε τους ορισμούς για την ανεξαρτησία δύο και περισσότερων ενδεχομένων.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 69** Τα ενδεχόμενα  $A, B$  ονομάζονται ανεξάρτητα αν

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Τα ενδεχόμενα  $A_1, A_2, \dots, A_n$  είναι ανεξάρτητα αν για κάθε  $k \leq n$  και για κάθε επιλογή  $k$  ενδεχομένων, η πιθανότητα της τομής τους είναι το γινόμενο των πιθανοτήτων τους. Τα ενδεχόμενα  $A_1, A_2, \dots$  (άπειρα το πλήθος) λέγονται ανεξάρτητα αν οποιοδήποτε υποσύνολο του πεπερασμένου πλήθους είναι ανεξάρτητα.

**ΑΣΚΗΣΗ 70** Έστω  $A, B, C$  ανεξάρτητα. Δείξτε ότι και  $A, B^c$  ανεξάρτητα καθώς και ότι  $A, B \cup C$  ανεξάρτητα.

Το επόμενο θεώρημα είναι το δεύτερο λήμμα των Borel-Cantelli.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 71 (Δεύτερο λήμμα των Borel-Cantelli)**

Έστω ότι τα ενδεχόμενα  $A_n$  είναι ανεξάρτητα. Τότε έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \Rightarrow P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n\right) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right)
\end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right)^c &= P\left(\bigcap_{k=n}^m A_k^c\right) \\
&= P(A_n^c) \dots P(A_m^c) \\
&\leq e^{-\sum_{k=n}^m P(A_k)},
\end{aligned}$$

αφού  $1 - x \leq e^{-x}$  (δείξτε το).

’ρα

$$P\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right)^c \rightarrow 0$$

όταν  $m \rightarrow \infty$ . Οπότε,

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1$$

και τότε  $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$ . □

Παρατηρούμε ότι αν τα ενδεχόμενα  $A_n$  είναι ανεξάρτητα, τότε η πιθανότητα

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n)$$

έχει μόνο δύο πιθανές τιμές, τις 0 και 1.

### 8.3 Τυχαίες Μεταβλητές

Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  χώρος πιθανότητας.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 72** Μια απεικόνιση  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται τυχαία μεταβλητή (ή  $\mathcal{F}$ -μετρήσιμη) αν  $\{\omega \in \Omega : a < X(\omega)\} \in \mathcal{F}$ , για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ .

Παρατηρήστε, ότι μια απεικόνιση  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  μπορεί να μην είναι τυχαία μεταβλητή σε έναν άλλο χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{P})$  με  $\mathcal{G}$   $\sigma$ -άλγεβρα.

**ΑΣΚΗΣΗ 73** Δείξτε ότι  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  είναι τυχαία μεταβλητή αν το σύνολο  $\{X \in B\}$  ανήκει στο  $\mathcal{F}$  για κάθε σύνολο Borel  $B \subseteq \mathbb{R}$ . Επίσης, αν  $X$  είναι μια σταθερή συνάρτηση τότε είναι τυχαία μεταβλητή για κάθε  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{F}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Έστω  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  τυχαία μεταβλητή. Το σύνολο  $\mathcal{C} = \{A \subseteq \mathbb{R} : \{X \in A\} \in \mathcal{F}\}$  είναι  $\sigma$ -άλγεβρα (δείξτε το). Επίσης, αφού είναι τυχαία μεταβλητή τότε  $\{X \in (a, b)\} \in \mathcal{F}$  με  $a < b$  (διότι  $\{X > a\} \in \mathcal{F}, \{X > b\} \in \mathcal{F}$  άρα και  $\{X > a\} \setminus \{X > b\} = \{a < X < b\} \in \mathcal{F}$ . 'ρα τα ανοιχτά διαστήματα ανήκουν στο  $\mathcal{C}$ . Επομένως  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ . Το αντίστροφο είναι προφανές.

Το δεύτερο μέρος αφήνεται ως άσκηση. □

**ΑΣΚΗΣΗ 74** Έστω  $X$  μια τυχαία μεταβλητή ως προς την  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{F}$  και έστω  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$  μια άλλη  $\sigma$ -άλγεβρα. Δείξτε ότι η  $X$  είναι επίσης τυχαία μεταβλητή στην  $\mathcal{G}$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 75** Έστω  $X_n$  ακολουθία τ.μ. Τότε και οι  $\sup X_n, \inf X_n, \limsup X_n, \liminf X_n$  είναι τ.μ. Αν

$X_n \rightarrow X$  σημειακά τότε και  $X$  τ.μ. Επίσης η δείκτρια συνάρτηση  $\mathbb{I}_A(\omega)$  είναι τ.μ. αν  $A \in \mathcal{F}$ . Τέλος, αν  $X, Y$  είναι τ.μ. τότε και οι  $X \pm Y, XY, X \vee Y, X \wedge Y, X/Y$  είναι επίσης τ.μ.

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό της  $\sigma$ -άλγεβρας που παράγεται από μια οικογένεια τ.μ.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 76** Έστω  $X_1, X_2, \dots$  τ.μ. Με  $\sigma(X_1, X_2, \dots)$  ορίζουμε την μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα τ.ω. η  $X_i$  να είναι τ.μ. για κάθε  $i$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 77** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$  τ.μ. και έστω η οικογένεια συνόλων

$$\mathcal{G} = \{(X_1, X_2, \dots, X_n) \in B\}$$

για κάθε  $B$  σύνολο Borel του  $\mathbb{R}^n$ . Αποδεικνύεται ότι η  $\mathcal{G}$  είναι  $\sigma$ -άλγεβρα και ότι  $\mathcal{G} = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ . Επίσης, εξ ορισμού είναι ίση με την  $\sigma(\cup_{i=1}^n \{X_i \in B_i\})$  με  $B_i$  οποιοδήποτε Borel υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  (δείτε 'σκηση 73). Ειδικότερα, για μια τυχαία μεταβλητή  $X$  έχουμε  $\sigma(X) = (\{X \in B\}, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Πράγματι, από

άσκηση 79, η  $X$  θα είναι  $\sigma(X)$ -μετρήσιμη αν περιέχει όλα τα ενδεχόμενα  $\{X \in B\}$  με  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Επιπλέον, αν δείξουμε ότι η  $\mathcal{G} = (\{X \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  είναι  $\sigma$ -άλγεβρα τότε αναγκαστικά θα έχουμε  $\sigma(X) = \mathcal{G}$  αφού η  $\sigma(X)$  είναι η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα στην οποία η  $X$  είναι μετρήσιμη. Θα δείξουμε ότι η  $\mathcal{G}$  είναι  $\sigma$ -άλγεβρα. Προφανώς το  $\Omega \in \mathcal{G}$  διότι το  $\mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  οπότε το ενδεχόμενο  $\{X \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{G}$ . Αν  $A \in \mathcal{G}$  τότε υπάρχει  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  τ.ω.  $A = \{X \in B\}$  οπότε  $A^c = \{X \in B\}^c = \{X \in B^c\}$  και αφού  $B^c \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  τότε και  $A^c \in \mathcal{G}$ . Τέλος, αν  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{G}$  τότε υπάρχουν  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  τ.ω.  $A_i = \{X \in B_i\}$ . Επομένως,  $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} \{X \in B_i\} = \{X \in \cup_{i=1}^{\infty} B_i\}$  και αφού  $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  τότε και  $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{G}$ .

Θα λέμε ότι η  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνάρτηση Borel αν η αντίστροφη εικόνα  $f^{-1}(B)$  ενός οποιοδήποτε συνόλου Borel είναι επίσης Borel.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 78** Δυο τ.μ.  $X, Y$  λέγονται ανεξάρτητες αν για κάθε  $A, B$  Borel σύνολα τα ενδεχόμενα,  $\{X \in A\}$  και  $\{Y \in B\}$  είναι ανεξάρτητα. Λέμε ότι οι τ.μ.

$X_1, X_2, \dots, X_n$  είναι ανεξάρτητες αν για οποιαδήποτε σύνολα Borel  $B_1, B_2, \dots, B_n$  τα ενδεχόμενα  $\{X_1 \in B_1\}, \dots, \{X_n \in B_n\}$  είναι ανεξάρτητα. Τέλος, για μια οποιαδήποτε οικογένεια τ.μ. λέμε ότι είναι ανεξάρτητες αν ένα οποιαδήποτε πεπερασμένο υποσύνολό τους είναι ανεξάρτητες τ.μ. Δυο σ-άλγεβρες  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  λέγονται ανεξάρτητες αν οποιαδήποτε δυο ενδεχόμενα  $A \in \mathcal{F}, B \in \mathcal{G}$  είναι ανεξάρτητα. Παρόμοια (όπως για τις τ.μ.) για  $n$  το πλήθος σ-άλγεβρες καθώς και για οποιαδήποτε οικογένεια σ-αλγεβρών. Θα λέμε επίσης ότι μια τ.μ.  $X$  και μια σ-άλγεβρα  $\mathcal{F}$  είναι ανεξάρτητες αν οι  $\sigma(X), \mathcal{F}$  είναι ανεξάρτητες.

Εν ολίγοις, δυο τ.μ.  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες αν οι σ-άλγεβρες που παράγουν είναι ανεξάρτητες.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 79** Μια οικογένεια συνόλων  $\mathcal{I}$  θα λέγεται π-σύστημα αν είναι κλειστό στις πεπερασμένες τομές, δηλαδή αν  $I, J \in \mathcal{I}$  τότε και  $I \cap J \in \mathcal{I}$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 80** Αν  $X$  είναι μια τ.μ τότε

$$\sigma(X) = (\{X \in B\} : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

όπως είδαμε προηγούμενα. Θα χαρακτηρίσουμε όμως την ίδια  $\sigma$ -άλγεβρα χρησιμοποιώντας την έννοια του  $\pi$ -συστήματος. Έστω  $\mathcal{I} = (\{X \leq x\}, x \in \mathbb{R})$ . Μπορεί να δείξει κάποιος ότι η  $\mathcal{I}$  είναι  $\pi$ -σύστημα. Επιπλέον, η  $\sigma(\mathcal{I}) \subseteq \sigma(X)$  διότι τα σύνολα  $(-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Επίσης, η  $X$  είναι  $\sigma(\mathcal{I})$ -μετρήσιμη αφού περιέχει όλες τις κατάλληλες αντίστροφες εικόνες της  $X$  άρα είναι ίση με την  $\sigma(X)$  αφού αυτή είναι η μικρότερη για την οποία η  $X$  είναι μετρήσιμη. Το ίδιο μπορεί να δείξει κανείς για την  $\sigma(X_1, \dots, X_n)$  με  $X_1, \dots, X_n$  τ.μ. ή αλλιώς αν

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= (\omega \in \Omega : (X_1, \dots, X_n) \in ((-\infty, x_1], \dots, (-\infty, x_n])) \\ &= \left( \bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq x_i\} \right) \end{aligned}$$

τότε  $\sigma(\mathcal{I}) = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .

Θα δώσουμε παρακάτω ένα λήμμα το οποίο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για το χαρακτηρισμό της ανεξαρτησίας τ.μ.

**ΛΗΜΜΑ 81** Έστω  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$  δύο  $\pi$ -συστήματα υποσύνολα

της  $\mathcal{F}$ . Τότε οι  $\sigma(\mathcal{I}), \sigma(\mathcal{J})$  είναι ανεξάρτητες αν τα  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$  είναι ανεξάρτητα.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 82** Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα μπορούμε να πούμε ότι οι  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες αν

$$P(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) = P(\{X \leq x\})P(\{Y \leq y\})$$

για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ . Το ίδιο συμβαίνει και με  $n$  τ.μ. Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$  ανεξάρτητες τ.μ. Θα δείξουμε ότι οι  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n), \sigma(X_{n+1})$  είναι ανεξάρτητες. Πράγματι, σύμφωνα με τα προηγούμενα η  $\sigma(X_1, \dots, X_n) = \sigma(\mathcal{I})$  με

$$\mathcal{I} = (\omega \in \Omega : (X_1, \dots, X_n) \in ((-\infty, x_1], \dots, (-\infty, x_n]))$$

και  $\sigma(X_{n+1}) = \sigma(\mathcal{J})$  με  $\mathcal{J} = (\{X_{n+1} \leq x\}, x \in \mathbb{R})$ .

Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο λήμμα, οι  $\mathcal{F}_n, \sigma(X_{n+1})$  είναι ανεξάρτητες αν τα ενδεχόμενα

$$\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq x_i\}, \{X_{n+1} \leq x_{n+1}\}$$

είναι ανεξάρτητα, το οποίο βέβαια συμβαίνει.

Χρήσιμο επίσης είναι το παρακάτω λήμμα.

**ΛΗΜΜΑ 83** Αν  $X, Y$  δυο τ.μ. τότε η  $X$  είναι  $\sigma(Y)$ -μετρήσιμη αν υπάρχει συνάρτηση Borel τ.ω.  $X = g(Y)$ . Παρόμοια, αν  $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$  τ.μ. τότε η  $X_{n+1}$  είναι  $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ -μετρήσιμη αν υπάρχει συνάρτηση Borel τ.ω.  $X_{n+1} = g(X_1, \dots, X_n)$ .

Αν  $f$  όπως παραπάνω τότε  $\sigma(f(X)) \subseteq \sigma(X)$ . Επιπλέον, αν η  $f$  έχει αντίστροφο και είναι συνάρτηση Borel τότε  $\sigma(f(X)) = \sigma(X)$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 84** Έστω η  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ . Τότε μια τ.μ.  $X$  είναι  $\mathcal{F}_0$ -μετρήσιμη αν είναι σταθερή. Έστω  $X$  μια τ.μ. στον  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  και  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  και ας υποθέσουμε ότι οι  $\sigma(X), \mathcal{G}$  είναι ανεξάρτητες. Τότε δεν μπορεί να είναι και  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη. Επίσης, αν είναι  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη δεν μπορεί να είναι και ανεξάρτητη. Συμβαίνουν και τα δυο ταυτόχρονα μόνο όταν η  $X$  είναι σταθερή. Όμως δεν σημαίνει ότι αν η  $X$  δεν είναι  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη θα είναι αναγκαστικά ανεξάρτητη και το αντίθετο. Τέλος, να επισημάνουμε ότι κάθε  $\mathcal{F}$ -μετρήσιμη  $X$  είναι και  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη όπου  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ ,

ενώ αν οι  $\sigma(X), \mathcal{F}$  είναι ανεξάρτητες τότε και  $\sigma(X), G$  ανεξάρτητες με  $G \subseteq \mathcal{F}$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 85** Αν δεχτούμε ως πείραμα το στρίψιμο ενός νομίσματος, τότε ο δειγματικός χώρος είναι  $\Omega = \{K, \Gamma\}$ . Σε αυτόν το δειγματικό χώρο μπορούμε να προσθέσουμε μια  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{F}$  (η οποία εξαρτάται από το δειγματικό χώρο) και έπειτα ένα μέτρο πιθανότητας στο  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια τ.μ. σε αυτό το πείραμα, η οποία π.χ. να παίρνει την τιμή 1 όταν έρθει Κορώνα και την τιμή -1 όταν έρθει Γράμματα. Αυτή η τ.μ. με τη σειρά της ορίζει την παραγόμενη  $\sigma$ -άλγεβρα (η οποία εξαρτάται από το δειγματικό χώρο). Αν όμως έχουμε και δεύτερο και τρίτο στρίψιμο νομίσματος (και προσθέσουμε και άλλες τ.μ. που αναφέρονται στο δεύτερο και τρίτο στρίψιμο) ο δειγματικός χώρος αλλάζει. Επομένως αλλάζει η  $\sigma$ -άλγεβρα με την οποία θα εφοδιάσουμε τον δειγματικό χώρο και έπειτα το μέτρο πιθανότητας. Τέλος, θα αλλάξει και η  $\sigma$ -άλγεβρα των τ.μ. αφού έχει αλλάξει ο δειγματικός χώρος. Στην περίπτωση που περιγράψα-

με παραπάνω η  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγει η τ.μ.  $X$  είναι  $\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega, K, \Gamma\}$ . Αν έχουμε δυο τ.μ. με τον ίδιο ορισμό όπως πριν αλλά η  $X_1$  να αναφέρεται στο πρώτο στρίψιμο νομίσματος και η δεύτερη, η  $X_2$ , στο δεύτερο στρίψιμο νομίσματος, τότε ο δειγματικός χώρος γίνεται  $\Omega = \{KK, K\Gamma, \Gamma K, \Gamma\Gamma\}$ . Θα περιγράψουμε τώρα τις  $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \sigma(X_1, X_2)$ .

$$\sigma(X_1) = \{\emptyset, \Omega, (KK, K\Gamma), (\Gamma\Gamma, \Gamma K)\},$$

$$\sigma(X_2) = \{\emptyset, \Omega, (KK, \Gamma K), (K\Gamma, \Gamma\Gamma)\},$$

$$\begin{aligned} \sigma(X_1, X_2) = \{ & \emptyset, \Omega, (KK, K\Gamma), (\Gamma\Gamma, \Gamma K), (KK, \Gamma K), (K\Gamma, \Gamma\Gamma), \\ & (KK, \Gamma\Gamma), (KK, K\Gamma, \Gamma K), (KK, K\Gamma, \Gamma\Gamma), \\ & (\Gamma\Gamma, \Gamma K, KK), (\Gamma\Gamma, \Gamma K, K\Gamma), KK, K\Gamma, \Gamma\Gamma, \Gamma K \}. \end{aligned}$$

Οι  $\sigma(X_1), \sigma(X_2)$  είναι  $\sigma$ -άλγεβρες και είναι οι μικρότερες δυνατές έτσι ώστε η  $X_1$  να είναι  $\sigma(X_1)$ -μετρήσιμη και αντίστοιχα για την  $X_2$ . Το ότι η  $\sigma(X_1)$  έχει αυτή την ιδιότητα είναι προφανές, διότι καταρχήν περιέχει όλες τις αντίστροφες εικόνες της  $X_1$  και δεύτερο δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε τίποτε από την  $\sigma(X_1)$  και να παραμείνει  $\sigma$ -άλγεβρα.

Αν ονομάσουμε  $\omega_1 = KK, \omega_2 = K\Gamma, \omega_3 = \Gamma K, \omega_4 =$

ΓΓ τότε η  $\sigma(X_1)$  αποτελείται από υποσύνολα του  $\Omega$  όπως π.χ. το  $(\omega_1, \omega_2)$ . Είναι φανερό πως κανείς κατασκευάζει την  $\sigma(X_1)$  από τον ορισμό. Για να κατασκευάσει κανείς την  $\sigma(X_1, X_2)$  αυτό που πρέπει να κάνει κατ' αρχήν είναι να βάλει τα στοιχεία και των δυο  $\sigma(X_1), \sigma(X_2)$  και έπειτα όλες τις ενώσεις, τομές και συμπληρώματα για να γίνει  $\sigma$ -άλγεβρα. Παρατηρήστε επίσης, ότι η  $X_1$  είναι  $\sigma(X_1)$ -μετρήσιμη αλλά όχι  $\sigma(X_2)$  μετρήσιμη και αντίστροφα και δείξτε ότι και οι δυο είναι  $\sigma(X_1, X_2)$ -μετρήσιμες. Δείξτε το με τους ορισμούς. Επίσης, δείξτε ότι οι  $X_1, X_2$  είναι ανεξάρτητες χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

**ΛΗΜΜΑ 86** Έστω  $X$  τυχαία μεταβλητή. Ισχύει ότι η απεικόνιση

$$P_X : B \rightarrow P(\{X \in B\})$$

είναι μέτρο πιθανότητας στην  $\sigma$ -άλγεβρα των Borel συνόλων του  $\mathbb{R}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Πρέπει να δείξουμε ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες της πιθανότητας. Προφανώς,  $P_X(\mathbb{R}) = 1$ .

Έστω τώρα  $A_1, A_2, \dots$  ανά δυο ξένα *Borel* σύνολα. Τότε και  $\{X \in A_1\}, \{X \in A_2\}, \dots$  είναι επίσης ανά δυο ξένα, οπότε έχουμε,

$$\begin{aligned} P_X \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) &= P \left( \{X \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\} \right) \\ &= P \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} \{X \in A_i\} \right) \text{ (γιατί);} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P_X(A_i). \end{aligned}$$

□

**ΟΡΙΣΜΟΣ 87** Το μέτρο πιθανότητας  $P_X$  που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή  $X$  το ονομάζουμε κατανομή. Η συνάρτηση  $F_X(x) = P_X((-\infty, x])$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ονομάζεται συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$ .

**ΛΗΜΜΑ 88** Η  $F_X$  είναι μη φθίνουσα, και ισχύει ότι

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} F_X(y) = 1$$

και ότι

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F_X(y) = 0$$

Ισχύει επίσης ότι είναι δεξιά συνεχής και ότι είναι συνεχής στο  $y$  αν  $P_X(\{y\}) = 0$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Έστω  $y_1 \leq y_2$ . Έχουμε,

$$F_X(y_1) = P(\{X \leq y_1\}) \leq P(\{X \leq y_2\}) = F_X(y_2).$$

Έστω μια ακολουθία  $y_n \rightarrow \infty$ . Τότε  $F_X(y_n) = P(\{X \leq y_n\}) = P(A_n)$  με  $A_n = \{X \leq y_n\}$ . Η ακολουθία των ενδεχομένων  $A_n$  είναι αύξουσα, άρα  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\Omega) = 1$ .

Έστω μια ακολουθία  $y_n \rightarrow -\infty$ . Τότε  $F_X(y_n) = P(\{X \leq y_n\}) = P(A_n)$  με  $A_n = \{X \leq y_n\}$ . Η ακολουθία  $A_n$  είναι φθίνουσα, άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n) = P(\emptyset) = 0$$

Έστω μια ακολουθία  $y_n \rightarrow y$  από δεξιά. Η ακολουθία των ενδεχομένων  $A_n = \{X \leq y_n\}$  είναι φθίνουσα ακολουθία. Πρέπει να δείξουμε ότι  $P(\{X \leq y\}) =$

$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)$  ή αλλιώς ότι  $\{X \leq y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Έστω  $\omega \in \{X \leq y\}$  τότε και  $\omega \in \{X \leq y_n\}$  άρα  $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ . Από την άλλη μεριά, έστω  $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$  τότε και  $\omega \in A_n$  για κάθε  $n$  οπότε  $\omega \in \{X \leq y\}$ .

Για να δείξουμε και το τελευταίο μέρος της άσκησης αρκεί να δείξουμε ότι η  $F_X$  είναι αριστερά συνεχής αν  $P_X(\{y\}) = 0$ . Έστω μια ακολουθία  $y_n \rightarrow y$  από αριστερά, οπότε  $F_X(y_n) = P(\{X \leq y_n\}) \rightarrow P(\{X < y\}) = F_X(y) - P_X(\{y\})$ . 'ρα έχουμε το ζητούμενο. Παρατηρήστε ότι  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X \leq y_n\} = \{X < y\}$ .  $\square$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 89** Μια τυχαία μεταβλητή  $X$  ονομάζεται διακριτή όταν υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο  $C \subseteq \mathbb{R}$  τ.ω.  $P_X(C) = 1$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 90** Μια τυχαία μεταβλητή  $X$  είναι απόλυτα συνεχής με πυκνότητα  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  αν

$$P_X((a, b]) = \int_a^b f_X(x) dx$$

για κάθε  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 91** Έστω  $X$  μια απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα  $f_X$ . Δείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

Δώστε έναν τύπο για την  $F_X(y)$  συναρτήσει της  $f_X$ . Επίσης, δείξτε ότι η  $F_X$  είναι συνεχής. Δείξτε ότι  $P_X(\{y\}) = 0$  για κάθε  $y \in \mathbb{R}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Από τον ορισμό έχουμε

$$\int_{-n}^n f_X(x) dx = P_X((-n, n])$$

Ήρα έχουμε

$$P_X(\mathbb{R}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_X((-n, n]) = 1$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} F_X(y) &= P_X((-\infty, y]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_X((-n, y]) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^y f_X(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^y f_X(s) ds. \end{aligned}$$

Η  $F_X(y)$  είναι προφανώς συνεχής ως ολοκλήρωμα.

Γράφουμε το

$$y = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(y - \frac{1}{n}, y\right]$$

ρα,

$$\begin{aligned} P_X(\{y\}) &= P_X\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(y - \frac{1}{n}, y\right]\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_X\left(\left(y - \frac{1}{n}, y\right]\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(F_X(y) - F_X\left(y - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

λόγω συνέχειας της  $F_X$ . □

**ΑΣΚΗΣΗ 92** Αν η συνάρτηση κατανομής  $F_X$  μιας τυχαίας μεταβλητής είναι διαφορίσιμη με συνεχή παράγωγο τότε δείξτε ότι η  $X$  είναι απόλυτα συνεχής με πυκνότητα  $f_X(x) = F'_X(x)$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Αφού η  $F_X(x)$  είναι αύξουσα, τότε η  $f_X = F'_X(x)$  είναι θετική.

Έχουμε λοιπόν,

$$P_X((a, b]) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b F'_X(s)ds = \int_a^b f_X(s)ds.$$

Ήρα η πυκνότητα είναι η παράγωγος (όταν υπάρχει) της συνάρτησης κατανομής της τ.μ.  $\square$

**ΑΣΚΗΣΗ 93** Έστω μια τυχαία μεταβλητή  $X$ . Θα λέμε ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  με  $m, \sigma \in \mathbb{R}$  αν είναι απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα,

$$f_X(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

Δείξτε ότι η  $f_X$  είναι πυκνότητα.

**ΑΣΚΗΣΗ 94** Έστω  $X$  μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Υπολογίστε την πυκνότητα της  $Y = e^X$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Η συνάρτηση κατανομής της  $Y$  είναι,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(\{Y \leq y\}) \\ &= P(\{e^X \leq y\}) \\ &= P(\{X \leq \ln y\}) \\ &= \int_0^{\ln y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^{\ln y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Όμως η  $F_Y(y)$  είναι παραγωγίσιμη και η παράγωγός της είναι η πυκνότητα της  $Y$ . Η παράγωγός της είναι

$$F'_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y^2 y^{\ln y}}}.$$

Δώστε με λεπτομέρεια το τέλος της απόδειξης.  $\square$

#### 8.4 Από κοινού κατανομές

**ΟΡΙΣΜΟΣ 95** Τα σύνολα *Borel* του  $\mathbb{R}^2$  είναι τα σύνολα που ανήκουν στην  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από τα ορθογώνια  $(a, b) \times (c, d)$ .

**ΛΗΜΜΑ 96** Έστω  $X, Y$  τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Ισχύει ότι  $\{(X, Y) \in B\} \in \mathcal{F}$  για κάθε σύνολο Borel  $B \subseteq \mathbb{R}^2$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Έστω το  $\mathcal{G} = \{A \subseteq \mathbb{R}^2 : \{(X, Y) \in A\} \in \mathcal{F}\}$  (δείξτε ότι είναι  $\sigma$ -άλγεβρα). Στην  $\mathcal{G}$  ανήκουν όλα τα ορθογώνια της μορφής  $(a, b) \times (c, d)$  διότι  $\{X \in (a, b)\} \in \mathcal{F}$  και  $\{Y \in (c, d)\} \in \mathcal{F}$  άρα και η τομή τους. Επειδή λοιπόν η  $\mathcal{B}$  είναι η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα που περιέχει τα ορθογώνια αυτής της μορφής τότε  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{G}$ . □

**ΟΡΙΣΜΟΣ 97** Η από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών  $X, Y$  είναι ένα μέτρο πιθανότητας  $P_{X,Y}$  στο  $\mathbb{R}^2$  τ.ω.  $P_{X,Y}(B) = P(\{(X, Y) \in B\})$  για κάθε σύνολο Borel του  $\mathbb{R}^2$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 98** Έστω  $X, Y$  τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Δείξτε ότι οι κατανομές  $P_X, P_Y$  δίνονται από την από κοινού κατανομή ως εξής,

$$\begin{aligned} P_X(B) &= P_{X,Y}(B \times \mathbb{R}), \\ P_Y(B) &= P_{X,Y}(\mathbb{R} \times B), \end{aligned}$$

για κάθε Borel σύνολο του  $\mathbb{R}$ . Όταν οι  $P_X, P_Y$  εκφράζονται με αυτό τον τρόπο ονομάζονται περιθώριες κατανομές.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Για κάθε σύνολο Borel  $B \in \mathbb{R}$  έχουμε,

$$\begin{aligned} P_X(B) &= P(\{X \in B\}) \\ &= P(\{X \in B\} \cap \{Y \in \mathbb{R}\}) \\ &= P(\{(X, Y) \in B \times \mathbb{R}\}) \\ &= P_{X,Y}(B \times \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Παρόμοια για την  $P_Y(B)$ . □

**ΟΡΙΣΜΟΣ 99** Οι τυχαίες μεταβλητές  $X, Y$  λέγονται από κοινού συνεχείς αν υπάρχει μια συνάρτηση  $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$ , η οποία λέγεται από κοινού πυκνότητα, τ.ω.

$$P_{X,Y}((a, b] \times (c, d]) = \int_c^d \int_a^b f_{X,Y}(x, y) dx dy.$$

**ΑΣΚΗΣΗ 100** Έστω  $X, Y$  ότι είναι από κοινού συνεχείς τ.μ. Δείξτε ότι οι  $X, Y$  είναι επίσης απόλυτα συνεχείς

με πυκνότητα,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy,$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx.$$

Οι πυκνότητες  $f_X, f_Y$  εκφρασμένες με αυτό τον τρόπο ονομάζονται περιθώριες πυκνότητες.

Στην περίπτωση που οι  $X, Y$  είναι απόλυτα συνεχείς τ.μ. και γνωρίζουμε την από κοινού πυκνότητα μπορούμε να αποφασίσουμε αν είναι ανεξάρτητες με το παρακάτω αποτέλεσμα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 101** Αν  $X, Y$  είναι από κοινού συνεχείς τυχαίες μεταβλητές τότε είναι ανεξάρτητες αν για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Αν γνωρίζουμε την από κοινού πυκνότητα δυο τ.μ. τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την πυκνότητα του αθροίσματός τους με το παρακάτω αποτέλεσμα.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 102** Έστω  $X, Y$  δύο τ.μ. με από κοινού πυκνότητα  $f_{X,Y}$ . Τότε η πυκνότητα του αθροίσματός τους είναι

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z-x) dx.$$

### 8.5 Μέση Τιμή

Θα ορίσουμε την έννοια της μέσης τιμής για τ.μ. Θα το κάνουμε σταδιακά, ορίζοντάς την πρώτα για απλές τ.μ. και έπειτα για οποιαδήποτε τ.μ.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 103** Μια τυχαία μεταβλητή ονομάζεται απλή αν υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο  $C \subseteq \mathbb{R}$  τ.ω.  $P(\{X \in C\}) = 1$ .

Ο παρακάτω ορισμός είναι το πρώτο βήμα για τον τελικό ορισμό μιας οποιαδήποτε τ.μ. (όχι κατά ανάγκη απλής).

**ΟΡΙΣΜΟΣ 104** Για μια απλή τυχαία μεταβλητή με  $n$  διαφορετικές τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_n$  η μέση τιμή του  $X$

ορίζεται ως εξής,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(\{X = x_i\}).$$

Οι παρακάτω ιδιότητες μπορούν να αποδειχθούν σχετικά εύκολα για απλές τ.μ.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 105** Ισχύει ότι  $\mathbb{E}(X+cY) = \mathbb{E}(X)+c\mathbb{E}(Y)$  με  $c \in \mathbb{R}$ . Επίσης αν  $X \geq 0$  τότε και  $\mathbb{E}(X) \geq 0$ . Ακόμη ισχύει ότι  $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$ . Τέλος, αν  $\mathbb{E}(X) = 0$  και  $X \geq 0$  τότε και  $P(X = 0) = 1$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 106** Έστω μια απλή τυχαία μεταβλητή  $X$ . Δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , έχουμε

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^n g(x_i) f(x_i),$$

όπου  $f(x_i) = P(\{X = x_i\})$  και ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας.

**ΑΣΚΗΣΗ 107 (Ανισότητα Schwarz)** Έστω  $X, Y$  απλές τυχαίες μεταβλητές. Δείξτε την ανισότητα,

$$(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2).$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 108** Έστω  $X$  μια απλή τυχαία μεταβλητή με τιμές στο  $(a, b)$  και  $h : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  μια κυρτή συνάρτηση, τότε  $h(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(h(X))$  (ανισότητα Jensen). Ισχύει επίσης ότι  $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A) = P(A)$  για κάθε ενδεχόμενο  $A$ . Τέλος, αν  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε  $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ .

Θα προχωρήσουμε τώρα σε επόμενο βήμα το οποίο είναι οι διακριτές τ.μ.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 109** Μια τυχαία μεταβλητή ονομάζεται διακριτή αν έχει αριθμήσιμο πλήθος τιμών. Έστω μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές  $x_1, x_2, \dots$ . Τότε η μέση τιμή ορίζεται ως εξής,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i)$$

αρκεί να συγκλίνει η σειρά  $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| f(x_i)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 110** Έστω  $X \geq 0$  μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και έστω  $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots$  μια μη φθίνουσα ακολουθία διακριτών τυχαίων μεταβλητών τ.ω  $X_n \uparrow X$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Δείξτε ότι και  $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 111** Η μέση τιμή μιας απόλυτα συνεχούς τυχαίας μεταβλητής  $X$  με πυκνότητα  $f_X$  ορίζεται ως εξής,

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

αρκεί να υπάρχει το ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx$ .

Το επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε τη μέση τιμή μιας θετικής τ.μ. όχι κατά ανάγκη διακριτή ή απόλυτα συνεχής.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 112** Έστω  $X$  θετική τυχαία μεταβλητή. Η μέση τιμή της ορίζεται ως εξής,

$$\mathbb{E}(X) = \sup\{\mathbb{E}(Y) : Y \text{ απλή τ.μ. με } 0 \leq Y \leq X\}.$$

Τέλος, η μέση τιμή μιας οποιαδήποτε τ.μ. ορίζεται ως εξής.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 113** Έστω  $X$  μια τυχαία μεταβλητή. Η μέση τιμή της είναι

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^+) - \mathbb{E}(X^-)$$

όπου  $X^+ = \max(X, 0)$ ,  $X^- = -\min(X, 0)$ . Συμβολίζεται και με  $\int X dP$ .

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα με το οποίο μπορεί κανείς να προσεγγίσει μια θετική τ.μ. με ακολουθία απλών και θετικών τ.μ. Για να το κάνουμε αυτό θα χρειαστούμε την έννοια της σύγκλισης σβ.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 114** Λέμε ότι μια ακολουθία τ.μ.  $X_n$  συγκλίνει σβ σε μια τ.μ.  $X$  αν

$$N = \{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} \text{ έχει } P(N) = 0.$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 115** Για κάθε θετική τ.μ.  $X$  υπάρχει μια ακολουθία  $(X_n)$  θετικών και απλών τ.μ. η οποία συγκλίνει από κάτω στην  $X$ .

Με τον τρόπο αυτό, όταν θέλουμε να αποδείξουμε την ισχύ μιας ιδιότητας για μια θετική τ.μ. θα ξεκινήσουμε με το να την αποδεικνύουμε για θετικές και απλές τ.μ, έπειτα θα προσεγγίζουμε την τ.μ. με ακολουθία θετικών και απλών και τότε χρησιμοποιώντας οριακά

θεωρήματα θα αποδεικνύουμε την ισχύ της ιδιότητας για τη θετική τ.μ.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 116** Αν  $X$  είναι μια θετική τ.μ. και αν  $(X_n)$  είναι μια αύξουσα ακολουθία θετικών απλών τ.μ. που συγκλίνει στην  $X$ , τότε  $\mathbb{E}(X_n) \uparrow \mathbb{E}(X)$ .

Στα επόμενα θα δώσουμε σημαντικές ιδιότητες και αποτελέσματα για τη μέση τιμή.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 117** Θα συμβολίζουμε με  $L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  την οικογένεια των τ.μ. τ.ω.  $\mathbb{E}(X^+), \mathbb{E}(X^-) < \infty$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 118** 1) Αν  $X, Y \in L_1$  τότε  $\mathbb{E}(X + cY) = \mathbb{E}(X) + c\mathbb{E}(Y)$ . Αν  $X \geq 0$  τότε και  $\mathbb{E}(X) \geq 0$ . Αν  $0 \leq X \leq Y$  και  $Y \in L_1$  τότε και  $X \in L_1$  και  $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ .

2)  $X \in L_1$  ανν  $|X| \in L_1$  και ισχύει  $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$ .

3) Αν  $X = Y$  σχεδόν βέβαια (σβ.) τότε και  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$  ( $X = Y$  σβ. αν  $P(X = Y) = 1$ ).

4) (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης) Αν η αύξουσα ακολουθία των θετικών τ.μ.  $(X_n)$  συγκλίνει σβ. στην  $X$  τότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X)$ .

5) (Λήμμα Fatou) Αν οι τ.μ.  $X_n$  είναι τ.ω.  $X_n \geq Y$  σβ. ( $Y \in L_1$ ) έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n).$$

6) (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue) Αν η οικογένεια τ.μ.  $X_n$  συγκλίνει σβ. στην  $X$  και αν  $|X_n| \leq Y$  σβ. με  $Y \in L_1$  τότε  $X_n, X \in L_1$  και  $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \mathbb{E}(X)$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 119** Έστω  $X_n$  μια ακολουθία τ.μ.

1) Αν  $X_n$  είναι θετικές, τότε

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n).$$

2) Αν  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ , τότε και  $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$  συγκλίνει σβ. και ισχύει η ισότητα του 1).

Αν  $X^p \in L_1$  θα λέμε ότι  $X \in L_p$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 120** 1) Αν  $X, Y \in L_2$  έχουμε ότι  $XY \in L_1$  και την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}.$$

2) Έχουμε ότι  $L_2 \subseteq L_1$  και αν  $X \in L_2$  τότε  $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$ .

3) Αν  $X, Y \in L_2$  τότε και  $X + cY \in L_2$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 121 (Ανισότητα Chebyshev)** Ισχύει ότι

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{a^2}.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Εύκολα βλέπουμε ότι  $a^2 \mathbb{I}_{\{|X| \geq a\}} \leq X^2$  οπότε

$$\mathbb{E}(a^2 \mathbb{I}_{\{|X| \geq a\}}) \leq \mathbb{E}(X^2)$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

**ΘΕΩΡΗΜΑ 122** Έστω μια απόλυτα συνεχής τ.μ.  $X$  με πυκνότητα  $f$ . Αν  $\mathbb{E}(h(X)) < \infty$  ή αν  $h$  θετική, τότε

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int h(x)f(x)dx$$

## 8.6 Fubini

Έστω  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  δύο χώροι πιθανότητας. Θέτουμε  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 123** Έστω  $\mathcal{F}$  η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα των υποσυνόλων του  $\Omega$  που περιέχει τα σύνολα της μορφής  $A_1 \times A_2$  για κάθε  $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2$ . Ονομάζουμε την  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -άλγεβρα γινόμενο των  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 124** Έστω  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  δύο χώροι πιθανότητας. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα μέτρο πιθανότητας  $P$  στον  $(\Omega, \mathcal{F})$  με  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$  και  $\mathcal{F}$  την  $\sigma$ -άλγεβρα γινόμενο των  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$  τ.ω.  $P(A \times B) = P_1(A)P_2(B)$  με  $A \in \Omega_1, B \in \Omega_2$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 125 (Fubini)** Έστω  $f \in L^1(\Omega)$ . Τότε ισχύει το εξής,

$$\int_{\Omega} f dP = \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f dP_2 \right) dP_1 = \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f dP_1 \right) dP_2.$$

## 8.7 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  χώρος πιθανότητας. Θα ορίσουμε πρώτα την απλούστερη δεσμευμένη μέση τιμή δεδομένου ενός ενδεχομένου.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 126** Έστω  $X$  μια τυχαία μεταβλητή και  $B$  ένα ενδεχόμενο τ.ω.  $P(B) \neq 0$ . Η δεσμευμένη μέση τιμή του  $X$  δεδομένου του  $B$  ορίζεται ως εξής,

$$\mathbb{E}(X|B) = \frac{\mathbb{E}(\mathbb{I}_B X)}{P(B)}.$$

Τώρα, ορίζουμε τη δεσμευμένη μέση τιμή δεδομένου μιας διακριτής τ.μ.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 127** Έστω  $X$  μια τυχαία μεταβλητή και έστω  $Y$  μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με τιμές  $y_1, y_2, \dots$ . Η δεσμευμένη μέση τιμή  $\mathbb{E}(X|Y)$  του  $X$  δεδομένου  $Y$  ορίζεται να είναι μια τυχαία μεταβλητή τ.ω. για κάθε  $i = 1, 2, \dots$  να έχουμε,

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \mathbb{E}(X|\{Y = y_i\}), \quad \forall \omega \in \{Y = y_i\}.$$

Παρατηρήστε ότι σε αυτή την περίπτωση, η δεσμευμένη μέση τιμή, είναι μια τ.μ.

**ΑΣΚΗΣΗ 128** Έστω  $Y$  μια διακριτή τυχαία μεταβλητή και  $X$  μια τ.μ. Δείξτε ότι

$$\sigma(\mathbb{E}(X|Y)) \subseteq \sigma(Y).$$

Δείξτε επίσης ότι  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$ , όπου  $Y$  διακριτή τυχαία μεταβλητή και  $X$  μια τυχαία μεταβλητή.

**ΑΣΚΗΣΗ 129** Έστω  $Y$  μια διακριτή τυχαία μεταβλητή. Για κάθε  $B \in \sigma(Y)$  δείξτε ότι

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_B \mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_B X).$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 130** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F})$  ένας μετρήσιμος χώρος. Μια μη αρνητική απεικόνιση  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$  λέγεται μέτρο αν

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

όταν  $A_1, A_2, \dots$  είναι μια αριθμήσιμη οικογένεια ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων του  $\mathcal{F}$ .

Η διαφορά, επομένως, με το μέτρο πιθανότητας είναι ότι μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες της μονάδος. Επίσης θα λέγεται πεπερασμένο μέτρο αν δεν παίρνει την τιμή  $\infty$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 131** Έστω  $P, Q$  δύο πεπερασμένα μέτρα. Λέμε ότι το  $Q$  είναι απόλυτα συνεχές ως προς το  $P$

αν  $P(A) = 0$  για  $A \in \mathcal{F}$  να συνεπάγεται ότι και  $Q(A) = 0$ . Το συμβολίζουμε με  $Q \ll P$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 132 (Radon-Niodym)** Έστω  $P$  μέτρο πιθανότητας ορισμένο στο μετρήσιμο χώρο  $(\Omega, \mathcal{F})$  και έστω  $Q$  ένα πεπερασμένο μέτρο στον  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Αν  $Q \ll P$  τότε υπάρχει μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή  $X$  τ.ω.  $Q(A) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A X)$  για κάθε  $A \in \mathcal{F}$ . Επιπλέον, η  $X$  είναι μοναδική σχεδόν βέβαια.

**Παρατήρηση.** Έστω ένας χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  και έστω μια τυχαία μεταβλητή  $X$  η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας την  $f_X$ . Έστω  $Q$  μέτρο πιθανότητας ισοδύναμο με το  $P$ . Η τ.μ.  $X$  δεν θα έχει την ίδια συνάρτηση πυκνότητας κάτω από το μέτρο  $Q$  και επομένως δεν μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}^Q(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

□

**ΘΕΩΡΗΜΑ 133** Έστω  $X$  μια τυχαία μεταβλητή στο χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  και έστω ότι υπάρχει το

$\mathbb{E}(X)$ . Έστω μια  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{G}$  υποσύνολο της  $\mathcal{F}$ . Τότε υπάρχει μοναδική τυχαία μεταβλητή  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$  στο χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{G}, P)$  δηλαδή είναι  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη, με την ιδιότητα

$$\mathbb{E}(X\mathbb{I}_C) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{I}_C)$$

για κάθε  $C \in \mathcal{G}$ , η οποία ονομάζεται δεσμευμένη μέση τιμή της  $X$  δεδομένου της  $\mathcal{G}$ .

Για την απόδειξη του παραπάνω χρειάζεται το θεώρημα των Radon-Niodym.

Η βασική ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιεί η δεσμευμένη μέση τιμή είναι

$$\mathbb{E}(X\mathbb{I}_C) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{I}_C)$$

για κάθε  $C \in \mathcal{G}$ . Ανάμεσα στις υποψήφιες τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν την παραπάνω ιδιότητα είναι η ίδια η  $X$ . Όμως, πρέπει να είναι και  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη το οποίο δεν ισχύει πάντοτε. Αν όμως είναι  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη τότε  $X = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})$ . Ας θυμηθούμε ότι κάθε σταθερή συνάρτηση είναι τ.μ. σε οποιαδήποτε  $\sigma$ -άλγεβρα, οπότε αυτό σημαίνει ότι  $\mathbb{E}(c|\mathcal{G}) = c$  αφού το παραπάνω

θεώρημα μας πληροφορεί ότι η δεσμευμένη μέση τιμή είναι μοναδική.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 134** Αν η  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{G}$  παράγεται από μια τ.μ.  $Y$ , δηλαδή  $\mathcal{G} = \sigma(Y)$ , τότε λέμε ότι η  $\mathbb{E}(X|\mathcal{G})$  είναι η δεσμευμένη μέση τιμή της  $X$  δεδομένου της  $Y$  και συμβολίζεται με  $\mathbb{E}(X|Y)$ . Επομένως η  $\mathbb{E}(X|Y)$  είναι  $\sigma(Y)$ -μετρήσιμη.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 135** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ένας χώρος πιθανότητας,  $\mathcal{G}$  μια  $\sigma$ -άλγεβρα υποσύνολο της  $\mathcal{F}$  και  $B \in \mathcal{F}$ . Υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή  $P(B|\mathcal{G})$   $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη η οποία ονομάζεται δεσμευμένη πιθανότητα του  $B$  δεδομένου του  $\mathcal{G}$ , τ.ω.

$$P(C \cap B) = \mathbb{E}(P(B|\mathcal{G})\mathbb{I}_C) \text{ για κάθε } C \in \mathcal{G}.$$

Επίσης ισχύει ότι  $P(B|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_B|\mathcal{G})$ .

Στα επόμενα δίδονται ιδιότητες για τη δεσμευμένη μέση τιμή.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 136** Αν  $Y_1 \leq Y_2$  τότε και  $\mathbb{E}(Y_1|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(Y_2|\mathcal{G})$ . Επίσης ισχύει ότι  $|\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|Y||\mathcal{G})$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 137** Αν  $a, b \in \mathbb{R}$  τότε  $\mathbb{E}(aY_1 + bY_2|\mathcal{G}) = a\mathbb{E}(Y_1|\mathcal{G}) + b\mathbb{E}(Y_2|\mathcal{G})$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 138** Αν  $Y_n \geq 0$  και  $Y_n \uparrow Y$  τότε  $\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}) \uparrow \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ . Αν  $Y_n \geq 0$  τότε

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n|\mathcal{G}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}).$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 139** Αν  $|Y_n| \leq Z$  με  $\mathbb{E}(Z) < \infty$  και  $Y_n \rightarrow Y$  σβ. τότε  $\mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}) \rightarrow \mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$ . Αν  $Y_n \geq Z$  με  $\mathbb{E}(Z) > -\infty$ , τότε

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow \infty} Y_n|\mathcal{G}).$$

**ΑΣΚΗΣΗ 140** Δείξτε ότι για  $X, Y$  τυχαίες μεταβλητές έχουμε

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$$

Έστω  $X, Y, Z$  τυχαίες μεταβλητές με  $\sigma(Y) \subseteq \sigma(Z)$ . Δείξτε ότι

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Z)|Y) = \mathbb{E}(X|Y)$$

Έστω  $X, Y$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Δείξτε ότι

$$\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$$

**ΑΣΚΗΣΗ 141** Έστω  $X, Y, Z$  τυχαίες μεταβλητές. Αν  $\sigma(Z) \subseteq \sigma(Y)$  και η  $Z$  είναι φραγμένη (ή αν  $\mathbb{E}|ZX| < \infty$ ) τότε δείξτε ότι  $\mathbb{E}(ZX|Y) = Z\mathbb{E}(X|Y)$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 142** Έστω  $X, Y$  τυχαίες μεταβλητές και έστω  $f_{X,Y}(x, y)$  η από κοινού πυκνότητα. Ορίζουμε τη δεσμευμένη πυκνότητα του  $X$  δεδομένου του  $Y$  ως εξής,

$$h(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

**ΑΣΚΗΣΗ 143** Δείξτε ότι

$$\mathbb{E}(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} xh(x|Y)dx.$$

**ΑΣΚΗΣΗ 144** Έστω  $X, Y$  από κοινού συνεχείς και ανεξάρτητες. Δείξτε ότι  $\mathbb{E}(X|Y) = \mathbb{E}(X)$  χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 145 (Ανισότητα Jensen)** Έστω  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  κυρτή και έστω  $X, \phi(X)$  ολοκληρώσιμες τ.μ. Για κάθε  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$  έχουμε,

$$\phi(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(\phi(X)|\mathcal{G}).$$

## 8.8 Οριακά Θεωρήματα

**ΠΡΟΤΑΣΗ 146** Έστω  $X$  μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη μέση τιμή. Τότε,

$$P(\{X \geq C\}) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{C},$$

για κάθε  $C > 0$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 147** Έστω  $X$  μια τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη μέση τιμή και διακύμανση. Τότε,

$$P(\{|X - \mathbb{E}(X)| \geq C\}) \leq V(X)/C^2,$$

για κάθε  $C > 0$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 148** Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $X_n$  λέγεται ότι συγκλίνει κατά πιθανότητα στο  $X$  αν για κάθε  $\varepsilon > 0$ , έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\{|X_n - X| < \varepsilon\}) = 1.$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 149** Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών  $X_n$  λέγεται ότι συγκλίνει με πιθανότητα 1 ή σχεδόν βέβαια σε μια τυχαία μεταβλητή  $X$  αν

$$P(\{\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X\}) = 1.$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 150** Λέμε ότι μια ακολουθία τ.μ.  $X_n$  συγκλίνει στον  $L_p$  στην τ.μ.  $X$  αν  $|X_n|, |X|$  ανήκουν στον  $L_p$  και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0.$$

**ΑΣΚΗΣΗ 151** Δείξτε ότι  $X_n \rightarrow X$  κατά πιθανότητα αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} \right) = 0.$$

**ΑΣΚΗΣΗ 152** Δείξτε ότι αν  $X_n \rightarrow X$  στον  $L_p$  ή σχεδόν βέβαια τότε και  $X_n \rightarrow X$  κατά πιθανότητα.

**ΑΣΚΗΣΗ 153** Έστω  $X_n \rightarrow X$  κατά πιθανότητα. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία  $n_k$  τ.ω.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} X_{n_k} = X \text{ σχεδόν βέβαια.}$$

**ΑΣΚΗΣΗ 154** Έστω ότι  $X_n \rightarrow X$  κατά πιθανότητα και έστω  $|X_n| \leq Y$  με  $Y \in L_p$ . Τότε και η  $|X|$  είναι στον  $L_p$  και  $X_n \rightarrow X$  στον  $L_p$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 155** Έστω  $f$  συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν  $X_n \rightarrow X$  σχεδόν βέβαια (κατά πιθανότητα) τότε και  $f(X_n) \rightarrow f(X)$  σχεδόν βέβαια (κατά πιθανότητα).

**ΟΡΙΣΜΟΣ 156** Έστω  $m_n$  και  $m$  μέτρα πιθανότητας στον  $\mathbb{R}$ . Λέμε ότι η  $m_n$  συγκλίνει ασθενώς στο  $m$  αν  $\int f(x)dm_n \rightarrow \int f(x)dm$  για κάθε πραγματική, συνεχής και φραγμένη συνάρτηση στον  $\mathbb{R}$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 157** Έστω  $X_n$  μια τ.μ. στον  $\mathbb{R}$ . Λέμε ότι η  $X_n$  συγκλίνει κατά κατανομή στην  $X$  αν η ακολουθία κατανομών  $P_{X_n}$  συγκλίνει ασθενώς στην κατανομή  $P_X$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 158** Έστω  $X_n, X$  τ.μ. Τότε η  $X_n$  συγκλίνει κατά κατανομή στην  $X$  αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X)),$$

για κάθε συνεχή και φραγμένη συνάρτηση στον  $\mathbb{R}$ .

Σημειώστε ότι η σύγκλιση κατά κατανομή δεν απαιτεί τις τ.μ. μεταβλητές να βρίσκονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας.

**ΑΣΚΗΣΗ 159** Έστω  $X_n, X$  ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Αν η  $X_n \rightarrow X$  κατά πιθανότητα τότε και  $X_n \rightarrow X$  κατά κατανομή.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 160** Έστω  $X_n, X$  τ.μ. Αν  $X_n \rightarrow X$  κατά κατανομή τότε και  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$  για κάθε  $x$  στο πυκνό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  που αποτελείται από τα σημεία συνέχειας της  $F$ . Αντίστροφα, αν  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$  για κάθε  $x$  σε ένα πυκνό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  τότε  $X_n \rightarrow X$  κατά κατανομή.

**ΑΣΚΗΣΗ 161** Έστω μια ακολουθία απόλυτα συνεχών τ.μ.  $X_n, X$  με πυκνότητες  $f_n, f$ . Αν η ακολουθία πυκνοτήτων  $f_n$  συγκλίνει σημειακά στην  $f$ , τότε και  $X_n \rightarrow X$  κατά κατανομή.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 162 (Helly's selection theorem)** Έστω  $m_n$  μια ακολουθία μέτρων πιθανότητας στον  $\mathbb{R}$  και

έστω

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_n m_n([-a, a]^c) = 0. \quad (11)$$

Τότε υπάρχει υπακολουθία  $n_k$  τ.ω. η  $m_{n_k}$  να συγκλίνει ασθενώς.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 163** Έστω  $X_n$  μια ακολουθία τ.μ. Τότε  $X_n \rightarrow X$  κατά κατανομή αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(g(X_n)) = \mathbb{E}(g(X))$$

για όλες τις φραγμένες, Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις  $g$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 164** Έστω  $X_n, Y_n$  δύο ακολουθίες τ.μ. με  $X_n \rightarrow X$  κατά κατανομή και  $|X_n - Y_n| \rightarrow 0$  κατά πιθανότητα. Δείξτε ότι  $Y_n \rightarrow X$  κατά κατανομή.

## 8.9 Χαρακτηριστικές Συναρτήσεις

**ΘΕΩΡΗΜΑ 165** Έστω  $X$  μια τ.μ. με τιμές στο  $\mathbb{R}$  και με κατανομή  $P_X$ . Έστω  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση Borel.

Ισχύει ότι

$$\mathbb{E}(h(X)) = \int h(x)dP_X.$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 166** Έστω  $m$  ένα μέτρο πιθανότητας στο  $\mathbb{R}$ . Ο μετασχηματισμός *Fourier* του  $m$  συμβολίζεται με  $\hat{m}$  και είναι μια συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$  η οποία δίνεται ως εξής,

$$\hat{m}(u) = \int e^{iux} dm.$$

**ΛΗΜΜΑ 167** Έστω  $m$  ένα μέτρο πιθανότητας στο  $\mathbb{R}$ . Τότε η  $\hat{m}$  είναι φραγμένη, συνεχής συνάρτηση με  $\hat{m}(0) = 1$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 168** Έστω  $X$  μια τυχαία μεταβλητή. Τότε η  $\phi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  που ορίζεται ως εξής,

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \mathbb{E}(\cos(tX)) + i\mathbb{E}(\sin(tX)),$$

για κάθε  $t \in \mathbb{R}$  ονομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση του  $X$ .

Σημειώστε ότι  $\mathbb{E}(e^{itX}) = \int e^{itx} dP_X$ . ΄ρα η χαρακτηριστική συνάρτηση της  $X$  είναι ο μετασχηματισμός Fourier της κατανομής της  $X$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 169** Δείξτε ότι για κάθε τυχαία μεταβλητή  $X$ , έχουμε

- a)  $\phi_X(0) = 1$ ,
- b)  $|\phi_X(t)| \leq 1$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ ,
- c)  $\phi_X(-t) = \overline{\phi_X(t)}$  για κάθε  $t \in \mathbb{R}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 170** Έστω  $X, Y$  δύο τυχαίες μεταβλητές τ.ω.  $Y = aX + b$ , με  $a, b \in \mathbb{R}$ . Δείξτε ότι  $\phi_Y(t) = e^{itb} \phi_{aX}(t)$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 171** Αν  $X$  είναι μια τυχαία μεταβλητή τ.ω.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_X(t)| dt < \infty$$

τότε η  $X$  έχει μια απόλυτα συνεχή κατανομή με πυκνότητα,

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi_X(t) dt.$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 172** Η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$  υπολογίζεται από τη χαρακτηριστική της συνάρτηση. Η συνάρτηση κατανομής  $F_X$  δίνεται ως εξής,

$$F_X(y) - F_X(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx} - e^{-ity}}{it} \phi_X(t) dt,$$

για κάθε  $x, y$  όπου η  $F_X$  είναι συνεχής.

**ΑΣΚΗΣΗ 173** Αποδείξτε το παραπάνω θεώρημα στην περίπτωση που η  $X$  είναι απόλυτα συνεχής τ.μ.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 174** Αν  $X$  είναι μια τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα  $f_X$ , τότε  $\phi_X(t) \neq 1$  για κάθε  $t \neq 0$ . Αν  $X$  είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στο  $\mathbb{R}$  και  $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ , τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση  $\phi_X(u)$  είναι  $n$ -φορές παραγωγίσιμη και

$$\mathbb{E}(X^n e^{iuX}) = \frac{1}{i^n} \phi_X^{(n)}(u).$$

**ΑΣΚΗΣΗ 175** Έστω  $X$  μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή. Να υπολογίσετε τη χαρακτηριστική της συνάρτηση.

**ΑΣΚΗΣΗ 176** Αν  $X, Y$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 177** Αν δύο μέτρα πιθανότητας έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό *Fourier* τότε είναι ίσα.

### 8.10 Ο Νόμος των μεγάλων αριθμών

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι ο ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 178** Έστω  $X_1, \dots, X_n$  ανεξάρτητες και ισόνομες (έχουν την ίδια κατανομή) με πεπερασμένη μέση τιμή και έστω  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Θέτουμε  $a = \mathbb{E}(X_i)$  το οποίο είναι το ίδιο για κάθε  $i$ . Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left\{ \left| \frac{S_n}{n} - a \right| < \varepsilon \right\} \right) = 1,$$

για κάθε  $\varepsilon > 0$ .

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι ο ισχυρός νόμος των μεγάλων αριθμών του Kolmogorov.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 179** Έστω  $X_1, \dots, X_n$  ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και έστω  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Τότε η μέση τιμή  $\mathbb{E}(X_i) = a$  υπάρχει ανν,

$$P(\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = a\}) = 1.$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 180 (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)**  
Έστω  $X_n$  μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. με

$$\mathbb{E}(X_k) = a$$

και

$$\text{Var}(X_k) = s^2$$

με  $0 < s^2 < \infty$ . Έστω

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

και έστω

$$Y_n = \frac{S_n - na}{s\sqrt{n}}$$

Τότε η  $Y_n$  συγκλίνει κατά κατανομή στην  $Y$ , η οποία ακολουθεί την κανονική κατανομή.

## 9 Στοχαστικές Διαδικασίες Διακριτού Χρόνου

Θα εργαζόμαστε σε ένα χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .  
Έστω  $X_n$  ακολουθία τ.μ.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 181** Έστω  $\omega \in \Omega$ . Η ακολουθία αριθμών  $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega), \dots$  ονομάζεται τροχιά.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 182** Μια ακολουθία  $\sigma$ -άλγεβρων  $\mathcal{F}_i$  στο  $\Omega$  τ.ω.  $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{F}_{i+1} \subseteq \mathcal{F}$  για κάθε  $i$  ονομάζεται φιλτράρισμα.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 183** Έστω  $X_i$  μια ακολουθία τ.μ. και  $\mathcal{F}_i$  ένα φιλτράρισμα. Θα λέμε ότι η  $X_i$  είναι προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_i$  όταν η  $X_i$  είναι  $\mathcal{F}_i$  μετρήσιμη ή αλλιώς είναι τ.μ. στο χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}_i, P)$ .

Όπως είδαμε, αν μια απεικόνιση είναι τ.μ. σε μια  $\sigma$ -άλγεβρα τότε είναι σίγουρα και για μια που είναι υπερσύνολο. Για μια όμως που είναι υποσύνολο δεν ισχύει κατά ανάγκη. Η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα που ισχύει αυτό είναι η  $\sigma(X)$ . Από κει και κάτω παύει να είναι τ.μ.

Έστω τώρα μια ακολουθία τ.μ.  $X_i$ . Η  $X_1$  είναι  $\sigma(X_1)$  μετρήσιμη και η  $X_2$  είναι  $\sigma(X_2)$  μετρήσιμη. Όμως, δεν έχουμε κατά ανάγκη  $\sigma(X_1) \subseteq \sigma(X_2)$  άρα η  $X_1$  δεν είναι κατά ανάγκη  $\sigma(X_2)$  μετρήσιμη. Μπορούμε όμως να κατασκευάσουμε μια τρίτη  $\sigma$ -άλγεβρα την  $\sigma(X_1, X_2)$  η οποία είναι η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα τ.ω. οι  $X_1, X_2$  να είναι τ.μ. σε αυτή και ταυτόχρονα  $\sigma(X_1) \subseteq \sigma(X_1, X_2)$ . Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε ένα φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$  τ.ω. η  $X_n$  να είναι προσαρμοσμένη σε αυτή. Αυτό το φιλτράρισμα είναι το μικρότερο δυνατό όπως εξηγήσαμε παραπάνω.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 184** Έστω  $X_i$  μια ακολουθία τ.μ. Θα λέμε ότι είναι *martingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots$  αν ισχύουν τα παρακάτω,

- 1)  $X_n \in L^1$  για κάθε  $n$  ( $\mathbb{E}|X_n| < \infty$ ),
- 2) η  $X_n$  είναι προσαρμοσμένη στο  $\mathcal{F}_n$ ,
- 3)  $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$  σβ. για κάθε  $n$ .

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 185** Μια ακολουθία τ.μ. είναι *martingale* αν ισχύει

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n.$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής,

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A X_{n+1}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A X_n) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{F}_n.$$

Πράγματι, αν ξεκινήσουμε με τον πρώτο ορισμό τότε η δεσμευμένη μέση τιμή  $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)$  έχει την εξής ιδιότητα (από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής),

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A X_{n+1}) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{F}_n.$$

Το πρώτο μέλος όμως είναι ίσο με  $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A X_n)$ . 'ρα δείξαμε το ευθύ. Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι  $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A X_{n+1}) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A X_n)$  για κάθε  $A \in \mathcal{F}_n$ . Το αριστερό μέλος όμως είναι ίσο (από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής) με  $\mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))$ . Διαλέγοντας

$$A = \{\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) - X_n \geq 0\}$$

και έπειτα την αντίστροφη ανισότητα έχουμε ότι  $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ . Επομένως, ισχύει και το αντίστροφο.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 186** Θα κατασκευάσουμε μια ακολουθία τ.μ.  $X_n$  και ένα φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$  τ.ω. να είναι *martingale* σε αυτό το φιλτράρισμα. Έστω  $X_1, \dots, X_n, \dots$  ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με  $\mathbb{E}(X_n) = 0$  για κάθε  $n$  και  $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ . Θέτουμε,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  και  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ . Θα δείξουμε ότι η  $S_n$  είναι προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_n$ . Η  $S_1 = X_1$  και είναι  $\mathcal{F}_1 = \sigma(X_1)$ -μετρήσιμη. Η  $S_2 = X_1 + X_2$  είναι  $\mathcal{F}_2$ -μετρήσιμη, διότι οι  $X_1, X_2$  είναι  $\mathcal{F}_2$ -μετρήσιμες (η κάθε μια χωριστά) άρα και το άθροισμά τους (δείτε προγενέστερο θεώρημα). Επίσης, ανήκει στον  $L^1$  διότι  $\mathbb{E}(|S_n|) \leq \mathbb{E}(|X_1|) + \dots + \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ . Θα δείξουμε ότι είναι *martingale*.

Έχουμε δείξει ότι αν  $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$  είναι ανεξάρτητες τ.μ. τότε οι  $\sigma(X_1, X_2, \dots, X_n), \sigma(X_{n+1})$  είναι ανεξάρτητες (Παρατήρηση 82) και θα το χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε ότι είναι *martingale*. Έχουμε λοιπόν,

$$\mathbb{E}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(S_n | \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = S_n + \mathbb{E}(X_{n+1}) = 0.$$

Άρα, η  $S_n$  είναι *martingale* αν  $\mathbb{E}(X_n) = 0$  για κάθε  $n$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 187** Έστω  $X \in L^1$  τ.μ. και έστω  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n, \dots$  ένα φιλτράρισμα. Θέτουμε  $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$ . Δείξτε ότι είναι *martingale*.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Εκ κατασκευής, η  $X_n$  είναι  $\mathcal{F}_n$  μετρήσιμη. Επίσης,  $|X_n| = |\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{F}_n)$ , οπότε  $\mathbb{E}(|X_n|) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X||\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(|X|) < \infty$ . Τέλος έχουμε ότι  $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}_{n+1})|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) = X_n$ . Δείξτε σε κάθε βήμα ποιες ακριβώς ιδιότητες έχουμε χρησιμοποιήσει.  $\square$

**ΑΣΚΗΣΗ 188** Έστω  $X_n$  *martingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$ . Δείξτε ότι  $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n)$  για κάθε  $n$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Ξεκινάμε με την ισότητα  $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$  και παίρνουμε τη μέση τιμή κατά μέλη,  $\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X_{n+1})$  για κάθε  $n$ . Εξηγήστε κάθε βήμα.  $\square$

**ΑΣΚΗΣΗ 189** Έστω  $X_n$  *martingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$ . Δείξτε ότι η  $X_n$  είναι *martingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{G}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Η  $X_n$  είναι  $\mathcal{F}_n$  μετρήσιμη αλλά και  $\mathcal{G}_n$  μετρήσιμη, άρα  $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$  διότι  $\mathcal{G}_1 = \sigma(X_1) \subseteq \mathcal{F}_1$  αφού η  $\sigma(X_1)$  είναι η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα στην οποία η  $X_1$  είναι τ.μ. Επίσης,  $\mathcal{G}_2 = \sigma(X_1, X_2)$  είναι η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα στην οποία οι  $X_1, X_2$  είναι τ.μ. Όμως είναι τ.μ. και στην  $\mathcal{F}_2$  άρα  $\mathcal{G}_2 \subseteq \mathcal{F}_2$ . Με το ίδιο σκεπτικό δείχνουμε ότι  $\mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{F}_n$ . Αυτό ακριβώς θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Έχουμε λοιπόν,

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)|\mathcal{G}_n) = \mathbb{E}(X_n|\mathcal{G}_n) = X_n.$$

Εξηγήστε κάθε βήμα. □

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 190** Θεωρούμε την  $S_n$  η οποία υποθέτουμε ότι είναι ένας συμμετρικός τυχαίος περίπατος, δηλαδή,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  όπου  $X_1, X_2, \dots$  είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων (δηλαδή με την ίδια κατανομή) τ.μ. τ.ω.

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}.$$

Θα δείξουμε ότι  $S_n^2 - n$  είναι *martingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Πράγματι, αφού  $S_n^2 - n = (X_1 + \dots + X_n)^2 - n$  δηλαδή είναι συνάρτηση της ακολουθίας τ.μ.  $X_1, \dots, X_n$  οι οποίες είναι  $\mathcal{F}_n$  μετρήσιμες τότε και η  $S_n^2 - n$  είναι  $\mathcal{F}_n$  μετρήσιμη, δηλαδή είναι προσαρμοσμένη στο δοθέν φιλτράρισμα. Επίσης,  $|S_n| \leq n$  και επομένως  $\mathbb{E}(|S_n^2 - n|) \leq \mathbb{E}(S_n^2) + n \leq n^2 + n < \infty$ , άρα  $S_n \in L^1$  για κάθε  $n$ . Επίσης, αφού  $S_n$  είναι  $\mathcal{F}_n$ -μετρήσιμη το ίδιο συμβαίνει και με την  $S_n^2$  αφού η  $f(x) = x^2$  είναι συνάρτηση Borel. Τέλος, να σημειώσουμε ότι  $\mathbb{E}(X_n) = 0$  και  $\mathbb{E}(X_n^2) = 1$  αφού οι  $X_n, X_n^2$  είναι απλές τ.μ. και έχουμε  $\mathbb{E}(X_n) = 1 \cdot P(\{X_n = 1\}) + (-1) \cdot P(\{X_n = -1\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ . Παρόμοια για την  $X_n^2$  με τη διαφορά ότι παίρνει την τιμή 1 σβ, οπότε  $\mathbb{E}(X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) = 1$  αφού οι  $\sigma(X_{n+1}^2), \mathcal{F}_n$  είναι ανεξάρτητες καθότι  $\sigma(X_{n+1}^2) \subseteq \sigma(X_{n+1})$ . Άρα,

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) + 2\mathbb{E}(X_{n+1}S_n | \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(S_n^2 | \mathcal{F}_n) = 1 + S_n^2.$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει τη γραμμικότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής, ότι  $S_n^2$  είναι  $\mathcal{F}_n$  μετρήσιμη, ότι  $\mathbb{E}(X_n) = 0$  και  $\mathbb{E}(X_n^2) = 1$ . Επίσης, όπως σε προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε ότι  $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0$  διότι

$X_1, \dots, X_{n+1}$  ανεξάρτητες.

Οπότε αυτό σημαίνει ότι  $\mathbb{E}(S_{n+1}^2 - n - 1 | \mathcal{F}_n) = S_n^2 - n$  άρα  $S_n^2 - n$  είναι *martingale*.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 191** Λέμε ότι η ακολουθία  $X_1, X_2, \dots$  είναι *supermartingale* (*submartingale*) ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$  αν

- 1)  $X_n \in L^1$  για κάθε  $n$ ,
- 2) η  $X_n$  είναι προσαρμοσμένη στο  $\mathcal{F}_n$ ,
- 3)  $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n$  ( $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq X_n$ ) σβ. για κάθε  $n$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 192** Έστω  $X_n \in L^2$  ακολουθία τ.μ. Δείξτε ότι αν η  $X_n$  είναι *martingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$  τότε η  $X_n^2$  είναι *submartingale* ως προς το ίδιο φιλτράρισμα.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Αφού η  $X_n$  είναι προσαρμοσμένη στο  $\mathcal{F}_n$  τότε και η  $X_n^2$  είναι. Επίσης, αφού  $X_n \in L^2$  τότε και  $X_n^2 \in L^1$ . Για την τρίτη ιδιότητα θα χρησιμοποιήσουμε

την ανισότητα Jensen. Η  $\phi(x) = x^2$  είναι κυρτή οπότε έχουμε,

$$X_n^2 = (\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n))^2 \leq \mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n).$$

Επομένως, η  $X_n^2$  ικανοποιεί και τις τρεις ιδιότητες του ορισμού του submartingale □

### 9.1 Τυχερά παιχνίδια

Ας δούμε μια εφαρμογή των παραπάνω σε ένα τυχερό παιχνίδι (π.χ. ρουλέτα ή ζάρια ή κάτι άλλο). Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε παιχνίδι αντιστοιχούμε μια τ.μ.  $X_n$  η οποία μας πληροφορεί για το αν κέρδισε ή έχασε ο παίκτης, δηλαδή π.χ. παίρνει την τιμή 1 αν κερδίσει και την τιμή -1 αν χάσει. Υποθέτουμε αρχικά ότι ποντάρει το ίδιο σε κάθε παιχνίδι. Τότε, έπειτα από  $n$  παιχνίδια θα έχει το εξής κέρδος,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , το οποίο βέβαια μπορεί να είναι και αρνητικό. Θεωρούμε το φίλτραρισμα  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  και θέτουμε  $S_0 = 0$  και  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ . Τότε, κατά το τέλος του  $n$  παιχνιδιού η  $\mathcal{F}_n$  μπορεί να θεωρηθεί ως η πληροφορία που έχει μαζέψει ο παίκτης μέχρι αυτή την στιγμή. Θα θεωρούμε

ότι το παιχνίδι είναι δίκαιο, όταν η γνώση των προηγούμενων παιχνιδιών δεν μπορεί να παίξει κάποιο ρόλο και αυτό, μαθηματικά, μπορεί να αποτυπωθεί με την εξής ισότητα,  $\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_{n-1}) = S_{n-1}$ , δηλαδή η μέση τιμή της  $S_n$  δεδομένου της πληροφορίας των προηγούμενων παιχνιδιών θα πρέπει να είναι ίση με την προηγούμενη. Αν όμως ισχύει ότι  $\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_{n-1}) \geq S_{n-1}$  τότε το παιχνίδι είναι υπέρ του παίκτη αλλιώς στην αντίστροφη ανισότητα είναι κατά του παίκτη.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι σε κάθε παιχνίδι ο παίκτης αποφασίζει να ποντάρει διαφορετικά, όχι το ίδιο, και ας συμβολίσουμε με  $a_n$  το κάθε ποντάρισμα. Σε κάθε παιχνίδι, π.χ. στο  $n$  ο παίκτης γνωρίζει τι έχει κερδίσει στα  $n-1$  παιχνίδια και με βάση αυτήν τη γνώση μπορεί να αποφασίσει το επόμενο ποντάρισμα. Μαθηματικά αυτό μπορεί να αποτυπωθεί με το ότι η  $a_n$  είναι  $\mathcal{F}_{n-1}$  μετρήσιμη.

Έτσι μπορούμε να δώσουμε τον επόμενο ορισμό.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 193** *Μια στρατηγική παιχνιδιού (ή αλλιώς προβλέψιμη ακολουθία)  $a_1, a_2, \dots$  ως προς το φιλτράρι-*

σμα  $\mathcal{F}_n$  είναι μια ακολουθία τ.μ. τ.ω.  $a_n$  είναι  $\mathcal{F}_{n-1}$  μετρήσιμη.

Αν λοιπόν κάποιος παίκτης ακολουθήσει μια στρατηγική  $a_1, a_2, \dots$  τότε το κέρδος θα είναι  $D_n = a_1(S_1 - S_0) + \dots + a_n(S_n - S_{n-1})$ . Μπορεί να αποδειχθεί ότι όταν η  $a_1, a_2, \dots$  είναι φραγμένη ακολουθία και όταν η  $S_n$  είναι martingale τότε και η  $D_n$  είναι martingale.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 194** Έστω  $a_1, a_2, \dots$  μια στρατηγική παιχνιδιού.

- 1) Αν  $a_1, a_2, \dots$  είναι φραγμένη ακολουθία και  $S_n$  είναι martingale τότε και η  $D_n$  είναι martingale,
- 2) Αν  $a_1, a_2, \dots$  είναι φραγμένη ακολουθία θετικών όρων και  $S_n$  είναι supermartingale τότε και η  $D_n$  είναι supermartingale,
- 3) Αν  $a_1, a_2, \dots$  είναι φραγμένη ακολουθία θετικών όρων και  $S_n$  είναι submartingale τότε και η  $D_n$  είναι submartingale.

Αυτό σημαίνει ότι αν το παιχνίδι είναι δίκαιο στην περίπτωση που ο παίκτης ποντάρει ισόποσα τότε είναι δίκαιο ακόμη και αν ποντάρει διαφορετικά κάθε φορά. Επίσης, ένα μη δίκαιο παιχνίδι παραμένει μη δίκαιο κάτω από οποιαδήποτε στρατηγική παιχνιδιού. Ας δούμε την απόδειξή του.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θα δείξουμε το 1, τα υπόλοιπα αφήνονται ως άσκηση. Παρατηρούμε ότι  $a_n, D_{n-1}$  είναι  $\mathcal{F}_{n-1}$  μετρήσιμες. Οπότε έχουμε,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(D_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}(D_{n-1} + a_n(S_n - S_{n-1})|\mathcal{F}_{n-1}) \\ &= D_{n-1} + a_n(\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_{n-1}) - S_{n-1}).\end{aligned}$$

Αν λοιπόν  $S_n$  είναι martingale τότε  $a_n(\mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_{n-1}) - S_{n-1}) = 0$  άρα και η  $D_n$  είναι martingale  $\square$

**Σημείωση** Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που υποθέσουμε ότι  $a_n, S_n \in L^2$  για κάθε  $n$ .

## 9.2 Χρόνος Στάσης

**ΟΡΙΣΜΟΣ 195** *Μια τ.μ.  $r$  με τιμές στο  $\{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$  ονομάζεται χρόνος στάσης ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$  αν για κάθε  $n$ ,  $\{r = n\} \in \mathcal{F}_n$ .*

Στον παραπάνω ορισμό είναι το ίδιο με το να υποθέσουμε ότι  $\{r \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ . Πράγματι, έστω  $\{r = n\} \in \mathcal{F}_n$  τότε  $\{r \leq n\} = \bigcup_{k=1}^n \{r = k\} \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$ . Αντίστροφα, αν  $\{r \leq n\} \in \mathcal{F}_n$  τότε και  $\{r \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$  άρα και  $\{r \leq n\} \setminus \{r \leq n-1\} = \{r = n\} \in \mathcal{F}_n$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 196** *Ας υποθέσουμε ότι στρίβουμε ένα νόμισμα συνεχώς και ότι κερδίζουμε 1 μονάδα όταν έρχεται Γράμματα ενώ χάνουμε μια μονάδα όταν έρχεται Κορώνα. Έστω ότι ξεκινάμε με 5 μονάδες και αποφασίζουμε εκ των προτέρων ότι θα σταματήσουμε το παιχνίδι μόνον όταν γίνουν 10 μονάδες ή τα χάσουμε όλα. Αν  $X_n$  είναι η ποσότητα των μονάδων που έχουμε στο βήμα  $n$  τότε ο χρόνος που θα σταματήσουμε το παιχνίδι θα είναι  $r = \min\{n : X_n = 10 \text{ ή } 0\}$  και ονομάζεται ο χρόνος πρώτης επιτυχίας. Μπορεί να δείξει κανείς ότι είναι ένας χρόνος στάσης ως προς το φιλ-*

τράρισμα  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ . Πράγματι, έχουμε το  
εξής,

$$\{r = n\} = \{0 < X_1 < 10\} \cap \dots \cap \{0 < X_{n-1} < 10\} \cap \{X_n = 10 \text{ ή } 0\}.$$

Κάθε ενδεχόμενο στο δεξί μέλος ανήκει στην  $\mathcal{F}_n$  άρα και η τομή τους. Επομένως η  $r$  ικανοποιεί τον ορισμό του χρόνου στάσης.

**ΑΣΚΗΣΗ 197** Έστω μια ακολουθία  $X_n$  προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$  και έστω  $B \subseteq \mathbb{R}$  ένα σύνολο Borel. Δείξτε ότι ο χρόνος πρώτης εισόδου της  $X_n$  στο  $B$ , δηλαδή  $r = \min\{n : X_n \in B\}$  είναι χρόνος στάσης.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θα πρέπει να δείξουμε ότι το ενδεχόμενο  $\{r = n\} \in \mathcal{F}_n$  για κάθε  $n$ . Πράγματι,

$$\{r = n\} = \{X_1 \notin B\} \cap \dots \cap \{X_{n-1} \notin B\} \cap \{X_n \in B\}.$$

Το κάθε ενδεχόμενο στο δεξί μέλος ανήκει στην  $\mathcal{F}_n$  γιατί η  $X_n$  είναι προσαρμοσμένη στο  $\mathcal{F}_n$ , άρα και η τομή αυτών ανήκει στην  $\mathcal{F}_n$  το οποίο σημαίνει ότι η  $r$  ικανοποιεί τον ορισμό του χρόνου στάσης.  $\square$

Αν έχουμε μια ακολουθία  $X_n$  τ.μ. και  $r$  ένα χρόνο στάσης, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια άλλη ακολουθία τ.μ. 'σταματημένη' στο  $r$  με τον εξής τρόπο,  $X_n^r = X_{n \wedge r(\omega)}(\omega)$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 198** Έστω  $X_n$  μια ακολουθία τ.μ. προσαρμοσμένης στο  $\mathcal{F}_n$  και έστω  $r$  χρόνος στάσης. Τότε και η  $X_n^r$  είναι προσαρμοσμένη.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Έστω  $B$  σύνολο Borel. Θα δείξουμε ότι  $\{X_{n \wedge r} \in B\} \in \mathcal{F}_n$ . Πράγματι,

$$\{X_{n \wedge r} \in B\} = \{X_n \in B, r > n\} \cup \bigcup_{k=1}^n \{X_k \in B, r = k\}.$$

Όμως  $\{X_n \in B, r > n\} = \{X_n \in B\} \cap \{r > n\} \in \mathcal{F}_n$ , διότι  $\{r \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ . Επίσης,  $\{X_k \in B, r = k\} = \{X_k \in B\} \cap \{r = k\} \in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n$ . 'ρα  $\{X_{n \wedge r} \in B\} \in \mathcal{F}_n$ .  $\square$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 199** Έστω  $r$  ένας χρόνος στάσης. Η οικογένεια υποσυνόλων

$$\mathcal{F}_r = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{r \leq n\} \in \mathcal{F}_n\}$$

είναι  $\sigma$ -άλγεβρα.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Προφανώς  $\Omega \in \mathcal{F}_r$ . Αν  $A \in \mathcal{F}_r$  τότε  $A^c \cap \{r \leq n\} = \{r \leq n\} \setminus (A \cap \{r \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$ . Τέλος αν  $A_i \in \mathcal{F}_r$  τότε  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap \{r \leq n\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap \{r \leq n\}) \in \mathcal{F}_n$ .  $\square$

**ΑΣΚΗΣΗ 200** Έστω  $s, r$  χρόνοι στάσης τ.ω.  $s < r$ . Δείξτε ότι  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_r$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Πράγματι, αφού  $s < r$  τότε και  $\{r \leq n\} \subseteq \{s \leq n\}$ . Αν  $A \in \mathcal{F}_s$  τότε  $A \cap \{r \leq n\} = A \cap \{s \leq n\} \cap \{r \leq n\} \in \mathcal{F}_n$  αλλά και  $\{r \leq n\} \in \mathcal{F}_n$  οπότε και η τομή τους δηλαδή  $A \in \mathcal{F}_r$ .  $\square$

**ΑΣΚΗΣΗ 201** Δείξτε ότι η  $X_r$  είναι  $\mathcal{F}_r$ -μετρήσιμη όταν  $r$  είναι χρόνος στάσης.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Πρέπει να δείξουμε ότι αν  $B$  είναι σύνολο Borel τότε  $\{X_r \in B\} \in \mathcal{F}_r$ . Δηλαδή,  $\{X_r \in B\} \cap$

$\{r \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned}\{X_r \in B\} \cap \{r \leq n\} &= \bigcup_{k=1}^n \{X_r \in B\} \cap \{r = k\} \\ &= \bigcup_{k=1}^n \{X_k \in B\} \cap \{r = k\}.\end{aligned}$$

Όμως  $\{X_k \in B\} \in \mathcal{F}_k$  αλλά και  $\{r = k\} \in \mathcal{F}_k$  επομένως και η τομή τους.  $\square$

Μπορεί να αποδείξει κάποιος ότι αν  $r, s$  είναι χρόνοι στάσης τότε και οι  $r \wedge s, r \vee s, r + s$  είναι χρόνοι στάσης.

Ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα για σταματημένες στοχαστικές διαδικασίες.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 202** Έστω  $r$  ένας χρόνος στάσης.

- 1) Αν η  $X_n$  είναι *martingale* τότε το ίδιο ισχύει για την  $X_n^r$ ,
- 2) Αν η  $X_n$  είναι *supermartingale* τότε το ίδιο ισχύει για την  $X_n^r$ ,
- 3) Αν η  $X_n$  είναι *submartingale* τότε το ίδιο ισχύει για την  $X_n^r$ .

Στις εφαρμογές αυτό σημαίνει ότι ένα δίκαιο παιχνίδι τύχης δεν αλλάζει με κατάλληλη επιλογή χρόνου στάσης (χρόνου εξόδου από το παιχνίδι). Το ίδιο συμβαίνει και για μη δίκαιο παιχνίδι.

Θα δώσουμε παρακάτω το Θεώρημα Επιλεκτικής Στάσης.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 203** Έστω  $X_n$  μια *martingale* και  $r$  ένας χρόνος στάσης. Έστω ότι ισχύουν τα ακόλουθα,

- 1)  $r < \infty$  σβ.
- 2)  $X_r \in L^1$ ,

3)  $\mathbb{E}(X_n \mathbb{I}_{\{r > n\}}) \rightarrow 0$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ .

Τότε  $\mathbb{E}(X_r) = \mathbb{E}(X_1)$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 204** Έστω  $X_n$  ένας συμμετρικός τυχαίος περίπατος και έστω  $K > 0$  ακέραιος αριθμός. Ορίζουμε το χρόνο πρώτης επιτυχίας (του  $K$  από την  $X_n$ ) να είναι  $r = \min\{n : |X_n| = K\}$ . Από προηγούμενη άσκηση η  $r$  είναι χρόνος στάσης. Επίσης γνωρίζουμε ότι  $X_n^2 - n$  είναι *martingale* άρα και η  $X_{n \wedge r}^2 - (n \wedge r)$ . Αν ισχύει το θεώρημα επιλεκτικής στάσης για την  $X_n^2 - n$  τότε  $\mathbb{E}(X_r^2 - r) = \mathbb{E}(X_1^2 - 1) = 0$ . Οπότε, με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση τιμή  $\mathbb{E}(r) = \mathbb{E}(X_r^2) = K^2$  αφού  $|X_r| = K$ .

Μπορεί να αποδειχθεί ότι πράγματι ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης. Ας το αποδείξουμε. Αρχικά θα πρέπει να δείξουμε ότι  $P(\{r =$

$\infty\}) = 0$ . Όμως,

$$\begin{aligned}
 P(\{r = \infty\}) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{n \wedge r = n\}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(\{n \wedge r = n\}) \\
 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(n \wedge r)}{n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(X_{n \wedge r}^2)}{n} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

αφού  $\mathbb{E}(X_{n \wedge r}^2) \leq K^2$ . Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η  $X_{n \wedge r}^2 - n \wedge r$  είναι *martingale* οπότε  $\mathbb{E}(X_{n \wedge r}^2 - n \wedge r) = \mathbb{E}(X_1^2 - 1) = 0$ .

Θα δείξουμε τώρα ότι  $\mathbb{E}(|X_r^2 - r|) < \infty$ . Πράγματι,

$$\mathbb{E}(|X_r^2 - r|) \leq \mathbb{E}(|X_r^2|) + \mathbb{E}(r) \leq K^2 + \mathbb{E}(r).$$

Γνωρίζουμε ότι  $\mathbb{E}(n \wedge r) = \mathbb{E}(X_{n \wedge r}^2) \leq K^2$ . Δηλαδή η ακολουθία αριθμών  $\mathbb{E}(n \wedge r)$  είναι αύξουσα και φραγμένη και αφού  $n \wedge r \rightarrow r$  σημειακά τότε συγκλίνει στο  $\mathbb{E}(r)$ , χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, το οποίο βέβαια θα είναι επίσης φραγμένο.

Τέλος θα πρέπει να δείξουμε ότι  $\mathbb{E}((X_n^2 - n)\mathbb{I}_{\{r > n\}}) \rightarrow 0$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Αφού  $X_n^2 \leq K^2$  στο  $\{r > n\}$  τότε  $\mathbb{E}(X_n^2 \mathbb{I}_{\{r > n\}}) \leq K^2 P(\{r > n\}) \rightarrow 0$ . Επίσης, έχουμε ότι  $r \mathbb{I}_{\{r > n\}} \rightarrow 0$  σβ. και χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι  $\mathbb{E}(r \mathbb{I}_{\{r > n\}}) \rightarrow 0$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Οπότε  $\mathbb{E}(n \mathbb{I}_{\{r > n\}}) \leq \mathbb{E}(r \mathbb{I}_{\{r > n\}}) \rightarrow 0$ . Τελικά,  $\mathbb{E}((X_n^2 - n)\mathbb{I}_{\{r > n\}}) \rightarrow 0$ . Δηλαδή η  $X_n^2 - n$  ικανοποιεί το θεώρημα επιλεκτικής στάσης.

### 9.3 Ανισότητες και Σύγκλιση

Σε αυτή την ενότητα θα εξετάσουμε και θα μελετήσουμε διάφορες ανισότητες που ισχύουν για τις martingale.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 205 (Ανισότητα Doob)** Έστω  $X_n$  μια μη αρνητική submartingale ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$ . Τότε για κάθε  $\lambda > 0$ , έχουμε ότι

$$\lambda P \left( \max_{k \leq n} X_k \geq \lambda \right) \leq \mathbb{E} \left( X_n \mathbb{I}_{\{\max_{k \leq n} X_k \geq \lambda\}} \right).$$

Επίσης ισχύει και η παρακάτω ανισότητα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 206 ( $L^2$  Ανισότητα Doob)** Έστω  $X_n$  μια μη αρνητική *submartingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$ . Τότε

$$\mathbb{E} \left| \max_{k \leq n} X_k \right|^2 \leq 4\mathbb{E}|X_n|^2.$$

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα σύγκλισης των *martingale*.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 207** Έστω  $X_n$  μια *supermartingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$  τ.ω  $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ . Τότε υπάρχει μια ολοκληρώσιμη τ.μ.  $X$  τ.ω.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \text{ σβ.}$$

Το θεώρημα αυτό ισχύει προφανώς και για μια *martingale* αφού είναι πάντοτε και *supermartingale*. Ισχύει όμως και για μια *submartingale* αφού η  $-X_n$  τότε θα είναι *supermartingale*. Επίσης, αν πρόκειται για μια μη αρνητική *supermartingale* τότε δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι  $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|) < \infty$  αφού  $\mathbb{E}(X_n) \leq \mathbb{E}(X_1) < \infty$ . Τέλος να σημειώσουμε ότι η σβ. σύγκλιση δεν σημαίνει ότι συγκλίνει και στον  $L^1$ .

Για να το πετύχουμε αυτό θα χρειαστούμε την έννοια της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 208** Μια ακολουθία τ.μ.  $X_n$  ονομάζεται ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη αν για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει κάποιο  $M > 0$  τ.ω.

$$\int_{\{|X_n|>M\}} |X_n| dP < \varepsilon,$$

για κάθε  $n$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 209** Έστω ο χώρος πιθανότητας  $([0, 1], \mathcal{B}, Leb)$  και θεωρούμε την ακολουθία τ.μ.  $X_n = n\mathbb{I}_{(0, \frac{1}{n})}$ . Θα δείξουμε ότι δεν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Πράγματι, για κάθε  $M > 0$  και κάθε  $n > M$  έχουμε,

$$\left(0, \frac{1}{n}\right) = \{X_n > M\},$$

οπότε

$$\int_{\{X_n > M\}} X_n dP = \int_{(0, \frac{1}{n})} n dP = 1.$$

Αυτό σημαίνει όμως ότι δεν υπάρχει  $M > 0$  τ.ω. για όλα τα  $n$  να έχουμε  $\int_{\{X_n > M\}} X_n dP < \frac{1}{2}$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 210** Έστω  $X$  μια ολοκληρώσιμη τ.μ. και  $\mathcal{F}_n$  ένα φιλτράρισμα. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία  $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$  είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Για να το κάνουμε αυτό θα θεωρήσουμε γνωστό ότι για μια ολοκληρώσιμη τ.μ.  $X$  και για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$  τ.ω.  $P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |X|dP < \varepsilon$ .

Έχουμε δείξει ότι η  $X_n$  είναι *martingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$ . Έστω  $\varepsilon > 0$ . Τότε υπάρχει  $\delta > 0$  τ.ω.  $P(A) < \delta \Rightarrow \int_A |X|dP < \varepsilon$ .

Όμως  $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n)$  οπότε  $|X_n| \leq \mathbb{E}(|X||\mathcal{F}_n)$  σβ. Παίρνοντας μέση τιμή κατά μέλη έχουμε

$$\mathbb{E}(|X|) \geq \mathbb{E}(|X_n|) \geq \int_{\{|X_n|>M\}} |X_n|dP \geq MP(\{|X_n| > M\}).$$

Διαλέγοντας  $M > \frac{\mathbb{E}(|X|)}{\delta}$  έχουμε ότι

$$P(\{|X_n| > M\}) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{M} < \delta.$$

Όμως,

$$\mathbb{E}(|X_n|\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X||\mathcal{F}_n)\mathbb{I}_{\{|X_n|>M\}}).$$

Το ενδεχόμενο  $\{|X_n| > M\} \in \mathcal{F}_n$  οπότε

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| | \mathcal{F}_n) \mathbb{I}_{\{|X_n| > M\}}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| \mathbb{I}_{\{|X_n| > M\}} | \mathcal{F}_n))$$

Οπότε

$$\mathbb{E}(|X_n| \mathbb{I}_{\{|X_n| > M\}}) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(|X| \mathbb{I}_{\{|X_n| > M\}} | \mathcal{F}_n))$$

και παίρνοντας μέση τιμή κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}(|X_n| \mathbb{I}_{\{|X_n| > M\}}) \leq \mathbb{E}(|X| \mathbb{I}_{\{|X_n| > M\}}) < \varepsilon.$$

Η ιδιότητα της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας είναι χρήσιμη για την σύγκλιση στον  $L^1$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 211** Κάθε ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη *supermartingale*  $X_n$  συγκλίνει στον  $L^1$ .

Τέλος, ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 212** Έστω  $X_n$  μια ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη *martingale*. Τότε  $X_n = \mathbb{E}(X | \mathcal{F}_n)$ , όπου  $X = \lim_n X_n$  στον  $L^1$  και  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ .

Στην περίπτωση που η ακολουθία τ.μ. είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη *martingale* και το όριο  $X \in \mathbb{R}$ ,

δηλαδή είναι σταθερός αριθμός, τότε  $X_n = X$  σβ. Αυτό προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα αφού στην περίπτωση αυτή έχουμε  $X_n = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_n) = X$  σβ. αφού  $X \in \mathbb{R}$ .

Παρακάτω δίνουμε έναν πολύ χρήσιμο χαρακτηρισμό των ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων martingale.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 213** Η  $X_n$  είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$  αν υπάρχει μια ολοκληρώσιμη τ.μ.  $Y$  τ.ω.  $X_n = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_n)$ . Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι  $X_n \rightarrow \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_\infty)$  σβ. και στον  $L^1$  όπου  $\mathcal{F}_\infty$  είναι η  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια υποσυνόλων  $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ .

Για σύγκλιση στον  $L^p$  (ας σημειώσουμε ότι  $L^p \subseteq L^q$  όταν  $p < q$ ), έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 214** Έστω ότι η  $X_n$  είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$  τ.ω.  $\mathbb{E}(|X_n|^p) < \infty$ . Τότε η  $X_n$  συγκλίνει σε μια τ.μ.  $X_\infty$  σβ. αλλά και στον  $L^p$ .

Παρακάτω θα δώσουμε το νόμο 0-1 του Kolmogorov.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 215** Έστω  $X_n$  μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. Ορίζουμε την  $\sigma$ -άλγεβρα ουρά  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2 \cap \dots$  όπου  $\mathcal{T}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$ . Τότε  $P(A) = 0$  ή  $1$  όταν  $A \in \mathcal{T}$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 216 (Ανάλυση Doob)** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_n))$  χώρος πιθανότητας με φίλτρο. Κάθε προσαρμοσμένη και ολοκληρώσιμη στοχαστική διαδικασία  $X_n$  αναλύεται μοναδικά ως εξής,

$$X_n = M_n + A_n,$$

όπου  $M_n$  είναι μια *martingale* τ.ω.  $M_0 = X_0$  και  $A_n$  είναι μια προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία τ.ω.  $A_0 = 0$ . Επίσης, η  $X_n$  είναι *supermartingale* (*submartingale*) αν η  $A_n$  είναι φθίνουσα (αύξουσα).

## 10 Στοχαστικές Διαδικασίες Συνεχούς Χρόνου

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε στις στοχαστικές διαδικασίες σε συνεχή χρόνο. Έστω λοιπόν ένας μετρήσιμος χώρος  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Θα λέμε ότι η οικογένεια τ.μ.  $X = \{X_t : 0 \leq t < \infty\}$  είναι μια στοχαστική διαδικασία. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο στοχαστικές διαδικασίες ορισμένες στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Ένα ερώτημα είναι με ποια έννοια θα λέμε ότι ταυτίζονται οι δυο στοχαστικές διαδικασίες. Όπως παρατηρεί κανείς μια στοχαστική διαδικασία είναι στην πραγματικότητα συνάρτηση δυο μεταβλητών, των  $t, \omega$ . Έρα αν  $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$  για κάθε  $(t, \omega) \in [(0, \infty), \Omega]$  μπορούμε να πούμε ότι είναι ίσες. Όμως, μπορούμε να δώσουμε και ασθενέστερους ορισμούς ισότητας χρησιμοποιώντας το μέτρο πιθανότητας.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 217** Δυο στοχαστικές διαδικασίες  $X_t, Y_t$  θα λέγονται εκδοχή η μια της άλλης όταν για κάθε  $t$  έχουμε  $P(\{X_t = Y_t\}) = 1$ . Θα λέμε ότι είναι μη διακρινόμενες αν  $P(\{X_t = Y_t, 0 \leq t < \infty\}) = 1$ . Τέλος, θα λέμε ότι δυο στοχαστικές διαδικασίες είναι ισοδύνα-

μες αν για οποιαδήποτε  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}$  έχουμε ότι  $P_{X_{t_i}} = P_{Y_{t_i}}$ .

Η πρώτη είναι η ισχυρότερη ενώ η τρίτη η ασθενέστερη.

Με το παρακάτω θεώρημα κανείς μπορεί να δείξει ότι υπάρχει μια συνεχής εκδοχή για μια στοχαστική διαδικασία, κάτω από προϋποθέσεις.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 218** Έστω  $X_t$  μια στοχαστική διαδικασία. Αν υπάρχει  $a > 0$  και  $\varepsilon > 0$  τ.ω. για κάθε  $0 \leq u \leq t \leq T$ ,

$$\mathbb{E}|X_t - X_u|^a \leq C(t - u)^{1+\varepsilon},$$

για κάποια σταθερά  $C$ , τότε υπάρχει μια εκδοχή της  $X$  με συνεχείς τροχιές και οι οποίες είναι *Holder* συνεχής τάξης  $h < \varepsilon/a$ .

Όπως και στη διακριτή περίπτωση, μια στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο παράγει μια  $\sigma$ -άλγεβρα, την  $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t) = \sigma(\{X_s^{-1}(A) : 0 \leq s \leq t, A \in \mathcal{B}\})$  και είναι η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα κάτω από την οποία η  $X_s$  είναι  $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη για κάθε  $s \in [0, t]$ .

Επίσης, φιλτράρισμα ονομάζουμε μια οικογένεια  $\sigma$ -αλγεβρών  $\mathcal{F}_t$  τ.ω.  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$  και θα λέμε ότι μια στοχαστική διαδικασία  $X_t$  είναι προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_t$  όταν η  $X_t$  είναι  $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη.

Θα ορίσουμε παρακάτω τη λεγόμενη κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener. Συμβολίζουμε με

$$\Gamma(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

Για κάθε  $m \in \mathbb{R}$  και  $\sigma > 0$  η κατανομή  $N(m, \sigma^2)$  με πυκνότητα  $g(x) = \Gamma(\sigma^2, x - m)$  ονομάζεται κανονική κατανομή με παραμέτρους  $m, \sigma$ . Δηλαδή,

$$N(m, \sigma^2)(A) = \int_A \Gamma(\sigma^2, x - m) dx, \quad A \in \mathcal{B}.$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 219 (Κίνηση Brown)** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$  ένας χώρος πιθανότητας με φίλτρο. Υπάρχει στοχαστική διαδικασία  $W_t$  (η οποία ονομάζεται κίνηση Brown με τις εξής ιδιότητες,

- (i)  $W_0 = 0$  σβ.
- (ii) η  $W_t$  είναι  $\mathcal{F}_t$  προσαρμοσμένη και συνεχής,
- (iii) για  $0 \leq s < t$  η τ.μ.  $W_t - W_s$  ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(0, t - s)$  και είναι ανεξάρτητη από την  $\mathcal{F}_s$ .

Η ύπαρξη μιας στοχαστικής διαδικασίας που ικανοποιεί τα παραπάνω αποδεικνύεται (και μπορεί να βρει τη απόδειξη κανείς στην βιβλιογραφία). Παρατηρούμε ότι η  $W_t$  ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(0, t)$  οπότε και  $\mathbb{E}(W_t) = 0$  και  $\mathbb{E}(W_t^2) = t$ .

Ο παρακάτω ορισμός είναι η ιδιότητα Markov η οποία στην ουσία λέει ότι αν μια στοχαστική διαδικασία την ικανοποιεί τότε στο χρόνο  $t$  η μέση τιμή της σε επόμενη χρονική στιγμή δεν εξαρτάται από προηγο-

ύμενες τιμές αλλά μόνο από την τωρινή. Η ιδιότητα αυτή αποτυπώνεται μαθηματικά στον επόμενο ορισμό.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 220 (Ιδιότητα Markov)** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$  ένας χώρος πιθανότητας με φίλτρο. Μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία  $X_t$  λέμε ότι έχει την ιδιότητα Markov αν για κάθε φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση  $\phi$  έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(\phi(X_T)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\phi(X_T)|X_t), \quad T \geq t.$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η παραπάνω ιδιότητα είναι ισοδύναμη με το να ισχύει ότι για κάθε σύνολο Borel  $A$  έχουμε,

$$\mathbb{E}(X_T \in A|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_T \in A|X_t), \quad T \geq t.$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 221** Έστω  $W_t$  μια κίνηση Brown σε ένα χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$  με φίλτρο. Για δεδομένο  $x \in \mathbb{R}$  και  $t \geq 0$  η στοχαστική διαδικασία  $W_s^{t,x} = x + W_s - W_t$  με  $s \geq t$  ονομάζεται κίνηση Brown που ξεκινάει από το  $x$  τη χρονική στιγμή  $t$ .

Οπότε έχουμε ότι  $W_t^{t,x} = x$  και επίσης  $W_s^{t,x}$  είναι προσαρμοσμένη και συνεχής. Τέλος, για  $t \leq s \leq s+h$  η τ.μ.  $W_{s+h}^{t,x} - W_s^{t,x}$  ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(0, h)$  και είναι ανεξάρτητη από την  $\mathcal{F}_s$ . Οπότε η  $W_s^{t,x}$  ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(x, s-t)$  για  $s \geq t$ , δηλαδή η πυκνότητα της  $W_s^{t,x}$  είναι η

$$g(y) = \Gamma^*(t, x, s, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(s-t)}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2(s-t)}}.$$

Η συνάρτηση αυτή παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία μερικών διαφορικών εξισώσεων. Επίσης, ονομάζεται πυκνότητα μετάβασης της κίνησης Brown από το αρχικό σημείο  $(t, x)$  στο τελικό σημείο τη χρονική στιγμή  $s \geq t$ .

Έστω μια  $\phi$  φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι  $\mathbb{E}(\phi(W_s)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\phi(W_s - W_t + W_t)|\mathcal{F}_t) = u(t, W_t)$  με  $u(t, x) = \mathbb{E}(\phi(W_s - W_t + x)) = \mathbb{E}(W_s^{t,x})$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 222** *Μια κίνηση Brown  $W_t$  στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$  έχει την ιδιότητα Markov ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t$ .*

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$\mathbb{E}(\phi(W_s)|\mathcal{F}_t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(y)}{\sqrt{2\pi(s-t)}} e^{-\frac{(y-W_t)^2}{2(s-t)}} dy.$$

Ας θεωρήσουμε την παρακάτω μερική διαφορική εξίσωση,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}v_{xx}(t,x) - v_t(t,x) &= 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}, \\ v(T,x) &= \phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

με  $\phi(x)$  συνεχή συνάρτηση και φραγμένη.

Το πρόβλημα αυτό έχει λύση,  $v(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^*(t,x,T,y)\phi(y)dy$  με  $t < T$  και  $x \in \mathbb{R}$ . Η κίνηση Brown είναι λοιπόν στενά συνδεδεμένη με την εξίσωση θερμότητας (την παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση). Η λύση  $v(t,x)$  έχει την εξής γραφή,  $v(t,x) = \mathbb{E}(\phi(W_s^{t,x}))$  με  $x \in \mathbb{R}$  και  $t \in [0,s]$ . Επίσης, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Markov έχουμε ότι  $\mathbb{E}(\phi(W_s)|\mathcal{F}_t) = v(t,W_t)$  για  $s \geq t$ . Οι λύσεις, ορισμένων, μερικών διαφορικών εξισώσεων είναι προτιμότερο να προσεγγίζονται χρησιμοποιώντας τέτοιου είδους αναπαραστάσεις καθώς και εργαλεία στοχαστικής ανάλυσης. Στις εφαρ-

μογές, πάντως, συχνά και οι δυο τρόποι (θεωρία μερικών διαφορικών εξισώσεων και στοχαστική ανάλυση) βοηθούν, με διαφορετικό τρόπο, να περιγράψουμε και να χαρακτηρίσουμε ένα φαινόμενο.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 223** Η διαδικασία Brown (ή διαδικασία Wiener) σε ένα χώρο πιθανότητας με φίλτρο  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$  ικανοποιεί τα παρακάτω,

- (i) η  $W_t$  έχει ανεξάρτητες και στάσιμες μεταβολές, δηλαδή, για  $0 \leq t \leq s$  η τ.μ.  $W_s - W_t$  ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(0, s - t)$  και οι τ.μ.

$$W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_N} - W_{t_{N-1}},$$

είναι ανεξάρτητες για κάθε σύνολο σημείων  $t_1, \dots, t_n$  με  $t_1 < t_2 < \dots < t_N$

- (ii) για οποιαδήποτε πεπερασμένη ακολουθία  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N$  και για κάθε Borel σύνολα  $A_1, A_2, \dots, A_N \subseteq \mathbb{R}$  έχουμε

$$P(\{W(t_1) \in A_1, \dots, W(t_N) \in A_N\}) = \int_{A_1} \dots \int_{A_N} \Gamma^*(0, 0, t_1, y_1) \Gamma^*(t_1, y_1, t_2, y_2) \dots \Gamma^*(t_{N-1}, y_{N-1}, t_N, y_N) dy_1 \dots dy_N.$$

Αντίστροφα, αν  $W_t$  είναι μια συνεχής στοχαστική διαδικασία στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  τ.ω.  $W_0 = 0$  σβ. και ικανοποιεί τις παραπάνω δυο ιδιότητες τότε είναι κίνηση Brown ως προς το φυσικό φιλτράρισμα  $\mathcal{F}^W$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 224** Δείξτε ότι  $\mathbb{E}(W(s)W(t)) = \min\{s, t\}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Από το προηγούμενο θεώρημα διαπιστώνουμε ότι η από κοινού πυκνότητα των  $W(s), W(t)$  (αν υποθέσουμε ότι  $t < s$ ) είναι  $f_{W(s), W(t)}(x, y) = \Gamma^*(0, 0, t, x)\Gamma^*(t, x, s, y)$ .  
 ῥα

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W(s)W(t)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2 \Gamma^*(0, 0, t, y_1) \Gamma^*(t, y_1, s, y_2) dy_1 dy_2 \\ &= \dots = t\end{aligned}$$

ῥα για οποιαδήποτε  $s, t$  έχουμε ότι  $\mathbb{E}(W(s)W(t)) = \min\{s, t\}$ .

Μια συντομότερη απόδειξη είναι η εξής, όταν  $s < t$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W(t)W(s)) &= \mathbb{E}(W(s)(W(t) - W(s) + W(s))) \\ &= \mathbb{E}(W(s)^2) + \mathbb{E}(W(s)(W(t) - W(s))) \\ &= s,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $\mathbb{E}(W(s)^2) = s$  και ότι  $W(s), W(t) - W(s)$  είναι ανεξάρτητες.  $\square$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 225** Ισχύει ότι  $\mathbb{E}(e^{i\lambda W(t)}) = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} = \phi_{W(t)}(\lambda)$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\phi_{W(t)}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\lambda x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx\end{aligned}$$

Όμως το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι μηδέν επομένως θα υπολογίσουμε το πρώτο. Παραγωγίζουμε ως προς  $\lambda$  κατά μέλη και έχουμε

$$\phi'_{W(t)}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} -x \sin(\lambda x) e^{-\frac{x^2}{2t}} dx.$$

Έπειτα με ολοκλήρωση κατά μέρη (γράφοντας τον όρο  $e^{-\frac{x^2}{2t}}$  ως παράγωγο μιας συνάρτησης) προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\phi'_{W(t)}(\lambda) = -\lambda t \phi_{W(t)}(\lambda).$$

Λύνοντας και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $\phi_{W(t)}(0) = 1$  προκύπτει το αποτέλεσμα.  $\square$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται χαρακτηριστική συνάρτηση της  $W(t)$  και συμβολίζεται με  $\phi_{W(t)}(\lambda)$ . Αποδεικνύεται (αν  $\mathbb{E}(|W(t)|^n) < \infty$  το οποίο θα δείξουμε αργότερα με μια τεχνική που δουλεύει και στην περίπτωση που δεν γνωρίζουμε την πυκνότητα της τ.μ.) τότε ότι  $\mathbb{E}(W(t)^n)i^n = \phi_{W(t)}^{(n)}(0)$ . Δηλαδή για να υπολογίσει κανείς ροπές της  $W(t)$  αρκεί να παραγωγίσει τη χαρακτηριστική συνάρτηση τόσες φορές όσο και η δύναμη της ροπής. Για παράδειγμα  $\mathbb{E}(W(t)^4) = 3t^2$ .

Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε για οποιαδήποτε τ.μ.  $X$ . Αν  $X = W(t) - W(s)$  με  $s < t$ , βρείτε τη χαρακτηριστική συνάρτηση και υπολογίστε τη μέση τιμή της τέταρτης δύναμης.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 226** Μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία στο φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t$  είναι *martingale* αν  $\mathbb{E}|X_t| < \infty$  και για κάθε  $s < t$  έχουμε ότι  $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ . Ανάλογα ορίζουμε τις *submartingale*, *supermartingale*.

Έστω  $Y$  μια ολοκληρώσιμη τ.μ. Τότε  $M_t = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)$  είναι *martingale*. Πράγματι, εξ ορισμού η  $M_t$  είναι προσαρμοσμένη στο  $\mathcal{F}_t$  και ολοκληρώσιμη (δείξτε το). Επίσης,  $\mathbb{E}(M_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_s) = M_s$ . Στην πρώτη ισότητα αντικαταστήσαμε την  $M_t$  ενώ στη δεύτερη ισότητα κατάλληλη ιδιότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής, αφού  $s < t$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 227 (Ανισότητα Doob)** Έστω  $X_t$  μια δεξιά συνεχής *martingale* και  $p > 1$ . Τότε για κάθε  $T$ ,

$$\mathbb{E} \left( \sup_{t \in [0, T]} |X_t|^p \right) \leq q^p \mathbb{E} (|X_T|^p),$$

όπου  $q = \frac{p}{p-1}$ .

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Doob στην martingale  $M_t = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t)$  βρίσκουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t \in [0, T]} |M_t|^2\right) \leq 4\mathbb{E}(|M_T|^2) \leq 4\mathbb{E}(|Y|^2).$$

Στο επόμενο θεώρημα θα δείξουμε ότι η διαδικασία Wiener καθώς και άλλες δυο που σχετίζονται με αυτή είναι martingales στο  $\mathcal{F}_t$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 228** Οι στοχαστικές διαδικασίες  $W(t)$ ,  $W(t)^2 - t$  και  $e^{W(t)}e^{-\frac{t}{2}}$  είναι martingale ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t$  που παράγει η διαδικασία Wiener.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Προφανώς η  $W_t$  ανήκει στον  $L^1$  διότι  $\mathbb{E}|W_t| \leq \sqrt{\mathbb{E}|W_t^2|}$  και αφού η  $W_t^2$  ανήκει στον  $L^1$  το ίδιο συμβαίνει και με την  $|W_t|$ .

Πράγματι, για κάθε  $0 \leq s < t$  έχουμε

$$\mathbb{E}(W_t|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s|\mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(W_s|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(W_t - W_s) + W_s = W_s.$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $W_t - W_s$  είναι ανεξάρτητη από την  $\mathcal{F}_s$ , ότι η  $W_s$  είναι προσαρμοσμένη και ότι  $\mathbb{E}(W_t) = \mathbb{E}(W_s) = 0$ . Δηλαδή, η  $W_t$  είναι martingale στο φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t$ .

Θα δούμε τώρα την  $W_t^2 - t$ . Για  $0 \leq s < t$  έχουμε,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(W_t^2 | \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}((W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s) + 2\mathbb{E}((W_t - W_s)W_s | \mathcal{F}_s) \\ &\quad + \mathbb{E}(W_s^2 | \mathcal{F}_s) \\ &= t - s + W_s^2.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $W_t - W_s$  είναι ανεξάρτητη από την  $\mathcal{F}_s$ , δηλαδή οι  $\sigma(W_t - W_s)$ ,  $\mathcal{F}_s$  είναι ανεξάρτητες και αφού  $\sigma((W_t - W_s)^2) \subseteq \sigma(W_t - W_s)$  τότε και  $\sigma((W_t - W_s)^2)$ ,  $\mathcal{F}_s$  ανεξάρτητες. Επίσης χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση  $t - s$ , ότι η  $W_s$  είναι προσαρμοσμένη στην  $\mathcal{F}_s$  και ότι η  $W_t$  είναι martingale. Επομένως,  $\mathbb{E}(W_t^2 - t | \mathcal{F}_s) = W_s^2 - s$ .

Τέλος, θα δείξουμε ότι η  $e^{W(t)}e^{-\frac{t}{2}}$  είναι martingale. Είναι προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t$  ως συνάρτηση της  $W_t$  η οποία είναι προσαρμοσμένη. Για  $0 \leq s < t$  έχουμε,

$$\mathbb{E}(e^{W_t} | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(e^{W_t - W_s} e^{W_s} | \mathcal{F}_s) = e^{W_s} \mathbb{E}(e^{W_t - W_s} | \mathcal{F}_s) = e^{W_s} \mathbb{E}(e^{W_t - W_s}).$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $W_t - W_s$  είναι ανεξάρτητη από την  $\mathcal{F}_s$  και ότι η  $W_t$  είναι προσαρμοσμένη.

Αφού η μεταβολή  $W_t - W_s$  ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση  $t - s$ , μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή της  $e^{W_t - W_s}$ . Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{W_t - W_s}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx \\ &= e^{\frac{t-s}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-(t-s))^2}{2(t-s)}} dx \\ &= e^{\frac{t-s}{2}} \end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι η εν λόγω στοχαστική διαδικασία είναι και ολοκληρώσιμη. Τελικά  $\mathbb{E}(e^{W_t} e^{-\frac{t}{2}} | \mathcal{F}_s) = e^{W_s} e^{-\frac{s}{2}}$ .

□

Υπολογίστε και τη μέση τιμή

$$\mathbb{E}(e^{\sigma(W_t - W_s)})$$

χρησιμοποιώντας παρόμοιο συλλογισμό.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 229** Μια στοχαστική διαδικασία  $X_t$  ονομάζεται προοδευτικά μετρήσιμη ως προς το φιλτράρισμα  $(\mathcal{F}_t)$  αν για κάθε  $t \geq 0$ , έχουμε ότι  $(s, \omega) \rightarrow X_s(\omega)$  είναι μετρήσιμη στον  $([0, t] \times \Omega, \mathcal{B} \times \mathcal{F}_t)$ .

Μπορεί να αποδείξει κανείς ότι μια δεξιά συνεχής και προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία είναι προδευτικά μετρήσιμη.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 230** Έστω  $T > 0$ .  $M \in \mathcal{M}^2$  ορίζουμε το χώρο των δεξιά συνεχών  $\mathcal{F}_t$  martingales  $X_t$  τ.ω.  $X_0 = 0$  και

$$\|X\|_T = \sqrt{\mathbb{E}(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^2)} < \infty.$$

$M \in \mathcal{M}_c^2$  συμβολίζουμε τον υποχώρο των συνεχών martingales του  $\mathcal{M}^2$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 231** Ο χώρος  $(M^2, \|\cdot\|_T)$  είναι πλήρης, δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy του  $M^2$  συγκλίνει και έχει όριο στον ίδιο χώρο. Επίσης, αν η ακολουθία ανήκει στον  $M_c^2$  τότε και το όριο θα ανήκει εκεί.

Οι χώροι αυτοί και το προηγούμενο θεώρημα θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμα αργότερα στον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος.

Έστω ένας χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Συμβολίζουμε με  $N = \{F \in \mathcal{F} | P(F) = 0\}$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 232** Θα λέμε ότι το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t$  ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες ως προς το  $P$ , αν η  $\mathcal{F}_0$  και άρα και η  $\mathcal{F}_t$  για κάθε  $t$ , περιέχει το  $N$ . Επίσης, αν το φιλτράρισμα είναι δεξιά συνεχές, δηλαδή για κάθε  $t > 0$ ,  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ .

Οι δυο υποθέσεις αυτές για το φιλτράρισμα είναι καθαρά για τεχνικούς λόγους. Αν  $X_t = Y_t$  σβ. και  $X_t$  είναι  $\mathcal{F}_t$  μετρήσιμη τότε θα θέλαμε να έχουμε ως αποτέλεσμα ότι και η  $Y_t$  είναι  $\mathcal{F}_t$  μετρήσιμη.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 233** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  χώρος πιθανότητας και  $X_t$  μια στοχαστική διαδικασία. Τότε θέτουμε,

$$\mathcal{F}_t^X = \bigcap_{\varepsilon > 0} \hat{\mathcal{F}}_{t+\varepsilon}^X,$$

με  $\hat{\mathcal{F}}_t^X = \sigma(\sigma(X_t) \cup N)$ . Διαπιστώνουμε ότι η  $\mathcal{F}_t^X$  ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες.

Με τον τρόπο αυτό κατασκευάζουμε και την σ-άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown και τη συμβολίζουμε με  $\mathcal{F}_t^W$ . Αποδεικνύεται ότι η  $W_t$  είναι κίνηση Brown στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο  $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t^W)$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 234** Μια τ.μ.  $r : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  ονομάζεται χρόνος στάσης ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t$  αν  $\{r \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ 235** Η τ.μ.  $r$  είναι χρόνος στάσης αν  $\{r < t\} \in \mathcal{F}_t$  για κάθε  $t > 0$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Αν  $r$  είναι χρόνος στάσης τότε

$$\{r < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{r \leq t - \frac{1}{n}\right\}$$

με

$$\left\{r \leq t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_{t-\frac{1}{n}} \subseteq \mathcal{F}_t$$

Αντίστροφα, για κάθε  $\varepsilon > 0$  έχουμε

$$\{r \leq t\} = \bigcap_{0 < \delta < \varepsilon} \{r < t + \delta\}$$

οπότε  $\{r \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ . Χρησιμοποιώντας τις συνήθεις συνθήκες έχουμε,

$$\{r \leq t\} \in \mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$$

□

Μπορεί να αποδείξει κανείς ότι αν  $r_1, r_2$  χρόνοι στάσης τότε και  $r_1 \wedge r_2, r_1 \vee r_2$  χρόνοι στάσης.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 236** Έστω  $X_t$  μια στοχαστική διαδικασία, δεξιά συνεχής και προσαρμοσμένη και έστω  $B$  ανοικτό σύνολο του  $\mathbb{R}$ . Θέτουμε  $I(\omega) = \{t \geq 0 | X_t(\omega) \in B\}$  και  $r(\omega) = \inf I(\omega)$  αν  $I(\omega) \neq \emptyset$  και  $+\infty$  αλλιώς. Τότε η  $r$  είναι χρόνος στάσης και ονομάζεται χρόνος πρώτης εισόδου της  $X$  στο  $B$ .

Έστω  $r$  χρόνος στάσης ο οποίος είναι πεπερασμένος στο  $\Omega \setminus N$  με  $P(N) = 0$  και έστω  $X_t$  μια στοχαστική διαδικασία. Θέτουμε,  $X_r(\omega) = X_{r(\omega)}(\omega)$  και επίσης ορίζουμε την  $\sigma$ -άλγεβρα

$$\mathcal{F}_r = \{F \in \mathcal{F} | F \cap \{r \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

για κάθε  $t$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ 237** (Θεώρημα Επιλεκτικής Στάσης του Doob)  
Αν  $M_t$  είναι μια δεξιά συνεχής martingale και  $r_1, r_2$  χρόνοι στάσης τ.ω.  $r_1 \leq r_2 \leq T$  σβ. με  $T > 0$ ,

τότε  $M_{r_1} = \mathbb{E}(M_{r_2} | \mathcal{F}_{r_1})$ . Συγκεκριμένα, για κάθε σβ. φραγμένο χρόνο στάσης  $r$  έχουμε  $\mathbb{E}(M_r) = \mathbb{E}(M_0)$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ 238** Έστω  $X_t$  μια στοχαστική διαδικασία στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο  $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$  και  $r$  ένας φραγμένος χρόνος στάσης. Θεωρούμε τη 'σταματημένη' στοχαστική διαδικασία  $X_t^r$  η οποία ορίζεται ως εξής,

$$X_t^r(\omega) = X_{t \wedge r}(\omega), \quad t \geq 0, \omega \in \Omega.$$

Αν  $X_t$  είναι προοδευτικά μετρήσιμη τότε και η  $X_t^r$  είναι προοδευτικά μετρήσιμη και η τ.μ.  $X_r$  είναι  $\mathcal{F}_r$ -μετρήσιμη. Τέλος, αν  $X_t$  είναι δεξιά συνεχής και *martingale* τότε  $X_{t \wedge r} = \mathbb{E}(X_r | \mathcal{F}_t)$  οπότε και η  $X_t^r$  είναι δεξιά συνεχής και *martingale*.

Το παρακάτω θεώρημα δίνει ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό της κίνησης Brown.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 239** Μια στοχαστική διαδικασία  $W(t), t \geq 0$  είναι διαδικασία Wiener αν ισχύουν τα επόμενα,

- (i)  $W(0) = 0$  σβ,
- (ii) οι τροχιές  $t \rightarrow W(t)$  είναι συνεχείς σβ.
- (iii) η  $W(t)$  είναι *martingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t$ ,
- (iv) η  $W(t)^2 - t$  είναι *martingale* ως προς το φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 240** Θα λέμε ότι η  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι *Holder* συνεχής τάξης  $a$  με  $a \in (0, 1)$  αν υπάρχει μια σταθερά  $K > 0$  τ.ω. για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  έχουμε  $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|^a$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 241** Για κάθε  $a < \frac{1}{2}$  σχεδόν όλες οι τροχιές της κίνησης *Brown* είναι *Holder* συνεχείς, τάξης  $a$ , σε κάθε φραγμένο διάστημα του  $t$ . Επίσης, για κάθε  $a > \frac{1}{2}$  σχεδόν όλες οι τροχιές της κίνησης *Brown* δεν είναι *Holder* συνεχείς πουθενά.

Έστω  $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = T$  μια διαμέριση του  $[0, T]$ . Ορίζουμε την τετραγωνική κύμανση της κίνησης Brown να είναι

$$[W, W](t) = [W, W]([0, t]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |W(t_i^n) - W(t_{i-1}^n)|^2$$

όπου η σύγκλιση είναι στον  $L^2$ . Το όριο είναι πάνω σε όλες τις διαμερίσεις τ.ω.  $\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \rightarrow 0$  καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Αποδεικνύεται, ότι παρόλο που τα παραπάνω αθροίσματα είναι τ.μ. το όριο είναι σταθερός αριθμός (ανεξάρτητος του  $\omega$ ).

**ΘΕΩΡΗΜΑ 242** Η τετραγωνική κύμανση της κίνησης Brown πάνω στο  $[0, T]$  είναι ίση με  $T$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Ας σημειώσουμε ότι οι μεταβολές  $W(t_i) - W(t_{i-1})$  είναι ανεξάρτητες και ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(W(t_i) - W(t_{i-1})) &= 0, \\ \mathbb{E}(W(t_i) - W(t_{i-1}))^2 &= t_i - t_{i-1}, \\ \mathbb{E}(W(t_i) - W(t_{i-1}))^4 &= 3(t_i - t_{i-1})^2 \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ότι, συμβολίζοντας με  $\Delta_i^n W = W(t_i^n) - W(t_{i-1}^n)$ ,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n (\Delta_i^n W)^2 - T \right)^2 \\
&= \mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n ((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})) \right)^2 \\
&= \mathbb{E} \sum_{i=1}^n ((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1}))^2 \\
&\quad + \mathbb{E} \sum_{i \neq j} ((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})) ((\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})) \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E} ((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1}))^2 \\
&= 2 \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^2 \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Θα εξηγήσουμε τώρα γιατί

$$\mathbb{E} \sum_{i \neq j} ((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})) ((\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})) = 0$$

Λόγω ανεξαρτησίας των  $\Delta_i^n W$ ,  $\Delta_j^n W$  για  $i \neq j$  έχουμε, ότι και  $(\Delta_i^n W)^2$ ,  $(\Delta_j^n W)^2$  ανεξάρτητες για  $i \neq j$  αφού  $\sigma((\Delta_i^n W)^2) \subseteq \sigma(\Delta_i^n W)$  και το ίδιο για την  $\Delta_j^n W$ . Τέλος, ανεξάρτητες θα είναι και οι

$$(\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1}), \quad (\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})$$

αφού η οικογένεια συνόλων  $\mathcal{I} = \{(\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1}) \leq x\}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  παράγει την ίδια σ-άλγεβρα με την  $\mathcal{J} = \{(\Delta_i^n W)^2 \leq x\}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . 'ρα,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \sum_{i \neq j} ((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})) ((\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})) \\ &= \sum_{i \neq j} \mathbb{E} ((\Delta_i^n W)^2 - (t_i - t_{i-1})) \mathbb{E} ((\Delta_j^n W)^2 - (t_j - t_{j-1})) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**ΟΡΙΣΜΟΣ 243** Η κύμανση μιας συνάρτησης  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται ως το όριο,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

όπου  $(t_0, t_1, \dots, t_n)$  είναι μια διαμέριση του  $[0, T]$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 244** Η κύμανση των τροχιών της  $W(t)$  είναι άπειρη σβ.

Αυτό έχει σημαντικό αντίκτυπο στη θεωρία ολοκλήρωσης ως προς την κίνηση Brown. Ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 245** Έστω  $\delta_n = \max_i(t_i^n - t_{i-1}^n)$ . Αν το όριο

$$\lim_{\delta_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_{i-1}^n)(g(t_i^n) - g(t_{i-1}^n))$$

υπάρχει για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f$  τότε αναγκαστικά η  $g$  είναι φραγμένης κύμανσης στο  $[0, t]$ .

Ήρα, δεν μπορούμε να ορίσουμε ως Riemann-Stieltjes το ολοκλήρωμα  $\int_0^t X_s dW_s$  όπου  $X_s$  μια συνεχής στοχαστική διαδικασία, διότι η  $W_t$  δεν είναι φραγμένης κύμανσης. Αυτό επίσης σημαίνει ότι δεν υπάρχει διάστημα  $[0, t]$  τ.ω. η  $W_t$  να είναι μονότονη διότι αυτό θα σήμαινε ότι είναι και φραγμένης κύμανσης εκεί.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 246** Για κάθε  $t > 0$  σχεδόν όλες οι τροχιές της κίνησης Brown είναι μη διαφορίσιμες στο  $t$ .

Μερικά αποτελέσματα για τη συμπεριφορά της κίνησης Brown.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 247** Αν  $W_t$  είναι μια κίνηση Brown τότε,

$$\begin{aligned} \limsup_{t \downarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} &= 1, \text{ σβ.}, \\ \limsup_{t \uparrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln(t)}} &= 1, \text{ σβ.}, \\ \liminf_{t \downarrow 0} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln(1/t)}} &= -1, \text{ σβ.}, \\ \liminf_{t \uparrow \infty} \frac{W_t}{\sqrt{2t \ln \ln(t)}} &= -1, \text{ σβ.} \end{aligned}$$

## 10.1 Στοχαστικό Ολοκλήρωμα

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε και θα κατασκευάσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Ένας από τους στόχους μας θα είναι να ορίσουμε τελικά τις λεγόμενες

στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις οι οποίες μοντελοποιούν καλύτερα από τις ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις διάφορα φαινόμενα (π.χ. χρηματοοικονομικά φαινόμενα) στα οποία εμφανίζονται και παίζουν σημαντικό ρόλο παράγοντες που δεν μπορούν εύκολα να συμπεριληφθούν στο μοντέλο.

Στόχος μας είναι να ορίσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής  $\int_0^t f(s)dW_s$ . Αυτό μοιάζει με Riemann-Stieltjes αλλά όπως είπαμε παραπάνω δεν γίνεται να το ορίσουμε έτσι διότι η  $W_t$  δεν είναι φραγμένης κύμανσης. Ας δούμε αρχικά έναν απλούστερο ορισμό όπου η ολοκληρωτέα ποσότητα  $f(t)$  δεν είναι συνάρτηση του  $\omega \in \Omega$  αλλά συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση του χρόνου. Υποθέτουμε επιπλέον ότι  $f(0) = f(1) = 0$ . Ορίζουμε λοιπόν το ολοκλήρωμα ως εξής,  $\int_0^1 f(s)dW_s = -\int_0^1 f'(s)W_s ds$ . Αυτό το ολοκλήρωμα είναι μια τ.μ. και ικανοποιεί τις ιδιότητες,  $\mathbb{E}(\int_0^1 f(s)dW_s) = 0$  και  $\mathbb{E}(\int_0^1 f(s)dW_s)^2 = \int_0^1 f^2(s)ds$ . Πράγματι,

$$\mathbb{E}(\int_0^1 f'(s)W_s ds) = \int_0^1 f'(s)\mathbb{E}(W_s)ds = 0.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $\mathbb{E}(W_t W_s) = t \wedge s$  μπορούμε να δείξουμε και την άλλη ιδιότητα. Τέλος, μπορούμε να γενικεύσουμε το ολοκλήρωμα αυτό και σε μεγαλύτερη κλάση συναρτήσεων αλλά ανεξάρτητων του  $\omega$ .

Αν θελήσουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα  $\int_0^T W_s dW_s$  ως ολοκλήρωμα Riemann-Stieltjes θα είχαμε πρόβλημα όπως είπαμε και προηγούμενα. Ας δούμε ακριβώς τι γίνεται.

Έστω  $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_n^n = T$  μια διαμέριση του  $[0, T]$ . Μπορεί να δείξει κανείς ότι τα παρακάτω αθροίσματα οδηγούν σε διαφορετικά όρια,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j^n) (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_{j+1}^n) (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)).$$

Πράγματι, έχουμε το εξής,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n} (W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}^n}^2 - W_{t_i^n}^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2 \\ &= \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n})^2. \end{aligned}$$

Στο όριο λοιπόν έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} W_{t_i^n} (W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}) = \frac{1}{2} W_T^2 - \frac{1}{2} T$$

Παρόμοια, για το άλλο όριο έχουμε ως αποτέλεσμα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} W(t_{j+1}^n) (W(t_{j+1}^n) - W(t_j^n)) = \frac{1}{2} W_T^2 + \frac{1}{2} T.$$

Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$  χώρος πιθανότητας με φίλτρο και έστω μια κίνηση Brown ορισμένη στο χώρο αυτό.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 248** Θα λέμε ότι η στοχαστική διαδικασία  $X_t$  ανήκει στην κλάση  $\mathbb{L}^p$  ( $p \geq 1$ ) αν

(i) η  $X_t$  είναι προοδευτικά μετρήσιμη ως προς το φίλτρο  $(\mathcal{F}_t)$ ,

(ii) η  $X_t \in L^p([0, T] \times \Omega)$  δηλαδή

$$\int_0^T \mathbb{E}(X_t)^p dt < \infty.$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 249** Μια στοχαστική διαδικασία  $X_t \in \mathbb{L}^2$  ονομάζεται απλή αν μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$X_t = \sum_{k=1}^N e_k \mathbb{I}_{(t_{k-1}, t_k]}(t), \quad t \in [0, T],$$

όπου  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$  και  $e_k$  τ.μ. στον  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα για τις απλές στοχαστικές διαδικασίες και έπειτα θα ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα για μεγαλύτερη κλάση στοχαστικών διαδικασιών οριακά.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 250** Έστω  $X_t \in \mathbb{L}^2$  μια απλή στοχαστική διαδικασία. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Ito ως εξής,

$$\int X_t dW_t = \sum_{k=1}^N e_k (W_{t_k} - W_{t_{k-1}}),$$

ενώ για  $0 \leq a \leq b \leq T$  ορίζουμε  $\int_a^b X_t dW_t = \int X_t \mathbb{I}_{(a,b]} dW_t$  και  $\int_a^a X_t dW_t = 0$ .

Σημειώστε ότι μπορούμε να ολοκληρώσουμε τη στοχαστική διαδικασία  $X_t = \mathbb{I}_{(0,t]}$  και έχουμε ότι  $\int \mathbb{I}_{(0,t]} dW_t = W_t - W_0 = W_t$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα για να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα σε μεγαλύτερη κλάση στοχαστικών διαδικασιών από τις απλές στοχαστικές διαδικασίες.

**ΛΗΜΜΑ 251** Για κάθε  $X_t \in \mathbb{L}^2$  υπάρχει ακολουθία  $X_t^n \in \mathbb{L}^2$  απλών στοχαστικών διαδικασιών τ.ω.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \int_0^T (X_t - X_t^n)^2 dt \right] = 0.$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 252** Το στοχαστικό ολοκλήρωμα της  $X_t \in \mathbb{L}^2$  ορίζεται ως εξής,

$$\int_0^t X_s dW_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t X_s^n dW_s,$$

και το όριο είναι υπό την έννοια του  $\mathcal{M}_c^2$  και  $X_t^n$  είναι μια ακολουθία απλών στοχαστικών διαδικασιών που προσεγγίζουν την  $X_t \in \mathbb{L}^2$ .

Οι παρακάτω ιδιότητες ισχύουν για το στοχαστικό ολοκλήρωμα για απλές στοχαστικές διαδικασίες. Για στοχαστικές διαδικασίες που δεν είναι κατά ανάγκη απλές μπορεί να δείξει κανείς ότι ικανοποιούν τις ίδιες ιδιότητες χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι προσεγγίζονται από απλές.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 253** Αν  $X_t, Y_t \in \mathbb{L}^2$  απλές στοχαστικές διαδικασίες και  $0 \leq a < b < c$  και  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  τότε έχουμε,

(i) (Γραμμικότητα)  $\int_0^t (c_1 X_s + c_2 Y_s) dW_s = c_1 \int_0^t X_s dW_s + c_2 \int_0^t Y_s dW_s,$

(ii) (Προσθετικότητα)  $\int_a^c X_t dW_t = \int_a^b X_t dW_t + \int_b^c X_t dW_t,$

(iii) (Ισομετρία)  $\mathbb{E}[\int_a^b X_s dW_s \int_a^b Y_s dW_s | \mathcal{F}_a] = \mathbb{E}[\int_a^b X_s Y_s ds | \mathcal{F}_a],$

(iv) (Μηδενική Μέση Τιμή)  $\mathbb{E}[\int_a^b X_t dW_t | \mathcal{F}_a] = 0$  και

$$\mathbb{E}[\int_a^b X_t dW_t \int_b^c X_t dW_t | \mathcal{F}_a] = 0,$$

(v) (Ιδιότητα martingale)  $\mathbb{E}(\int_0^t X_r dW_r | \mathcal{F}_s) = \int_0^s X_r dW_r.$

Επιπλέον, η  $Y_t = \int_0^t X_s dW_s \in \mathcal{M}_c^2$  δηλαδή είναι συνεχής martingale.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θα συζητήσουμε την τέταρτη ιδιότητα μόνο, δηλαδή της μηδενικής μέσης τιμής του στοχαστικού ολοκληρώματος, διότι παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η απόδειξή της. Οι αποδείξεις των υπολοίπων ιδιοτήτων απαιτούν, εν ολίγοις, τους ίδιους ισχυρισμούς.

Έχουμε υποθέσει ότι η  $X_t \in \mathbb{L}^2$  δηλαδή είναι και προοδευτικά μετρήσιμη ως προς το φίλτρο  $(\mathcal{F}_t)$  ενώ τα  $e_k$  είναι  $\mathcal{F}$ -μετρήσιμες. Αν  $t \in (t_{k-1}, t_k]$  τότε  $X_t = e_k$  και επομένως το  $e_k$  είναι  $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμο για κάθε  $t \in (t_{k-1}, t_k]$  ή αλλιώς το  $e_k$  είναι  $\mathcal{F}_{t_{k-1}+\varepsilon}$ -μετρήσιμο για κάθε  $\varepsilon > 0$ . Δηλαδή οι αντίστροφες εικόνες  $\{e_k \in B\}$

με  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  ανήκουν στην  $\mathcal{F}_{t_{k-1}+\varepsilon}$  για κάθε  $\varepsilon > 0$  άρα και στην τομή  $\bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t_{k-1}+\varepsilon}$ . Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το φίλτρο ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες έχουμε ότι η  $e_k$  είναι  $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ -μετρήσιμη.

Θα δείξουμε τώρα την ιδιότητα της μηδενικής μέσης τιμής. Παρατηρούμε ότι

$$X_t \mathbb{I}_{(a,b]} = \sum_{k=1}^N e_k \mathbb{I}_{(t_{k-1}, t_k] \cap (a,b]} = \sum_{k=1}^N e_k \mathbb{I}_{(\hat{t}_{k-1}, \hat{t}_k]},$$

με  $\hat{t}_{k-1} = \max(t_{k-1}, a)$  και  $\hat{t}_k = \max(\min(t_k, b), \hat{t}_{k-1})$ .

Οπότε,

$$\mathbb{E} \left( \int_a^b X_t dW_t | \mathcal{F}_a \right) = \mathbb{E} \left( \sum_{k=1}^N e_k (W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}) | \mathcal{F}_a \right).$$

Αφού η  $W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}$  είναι ανεξάρτητη από την  $\mathcal{F}_{\hat{t}_{k-1}}$  τότε θα είναι και από την  $\mathcal{F}_a$ . Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ιδιότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής.

Αν  $X, Y$  τ.μ. και η  $Y$  είναι ανεξάρτητη από την  $\sigma(\sigma(X), G)$  τότε  $\mathbb{E}(XY|G) = \mathbb{E}(X|G)\mathbb{E}(Y)$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Για κάθε  $A \in G$  έχουμε,

$$\mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{E}(X|G)\mathbb{E}(Y)) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A XY) = \mathbb{E}(\mathbb{I}_A \mathbb{E}(XY|G)).$$

Παρατηρήστε ότι  $\sigma(\mathbb{I}_A X) \subseteq \sigma(\sigma(X), G)$  και άρα η  $Y$  είναι ανεξάρτητη και της  $\sigma(\mathbb{I}_A X)$  το οποίο το χρησιμοποιήσαμε στη δεύτερη ισότητα. Λόγω της μοναδικότητας της δεσμευμένης μέσης τιμής παίρνουμε το αποτέλεσμα.  $\square$

Στην προκειμένη περίπτωση λοιπόν έχουμε,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^N e_k(W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}) | \mathcal{F}_a\right) &= \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(e_k(W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}) | \mathcal{F}_a) \\ &= \sum_{k=1}^N \mathbb{E}(e_k | \mathcal{F}_a) \mathbb{E}(W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

αφού  $W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}$  είναι ανεξάρτητη από την  $\mathcal{F}_{\hat{t}_{k-1}}$  και εύκολα βλέπουμε ότι

$$\sigma(\sigma(e_k), \mathcal{F}_a) \subseteq \sigma(\mathcal{F}_{\hat{t}_{k-1}}, \mathcal{F}_a) = \mathcal{F}_{\hat{t}_{k-1}},$$

οπότε η  $W_{\hat{t}_k} - W_{\hat{t}_{k-1}}$  είναι ανεξάρτητη και της  $\sigma(\sigma(e_k), \mathcal{F}_a)$ .  $\square$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν και χωρίς δέσμευση, δηλαδή για την απλή μέση τιμή και αυτό προκύπτει παίρνοντας μέση τιμή κατά μέλη και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ιδιότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής.

Μπορούμε να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα με όρια τα οποία είναι χρόνοι στάσης.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 254** Έστω  $X_t \in \mathbb{L}^2$  και  $Y_t = \int_0^t X_s dW_s$ ,  $t \in [0, T]$ . Αν  $r$  είναι χρόνος στάσης ως προς το φίλτρο  $(\mathcal{F}_t)$  τ.ω.  $0 \leq r \leq T$  σβ. τότε και  $X_t \mathbb{I}_{\{r \leq t\}} \in \mathbb{L}^2$  και

$$Y_r = \int_0^r X_s dW_s = \int_0^T X_s \mathbb{I}_{\{s \leq r\}} dW_s.$$

Παρόμοιες ιδιότητες ικανοποιεί και το στοχαστικό ολοκλήρωμα με χρόνο στάσης ως όριο.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 255** Έστω  $t_0 \in [0, T]$  και  $r \in [t_0, T]$  χρόνος στάσης. Αν  $X_t, Y_t \in \mathbb{L}^2$  τότε

(i) (Μηδενική Μέση Τιμή)

$$\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^r X_t dW_t \middle| \mathcal{F}_{t_0}\right] = 0 \text{ και } \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^r X_t dW_t \int_r^T X_t dW_t \middle| \mathcal{F}_{t_0}\right] = 0,$$

(ii) (Ισομετρία)

$$\mathbb{E}\left[\int_{t_0}^r X_s dW_s \int_{t_0}^r Y_s dW_s \mid \mathcal{F}_{t_0}\right] = \mathbb{E}\left[\int_{t_0}^r X_s Y_s ds \mid \mathcal{F}_{t_0}\right].$$

Θα ορίσουμε τώρα την τετραγωνική κύμανση του στοχαστικού ολοκληρώματος.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 256** Έστω  $X_t \in \mathbb{L}^2$  και  $Y_t = \int_0^t X_s dW_s \in \mathcal{M}_c^2$ . Για κάθε  $t > 0$  το όριο

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N |Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}|^2 = \int_0^t X_s^2 ds,$$

υπό την έννοια του  $L^2$ . Ορίζουμε ως τετραγωνική κύμανση της  $Y_t$  την ποσότητα  $[Y, Y](t) = \int_0^t X_s^2 ds$ . Τέλος, η  $Y_t^2 - [Y, Y](t)$  είναι *martingale*.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θα δείξουμε μόνο ότι η  $Y_t^2 - [Y, Y](t)$  είναι *martingale*. Γράφουμε,

$$Y_t^2 - [Y, Y](t) = (Y_t - Y_s)^2 + Y_s^2 + 2Y_s(Y_t - Y_s) - [Y, Y](t),$$

για  $0 \leq s < t$ . Παίρνοντας δεσμευμένη μέση τιμή (δεδομένου της  $\mathcal{F}_s$ ) κατά μέλη και χρησιμοποιώντας κα-

τάλληλες ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής αλλά και του στοχαστικού ολοκληρώματος, συγκεκριμένα, την ισομετρία του Ito και την ιδιότητα της μη-δενικής μέσης τιμής (δηλαδή το ότι  $\mathbb{E}(Y_t - Y_s | \mathcal{F}_s) = 0$  αφού η  $Y_t$  είναι στοχαστικό ολοκλήρωμα), έχουμε ότι η  $Y_t^2 - [Y, Y](t)$  είναι martingale. Σημειώστε ότι χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το  $\int_0^t X_s^2 ds$  είναι  $\mathcal{F}_s$ -μετρήσιμο το οποίο προκύπτει από τη θεωρία μέτρου και του ολοκληρώματος Lebesgue και συγκεκριμένα από το θεώρημα Fubini και τη θεωρία πίσω από αυτό, καθώς η  $X_t$  είναι στην πραγματικότητα συνάρτηση δυο μεταβλητών, των  $(t, \omega)$ .  $\square$

## 10.2 Στοχαστικό Ανάπτυγμα Taylor

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με το στοχαστικό ανάπτυγμα Taylor ή αλλιώς τη φόρμουλα του Ito.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 257** Μια στοχαστική διαδικασία  $X_t$  ονομάζεται διαδικασία Ito αν έχει τη μορφή,

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW_s,$$

όπου  $b(t) \in \mathbb{L}^2$ ,  $a(s) \in \mathbb{L}^1$  και  $X_0$  είναι  $\mathcal{F}_0$ -μετρήσιμη.

Συχνά χρησιμοποιούμε (μόνο συμβολικά) τη διαφορική μορφή μιας στοχαστικής διαδικασίας Ito, δηλαδή γράφουμε  $dX_t = a(t)dt + b(t)dW_t$  και εννοούμε στην πραγματικότητα την ολοκληρωτική μορφή την οποία έχουμε ορίσει αυστηρά.

Εξαιρετικά χρήσιμο στις εφαρμογές αλλά και στην εύρεση λύσης στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (που θα ορίσουμε παρακάτω) είναι το στοχαστικό ανάπτυγμα Taylor ή αλλιώς η φόρμουλα του Ito. Θα δώσουμε την απλή μορφή και κάποια παραδείγματα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 258** Έστω  $f(x)$  μια πραγματική συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους  $f', f''$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Τότε και η  $f(W(t))$  είναι μια διαδικασία Ito η οποία έχει τη μορφή,

$$f(W(t)) - f(W(0)) = \frac{1}{2} \int_0^t f''(W(s)) ds + \int_0^t f'(W(s)) dW_s.$$

Σε διαφορική μορφή γράφεται  $df(W(t)) = \frac{1}{2} f''(W(t)) dt + f'(W(t)) dW_t$ .

Αν διαλέξουμε  $f(x) = x^2$  τότε  $f' = 2x$  και  $f'' = 2$ . Οπότε εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι και η  $W_t^2$  είναι μια διαδικασία Ito με διαφορική μορφή  $d(W_t^2) = dt + 2W_t dW_t$ . Επομένως, έχουμε το αποτέλεσμα ότι

$$\int_0^t W_s dW_s = \frac{1}{2}(W_t^2 - t).$$

Παρόμοια, διαλέγοντας  $f(x) = x^3$  διαπιστώνουμε ότι το στοχαστικό διαφορικό της  $W_t^3$  είναι  $d(W_t^3) =$

$$3W_t dt + 3W_t^2 dW_t.$$

**ΛΗΜΜΑ 259 (Gronwall)** Έστω  $T > 0$  και  $c \geq 0$ . Έστω  $u(\cdot)$  μια συνάρτηση Borel μη αρνητική στο  $[0, T]$  και έστω  $v(\cdot)$  μια μη αρνητική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο  $[0, T]$ . Αν

$$u(t) \leq c + \int_0^t v(s)u(s)ds, \quad t \in [0, T]$$

$$\text{τότε} \quad u(t) \leq ce^{\int_0^t v(s)ds}.$$

Θα δώσουμε τώρα ένα γενικότερο θεώρημα στοχαστικού αναπτύγματος.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 260** Έστω  $X_t$  μια διαδικασία Ito με συντελεστές  $a(t), b(t)$  και έστω  $f(t, x)$  μια πραγματική συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους  $f_t, f_x, f_{xx}$  για κάθε  $t \geq 0$  και  $x \in \mathbb{R}$ . Τότε και η  $f(t, X_t)$  είναι μια διαδικασία Ito τ.ω.

$$\begin{aligned} f(t, X_t) = & f(0, X_0) \\ & + \int_0^t \left( f_t(s, X_s) + f_x(s, X_s)a(s) + \frac{1}{2}f_{xx}(s, X_s)b^2(s) \right) ds \\ & + \int_0^t f_x(s, X_s)b(s)dW_s. \end{aligned}$$

Θα εφαρμόσουμε την έννοια του χρόνου στάσης καθώς και την φόρμουλα του Ito για να αποδείξουμε ότι η απόλυτη τιμή της κίνησης Brown έχει φραγμένες ροπές όλων των τάξεων.

**ΛΗΜΜΑ 261** Για κάθε  $p > 0$  υπάρχει κάποια σταθερά  $C(p)$ , εξαρτώμενη από το  $p$  μόνο τ.ω.

$$\mathbb{E}|W_t|^p < C(p)$$

για κάθε  $t \in [0, T]$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θεωρούμε την ακολουθία χρόνων στάσης

$$r_n = \inf\{t \in [0, T] : |W_t| > n\}$$

Σχηματίζουμε τη σταματημένη στοχαστική διαδικασία  $W_{t \wedge r_n}$  η οποία ικανοποιεί

$$W_{t \wedge r_n} = \int_0^{t \wedge r_n} dW_s$$

Θα εφαρμόσουμε τη φόρμουλα του Ito στην  $|W_{t \wedge r_n}|^p$ .

Έχουμε,

$$\begin{aligned} |W_{t \wedge r_n}|^p &= \frac{(p-1)p}{2} \int_0^t |W_{s \wedge r_n}|^{p-3} W_{s \wedge r_n} ds \\ &\quad + p \int_0^t |W_{s \wedge r_n}|^{p-2} W_{s \wedge r_n} dW_s. \end{aligned}$$

Παίρνουμε μέση τιμή κατά μέλη και έχουμε

$$\mathbb{E}|W_{t \wedge r_n}|^p \leq \frac{(p-1)p}{2} \int_0^t \mathbb{E}|W_{s \wedge r_n}|^{p-2} ds.$$

Επαγωγικά, και ξεκινώντας για  $p = 2$  για άρτιες δυνάμεις αποδεικνύουμε ότι  $\mathbb{E}(|W_{t \wedge r_n}|^p) \leq C(p)$ . Αυτό σημαίνει ότι

$$\mathbb{E}(|W_{t \wedge r_n}|) = \mathbb{E}(\sqrt{|W_{t \wedge r_n}|^2}) \leq \sqrt{\mathbb{E}(|W_{t \wedge r_n}|^2)} \leq C$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι και οι περιττές δυνάμεις είναι επίσης φραγμένες από μια σταθερά που εξαρτάται μονάχα από το  $p$  και όχι από το  $n$  όπου έχει ορισθεί ο χρόνος στάσης. Δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathbb{E}|W_{t \wedge r_n}|^p \leq C(p).$$

Όμως

$$\mathbb{E}|W_{t \wedge r_n}|^p = \mathbb{E}|W_{t \wedge r_n}|^p \mathbb{I}_{\{r_n \geq t\}} + n^p P(\{r_n < t\}).$$

΄ρα προκύπτει ότι

$$P(\{t \wedge r_n < t\}) = P(\{r_n < t\}) \rightarrow 0$$

καθώς  $n \rightarrow \infty$  και έτσι μπορούμε να δείξουμε ότι  $t \wedge r_n \rightarrow t$  σχεδόν βέβαια καθώς  $n \rightarrow \infty$ . Χρησιμοποιώντας και το λήμμα Fatou παίρνουμε

$$\mathbb{E}|W_t|^p \leq C(p)$$

□

Γενικά για να υπολογίσουμε ή να φράξουμε ροπές μιας στοχαστικής διαδικασίας θα ήταν χρήσιμη η γνώση της πυκνότητάς της (όπως για παράδειγμα στην κίνηση Brown, δες θεωρήματα 225 και 229) αλλά αυτό συμβαίνει σπάνια οπότε η παραπάνω τεχνική είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 262** Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή  $\mathbb{E}(W_t^4)$ . Θα χρησιμοποιήσουμε τη φόρμουλα του Ito για να βρο-

ύμε τη μορφή της  $W_t^4$ .

$$W_t^4 = \int_0^t 4W_s^3 dW_s + \int_0^t 6W_s^2 ds.$$

Παίρνουμε μέση τιμή κατά μέλη και έχουμε

$$\mathbb{E}(W_t^4) = \int_0^t 6\mathbb{E}(W_s^2) ds = \int_0^t 6s ds = 3t^2.$$

Έχουμε χρησιμοποιήσει το θεώρημα του *Fubini*, το ότι η μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι μηδέν και το γεγονός ότι η διακύμανση της κίνησης *Brown* είναι ίση με  $t$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 263** Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή της  $W_t^6$ . Χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του *Ito* έχουμε,

$$W_t^6 = 6 \int_0^t W_s^5 dW_s + 15 \int_0^t W_s^4 ds.$$

Παίρνουμε μέση τιμή κατά μέλη και έχουμε,

$$\mathbb{E}(W_t^6) = 15t^3.$$

Στην πραγματικότητα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τη μέση τιμή όλων των δυνάμεων της  $W_t$ . Από προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι  $\mathbb{E}(W_t^3) = 0$ . Θα δείξουμε, με επαγωγή, ότι  $\mathbb{E}(W_t^{2k+1}) = 0$  και  $\mathbb{E}(W_t^{2k}) = \left(\frac{t}{2}\right)^k \frac{(2k)!}{k!}$ .

Ας ξεκινήσουμε με τις περιττές δυνάμεις. Έχουμε δείξει ότι ισχύει για  $k = 1$ . Υποθέτουμε ότι ισχύει για  $k = n$ . Θα δείξουμε ότι ισχύει για  $k = n + 1$ . Εφαρμόζουμε λοιπόν τη φόρμουλα του Ito στην  $f(W_t) = W_t^{2n+3}$ . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η μέση τιμή είναι μηδέν αφού η μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι πάντοτε μηδέν.

Συνεχίζουμε με τις άρτιες δυνάμεις. Έχουμε δείξει ότι για  $k = 1$  η μέση τιμή είναι  $\mathbb{E}(W_t^2) = \left(\frac{t}{2}\right)^1 \frac{2!}{1!} = t$ . Υποθέτουμε ότι ισχύει για  $k = 2n$  και θα δείξουμε ότι ισχύει για  $k = 2n + 2$ . Εφαρμόζοντας τη φόρμουλα του Ito στην  $f(W_t) = W_t^{2n+2}$  παίρνουμε το αποτέλεσμα.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 264** Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία  $X_t = e^{\sigma W_t}$  με  $\sigma \in \mathbb{R}$ . Θα βρούμε το στοχαστικό διαφορικό της  $X_t$  ή αλλιώς θα εφαρμόσουμε τη

φόρμουλα του Ito στην  $f(W_t)$  με  $f(x) = e^{\sigma x}$  η οποία βέβαια ικανοποιεί τις απαιτούμενες προϋποθέσεις. Πράγματι,

$$dX_t = \sigma X_t dW_t + \frac{1}{2} \sigma^2 X_t dt, \quad X_0 = 1.$$

Τώρα θα υπολογίσουμε και τη μέση τιμή της  $X_t$  χρησιμοποιώντας το παραπάνω (αφού δείξετε ότι έχει φραγμένη ροπή κατάλληλης τάξης με χρόνους στάσης και ίσως το λήμμα του Gronwall). Έχουμε λοιπόν,

$$\mathbb{E}(X_t) = \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \mathbb{E}(X_s) ds + 1.$$

Θέτουμε  $y(t) = \mathbb{E}(X_t)$  και διαπιστώνουμε ότι η  $y(t)$  θα πρέπει να ικανοποιεί τη συνήθη διαφορική εξίσωση,

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{\sigma^2}{2} y(t), \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Εξηγήστε γιατί. Η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι  $y(t) = e^{\frac{\sigma^2}{2}t}$ . 'ρα  $\mathbb{E}(e^{\sigma W_t}) = e^{\frac{\sigma^2}{2}t}$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 265** Έστω  $f(t, x) = tx$ . Η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί τις απαιτήσεις της φόρμουλας του Ito επομένως προκύπτει ότι  $tW_t = \int_0^t W_s ds + \int_0^t s dW_s$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 266 (Γεωμετρική κίνηση Brown)**  
Θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία,

$$X_t = X_0 + a \int_0^t X_s ds + b \int_0^t X_s dW_s, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Υποθέτουμε ότι η  $X_t$  είναι της μορφής  $X_t = f(t, W_t)$  για μια κατάλληλη συνάρτηση  $f(t, x)$  την οποία θα πρέπει να υπολογίσουμε. Γενικά αυτό δεν είναι σωστό όπως θα δούμε σε επόμενο παράδειγμα. Όμως, μπορούμε πάντοτε να κάνουμε μια τέτοια υπόθεση (ή παρόμοια) και αν μας οδηγήσει σε κάποιο αποτέλεσμα τότε αυτό που θα πρέπει να κάνουμε είναι να το επαληθεύσουμε χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του Ito.

Εφαρμόζουμε λοιπόν τη φόρμουλα του Ito στην άγνω-

στη  $f(t, x)$  και έχουμε,

$$\begin{aligned} f(t, W_t) = & f(0, W_0) \\ & + \int_0^t \left( f_t(s, W_s) + f_x(s, W_s) \cdot 0 + \frac{1}{2} f_{xx}(s, W_s) \cdot 1^2 \right) ds \\ & + \int_0^t f_x(s, W_s) \cdot 1 dW_s, \end{aligned}$$

αφού  $W_t = W_0 + \int_0^t 0 ds + \int_0^t 1 dW_s$ . Λόγω της μοναδικότητας της αναπαράστασης μιας διαδικασίας Ito έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(t, x) &= b f(t, x) \\ f_t(t, x) + \frac{1}{2} f_{xx}(t, x) &= a f(t, x). \end{aligned}$$

Λύνοντας την πρώτη έχουμε ότι  $f(t, x) = g(t)e^{bx}$  για κάποια  $g(t)$  και χρησιμοποιώντας και τη δεύτερη έχουμε ότι  $g(t) = Ce^{a - \frac{b^2}{2}t}$  για κάποια σταθερά  $C$  την οποία υπολογίζουμε από τη σχέση  $f(0, 0) = X_0$ , δηλαδή  $C = X_0$ . Τελικά,

$$X_t = X_0 e^{bW_t + (a - \frac{b^2}{2})t}$$

Όπως είπαμε, θα πρέπει τώρα να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του Ito στην  $f(t, W_t)$  με

$$f(t, x) = X_0 e^{bx + (a - \frac{b^2}{2})t}$$

Αποδείξτε, χρησιμοποιώντας χρόνους στάσης, ότι η  $|X_t|$  έχει φραγμένες ροπές όλων των τάξεων όταν αντίστοιχα η αρχική τιμή  $|X_0|$  έχει φραγμένες ροπές.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 267** Θα δούμε τώρα την  $X_t = e^{W_t} e^{-\frac{t}{2}}$ . Χρησιμοποιούμε τη φόρμουλα του Ito στην  $f(t, W_t)$  με  $f(t, x) = e^x e^{-\frac{t}{2}}$  και έχουμε  $X_t = X_0 + \int_0^t X_s dW_s$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 268 (Διαδικασία Ornstein – Uhlenbeck)**

Θα εξετάσουμε τη στοχαστική διαδικασία  $Y_t = be^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$  όπου  $a > 0, b \in \mathbb{R}$  και θα δείξουμε ότι  $Y_t = -a \int_0^t Y_s ds + \int_0^t b dW_s$ . Αν το δούμε αντίστροφα, διαπιστώνουμε ότι η  $Y_t$  δεν γράφεται στη μορφή  $Y_t = f(t, W_t)$  για μια συνάρτηση  $f(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  όπως είπαμε σε προηγούμενο παράδειγμα αλλά στη μορφή  $Y_t = f(t, X_t)$  για κατάλληλα επιλεγμένες  $f(t, x)$  και  $X_t$ .

Εφαρμόζουμε τη φόρμουλα του Ito στην  $f(t, X_t)$  με  $f(t, x) = e^{-at}x$  και  $X_t = b \int_0^t e^{as} dW_s$  (εφαρμόστε τη και δείξτε το αποτέλεσμα).

### 10.3 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Θα δώσουμε παρακάτω ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα ολοκλήρωσης κατά μέρη το οποίο θα το χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε τη λύση των γραμμικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 269** (Ολοκλήρωση κατά μέρη) Έστω

$$X_t = X_0 + \int_0^t a_1(s) ds + \int_0^t b_1(s) dW_s$$

και

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t a_2(s) ds + \int_0^t b_2(s) dW_s$$

διαδικασίες Ito. Τότε,

$$\begin{aligned} X_t Y_t = X_0 Y_0 &+ \int_0^t X_s a_2(s) ds + \int_0^t X_s b_2(s) dW_s \\ &+ \int_0^t Y_s a_1(s) ds + \int_0^t Y_s b_1(s) dW_s \\ &+ \int_0^t b_1(s) b_2(s) ds. \end{aligned}$$

Δίνουμε τώρα τον ορισμό της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 270** Έστω  $W_t$  μια κίνηση Brown ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας με φίλτρο  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ . Μια εξίσωση της μορφής,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) dW_s,$$

ονομάζεται στοχαστική διαφορική εξίσωση. Η άγνωστη ποσότητα είναι η στοχαστική διαδικασία  $X_t$  ενώ οι συναρτήσεις  $f(t, x)$ ,  $g(t, x)$  και η τ.μ.  $X_0$  είναι δοσμένα.

Θα δώσουμε το βασικό θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας για την παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση, δηλαδή τις προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες το πρόβλημα έχει μοναδική λύση. Πριν το κάνουμε αυτό όμως θα δώσουμε τον ορισμό της ισχυρής λύσης καθότι υπάρχει και η έννοια της ασθενούς λύσης με την οποία δεν θα ασχοληθούμε εδώ.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 271** Μια στοχαστική διαδικασία  $X_t$  θα λέμε ότι είναι ισχυρή λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης αν είναι προσαρμοσμένη και τ.ω.  $f(t, X_t) \in \mathbb{L}^1$  και  $g(t, X_t) \in \mathbb{L}^2$  και τέλος να ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση σβ.

Το βασικό θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας είναι το επόμενο.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 272** Έστω ότι οι παρακάτω συνθήκες ικανοποιούνται.

- (i) (Συνθήκη Lipschitz) Για κάθε  $T, N$  υπάρχει σταθερά  $K(T, N)$  τ.ω. για κάθε  $|x|, |y| \leq N$  και για

όλα τα  $0 \leq t \leq T$ ,

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |g(t, x) - g(t, y)| \leq K|x - y|.$$

(ii) (Γραμμικά αυξητική συνθήκη) Υπάρχει σταθερά  $C > 0$  τ.ω.  $|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq C(1 + |x|)$ .

(iii) Η  $X_0$  είναι ανεξάρτητη από την  $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$  και  $\mathbb{E}(X_0^2) < \infty$ .

Τότε η στοχαστική διαφορική εξίσωση έχει μοναδική ισχυρή λύση  $X_t$  η οποία είναι συνεχής και

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq t \leq T} X_t^2\right) \leq \hat{C}(1 + \mathbb{E}(X_0^2)),$$

με  $\hat{C}$  να εξαρτάται μόνο από τα  $C, T$ .

Επίσης έχουμε και το επόμενο θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 273 (Yamada – Watanabe)** Έστω ότι η  $f(x)$  ικανοποιεί τη συνθήκη *Lipschitz* και η  $g(x)$  είναι *Holder* συνεχής τάξης  $a \in (0, 1)$ . Τότε υπάρχει μοναδική λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)ds + \int_0^t g(X_s)dW_s.$$

Σημειώστε ότι η  $g(x) = \sqrt{x}$  δεν είναι Lipschitz συνεχής αλλά Holder συνεχής τάξης  $\frac{1}{2}$ .

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 274** Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση,

$$X_t = 1 + a \int_0^t X_s ds + b \int_0^t X_s dW_s, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Θα δείξουμε ότι ικανοποιεί το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας. Πράγματι, είναι εύκολο να δούμε ότι ικανοποιεί τις δυο πρώτες συνθήκες (Lipschitz και γραμμικά αυξητική συνθήκη). Θα δούμε μόνο την τελευταία για την οποία θα πρέπει να δείξουμε ότι η αρχική συνθήκη  $X_0 = 1$  είναι ανεξάρτητη της  $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$ . Για να ισχύει αυτό όπως γνωρίζουμε θα πρέπει οι  $\sigma(X_0)$  και η  $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$  να είναι ανεξάρτητες, δηλαδή αν  $A \in \sigma(X_0)$  και  $B \in \sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$  τότε  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ . Θα μελετήσουμε την  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγει η σταθερή τ.μ.  $X_0 = 1$ . Όπως γνωρίζουμε η  $\sigma(X_0) = (\{\omega \in \Omega : X_0 \in C\}, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . Εδώ είναι ιδιαίτερα χρήσιμο το γεγονός ότι η  $X_0$  είναι σταθερή, διότι μόνο δυο είναι οι αντίστροφες

εικόνες και αυτές προκύπτουν από το αν το  $1 \in C$  ή όχι. Όταν λοιπόν το  $C$  περιέχει το  $1$  τότε η αντίστροφη εικόνα είναι το  $\Omega$  ενώ όταν δεν το περιέχει η αντίστροφη εικόνα είναι το κενό. Ήρα,  $\sigma(X_0) = \{\emptyset, \Omega\}$  η οποία είναι η μικρότερη  $\sigma$ -άλγεβρα που μπορεί να κατασκευάσει κανείς. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητη από την  $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq T)$ .

### 10.3.1 Γραμμικές Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε γραμμικές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και θα καταγράψουμε τη μοναδική λύση τους.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 275** Έστω  $X_t = X_0 + \int_0^t a_s ds + \int_0^t b_s dW_s$  διαδικασία Ito και έστω  $U_t = 1 + \int_0^t U_s a_s ds + \int_0^t U_s b_s dW_s$ . Ονομάζουμε την  $U_t$  στοχαστικό εκθετικό της  $X_t$ .

Στο επόμενο θεώρημα θα καταγράψουμε τη μορφή μιας τέτοιας  $U_t$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 276** Αν  $U_t$  είναι το στοχαστικό εκθετικό της

$X_t$  η οποία είναι διαδικασία Ito τότε

$$U_t = e^{X_t - X_0 - \frac{1}{2} \int_0^t b_s^2 ds}.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θέτουμε  $K(t) = X_t - X_0 - \frac{1}{2} \int_0^t b_s^2 ds = \int_0^t (a_s - \frac{1}{2} b_s^2) ds + \int_0^t b_s dW_s$  η οποία είναι διαδικασία Ito. Επίσης, θέτουμε  $f(x) = e^x$  και εφαρμόζουμε τη φόρμουλα του Ito στην  $f(K(t))$  και προκύπτει το αποτέλεσμα.  $\square$

Θα εξετάσουμε τώρα τη γενική μορφή της γραμμικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, δηλαδή,

$$X_t = X_0 + \int_0^t (a_s + b_s X_s) ds + \int_0^t (c_s + d_s X_s) dW_s,$$

με κατάλληλες στοχαστικές διαδικασίες  $a_t, b_t, c_t, d_t$  έτσι ώστε να έχει μοναδική λύση. Θα υπολογίσουμε τη λύση θεωρώντας ότι έχει τη μορφή  $X_t = U_t V_t$  με  $U_t$  τ.ω.

$$U_t = 1 + \int_0^t U_s b_s ds + \int_0^t U_s d_s dW_s,$$

δηλαδή η  $U_t$  είναι το στοχαστικό εκθετικό της  $Y_t = Y_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t d_s dW_s$  και επομένως είναι γνωστή, ε-

νώ η  $V_t = X_0 + \int_0^t k_1(s)ds + \int_0^t k_2(s)dW_s$  με  $k_1(t), k_2(t)$  στοχαστικές διαδικασίες οι οποίες πρέπει να υπολογιστούν κατάλληλα.

Θα εφαρμόσουμε την ολοκλήρωση κατά μέρη για να υπολογίσουμε το γινόμενο  $U_t V_t$  το οποίο θα εξισώσουμε με την  $X_t$  και έτσι να ορίσουμε κατάλληλα τις  $k_1(t), k_2(t)$  για να ισχύει η ισότητα. Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned} U_t V_t &= X_0 + \int_0^t U_s k_1(s)ds + \int_0^t U_s k_2(s)dW_s \\ &\quad + \int_0^t U_s V_s b_s ds + \int_0^t V_s U_s d_s dW_s + \int_0^t k_2(s) d_s U_s ds \\ &= U_0 V_0 + \int_0^t b_s X_s ds + \int_0^t d_s X_s dW_s \\ &\quad + \int_0^t (U_s k_1(s) + k_2(s) d_s U_s) ds + \int_0^t U_s k_2(s) dW_s, \end{aligned}$$

έχοντας αντικαταστήσει το γινόμενο  $U_s V_s$  με την  $X_s$ . Εξισώνοντας με την  $X_t$  προκύπτει ότι  $k_1(t) = \frac{a_t - c_t d_t}{U_t}$  και  $k_2(t) = \frac{c_t}{U_t}$  και επομένως η  $X_t = U_t V_t$  είναι γνωστή.

## 10.4 Στοχαστικό θεώρημα Fubini

Το επόμενο θεώρημα είναι το λεγόμενο στοχαστικό θεώρημα Fubini με το οποίο, κάτω από τις κατάλληλες προϋποθέσεις, μπορεί να εναλλάξει κανείς το στοχαστικό ολοκλήρωμα με το ολοκλήρωμα Riemann.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 277** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$  ένας χώρος πιθανότητας με φίλτρο και έστω  $W_t$  μια κίνηση Brown στο χώρο αυτό. Έστω ότι  $\Phi(t, r, \omega) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια φραγμένη και  $(\mathcal{F}_t)$ -προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία. Τότε για κάθε  $T > 0$ , έχουμε

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s, r, \omega) \mathbb{I}_{[0, T]}(r) dr dW_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \Phi(s, r, \omega) \mathbb{I}_{[0, T]}(r) dW_s dr.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 278** Θα υπολογίσουμε τη μέση τιμή και διακύμανση της  $Y_t = \int_0^t W_r dr$ . Η μέση τιμή υπολογίζεται εύκολα χρησιμοποιώντας το κλασικό θεώρημα Fubini και είναι μηδέν. Θα υπολογίσουμε τώρα την  $\mathbb{E}(Y_t^2)$ . Έχουμε λοιπόν,

$$Y_t = \int_0^t W_r dr = \int_0^t \int_0^r 1 dW_s dr = \int_0^t \int_s^t 1 dr dW_s = \int_0^t (t - s) dW_s.$$

$$\text{ήρα } \mathbb{E}(Y_t^2) = \frac{t^3}{3}.$$

Μπορούμε να το υπολογίσουμε και διαφορετικά χω-  
ρίς τη χρήση του στοχαστικού θεωρήματος *Fubini*.  
Από προηγούμενο παράδειγμα γνωρίζουμε ότι  $tW_t = \int_0^t W_r dr + \int_0^t r dW_r$ . Οπότε,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \int_0^t W_r dr \right)^2 &= \mathbb{E} \left( tW_t - \int_0^t r dW_r \right)^2 \\ &= t^3 + \mathbb{E} \left( \int_0^t s dW_s \right)^2 - 2t \mathbb{E} \left( W_t \int_0^t r dW_r \right) \\ &= t^3 + \frac{t^3}{3} - 2t \mathbb{E} \left( \int_0^t dW_r \int_0^t r dW_r \right) \\ &= t^3 + \frac{t^3}{3} - 2t \mathbb{E} \left( \int_0^t r dr \right) \\ &= \frac{t^3}{3}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την ισομετρία του *Ito* δυο φορές, την πρώτη για τον υπολογισμό της μέσης τιμής του τετρα-  
γώνου στοχαστικού ολοκληρώματος και τη δεύτερη για  
τον υπολογισμό της μέσης τιμής για γινόμενο στοχα-  
στικών ολοκληρωμάτων.

## 10.5 Θεώρημα Girsanov

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την τεχνική αλλαγής μέτρου και αλλαγής κίνησης Brown.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 279** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F})$  μετρήσιμος χώρος και  $P, Q$  δυο μέτρα πιθανότητας στον ίδιο χώρο. Το  $Q$  θα λέγεται απόλυτα συνεχές ως προς το  $P$  και γράφουμε  $Q \ll P$ , αν  $Q(A) = 0$  όταν  $P(A) = 0$ . Τα  $P, Q$  ονομάζονται ισοδύναμα αν  $Q \ll P$  και  $P \ll Q$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 280 (Radon-Nikodym)** Αν  $Q \ll P$  τότε υπάρχει μοναδική τ.μ.  $L$  τ.ω.  $L \geq 0$ ,  $\mathbb{E}_P L = 1$  και

$$Q(A) = \mathbb{E}_P(L\mathbb{I}_A), \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Η  $L$  είναι  $P$ -σβ. μοναδική. Αντίστροφα, αν υπάρχει μια τ.μ.  $L$  με την παραπάνω ιδιότητα και το  $Q$  ορίζεται ως  $Q(A) = \mathbb{E}_P(L\mathbb{I}_A)$  τότε το  $Q$  είναι μέτρο πιθανότητας και  $Q \ll P$ .

Η τ.μ.  $L$  ονομάζεται η Radon-Nikodym παράγωγος ή η πυκνότητα του  $Q$  ως προς το  $P$  και συμβολίζεται

με  $\frac{dQ}{dP} = L$ . Προκύπτει ότι αν  $Q \ll P$  τότε

$$\mathbb{E}_Q(X) = \mathbb{E}_P(LX),$$

για κάθε τ.μ.  $X$  ολοκληρώσιμη ως προς το  $Q$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 281** Έστω  $L(t)$  μια θετική  $P$ -martingale τ.ω.  $\mathbb{E}_P(L(T)) = 1$ . Ορίζουμε το καινούριο μέτρο πιθανότητας  $Q$  ως εξής

$$Q(A) = \mathbb{E}_P(L(T)\mathbb{I}_A), \forall A \in \mathcal{F}.$$

Τότε το  $Q$  είναι απόλυτα συνεχές ως προς το  $P$  και για  $Q$ -ολοκληρώσιμη τ.μ.  $X$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_Q(X) &= \mathbb{E}_P(L(T)X), \\ \mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_t) &= \mathbb{E}_P\left(\frac{L(T)}{L(t)}X|\mathcal{F}_t\right), \end{aligned}$$

και αν η  $X$  είναι  $\mathcal{F}_t$ -μετρήσιμη, τότε για  $s \leq t$

$$\mathbb{E}_Q(X|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}_P\left(\frac{L(t)}{L(s)}X|\mathcal{F}_s\right).$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 282** Μια στοχαστική διαδικασία  $M(t)$  είναι μια  $Q$ -martingale αν  $L(t)M(t)$  είναι μια  $P$ -martingale

**ΘΕΩΡΗΜΑ 283** Έστω  $X_n \rightarrow X$  κατά  $P$ -πιθανότητα και έστω  $Q \ll P$ . Τότε  $X_n \rightarrow X$  κατά  $Q$ -πιθανότητα.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 284** Η τετραγωνική κύμανση μιας στοχαστικής διαδικασίας δεν αλλάζει κάτω από αλλαγή σε άλλο απόλυτα συνεχές μέτρο πιθανότητας.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 285 (Girsanov)** Έστω  $W_t$  μια κίνηση Brown κάτω από το μέτρο πιθανότητας  $P$ . Έστω η στοχαστική διαδικασία  $\hat{W}_t = W_t + mt$ . Ορίζουμε το μέτρο  $Q$  ως εξής,

$$\frac{dQ}{dP} = L = e^{-mW_T - \frac{1}{2}m^2T}.$$

Τότε το  $Q$  είναι ισοδύναμο με το  $P$  και η  $\hat{W}(t)$  είναι  $Q$ -κίνηση Brown. Επίσης,

$$\frac{dP}{dQ} = \frac{1}{L} = e^{m\hat{W}_T - \frac{1}{2}m^2T}.$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 286** Έστω  $W_t$  μια  $P$ -κίνηση Brown και  $H(t)$  τ.ω.  $X_t = \int_0^t H(s)dW_s$  να ορίζονται. Ορίζουμε το μέτρο  $Q$  ως εξής,

$$L = \frac{dQ}{dP} = e^{-\int_0^T H(s)dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T H^2(s)ds}.$$

Τότε τα  $P, Q$  είναι ισοδύναμα και η στοχαστική διαδικασία  $\hat{W}_t = W_t + \int_0^t H(s)ds$  είναι  $Q$ -κίνηση Brown αν η  $Z(t) = e^{-\int_0^t H(s)dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t H^2(s)ds}$  είναι martingale.

Μια ικανή συνθήκη για να είναι η  $Z(t)$  martingale είναι η επόμενη συνθήκη

$$\mathbb{E}(e^{\frac{1}{2} \int_0^T H^2(s)ds}) < \infty \quad \text{Συνθήκη Novikov}.$$

Βέβαια, αυτή ικανοποιείται όταν π.χ. η  $H(t)$  είναι φραγμένη από μια σταθερά κατά απόλυτη τιμή.

Το τελευταίο θεώρημα είναι το αντίστροφο των προηγούμενων, δηλαδή, αποδεικνύεται ότι όταν εφοδιάσεις το χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  με το φιλτράρισμα που παράγει η κίνηση Brown (τροποποιημένο έτσι ώστε να ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες) τότε κάθε

ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας  $Q$  έχει πυκνότητα της μορφής που περιγράψαμε παραπάνω.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 287** Έστω ο χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t^W))$  με φίλτρο. Τότε για κάθε μέτρο πιθανότητας  $Q$  ισοδύναμο με το  $P$  υπάρχει μια στοχαστική διαδικασία  $H_t$  η οποία είναι  $(\mathcal{F}_t^W)$ -προοδευτικά μετρήσιμη τ.ω.

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\int_0^T H(s)dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T H^2(s)ds}.$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 288** Έστω η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_1(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)dW_s,$$

με  $g(t, x) > 0$ , ορισμένη στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$  και μια κίνηση Brown στο χώρο αυτό. Στόχος μας είναι να αλλάξουμε το μέτρο πιθανότητας  $Q$  έτσι ώστε να κατασκευάσουμε μια άλλη κίνηση Brown  $\hat{W}_t$  και η λύση της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης να ικανοποιεί και την ε-

πόμενη,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_2(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) d\hat{W}_s,$$

για μια δοσμένη συνάρτηση  $f_2(t, x)$ . Θέτουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{f_1(t, X_t) - f_2(t, X_t)}{g(t, X_t)}, \\ L(T) &= e^{-\int_0^T H(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T H^2(s) ds}, \\ \frac{dQ}{dP} &= L(T). \end{aligned}$$

Αν η  $L(t)$  είναι *martingale* τότε η στοχαστική διαδικασία  $\hat{W}_t = W_t + \int_0^t H(s) ds$  είναι  $Q$ -κίνηση Brown.

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι

$$\int_0^t g(s, X_s) dW_s = \lim \sum g(t_i, e_i) (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

και το όριο είναι υπό την έννοια του  $\mathcal{M}_c^2$ . Παρόμοια έχουμε,

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(s, X_s) d\hat{W}_s &= \lim \sum g(t_i, e_i) (\hat{W}_{t_{i+1}} - \hat{W}_{t_i}) \\
&= \int_0^t g(s, X_s) dW_s + \int_0^t g(s, X_s) d\left(\int_0^s H_r dr\right) \\
&= \int_0^t g(s, X_s) dW_s + \int_0^t g(s, X_s) H(s) ds.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η  $\int_0^s H_r dr$  είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Στην περίπτωση αυτή το ολοκλήρωμα

$$\int_0^t g(s, X_s) d\left(\int_0^s H_r dr\right)$$

είναι κατά *Riemann-Stieltjes* και άρα

$$\int_0^t g(s, X_s) d\left(\int_0^s H_r dr\right) = \int_0^t g(s, X_s) H(s) ds$$

από ιδιότητα του *Riemann-Stieltjes* ολοκληρώματος. Όμως για να χρησιμοποιήσει κανείς αυτή την ιδιότητα θα πρέπει η συνάρτηση  $\int_0^s H_r dr$  να είναι απόλυτα συνεχής και για να ισχύει αυτό θα πρέπει η  $H_t$  να είναι

*Lebesgue* ολοκληρώσιμη στο  $[0, t]$ . Οπότε

$$X_t = X_0 + \int_0^t H(s)g(s, X_s)ds + \int_0^t f_2(s, X_s)ds \\ + \int_0^t g(s, X_s)d\hat{W}_s - \int_0^t H(s)g(s, X_s)ds$$

δηλαδή η  $X_t$  ικανοποιεί τη στοχαστική διαφορική εξίσωση,

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_2(s, X_s)ds + \int_0^t g(s, X_s)d\hat{W}_s,$$

Στη βιβλιογραφία εμφανίζεται συχνά η συμβολική γραφή  $d\hat{W}_t = dW_t + H_t dt$  και αντικαθιστώντας στη (συμβολική μορφή πάλι) στοχαστική διαφορική έχουμε το αποτέλεσμα.

Δικαιώματα Προαίρεσης

## 11 Εισαγωγικά

Θα ασχοληθούμε με τη μαθηματική θεωρία αποτίμησης συμβολαίων σε διακριτό και συνεχή χρόνο. Θα δώσουμε παρακάτω τις βασικές έννοιες και ορισμούς.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 289** Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα (αγοράς ή πώλησης μιας υποκείμενης μετοχής) θα λέμε ένα συμβόλαιο μεταξύ του πωλητή και του αγοραστή του συμβολαίου με το οποίο ο αγοραστής αποκτά το δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) να αγοράσει ή να πουλήσει ένα συγκεκριμένο αριθμό μετοχών στον πωλητή του συμβολαίου σε μια προκαθορισμένη τιμή (τιμή εξάσκησης) σε έναν προκαθορισμένο χρόνο  $T$  στο μέλλον. Αντίστοιχα, Αμερικανικού τύπου είναι το συμβόλαιο στο οποίο ο αγοραστής μπορεί να το εξασκήσει ανά πάσα στιγμή μέχρι τη λήξη του.

Όπως βλέπουμε από τον ορισμό, στο συμβόλαιο αυτό παίρνουν μέρος τρεις βασικές ποσότητες. Ο αριθμός των μετοχών, η τιμή εξάσκησης  $K$  και ο χρόνος εξάσκησης  $T$ .

Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης με τιμή εξάσκησης  $K$  και χρόνο λήξης  $T$  δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα να πουλήσει έναν προκαθορισμένο αριθμό μετοχών στον πωλητή του συμβολαίου στην τιμή  $K$  και στο χρόνο  $T$ . Αν συμβολίσουμε με  $S_T$  την τιμή της

μετοχής τη χρονική στιγμή  $T$  τότε ο κάτοχος του συμβολαίου θα εξασκήσει το δικαίωμα μόνο αν τον συμφέρει, δηλαδή αν  $S_T < K$ . Γενικά λοιπόν, η απολαβή του θα είναι  $(K - S_T)_+$ . Παρόμοια για το συμβόλαιο αγοράς.

### 11.1 Arbitrage

Arbitrage (ή αλλιώς ευκαιρία σίγουρου κέρδους) είναι μια συγκεκριμένη ακολουθία χρηματιστηριακών κινήσεων (ή αλλιώς στρατηγική επένδυσης) που καταλήγει σε κέρδος με μηδενικό ρίσκο και μηδενικό αρχικό κεφάλαιο. Παρακάτω θα δώσουμε τον ορισμό της ευκαιρίας σίγουρου κέρδους με μαθηματική αυστηρότητα.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 290** *Ας υποθέσουμε ότι είμαστε σε μια αγορά στην οποία διαπραγματευόμαστε τουλάχιστον μια μετοχή μιας εταιρίας. Όπως περιγράψαμε προηγούμενα, μπορεί κάποιος να έχει αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς πάνω σε μια υποκείμενη μετοχή, από μια τράπεζα. Ας υποθέσουμε ότι το κόστος του συμβολαίου είναι ικανό να καλύψει τον κάτοχο του συμβολαίου στο τέλος*

του χρόνου και ας συμβολίσουμε το κόστος αυτό με  $\hat{C}_t$ , όπου  $t$  η τιμή του συμβολαίου στη χρονική στιγμή  $t$ . Με  $\hat{P}_t$  θα συμβολίσουμε το κόστος του συμβολαίου πώλησης.

Ο κάτοχος του δικαιώματος μπορεί να θελήσει να πουλήσει σε κάποιον το δικαίωμα (πριν λήξει βέβαια). Ποια θα είναι η τιμή πώλησης; Αυτό θα εξαρτηθεί από τους ενδιαφερόμενους αγοραστές. Αν ενδιαφέρονται πολλοί τότε η τιμή ανεβαίνει, αν ενδιαφέρονται λίγοι κατεβαίνει. Η τιμή πώλησης τελικά, έστω  $C_t$  για το δικαίωμα αγοράς και  $P_t$  για το πώλησης, θα είναι εν γένει διαφορετική από το αρχικό κόστος του δικαιώματος διότι θα αποτυπώνει τις προσδοκίες των παικτών της αγοράς πάνω σε αυτό το δικαίωμα. Με απλά λόγια, τι πιθανότητα δίνουν οι πιθανοί αγοραστές για το ενδεχόμενο να εξασκηθεί το δικαίωμα από τον κάτοχο (και άρα να είναι κερδοφόρο); Όσο μεγαλύτερη πιθανότητα δίνουν (και μάλιστα ενδιαφέρον έχει όχι μόνο αν εξασκηθεί, αλλά και με τι κέρδος) τόσο περισσότερα θα προσφέρουν για να το αποκτήσουν και αντίστροφα. Ήρα, αν το δικαίωμα αγοράς ή πώλησης είναι προς διαπραγ-

μάτευση στην αγορά (μαζί με την υποκείμενη μετοχή βέβαια) τότε μπορεί να αποδειχθεί η λεγόμενη *put-call parity* σχέση μεταξύ των  $P_t, C_t$  χρησιμοποιώντας *no-arbitrage* επιχειρήματα.

Ας συμβολίσουμε την τιμή (που δίνει η αγορά) ενός δικαιώματος αγοράς στο χρόνο  $t$  με χρόνο εξάσκησης  $T > t$  και τιμή εξάσκησης  $K$  με  $C_t$  και αντίστοιχα την τιμή του δικαιώματος πώλησης  $P_t$ . Υποθέτουμε ότι το επιτόκιο κατάθεσης ή δανεισμού σε/από τράπεζα είναι  $r$ . Αν δεν ισχύει η σχέση

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)} \quad (\text{put-call parity})$$

τότε μπορεί να δημιουργηθεί ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Αν για παράδειγμα έχουμε

$$C_t - P_t > S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

τότε στο χρόνο  $t$  μπορούμε να αγοράσουμε μια μετοχή  $S_t$ , ένα δικαίωμα πώλησης και να πουλήσουμε ένα δικαίωμα αγοράς. Ήρα, θα έχουμε

$$C_t - P_t - S_t$$

χρήματα στο ταμείο μας από αυτή την κίνηση τα οποία θα τοποθετήσουμε στην τράπεζα με επιτόκιο  $r$ , αν είναι θετική η παραπάνω ποσότητα, ενώ αν είναι αρνητική θα δανειστούμε το ποσό αυτό από την τράπεζα με επιτόκιο  $r$ . Σε κάθε περίπτωση δεν θα χρησιμοποιήσουμε δικά μας χρήματα κάνοντας αυτές τις κινήσεις. Ας δούμε τώρα στο χρόνο  $T$  τι μπορεί να γίνει.

Υπάρχουν δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση θα έχουμε  $S_T > K$ . Σε αυτή την περίπτωση το δικαίωμα αγοράς εξασκείται, δηλαδή πουλάμε μια μετοχή στην τιμή  $K$  και άρα το συνολικό ποσό στο ταμείο μας είναι  $K + e^{r(T-t)}(C_t - P_t - S_t) > 0$ .

Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε  $S_T \leq K$  οπότε θα εξασκηθεί το δικαίωμα πώλησης οπότε πάλι καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα.

Αναγκαστικά θα ισχύει

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

γιατί και στην αντίστροφη ανισότητα μπορούμε να κάνουμε τις αντίθετες κινήσεις για να έχουμε *arbitrage*. Η υπόθεση ότι μια αγορά δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου

κέρδους (*arbitrage*) στηρίζεται στην (λογική) υπόθεση ότι σε κάθε αγορά υπάρχουν επενδυτές οι οποίοι αντιλαμβάνονται γρήγορα μια ευκαιρία σίγουρου κέρδους και την εκμεταλλεύονται με συνέπεια σύντομα να εξαφανιστεί.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 291** Με παρόμοιο συλλογισμό μπορούμε να πούμε και το εξής. Αν γνωρίζουμε εκ των προτέρων και με απόλυτη σιγουριά ότι δυο μετοχές  $V_t, S_t$  θα έχουν την ίδια τιμή στη χρονική στιγμή  $T$ , δηλαδή  $V_T = S_T$  τότε αναγκαστικά, αν δεν θέλουμε να έχουμε *arbitrage* θα πρέπει να ισχύει ότι  $V_t = S_t, t \in [0, T]$ . Αν δεν ισχύει αυτό τότε θα υπάρχει χρονική στιγμή  $t^*$  όπου  $V_{t^*} > S_{t^*}$ . Σε αυτή την περίπτωση κάποιος που θα είχε π.χ. 100 μετοχές της  $V$  θα τις πουλήσει και θα επενδύσει στην  $S$ . Θα έχει έτσι 120 μετοχές της  $S$  μέχρι τη στιγμή  $T$  όπου χωρίς να έχει επενδύσει άλλα χρήματα θα έχει 20 μετοχές παραπάνω από ότι ξεκίνησε.

Ο βασικός στόχος μας είναι να υπολογίσουμε την αξία αυτού του συμβολαίου ή και άλλων παρόμοιων

καθώς και τη στρατηγική επένδυσης που πρέπει να ακολουθήσει ο πωλητής προκειμένου να καλύψει τον αγοραστή σε οποιαδήποτε περίπτωση. Όταν λέμε αξία του συμβολαίου θα εννοούμε όχι την τιμή πώλησης του συμβολαίου αλλά την ελάχιστη τιμή (η οποία εξαρτάται από το μοντέλο που χρησιμοποιεί ο πωλητής και τις αντίστοιχες παραμέτρους) που χρειάζεται ο πωλητής για να μπορεί να αντισταθμίσει το δικαίωμα του αγοραστή (αντισταθμίζω σημαίνει κατασκευάζω χαρτοφυλάκιο με αξία ίση με το ζητούμενο ποσό). Η τιμή πώλησης του συμβολαίου, εν γένει, είναι διαφορετική από την αξία διότι (η τιμή πώλησης) εξαρτάται από την προσφορά και τη ζήτηση καθώς και την προσδοκία για την πορεία της υποκείμενης μετοχής τόσο του αγοραστή όσο και του πωλητή. Αυτό ισχύει τουλάχιστον για τα συμβόλαια που είναι προς διαπραγμάτευση καθημερινά στο οργανωμένο χρηματιστήριο. Για το λόγο αυτόν δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 292** *Αξία ενός συμβολαίου θα ονομάζουμε το μικρότερο δυνατό ποσό με το οποίο ο πωλητής μπορεί*

να αντισταθμίσει το δικαίωμα.

Θα δείξουμε παρακάτω ότι ικανοποιείται η αναλογία αγοράς - πώλησης (μεταξύ των αξιών) στα μοντέλα που θα περιγράψουμε (διακριτά και συνεχή) το οποίο σημαίνει ότι τα μοντέλα αυτά έχουν καλές πιθανότητες όσον αφορά την περιγραφή της πραγματικότητας.

## 12 Μοντέλο αγοράς διακριτού χρόνου

Θα εργαστούμε σε ένα μοντέλο διακριτής αγοράς, δηλαδή για ένα συγκεκριμένο χρόνο  $T$  θα υποθέσουμε ότι όλες οι συναλλαγές λαμβάνουν μέρος σε συγκεκριμένους ενδιάμεσους χρόνους,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ . Έτσι λοιπόν σήμερα είναι ο χρόνος  $t_0$  ενώ ο  $t_N$  είναι ο χρόνος λήξης του συμβολαίου.

Υποθέτουμε ότι η αγορά μας αποτελείται από ένα ομόλογο σταθερής απόδοσης (ή κατάθεση σε τράπεζα) με επιτόκιο  $r$  και συμβολίζουμε την αξία του στη χρονική στιγμή  $t_k$  με  $B_k$  καθώς και από μια μετοχή  $S$  η οποία είναι μια στοχαστική διαδικασία ορισμένη στο

χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

(H1) Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος στοιχείων  $\omega$ , ότι  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  (δηλαδή η  $\sigma$ -άλγεβρα αποτελείται από όλα τα πιθανά υποσύνολα του  $\Omega$ ) και  $P(\{\omega\}) > 0$  για κάθε  $\omega \in \Omega$ .

Οι τιμές του ομολόγου (ή κατάθεσης σε τράπεζα) ακολουθούν μια συγκεκριμένη πορεία. Αν  $B_{n-1}$  είναι η τιμή του ομολόγου τη χρονική στιγμή  $t_{n-1}$  τότε

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ B_n &= B_{n-1}(1 + r_n), \quad n = 1, \dots, N \end{aligned}$$

όπου  $r_n$  είναι το επιτόκιο τη χρονική περίοδο  $[t_{n-1}, t_n]$ .

Η μετοχή υποθέτουμε ότι ακολουθεί την εξής πορεία,

$$\begin{aligned} S_0 &\in \mathbb{R}_+ \\ S_n &= S_{n-1}(1 + m_n), \quad n = 1, \dots, N \end{aligned}$$

όπου  $m_n$  είναι μια πραγματική τυχαία μεταβλητή τ.ω.  $1 + m_n > 0$ .

Θα λέμε ότι το  $(S, B)$  είναι μια διακριτή αγορά ορισμένη στο χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Ορίζουμε το φυσικό φιλτράρισμα που παράγεται από την  $m_n$  δηλαδή

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, \Omega\} \\ \mathcal{F}_n &= \sigma(m_1, \dots, m_n)\end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε ότι  $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \dots, S_n)$ .

**(H2)** Υποθέτουμε ότι  $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 293** *Μια στρατηγική επένδυσης είναι μια στοχαστική διαδικασία στον  $\mathbb{R}^2$ ,*

$$(a_n, b_n), \quad n = 1, \dots, N.$$

Με  $a_n$  συμβολίζουμε το πλήθος των μετοχών της  $S$  τη χρονική περίοδο  $[t_{n-1}, t_n]$  ενώ με  $b_n B_{n-1}$  το ποσό χρημάτων που έχουμε στην τράπεζα τη χρονική στιγμή  $t_{n-1}$ .

Επομένως η αξία του χαρτοφυλακίου μας θα δίνεται από

$$V_n^{(a,b)} = a_n S_n + b_n B_n, \quad n = 1, \dots, N$$

και

$$V_0^{(a,b)} = a_1 S_0 + b_1 B_0.$$

Επιτρέπονται αρνητικές τιμές των  $a, b$  και δηλώνουν δανεισμό. Εδώ με  $b_n$  εννοούμε την αξία της κατάθεσης στο χρόνο 0.

### 12.1 Αυτοχρηματοδοτούμενη Στρατηγική Επένδυσης

**ΟΡΙΣΜΟΣ 294** *Μια στρατηγική  $(a, b)$  ονομάζεται αυτοχρηματοδοτούμενη αν ισχύει*

$$V_{n-1} = a_n S_{n-1} + b_n B_{n-1}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Η στρατηγική επένδυσης  $(a, b)$  θα είναι επομένως αυτοχρηματοδοτούμενη αν

$$b_n = b_{n-1} - (a_n - a_{n-1}) \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \quad (\text{δείξτε το!})$$

Επίσης,

$$V_n - V_{n-1} = a_n (S_n - S_{n-1}) + b_n (B_n - B_{n-1}),$$

το οποίο σημαίνει ότι μια μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου προκύπτει από τη μεταβολή των τιμών των μετοχών και της κατάθεσης και όχι από την πρόσθεση ή αφαίρεση ποσού από το χαρτοφυλάκιο.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 295** Μια στρατηγική επένδυσης  $(a, b)$  ονομάζεται προβλέψιμη αν  $(a_n, b_n)$  είναι  $\mathcal{F}_{n-1}$ -μετρήσιμη, για κάθε  $n = 1, \dots, N$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 296** Συμβολίζουμε με  $\mathcal{A}$  την οικογένεια όλων των αυτοχρηματοδοτούμενων και προβλέψιμων στρατηγικών επένδυσης της αγοράς  $(S, B)$ .

**ΛΗΜΜΑ 297** Η τιμή του χαρτοφυλακίου μιας αυτοχρηματοδοτούμενης στρατηγικής  $(a, b)$  υπολογίζεται και αναδρομικά ως εξής,

$$V_n = V_{n-1}(1 + r_n) + a_n S_{n-1}(m_n - r_n), \quad n = 1, \dots, N.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Έχουμε δει ότι

$$\begin{aligned} V_n - V_{n-1} &= a_n(S_n - S_{n-1}) + b_n(B_n - B_{n-1}) \\ &= a_n S_{n-1} m_n + b_n B_{n-1} r_n \\ &= a_n S_{n-1}(m_n - r_n) + r_n V_{n-1}. \end{aligned}$$

□

**ΛΗΜΜΑ 298** Αν μας δοθεί  $V_0 \in \mathbb{R}_+$  και μια προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία  $a_n$ , τότε υπάρχει μοναδική προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία  $b_n$  τ.ω.  $(a, b) \in \mathcal{A}$  και  $V_0^{(a,b)} = V_0$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Ορίζουμε τη στοχαστική διαδικασία

$$b_n = \frac{V_{n-1} - a_n S_{n-1}}{B_{n-1}}, \quad n = 1, \dots, N$$

όπου η  $V_n$  ορίζεται αναδρομικά από το λήμμα 297. Διαπιστώνουμε ότι η  $b_n$  είναι προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία και η  $(a, b)$  είναι αυτοχρηματοδοτούμενη. □

Έστω  $Y = (Y_n)$  μια στοχαστική διαδικασία τ.ω.  $Y_n > 0$  για κάθε  $n$ . Διαλέγουμε, ως  $Y$  την μετοχή  $S$  ή την κατάθεση  $B$ . Με αυτή την επιλογή κάνουμε την κανονικοποίηση των  $S, B$  ως εξής,

$$\tilde{S}_n = \frac{S_n}{Y_n}, \quad \tilde{B}_n = \frac{B_n}{Y_n}.$$

Με τον τρόπο αυτό, μετράμε την αξία κάθε μετοχής σε σχέση με την  $Y$ . Συνήθως διαλέγουμε ως  $Y$  την  $B$

και την ονομάζουμε μονάδα μέτρησης. Σε αυτή την περίπτωση, δεδομένης μιας στρατηγικής επένδυσης  $(a, b)$  έχουμε

$$\tilde{V}_n^{(a,b)} = \frac{V_n^{(a,b)}}{B_n}.$$

Επομένως η συνθήκη αυτοχρηματοδοτούμενης στρατηγικής γίνεται,

$$\tilde{V}_{n-1}^{(a,b)} = a_n \tilde{S}_{n-1} + b_n.$$

Έχουμε λοιπόν το παρακάτω λήμμα.

**ΛΗΜΜΑ 299** Η κανονικοποιημένη αξία του χαρτοφυλακίου υπολογίζεται και αναδρομικά ως εξής,

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{n-1} + a_n(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}).$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Αφού είναι αυτοχρηματοδοτούμενη έχουμε την σχέση,

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{n-1} &= a_n \tilde{S}_{n-1} + b_n, & \text{και επίσης} \\ \tilde{V}_n &= a_n \tilde{S}_n + b_n. \end{aligned}$$

Αφαιρώντας τις παραπάνω έχουμε το αποτέλεσμα.  $\square$

**ΑΣΚΗΣΗ 300** Δείξτε ότι

$$V_n = V_0 + G_n^{(a)},$$

όπου

$$G_n^{(a)} = \sum_{k=1}^n a_k (\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1}).$$

## 12.2 Ευκαιρία Σίγουρου Κέρδους

**ΟΡΙΣΜΟΣ 301 (Ευκαιρία σίγουρου κέρδους)**

Θα λέμε ότι η  $(a, b) \in \mathcal{A}$  είναι μια ευκαιρία σίγουρου κέρδους αν

- $V_0 = 0$ ,
- $V_n \geq 0$  σχεδόν βέβαια
- $\mathbb{P}(\{V_n > 0\}) > 0$ .

Λέμε ότι η αγορά  $(S, B)$  δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους αν η οικογένεια  $\mathcal{A}$  δεν περιέχει τέτοιες στρατηγικές.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 302** Μια στρατηγική  $(a, b) \in \mathcal{A}$  ονομάζεται αποδεκτή αν

$$V_n^{(a,b)} \geq 0, \quad n \leq N.$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 303** Μια διακριτή αγορά δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους αν δεν υπάρχουν αποδεκτές ευκαιρίες σίγουρου κέρδους.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Προφανώς αν μια αγορά δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους τότε σίγουρα δεν περιέχει και αποδεκτές ευκαιρίες σίγουρου κέρδους. Θα δείξουμε λοιπόν το αντίστροφο. Θα υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν αποδεκτές ευκαιρίες σίγουρου κέρδους και θα δείξουμε ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες σίγουρου κέρδους. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ευκαιρία σίγουρου κέρδους  $(a, b)$  και κατασκευάζοντας μια αποδεκτή ευκαιρία σίγουρου κέρδους θα έχουμε άτοπο.

Αφού  $(a, b)$  είναι ευκαιρία σίγουρου κέρδους τότε  $V_0 = a_1 S_0 + b_1 B_0 = 0$  και υπάρχει  $n$  τ.ω.  $\mathbb{P}(a_n S_n + b_n B_n > 0) > 0$ . Αν η  $(a, b)$  δεν είναι αποδεκτή τότε υπάρχει  $k < n$  και  $F \in \mathcal{F}_k$  με  $\mathbb{P}(F) > 0$  τ.ω.

$$a_k S_k + b_k B_k < 0 \text{ και } a_n S_n + b_n B_n \geq 0 \quad k < n$$

Μπορούμε να ορίσουμε μια νέα ευκαιρία σίγουρου κέρδους  $(a', b')$  ως εξής,  $a'_n = 0, b'_n = 0$  στο  $\Omega \setminus F$ , ενώ στο  $F$ ,

$$a'_n = \begin{cases} 0, & n \leq k \\ a_n, & n > k \end{cases}, \quad b'_n = \begin{cases} 0, & n \leq k \\ b_n - (a_k S_k + b_k B_k), & n > k \end{cases}$$

Δείξτε ότι όντως  $(a', b')$  είναι μια αποδεκτή ευκαιρία σίγουρου κέρδους.  $\square$

### 12.3 Ισοδύναμο Μέτρο Martingale

Θα ορίσουμε παρακάτω το λεγόμενο ισοδύναμο μέτρο martingale. Έστω ο χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  και μια διακριτή αγορά  $(S, B)$  ορισμένη στο χώρο αυτό. Με  $Y$  θα συμβολίζουμε τη μονάδα μέτρησης.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 304** Ένα ισοδύναμο μέτρο *martingale* με μονάδα μέτρησης  $Y$  είναι ένα μέτρο πιθανότητας  $Q$  στο μετρήσιμο χώρο  $(\Omega, \mathcal{F})$  τ.ω.

- τα  $P, Q$  είναι ισοδύναμα, δηλαδή  $P(A) = 0 \iff Q(A) = 0$  όταν  $A \in \mathcal{F}$ ,
- οι κανονικοποιημένες τιμές είναι *martingales* κάτω από το μέτρο  $Q$ , δηλαδή,

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \tilde{S}_{n-1}, \quad \mathbb{E}^Q(\tilde{B}_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \tilde{B}_{n-1}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Όπως έχουμε δει για μια *martingale* έχουμε το ε-ξής,

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{S}_n) = \tilde{S}_0.$$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 305** Έστω  $Q$  ένα ισοδύναμο μέτρο *martingale* και  $(a, b) \in \mathcal{A}$ . Τότε και η  $\tilde{V}_n^{(a,b)}$  είναι  $Q$ -*martingale* και επομένως  $\tilde{V}_0 = \mathbb{E}^Q(\tilde{V}_n)$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Από το λήμμα 305 έχουμε ότι

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{n-1} + a_n(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}).$$

Παίρνοντας τη δεσμευμένη μέση τιμή δεδομένου της  $\mathcal{F}_{n-1}$  κατά μέλη στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^Q(\tilde{V}_n | \mathcal{F}_{n-1}) &= \mathbb{E}^Q(\tilde{V}_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}^Q(a_n(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-1}) \\ &= \tilde{V}_{n-1} + a_n \mathbb{E}^Q(\tilde{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}) + a_n \tilde{S}_{n-1} \\ &= \tilde{V}_{n-1}\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η  $a_n$  είναι  $\mathcal{F}_{n-1}$ -μετρήσιμη και ότι η  $\tilde{S}_n$  είναι *martingale*.  $\square$

#### 12.4 Θεμελιώδη Θεωρήματα των Χρηματοοικονομικών

**ΘΕΩΡΗΜΑ 306 (Πρώτο θεμελιώδες θεώρημα των Χρηματοοικονομικών)** *Μια διακριτή αγορά δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους αν υπάρχει τουλάχιστον ένα ισοδύναμο μέτρο *Martingale*.*

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θα δείξουμε μόνο ότι αν υπάρχει ισοδύναμο μέτρο martingale τότε η αγορά δεν θα περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους.

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ευκαιρία σίγουρου κέρδους  $(a, b) \in \mathcal{A}$ . Τότε  $V_0 = 0$  και υπάρχει  $n \geq 1$  τ.ω.  $P(V_n \geq 0) = 1$  και  $P(V_n > 0) > 0$ . Αφού τα  $P, Q$  είναι ισοδύναμα έχουμε ότι  $Q(V_n \geq 0) = 1$  και  $Q(V_n > 0) > 0$  οπότε και  $\mathbb{E}^Q(\tilde{V}_n) > 0$ . Η στοχαστική διαδικασία  $\tilde{V}_n$  είναι martingale κάτω από το μέτρο  $Q$  και επομένως  $\mathbb{E}^Q(\tilde{V}_n) = V_0 = 0$ , δηλαδή έχουμε άτοπο.  $\square$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 307** Παράγωγο θα ονομάζουμε μια τ.μ.  $X$  η οποία είναι  $\mathcal{F}_N$ -μετρήσιμη. Θα λέμε ότι μια διακριτή αγορά είναι πλήρης αν κάθε παράγωγο  $X$  μπορεί να αντισταθμιστεί, δηλαδή αν υπάρχει αποδεκτή στρατηγική επένδυσης  $(a, b)$  τ.ω.  $V_N^{(a,b)} = X$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 308 (Δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα των Χρηματοοικονομικών)** Μια διακριτή αγορά που δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους είναι πλήρης αν υπάρχει μοναδικό ισοδύναμο μέτρο *martingale*.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θα δείξουμε μόνο ότι αν είναι πλήρης τότε υπάρχει μοναδικό ισοδύναμο μέτρο *martingale*.

Αφού η αγορά δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους, από το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα ισοδύναμο μέτρο *martingale*. Επομένως θα δείξουμε ότι είναι μοναδικό.

Έστω ότι υπάρχουν δυο, τα  $Q_1, Q_2$ . Τότε αν διαλέξουμε  $X = \mathbb{I}_A$  με  $A \in \mathcal{F}_N$  και αφού η αγορά είναι πλήρης έχουμε ότι υπάρχει αποδεκτή στρατηγική τ.ω.  $V_N = \mathbb{I}_A$ . Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}^{Q_1}(\tilde{V}_N | \mathcal{F}_n) = \tilde{V}_n, \quad (\text{αφού είναι martingale στο } Q_1)$$

$$\mathbb{E}^{Q_1}(\tilde{V}_N) = \mathbb{E}^{Q_1}(\tilde{V}_n) = V_0, \quad (\text{παίρνοντας μέση τιμή κατά μέλη}).$$

Δουλεύοντας παρόμοια έχουμε ότι  $\mathbb{E}^{Q_2}(\tilde{V}_N) = V_0$ . Αφού η αγορά είναι πλήρης τότε  $\tilde{V}_N = \frac{\mathbb{I}_A}{B_N}$  και επο-

μένως  $\mathbb{E}^{Q_1}(\tilde{V}_N) = \frac{Q_1(A)}{B_N}$ . Παρόμοια έχουμε ότι  $\mathbb{E}^{Q_2}(\tilde{V}_N) = \frac{Q_2(A)}{B_N}$  και άρα  $Q_1(A) = Q_2(A)$  όπου  $A \in \mathcal{F}_N$  τυχαία επιλεγμένο. Έρα τα δυο μέτρα συμπίπτουν.  $\square$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 309** Σε μια αγορά χωρίς ευκαιρίες σίγουρου κέρδους αν  $(a, b), (a', b') \in \mathcal{A}$  και

$$V_N^{(a,b)} = V_N^{(a',b')} \text{ τότε}$$

$$V_n^{(a,b)} = V_n^{(a',b')}$$

για κάθε  $n = 1, \dots, N$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Εφόσον υπάρχει ισοδύναμο μέτρο martingale  $Q$  (δες πρώτο θεμελιώδες θεώρημα των χρηματοοικονομικών) τότε έχουμε

$$\tilde{V}_n^{(a,b)} = \mathbb{E}^Q(\tilde{V}_N^{(a,b)} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^Q(\tilde{V}_N^{(a',b')} | \mathcal{F}_n) = \tilde{V}_n^{(a',b')}, \quad n \leq N.$$

$\square$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 310** Σημειώστε ότι αν  $X_n$  είναι martingale τότε

$$\mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}_k) = X_k, \quad k \leq n.$$

Πράγματι, για  $k = n - 1$ ,  $n$  είναι προφανές. Υποθέτουμε ότι  $k \leq n - 2$  και έχουμε

$$\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n|\mathcal{F}_{n-1})|\mathcal{F}_k) = \mathbb{E}(X_{n-1}|\mathcal{F}_k)$$

Συνεχίζοντας την ίδια λογική το αποδεικνύουμε.

## 12.5 Ευρωπαϊκά Δικαιώματα

Τα βασικά ερωτήματα που προκύπτουν σε ένα συμβόλαιο είναι πώς θα υπολογίσουμε την αξία του και πώς θα βρούμε μια αντισταθμιστική στρατηγική.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 311** Έστω ένα παράγωγο  $X$ . Ορίζουμε τις παρακάτω οικογένειες στρατηγικών επένδυσης,

$$\mathcal{A}_X^+ = \{(a, b) \in \mathcal{A} | V_N^{(a,b)} \geq X\}, \quad \mathcal{A}_X^- = \{(a, b) \in \mathcal{A} | V_N^{(a,b)} \leq X\}$$

**ΛΗΜΜΑ 312** Έστω ένα ισοδύναμο μέτρο *martingale*  $Q$ . Τότε

$$\max_{(a,b) \in \mathcal{A}_X^-} \tilde{V}_n^{(a,b)} \leq \mathbb{E}^Q(\tilde{X} | \mathcal{F}_n) \leq \min_{(a,b) \in \mathcal{A}_X^+} \tilde{V}_n^{(a,b)}, \quad n = 0, \dots, N.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Αφού η  $\tilde{V}_n$  είναι martingale έχουμε ότι

$$\tilde{V}_n^{(a,b)} = \mathbb{E}^Q(\tilde{V}_N^{(a,b)} | \mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}^Q(\tilde{X} | \mathcal{F}_n) \text{ για κάθε } (a, b) \in \mathcal{A}_X^-.$$

Παρόμοια για  $(a, b) \in \mathcal{A}_X^+$  και προκύπτει το αποτέλεσμα.  $\square$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 313** Έστω  $X$  ένα παράγωγο που μπορεί να αντισταθμιστεί σε μια αγορά που δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους. Τότε για κάθε αντισταθμιστική στρατηγική (του  $X$ )  $(a, b) \in \mathcal{A}$  και για κάθε ισοδύναμο μέτρο martingale  $Q$  έχουμε ότι

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{X} | \mathcal{F}_n) = \tilde{V}_n^{(a,b)}$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Αφού η  $(a, b)$  αντισταθμίζει το δικαίωμα τότε  $\tilde{V}_N = \tilde{X}$  και επομένως

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{X} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^Q(\tilde{V}_N | \mathcal{F}_n) = \tilde{V}_n$$

$\square$

Αυτό μας πληροφορεί ότι αν θέλουμε στο τέλος του συμβολαίου να έχουμε το ποσό που οφείλουμε στον

κάτοχο του συμβολαίου θα πρέπει το χαρτοφυλάκιο μας να έχει την τιμή αυτή σε κάθε χρονική στιγμή. Επίσης, η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου μας θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με  $\mathbb{E}^Q(\tilde{X}|\mathcal{F}_0)$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ 314** Αν οι τ.μ.  $m_1, \dots, m_N$  είναι ανεξάρτητες τότε η  $S_n$  είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θα εξετάσουμε τη δεσμευμένη πιθανότητα,

$$P(S_n = i_n | S_{n-1} = i_{n-1}, \dots, S_0 = i_0).$$

Αφού  $S_n = S_{n-1}(1 + m_n)$  τότε η παραπάνω πιθανότητα γίνεται

$$\begin{aligned} & P(m_n = \frac{i_n - i_{n-1}}{i_{n-1}} | S_{n-1} = i_{n-1}, \dots, S_0 = i_0) \\ &= P(m_n = \frac{i_n - i_{n-1}}{i_{n-1}}) \\ &= P(m_n = \frac{i_n - i_{n-1}}{i_{n-1}} | S_{n-1} = i_{n-1}) \\ &= P(S_n = i_n | S_{n-1} = i_{n-1}) \end{aligned}$$

□

### 12.5.1 Το Διωνυμικό Μοντέλο

Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε σε μια αγορά που αποτελείται από ένα ομόλογο  $B$  και μια διαπραγματεύσιμη μετοχή  $S$ . Η κίνηση του ομολόγου θα είναι

$$B_n = (1 + r)^n \quad (\text{δηλαδή θεωρούμε ότι το επιτόκιο είναι σταθερό})$$

ενώ η κίνηση της μετοχής είναι

$$S_n = S_{n-1}(1 + m_n),$$

όπου  $m_1, \dots, m_N$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. ορισμένες στο χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ .

Υποθέτουμε ότι  $p \in (0, 1)$  και  $0 < d < u$  και θέτουμε

$$S_n = \begin{cases} uS_{n-1}, & \text{με πιθανότητα } p \\ dS_{n-1}, & \text{με πιθανότητα } 1 - p \end{cases}$$

Διαπιστώνουμε έτσι ότι όταν  $S_0 > 0$  τότε  $S_n > 0$  για κάθε  $n$ . Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το  $\Omega$  αποτελείται από όλες τις πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει η μετοχή σε όλους τους χρόνους. Προκύπτει

επίσης ότι

$$P(S_n = u^j d^{n-j} S_0) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j},$$
$$j = 0, \dots, n, \quad n = 1, \dots, N,$$

(δείξτε το με επαγωγή).

**ΘΕΩΡΗΜΑ 315** Αν υποθέσουμε στο διωνυμικό μοντέλο ότι  $d < 1 + r < u$  τότε αυτό είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη και μοναδικότητα ενός ισοδύναμου μέτρου *martingale*  $Q$ . Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$Q(1 + m_n = u) = 1 - Q(1 + m_n = d) = q.$$

όπου

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d} \in (0, 1),$$

Επιπλέον, οι τ.μ.  $m_1, \dots, m_n$  είναι ανεξάρτητες κάτω από το  $Q$  και

$$Q(S_n = u^k d^{n-k} S_0) = \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \leq N.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Αν υπάρχει ένα μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale  $Q$  τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^Q(\tilde{S}_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= \tilde{S}_{n-1} \Rightarrow \\ \mathbb{E}^Q(S_{n-1}(1+m_n)|\mathcal{F}_{n-1}) &= S_{n-1}(1+r) \Rightarrow \\ \mathbb{E}^Q(m_n|\mathcal{F}_{n-1}) &= r.\end{aligned}$$

Παίρνοντας πάλι μέση τιμή κατά μέλη στην τελευταία ισότητα προκύπτει ότι

$$r = \mathbb{E}^Q(m_n) = (u-1)Q(m_n = u-1) + (d-1)Q(m_n = d-1).$$

Επομένως,

$$Q(1+m_n = u) = \frac{1+r-d}{u-d} = q,$$

και αναγκαστικά θα πρέπει το  $q \in (0, 1)$  το οποίο σημαίνει ότι  $d < 1+r < u$  προκειμένου το  $Q$  να είναι μέτρο πιθανότητας και μάλιστα ισοδύναμο με το  $P$ . Από τη σχέση  $\mathbb{E}^Q(m_n|\mathcal{F}_{n-1}) = r$  μπορεί να αποδειχθεί ότι οι τ.μ.  $m_1, \dots, m_n$  είναι ανεξάρτητες κάτω από το μέτρο  $Q$ .

Πράγματι, θα δείξουμε αρχικά ότι ισχύει για οποιεσδήποτε δυο, έστω  $m_1, m_2$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q(m_2|m_1)(\omega) &= \mathbb{E}^Q(m_2|\{1 + m_1 = u\}) \\
&= uQ(1 + m_2 = u|1 + m_1 = u) \\
&\quad + dQ(1 + m_2 = d|1 + m_1 = u) \\
&= r \text{ όταν } \omega \in \{1 + m_1 = u\}, \\
\mathbb{E}^Q(m_2|m_1)(\omega) &= \mathbb{E}^Q(m_2|\{1 + m_1 = d\}) \\
&= uQ(1 + m_2 = u|1 + m_1 = d) \\
&\quad + dQ(1 + m_2 = d|1 + m_1 = d) \\
&= r \text{ όταν } \omega \in \{1 + m_1 = d\}
\end{aligned}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&u \left( Q(1 + m_2 = u|1 + m_1 = u) - Q(1 + m_2 = u|1 + m_1 = d) \right) \\
&+ d \left( Q(1 + m_2 = d|1 + m_1 = u) - Q(1 + m_2 = d|1 + m_1 = d) \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

για οποιαδήποτε  $u, d$ . Αναγκαστικά, οι παρενθέσεις θα είναι ίσες με το μηδέν και από κει προκύπτει η ανεξαρτησία των  $m_1, m_2$ .

Υποθέτουμε τώρα ότι οποιεσδήποτε  $k$  είναι ανεξάρτητες και θα δείξουμε ότι είναι και οι  $k + 1$ .

Συμβολίζουμε με  $B_l = \{S_k = u^l d^{k-l} S_0\}$  και έχουμε

$$\begin{aligned} 1 + r &= \mathbb{E}^Q(1 + m_{k+1} | B_l) \\ &= uQ(\{1 + m_{k+1} = u\} | B_l) + dQ(\{1 + m_{k+1} = d\} | B_l) \end{aligned}$$

και αφού  $1 + r = qu + (1 - q)d$  τότε

$$\begin{aligned} &u\left(q - Q(\{1 + m_{k+1} = u\} | B_l)\right) \\ &+ d\left((1 - q) - Q(\{1 + m_{k+1} = d\} | B_l)\right) = 0 \end{aligned}$$

για κάθε  $u, d$ . Αναγκαστικά οι παρενθέσεις είναι ίσες με το μηδέν από όπου και προκύπτει η ανεξαρτησία.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι  $m_1, \dots, m_n$  είναι ανεξάρτητες κάτω από το μέτρο  $Q$  έχουμε ότι

$$Q(S_n = u^k d^{n-k} S_0) = \binom{n}{k} q^k (1 - q)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \leq N.$$

Αντίστροφα, αν η συνθήκη  $d < 1 + r < u$  ικανοποιείται τότε το  $q \in (0, 1)$  και το μέτρο  $Q$  είναι καλά ορισμένο και ισοδύναμο με το  $P$ .

Θα δείξουμε ότι είναι και μοναδικό martingale μέτρο.

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{S_{n-1}}{(1+r)^n} (qu + (1-q)d) - \frac{S_{n-1}}{(1+r)^{n-1}} = 0$$

Η μοναδικότητα προκύπτει από την επιλογή του  $q$  τ.ω.  $1+r = qu + (1-q)d$ . Αν το επιλέξουμε διαφορετικά δεν θα προκύψει η τελευταία ισότητα.

Επομένως, το  $Q$  όπως ορίσθηκε είναι και μοναδικό. Ύρα από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα έχουμε ότι κάθε δικαίωμα μπορεί να αντισταθμιστεί.  $\square$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 316** Τα  $u, d$  είναι αριθμοί που θα ορίσουμε εμείς αφού κάνουμε τις ανάλογες παρατηρήσεις σε πραγματικά δεδομένα για την κίνηση της μετοχής. Επίσης, η πιθανότητα  $p$  που θα δώσουμε για να ανέβει η μετοχή θα ορισθεί έπειτα από μελέτη πραγματικών δεδομένων. Η πιθανότητα  $q$  όμως δεν λαμβάνει υπόψη καθόλου την παρατηρούμενη πιθανότητα  $p$ . Είναι ένας τεχνητός ορισμός πιθανότητας (που δεν έχει καμία σχέση με την πραγματικότητα) που όμως μας διευκολύνει σε μαθηματικό επίπεδο. Με το καινούριο μέτρο η κανονικοποιημένη τιμή της μετοχής είναι martingale και

αυτό μας προσφέρει αρκετά μαθηματικά εργαλεία για τη μελέτη του προβλήματος.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 317** Το διωνυμικό μοντέλο δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους αν  $d < 1 + r < u$ . Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι η αξία του συμβολαίου κάθε χρονική στιγμή δίνεται από

$$H_n = \frac{\mathbb{E}^Q(X|\mathcal{F}_n)}{(1+r)^{N-n}}, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Συγκεκριμένα, αν  $X = F(S_N)$  η αξία του συμβολαίου τη χρονική στιγμή  $n = 0$  είναι

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{\mathbb{E}^Q(F(S_N))}{(1+r)^N} \\ &= \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k} F(u^k d^{N-k} S_0) \end{aligned}$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Από το θεώρημα 321 προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale αν  $d <$

$1 + r < u$ . Από το θεώρημα 319 προκύπτει ότι

$$H_n = \frac{\mathbb{E}^Q(X|\mathcal{F}_n)}{(1+r)^{N-n}}, \quad 0 \leq n \leq N.$$

Θυμηθείτε ότι  $\tilde{X} = \frac{X}{B_N}$ . Επομένως, η αξία του συμβολαίου τη χρονική στιγμή  $n = 0$  θα δίνεται από

$$H_0 = \frac{\mathbb{E}^Q(X)}{(1+r)^N}$$

Παρατηρήστε ότι  $\mathbb{E}^Q(X|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^Q(X)$  το οποίο μπορούμε να το δούμε αν διαπιστώσουμε ότι η σ-άλγεβρα που παράγει μια σταθερή συνάρτηση είναι η  $\mathcal{F}_0$  και επομένως  $\mathbb{E}^Q(X|\mathcal{F}_0) = \mathbb{E}^Q(X|Y)$  όπου  $Y$  είναι σταθερός αριθμός και μπορεί βεβαίως να θεωρηθεί ως μια διακριτή τ.μ. Τότε

$$\mathbb{E}^Q(X|Y) = \frac{\mathbb{E}^Q(X\mathbb{I}_{Y=c})}{Q(Y=c)} = \mathbb{E}^Q(X).$$

Αν λοιπόν  $X = F(S_N)$  τότε

$$H_0 = \frac{\mathbb{E}^Q(F(S_N))}{(1+r)^N} = \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} q^k (1-q)^{N-k} F(u^k d^{N-k} S_0)$$

□

### 12.5.2 Πότε η αξία του συμβολαίου είναι δίκαιη

Διαπιστώστε ότι ο πωλητής και ο αγοραστής δεν βρίσκονται στην ίδια θέση όσον αφορά τον κίνδυνο. Ο πωλητής κατασκευάζει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο οδηγεί πάντοτε στην απολαβή του αγοραστή (έχει δηλαδή εκμηδενίσει τον κίνδυνο) ενώ ο αγοραστής είναι εκτεθειμένος σε αυτόν και υπάρχει η πιθανότητα να κερδίσει ή να χάσει. Αν ο αγοραστής μπορεί να κάνει τις αντίστροφες κινήσεις (κατασκευάζοντας το αντίθετο χαρτοφυλάκιο) προκύπτει ότι τελικά η αξία πώλησης είναι δίκαιη διότι και ο αγοραστής μπορεί να εκμηδενίσει τον κίνδυνο. Το ερώτημα είναι τι γίνεται όταν δεν είναι ισοδύναμοι οι αντισυμβαλλόμενοι απέναντι στο υποκείμενο αγαθό. Σε αυτή την περίπτωση η δίκαιη τιμή πώλησης ίσως είναι

$$H_0 = \min \left\{ \mathbb{E}^P(\tilde{X}_T), \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_T) \right\}$$

υπό την έννοια ότι με αυτόν τον τρόπο μεταφέρεται μέρος του κινδύνου και στον πωλητή.

Ας το δούμε σε ένα δέντρο μιας περιόδου και σε

ένα συμβόλαιο αγοράς με τιμή εξάσκησης  $K > S_0$ . Η απολαβή του αγοραστή θα είναι  $uS_0 - K$  όταν η τιμή της μετοχής ανέβει και μηδέν αν κατέβει. Αν ο πωλητής θέλει να αντισταθμίσει το δικαίωμα θα ζητήσει το ποσό

$$V_0 = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^Q(X_1) = \frac{q}{1+r} (uS_0 - K)$$

Το ποσό

$$\frac{1}{1+r} \mathbb{E}^P(X_1) = \frac{p}{1+r} (uS_0 - K)$$

θα είναι μεγαλύτερο από το  $V_0$  αν  $pu + (1-p)d > 1+r$  και μικρότερο διαφορετικά.

Αν οι αντισυμβαλλόμενοι δεν είναι ισοδύναμοι απέναντι στο υποκείμενο αγαθό τότε η δίκαιη τιμή θα είναι

$$H_0 = \begin{cases} \frac{q}{1+r} (uS_0 - K), & \text{όταν } pu + (1-p)d > 1+r \\ \frac{p}{1+r} (uS_0 - K), & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αν η δίκαιη τιμή προκύψει να είναι  $H_0 = \frac{p}{1+r} (uS_0 - K)$  τότε ο πωλητής μπορεί να τοποθετήσει το ποσό

στην τράπεζα το οποίο θα έχει αξία τη χρονική στιγμή 1 ίση με τη μέση τιμή της απολαβής του αγοραστή, δηλαδή κατά μέση τιμή και οι δυο θα είναι στα λεφτά τους. Σε αυτή την περίπτωση είναι και οι δυο το ίδιο εκτεθειμένοι στον κίνδυνο. Βεβαίως, ο πωλητής έχει το δικαίωμα να επενδύσει όπως θέλει αυτό το ποσό, ίσως με τον τρόπο που περιγράψαμε στο πρώτο κεφάλαιο, να μεγιστοποιήσει δηλαδή τη μέση τιμή του χαρτοφυλακίου του τη στιγμή 1.

Παρόμοιο συλλογισμό μπορούμε να κάνουμε και για ένα συμβόλαιο πώλησης ή οποιοδήποτε άλλο συμβόλαιο.  $\square$

Με το θεώρημα 317 υπολογίσαμε την αξία του συμβολαίου. Όμως, σημαντικό επίσης είναι να υπολογίσουμε και την κατάλληλη στρατηγική επένδυσης  $(a, b)$  έτσι ώστε στη λήξη του συμβολαίου η  $V_N \geq X$ .

### 12.5.3 Αντισταθμιστική Στρατηγική Επένδυσης

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε τον τρόπο κατασκευής αντισταθμιστικής στρατηγικής επένδυσης. Η

τιμή του χαρτοφυλακίου σε κάθε χρονική στιγμή είναι,

$$V_n = a_n S_n + b_n B_n, \quad n = 0, \dots, N,$$

και θα πρέπει να είναι ίση ή μεγαλύτερη με την αξία του συμβολαίου  $H_n$  κάθε χρονική στιγμή (δες θεώρημα 323). Ήρα θα πρέπει  $V_N = X = F(S_N)$  και επομένως φτιάχνουμε τις επόμενες δυο εξισώσεις με δυο αγνώστους,

$$a_N u S_{N-1} + b_N B_N = F(u S_{N-1}),$$

$$a_N d S_{N-1} + b_N B_N = F(d S_{N-1}).$$

Η λύση του παραπάνω είναι,

$$a_N = \frac{F(u S_{N-1}) - F(d S_{N-1})}{u S_{N-1} - d S_{N-1}}, \quad b_N = \frac{u F(d S_{N-1}) - d F(u S_{N-1})}{(1+r)^N (u-d)}.$$

Δηλαδή τη χρονική στιγμή  $t_{N-1}$  και γνωρίζοντας την τιμή της  $S_{N-1}$  βρίσκουμε τις τιμές των  $a_N, b_N$ .

Γενικότερα, θα συμβολίσουμε με  $H_n = H_n(S_n)$  την τιμή του συμβολαίου τη χρονική στιγμή  $n$  και θα θεωρήσουμε ότι είναι γνωστή για να περιγράψουμε την εύρεση της στρατηγικής για κάθε χρονική στιγμή. Επομένως, με τον ίδιο συλλογισμό κατασκευάζουμε τις

εξισώσεις,

$$\begin{aligned}a_n u S_{n-1} + b_n B_n &= H_n(u S_{n-1}), \\a_n d S_{n-1} + b_n B_n &= H_n(d S_{n-1}).\end{aligned}$$

Η λύση του παραπάνω είναι,

$$a_n = \frac{H_n(u S_{n-1}) - H_n(d S_{n-1})}{u S_{n-1} - d S_{n-1}}, \quad b_n = \frac{u H_n(d S_{n-1}) - d H_n(u S_{n-1})}{(1+r)^n (u-d)}.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η στρατηγική πρέπει να είναι αυτοχρηματοδοτούμενη έχουμε

$$H_{n-1} = V_{n-1} = a_n S_{n-1} + b_n B_{n-1},$$

από το οποίο προκύπτει (δείξτε το) ότι

$$H_{n-1} = \frac{q H_n(u S_{n-1}) + (1-q) H_n(d S_{n-1})}{1+r}.$$

#### 12.5.4 Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς

Θα δούμε τα παραπάνω όταν  $F(x) = (x - K)^+$ . Η αξία του συμβολαίου τη χρονική στιγμή 0 θα είναι (δες

θεώρημα 317),

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \frac{1}{(1+r)^N} \sum_{h=0}^N \binom{N}{h} q^h (1-q)^{N-h} (u^h d^{N-h} S_0 - K)^+ \\
 &= S_0 \sum_{h>h_0} \binom{N}{h} \left( \frac{qu}{1+r} \right)^h \left( \frac{(1-q)d}{1+r} \right)^{N-h} \\
 &\quad - \frac{K}{(1+r)^N} \sum_{h>h_0} \binom{N}{h} q^h (1-q)^{N-h},
 \end{aligned}$$

όπου  $h_0$  είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος με

$$\frac{\ln \frac{K}{d^N S_0}}{\ln \frac{u}{d}}.$$

Τελικά μπορούμε να γράψουμε

$$H_0 = S_0 \mathcal{N}(\tilde{q}) - \frac{K}{(1+r)^N} \mathcal{N}(q),$$

με

$$\tilde{q} = \frac{qu}{1+r}, \quad q = \frac{1+r-d}{u-d}, \quad \mathcal{N}(p) = \sum_{h>h_0} \binom{N}{h} p^h (1-p)^{N-h}.$$

Συνοψίζοντας, μπορούμε να έχουμε την παρακάτω μεθοδολογία για τον υπολογισμό της  $H_n$  και των  $(a, b)$ . Όπως ήδη έχουμε πει

$$S_n = S_{n,k} = u^k d^{n-k} S_0, \quad n = 0, \dots, N, \text{ και } k = 0, \dots, n$$

είναι η τιμή της μετοχής στη χρονική στιγμή  $n$  όταν μέχρι τότε έχει ανέβει  $k$ -φορές και κατέβει  $n - k$ . Αντίστοιχα, θέτουμε  $H_{n,k} = H_n(S_{n,k})$  και  $a_{n,k} = a_n(S_{n-1,k})$ ,  $b_{n,k} = b_n(S_{n-1,k})$ .

- **Πρώτο Βήμα** Αρχικά υπολογίζουμε όλες τις πιθανές τιμές της  $S_n$  σε κάθε χρονική στιγμή.
- **Δεύτερο βήμα** Αφού υπολογίσουμε τα  $H_{N,k} = F(S_{N,k})$  για όλα τα  $k = 0, \dots, N$  υπολογίζουμε τα  $H_{n,k}$  από την παρακάτω αναδρομική σχέση,

$$H_{n-1,k} = \frac{1}{1+r} (qH_{n,k+1} + (1-q)H_{n,k})$$

$$0 \leq k \leq n-1, \quad n = 1, \dots, N.$$

Διαπιστώστε ότι  $H_{n,k+1} = H_n(uS_{n-1,k})$ ,  $H_{n,k} = H_n(dS_{n-1,k})$ .

- **Τρίτο Βήμα** Υπολογίζουμε τη στρατηγική επένδυσης από τους τύπους

$$a_{n,k} = \frac{H_{n,k+1} - H_{n,k}}{S_{n-1,k}(u - d)}, \quad b_{n,k} = \frac{uH_{n,k} - dH_{n,k+1}}{(1+r)^n(u-d)}$$

$$0 \leq k \leq n-1, \quad n = 1, \dots, N..$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 318** Θα δουλέψουμε ένα συμβόλαιο πώλησης με τιμή εξάσκησης  $K = 5/2$ ,  $S_0 = 1$ ,  $u = 2$ ,  $d = r = 1/2$ ,  $N = 3$ . Υπολογίζουμε το  $q = 2/3$ .

- **Πρώτο Βήμα**

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 2, S_1 = 1/2$$

$$S_2 = 4, S_2 = 1, S_2 = 1/4$$

$$S_3 = 8, S_3 = 2, S_3 = 1/2, S_3 = 1/8$$

- **Δεύτερο Βήμα**

$$H_{3,3} = 0, H_{3,2} = 1/2, H_{3,1} = 2, H_{3,0} = 19/8$$

$$H_{2,2} = 1/9, H_{2,1} = 2/3, H_{2,0} = 17/12$$

$$H_{1,1} = 16/81, H_{1,0} = 11/18$$

$$H_0 = 163/729$$

Επομένως η αξία του συμβολαίου τη χρονική στιγμή 0 είναι  $H_0 = 163/729$ .

• **Τρίτο Βήμα**

$$(a_{1,0} = -67/243, b_{1,0} = 364/729)$$

$$(a_{2,1} = -5/27, b_{2,1} = 92/243) \quad (a_{2,0} = -1, b_{2,0} = 20/27)$$

$$(a_{3,2} = -1/12, b_{3,2} = 16/81) \quad (a_{3,1} = -1, b_{3,1} = 20/27)$$

$$(a_{3,0} = -1, b_{3,0} = 20/27)$$

Μπορούμε να κάνουμε επαλήθευση κάνοντας τους εξής υπολογισμούς  $H_{n-1,k} = a_{n,k}S_{n-1,k} + b_{n,k}(1+r)^{n-1}$  χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι είναι αυτοχρηματοδοτούμενη.

### 12.5.5 Αναλογία Αγοράς - Πώλησης

Στην επόμενη πρόταση θα δείξουμε μια σχέση μεταξύ της αξίας ενός συμβολαίου αγοράς και του αντίστοιχου πώλησης, ή όπως λέγεται αναλογία αγοράς - πώλησης.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 319 (Put-Call parity)** *Ισχύει η παρακάτω σχέση,*

$$H_n^{Put} = H_n^{Call} + \frac{B_n}{B_N}K - S_n.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Αρχικά έχουμε ότι

$$(K - S_N)^+ = (S_N - K)^+ + K - S_N.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με  $\frac{B_n}{B_N}$  και παίρνοντας τη δεσμευμένη μέση τιμή δοθέντος  $\mathcal{F}_n$  έχουμε

$$H_n^{Put} = H_n^{Call} + \mathbb{E}^Q \left( \frac{B_n}{B_N} (K - S_N) | \mathcal{F}_n \right).$$

Όμως

$$\mathbb{E}^Q \left( \frac{B_n}{B_N} (K - S_N) | \mathcal{F}_n \right) = \frac{B_n}{B_N} K - B_n \mathbb{E}^Q(\tilde{S}_N | \mathcal{F}_n) = \frac{B_n}{B_N} K - S_n,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η  $\tilde{S}_n$  είναι martingale κάτω από το μέτρο  $Q$ .  $\square$

### 12.5.6 Τριωνυμικό Μοντέλο

Θα παρουσιάσουμε παρακάτω το λεγόμενο τριωνυμικό μοντέλο όπου υποθέτουμε ότι η μετοχή τη χρονική στιγμή  $n$  θα πάρει τρεις πιθανές τιμές, ανάλογα με την τιμή,

$$1 + m_n = \begin{cases} u, & \text{με πιθανότητα } p_1 \\ f, & \text{με πιθανότητα } p_2 \\ d, & \text{με πιθανότητα } p_3 \end{cases}$$

και  $0 < d < f < u$ .

Θέλουμε να βρούμε ένα νέο μέτρο  $Q$  τ.ω. η  $\tilde{S}_n$  να είναι martingale στο νέο μέτρο. Στην πραγματικότητα θέλουμε να υπολογίσουμε τις τρεις ποσότητες  $q_1, q_2, q_3$  τ.ω.

$$q_1 = Q(1 + m_n = u)$$

$$q_2 = Q(1 + m_n = f)$$

$$q_3 = Q(1 + m_n = d).$$

Προφανώς θα πρέπει  $q_1 + q_2 + q_3 = 1$  ενώ για να είναι martingale η  $\tilde{S}$  κάτω από αυτό το μέτρο θα πρέπει να

ισχύει η ισότητα

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \tilde{S}_{n-1}.$$

Όμως

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{S}_n | \mathcal{F}_{n-1}) = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^Q(\tilde{S}_{n-1}(1+m_n) | \mathcal{F}_{n-1})$$

Τελικά, αφού η  $\tilde{S}_{n-1}$  είναι  $\mathcal{F}_{n-1}$ -μετρήσιμη, έχουμε

$$\mathbb{E}^Q(1+m_n) = 1+r \Rightarrow uq_1 + fq_2 + dq_3 = 1+r.$$

Δηλαδή, έχουμε δυο εξισώσεις με τρεις αγνώστους το οποίο σημαίνει ότι το μέτρο δεν είναι μοναδικό επομένως από το δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα των χρηματοοικονομικών η αγορά δεν είναι πλήρης.

Αν όμως στην αγορά έχουμε δυο μετοχές (δηλαδή τις  $S, S'$ ) τότε παίρνουμε ακόμη μια εξίσωση δουλεύοντας στη δεύτερη μετοχή, η οποία είναι

$$u'q_1 + f'q_2 + d'q_3 = 1+r.$$

Εάν το σύστημα έχει μοναδική λύση τότε η αγορά μας θα είναι πλήρης. Διαπιστώνουμε όμως ότι υποθέτουμε

ότι και οι δυο μετοχές έχουν την ίδια συμπεριφορά. Όποτε ανεβαίνει η μια ανεβαίνει και η άλλη κάτι το οποίο δεν είναι λογικό.

Στην περίπτωση που θέλουμε να αποτιμήσουμε δικαιώματα πάνω σε περισσότερες από μια μετοχές προκύπτει ότι το κλασσικό διωνυμικό μοντέλο δεν επαρκεί. Όμως, ούτε το παραπάνω μοντέλο έχει κάποια λογική όπως εξηγήσαμε και επιπλέον δεν γνωρίζουμε αν συγκλίνει κάπου καθώς  $n \rightarrow \infty$  όπως έχουμε αποδείξει για το διωνυμικό μοντέλο. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την αξία ενός τέτοιου συμβολαίου χρησιμοποιώντας μοντέλα διακριτού χρόνου θα πρέπει να εργαστούμε μάλλον στο πνεύμα της εργασίας [;] (καθώς και των αναφερόμενων εργασιών σε αυτή). Μπορούμε βεβαίως να εργαστούμε απευθείας σε μοντέλα συνεχούς χρόνου (και ίσως είναι ο καλύτερος τρόπος) και αν δεν έχουμε την ακριβή λύση να εφαρμόσουμε κάποια αριθμητική μέθοδο (δες [;], [;]) πάνω στο συνεχές μοντέλο από όπου και προκύπτει η αντίστοιχη μεθοδολογία της [;].

## 12.6 Αμερικανικά Δικαιώματα

**ΟΡΙΣΜΟΣ 320** Αμερικανικό παράγωγο ονομάζουμε μια μη αρνητική διακριτή στοχαστική διαδικασία  $X_n$  προσαρμοσμένη στο φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_n$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 321** Κάθε χρόνος στάσης  $v : \Omega \rightarrow \{0, 1, \dots, N\}$  ονομάζεται στρατηγική εξάσκησης.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 322** Δεδομένου ενός Αμερικανικού παραγώγου  $X_n$  και μιας στρατηγικής εξάσκησης  $v$ , η τ.μ.  $X_v$  που ορίζεται ως

$$X_v = X_{v(\omega)}(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

ονομάζεται η απολαβή του παραγώγου  $X$  στον χρόνο στάσης  $v$ . Μια στρατηγική εξάσκησης  $v_0$  ονομάζεται βέλτιστη κάτω από το μέτρο  $Q$  αν

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{X}_{v_0}) = \max_v \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v).$$

Συμβολίζουμε με  $\mathcal{T}_n$  τις στρατηγικές εξάσκησης  $v \geq n$ . Ορίζουμε παρακάτω δυο οικογένειες στρατηγικών επένδυσης που θα χρειαστούν αργότερα.

$$\mathcal{A}_X^{+,n} = \{(a, b) \in \mathcal{A} \mid V_m^{(a,b)} \geq X_m, m = n, \dots, N\},$$

$$\mathcal{A}_X^{-,n} = \{(a, b) \in \mathcal{A} \mid \text{υπάρχει } v \in \mathcal{T}_n \text{ τ.ω. } X_v \geq V_v^{(a,b)}\},$$

όπου  $n \leq N$ .

**ΠΡΟΤΑΣΗ 323** Σε μια αγορά που δεν περιέχει ευκαιρίες σήγουρου κέρδους έχουμε

$$\max_{(a,b) \in \mathcal{A}_X^{-,n}} V_n^{(a,b)} \leq \max_{v \in \mathcal{T}_n} \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v | \mathcal{F}_n) \leq \min_{(a,b) \in \mathcal{A}_X^{+,n}} V_n^{(a,b)},$$

όπου  $Q$  είναι ένα ισοδύναμο μέτρο *martingale* για οποιοδήποτε  $n \leq N$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Για κάθε στρατηγική  $(a, b) \in \mathcal{A}_X^{-,n}$  υπάρχει μια στρατηγική εξάσκησης  $v \in \mathcal{T}_n$  τ.ω.  $V_v \leq X_v$ . Χρησιμοποιώντας το θεώρημα επιλεκτικής στάσης του Doob και το γεγονός ότι η  $\tilde{V}$  είναι  $Q$ -martingale έχουμε

$$\tilde{V}_n = \mathbb{E}^Q(\tilde{V}_v | \mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v | \mathcal{F}_n) \leq \sup_{v \in \mathcal{T}_n} \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v | \mathcal{F}_n)$$

Για κάθε  $(a, b) \in \mathcal{A}_X^{+,n}$  και χρησιμοποιώντας το θεώρημα επιλεκτικής στάσης του Doob και για κάθε

στρατηγική εξάσκησης  $v \in \mathcal{T}_n$  έχουμε ότι

$$\tilde{V}_n = \mathbb{E}^Q(\tilde{V}_v | \mathcal{F}_n) \geq \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v | \mathcal{F}_n),$$

και έτσι προκύπτει και η δεύτερη ανισότητα.  $\square$

### 12.6.1 Ανάλυση κατά Doob – Meyer και εφαρμογή της

#### **ΘΕΩΡΗΜΑ 324 (Ανάλυση κατά Doob-Meyer)**

Κάθε προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία  $Y_n$  τ.ω.  $\mathbb{E}(|Y_n|) < \infty$  για κάθε  $n$  μπορεί να αναλυθεί με μοναδικό τρόπο σε άθροισμα

$$Y = M + A$$

όπου  $M$  είναι *martingale* τ.ω.  $M_0 = Y_0$  και  $A$  είναι μια προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία με  $A_0 = 0$ . Επιπλέον, η  $Y$  είναι μια *super-martingale* αν η  $A$  είναι φθίνουσα. Αντίστοιχα η  $Y$  θα είναι μια *sub-martingale* αν η  $A$  είναι αύξουσα.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Ορίζουμε αναδρομικά τις εξής ακολουθίες

$$M_n = \begin{cases} Y_0, & \text{για } n = 0 \\ M_{n-1} + Y_n - \mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}), & \text{για } n \geq 1 \end{cases}$$

$$A_n = \begin{cases} 0, & \text{για } n = 0 \\ A_{n-1} - Y_{n-1} + \mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}), & \text{για } n \geq 1 \end{cases}$$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$M_n = Y_n + \sum_{k=0}^{n-1} (Y_k - \mathbb{E}(Y_{k+1} | \mathcal{F}_k)),$$

$$A_n = - \sum_{k=0}^{n-1} (Y_k - \mathbb{E}(Y_{k+1} | \mathcal{F}_k)).$$

Η  $M_n$  (κοιτώντας την αναδρομική σχέση που ικανοποιεί) είναι προσαρμοσμένη και τ.ω.  $\mathbb{E}(|M_n|) < \infty$  για κάθε  $n$ . Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι είναι martingale διότι

$$\mathbb{E}(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(M_n | \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n,$$

αφού η  $M_n$  είναι προσαρμοσμένη. Παρόμοια, κοιτώντας την αναδρομική σχέση της  $A_n$  διαπιστώνουμε ότι είναι προβλέψιμη.

Για να δείξουμε ότι η παραπάνω ανάλυση είναι μοναδική υποθέτουμε ότι υπάρχει μια διαφορετική ανάλυση  $M', A'$ , δηλαδή

$$Y_n = M'_n + A'_n,$$

και επομένως  $Y_n - Y_{n-1} = M'_n - M'_{n-1} + A'_n - A'_{n-1}$ . Παίρνοντας τη δεσμευμένη μέση τιμή προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) - Y_{n-1} = A'_n - A'_{n-1}$$

δηλαδή αναγκαστικά η  $A'$  ικανοποιεί την ίδια σχέση με την  $A_n$ . Το ίδιο ισχύει και για την  $M'_n$ .

Θα δείξουμε τώρα ότι η  $Y_n$  είναι super-martingale αν η  $A_n$  είναι φθίνουσα. Έστω ότι η  $Y_n$  είναι super-martingale, τότε

$$A_{n+1} = \mathbb{E}(A_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(A_n | \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(Y_n | \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq A_n,$$

όπου για να πάρουμε την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η  $Y$  είναι super-martingale.

Αντίστροφα τώρα, αν η  $A_n$  είναι φθίνουσα τότε αναγκαστικά η  $Y_n$  είναι super-martingale. Παρόμοια λοι-

πόν,

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \mathbb{E}(A_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(A_n|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(Y_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\ &= A_n - Y_n + \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) \Rightarrow \\ A_{n+1} - A_n &= \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) - Y_n \leq 0, \end{aligned}$$

όπου για να πάρουμε την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η  $A_n$  είναι φθίνουσα. Επίσης, έχουμε χρησιμοποιήσει ότι είναι και προβλέψιμη. Παρόμοια για την περίπτωση της sub-martingale.  $\square$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 325 (Snell envelope)** Έστω  $X_n$  προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία. Ονομάζουμε *Snell envelope* τη μικρότερη *super martingale* η οποία είναι μεγαλύτερη ή ίση της  $X$ .

**ΛΗΜΜΑ 326** Δεδομένου ενός Αμερικανικού δικαιώματος  $X_n$  η στοχαστική διαδικασία  $\tilde{H}$  που ορίζεται αναδρομικά

$$\tilde{H}_n = \begin{cases} \tilde{X}_N, & n = N, \\ \max \{ \tilde{X}_n, \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_{n+1} | \mathcal{F}_n) \}, & n = 0, \dots, N - 1 \end{cases}$$

είναι Snell envelope της  $\tilde{X}$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Εξ' ορισμού η  $\tilde{H}_n$  είναι προσαρμοσμένη και μη αρνητική. Επίσης,  $\tilde{H}_n \geq \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ , δηλαδή είναι  $Q$  super-martingale. Θα δείξουμε ότι είναι και η μικρότερη τ.ω. να είναι μεγαλύτερη ή ίση της  $\tilde{X}_n$ . Αν υπάρχει μια  $Q$  super-martingale  $Y$  τ.ω.  $Y_n \geq \tilde{X}_n$  τότε  $\tilde{H}_N = \tilde{X}_N \leq Y_N$ . Με επαγωγή λοιπόν έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{n-1} &= \max \{ \tilde{X}_{n-1}, \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_n | \mathcal{F}_{n-1}) \} \leq \max \{ \tilde{X}_{n-1}, \mathbb{E}^Q(Y_n | \mathcal{F}_{n-1}) \} \\ &\leq \max \{ \tilde{X}_{n-1}, Y_{n-1} \} = Y_{n-1}. \end{aligned}$$

□

Στο παρακάτω θεώρημα δίνουμε τη μορφή της αξίας του Αμερικανικού συμβολαίου τη χρονική στιγμή

$n$ . Επομένως, όταν γράφουμε  $\tilde{H}_m$  εννοούμε την παρούσα αξία της  $H_m$ , δηλαδή την αξία της στη χρονική στιγμή  $n$  και παρόμοια για την  $\tilde{X}$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 327** Έστω ότι υπάρχει μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale  $Q$ . Τότε για οποιοδήποτε  $n \leq N$  υπάρχει μια στρατηγική επένδυσης  $(a, b) \in \mathcal{A}_X^{+,n} \cap \mathcal{A}_X^{-,n}$  και επομένως ισχύει

$$(i) \quad V_m^{(a,b)} \geq X_m, m = n, \dots, N$$

(ii) υπάρχει στρατηγική εξάσκησης  $v_n \in \mathcal{T}_n$  τ.ω.  
 $X_{v_n} = V_{v_n}^{(a,b)}$ .

Επιπλέον,

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{X}_{v_n} | \mathcal{F}_n) = V_n^{(a,b)} = \max_{v \in \mathcal{T}_n} \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v | \mathcal{F}_n).$$

Το πρώτο που μας πληροφορεί το θεώρημα αυτό είναι ότι ο πωλητής μπορεί να βρει στρατηγική αντιστάθμισης για να είναι καλυμμένος σε οποιαδήποτε περίπτωση αλλά επίσης (στο δεύτερο σκέλος) μας πληροφορεί ότι υπάρχει στρατηγική αντιστάθμισης η οποία

μας οδηγεί στη φθηνότερη τιμή του συμβολαίου. Αυτό διότι αποδεικνύεται ότι ο αγοραστής μπορεί να εξασκήσει έτσι ώστε ο πωλητής να μην έχει καθόλου κέρδος.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Κατασκευάζουμε την ακολουθία  $\tilde{H}_m$  όπως πριν και έπειτα την  $H_m = B_{m-n}\tilde{H}_m$ . Θα δείξουμε ότι η  $H_m$  είναι η αξία του Αμερικανικού συμβολαίου τη χρονική στιγμή  $m$ .

Η  $\tilde{H}_m$  έχει κατασκευαστεί με την εξής λογική. Τη χρονική στιγμή  $N$  προφανώς η αξία του συμβολαίου  $\tilde{H}_N$  είναι ίση με  $\tilde{X}_N$  (δηλαδή με την απολαβή του αγοραστή), διότι θα εξασκήσει το δικαίωμα ο αγοραστής αμέσως και επομένως θα πρέπει να πληρώσει όσα θα πάρει. Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την αξία του συμβολαίου  $\tilde{H}_{m_0}$  τη χρονική στιγμή  $m_0$  και θέλουμε να υπολογίσουμε την αξία  $\tilde{H}_{m_0-1}$  τη χρονική στιγμή  $m_0 - 1$ . Τη χρονική στιγμή  $m_0 - 1$  ο αγοραστής έχει δυο επιλογές: είτε να εξασκήσει το συμβόλαιο εκείνη τη στιγμή είτε όχι. Αν το εξασκήσει εκείνη τη στιγμή η αξία του συμβολαίου θα πρέπει να είναι ίση με την απολαβή του αγοραστή, δηλαδή  $\tilde{H}_{m_0-1} = \tilde{X}_{m_0-1}$

ενώ αν αποφασίσει να μην το εξασκήσει, η αξία του συμβολαίου θα πρέπει να είναι

$$\mathbb{E}^Q \left( \frac{1}{1+r} \tilde{H}_{m_0} | \mathcal{F}_{m_0-1} \right), \text{ (δες θεώρημα 317)}$$

δηλαδή όσο αν αγόραζε ένα Ευρωπαϊκό συμβόλαιο τη χρονική στιγμή  $m_0 - 1$  με χρόνο λήξης τη χρονική στιγμή  $m_0$  και απολαβή  $\tilde{H}_{m_0}$ . Με άλλα λόγια, αν τοποθετηθεί αυτό το ποσό κατάλληλα στη μετοχή και στην τράπεζα (δηλαδή αντισταθμίσει ο πωλητής το  $\tilde{H}_{m_0}$ ) τότε τη χρονική στιγμή  $m_0$  θα είναι ίσο με  $\tilde{H}_{m_0}$ . Ήρα, η αξία του Αμερικανικού συμβολαίου τη χρονική στιγμή  $m_0 - 1$  θα πρέπει να είναι το μέγιστο των δυο προηγούμενων αριθμών προκειμένου ο πωλητής να είναι καλυμμένος σε οποιαδήποτε περίπτωση. Συνεχίζοντας με την ίδια λογική κατασκευάστηκε η ακολουθία  $\tilde{H}_m$  και επομένως και η  $H_m$ .

Στόχος μας είναι να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο του οποίου η αξία να είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση από την απολαβή, δηλαδή  $V_m \geq X_m$ . Η κανονικοποιημένη τιμή του χαρτοφυλακίου όμως είναι mar-

tingale κάτω από το μέτρο  $Q$ . Αν η  $\tilde{X}_m$  ήταν επίσης martingale (το οποίο δεν ισχύει εν γένει) θα φτιάχναμε ένα χαρτοφυλάκιο τ.ω.  $\tilde{V}_m = \tilde{X}_m$ . Χρησιμοποιώντας την ανάλυση κατά Doob-Meyer θα μπορούσαμε να την αναλύσουμε (αφού είναι προσαρμοσμένη) σε μια martingale και μια προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία. Έπειτα θα αντισταθμίζαμε το martingale κομμάτι της  $\tilde{X}_m$  αλλά δεν θα μπορούσαμε να πούμε αν αυτό το κομμάτι είναι μεγαλύτερο ή ίσο από την κανονικοποιημένη τιμή της απολαβής. Αυτό θα συνέβαινε μόνο αν η  $\tilde{X}_m$  ήταν  $Q$ -super-martingale. Για το λόγο αυτό κατασκευάστηκε η ακολουθία  $\tilde{H}_m$  που είναι η μικρότερη  $Q$ -super-martingale μεγαλύτερη ή ίση της απολαβής. Οποιαδήποτε  $Q$ -super-martingale μεγαλύτερη ή ίση της απολαβής θα ταίριαζε για το λόγο που την χρειαζόμαστε αλλά ψάχνουμε τη μικρότερη δυνατή (που αποδείξαμε ότι είναι η  $\tilde{H}_m$ ) προκειμένου να υπολογίσουμε τη φθηνότερη δυνατή αξία του συμβολαίου. Είχαμε δείξει ότι η ακολουθία  $\tilde{H}_m$ ,  $m = n, \dots, N$  είναι

$Q$ -super-martingale επομένως αναλύεται μοναδικά

$$\tilde{H}_m = M_m + A_m, \quad m = n, \dots, N$$

όπου  $M_m$  είναι martingale και  $A_m$  είναι φθίνουσα και προβλέψιμη στοχαστική διαδικασία με  $A_n = 0$  (δηλαδή  $A_m \leq 0$  και επομένως  $M_m \geq \tilde{H}_m \geq \tilde{X}_m$ ).

Η αγορά μας είναι πλήρης οπότε μπορούμε να βρούμε στρατηγική επένδυσης  $(a, b) \in \mathcal{A}$  τ.ω. να αντισταθμίσει ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα με απολαβή  $M_N$ , δηλαδή  $\tilde{V}_N^{(a,b)} = M_N$  (αυτό το μέρος της απόδειξης είναι σημαντικό διότι εφαρμόζεται στις ασκήσεις).

Αφού είναι martingales θα έχουμε ότι  $\tilde{V}_m^{(a,b)} = M_m \geq \tilde{H}_m$  (διότι  $A_m \leq 0$  αφού  $A_n = 0$  και  $A_m$  φθίνουσα). Επομένως,  $(a, b) \in \mathcal{A}_X^{+,n}$  και επίσης  $V_n = M_n = H_n$ .

Θα δείξουμε τώρα ότι  $(a, b) \in \mathcal{A}_X^{-,n}$ . Ορίζουμε

$$v_n(\omega) = \min\{k \geq n \mid \tilde{H}_k(\omega) = \tilde{X}_k(\omega)\}, \quad \omega \in \Omega.$$

Θυμηθείτε ότι  $\tilde{H}_N = \tilde{X}_N$  άρα  $n \leq v_n \leq N$ .

Όμως,

$$\{v_n = m\} = \{\tilde{H}_n > \tilde{X}_n\} \cap \dots \cap \{\tilde{H}_{m-1} > \tilde{X}_{m-1}\} \cap \{\tilde{H}_m = \tilde{X}_m\} \in \mathcal{F}_m,$$

άρα στην πραγματικότητα είναι μια στρατηγική εξάσκησης.

Η  $M_m$  όμως ορίζεται ως εξής,

$$M_m = \tilde{H}_m + \sum_{k=n}^{m-1} (\tilde{H}_k - \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_{k+1}|\mathcal{F}_k))$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να παρατηρήσουμε το εξής το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε και αργότερα. Μέχρι τη χρονική στιγμή  $v_n - 1$  έχουμε ότι

$$\tilde{H}_k = \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_{k+1}|\mathcal{F}_k),$$

αφού  $\mathbb{E}^Q(\tilde{H}_{m+1}|\mathcal{F}_m) \geq \tilde{X}_m$  για  $m \leq v_n - 1$  (θυμηθείτε τον ορισμό της  $\tilde{H}_m$ ) (χωρίς να σημαίνει ότι ο κάτοχος του συμβολαίου εξασκεί στο χρόνο  $v_n$  κατά ανάγκη ή ότι δεν έχει ακόμη εξασκήσει το δικαίωμα) το οποίο σημαίνει ότι (δες την παραπάνω σχέση που ικανοποιεί η  $M_m$ )  $\tilde{H}_m = M_m$ . Επομένως και  $\tilde{H}_{v_n} = M_{v_n}$ . Δηλαδή και  $\tilde{V}_{v_n} = M_{v_n} = \tilde{H}_{v_n} = \tilde{X}_{v_n}$  και άρα  $(a, b) \in \mathcal{A}_X^{-,n}$ .

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 323 έχουμε ότι

$$V_n^{(a,b)} = \sup_{v \in \tilde{\mathcal{T}}_n} \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v|\mathcal{F}_n)$$

Όμως

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{X}_{v_n}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_{v_n}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^Q(M_{v_n}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^Q(\tilde{V}_{v_n}|\mathcal{F}_n) = V_n,$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα επιλεκτικής στάσης.  $\square$

### 12.6.2 Αποτελέσματα για Βέλτιστες Στρατηγικές

**ΛΗΜΜΑ 328** Για κάθε στρατηγική εξάσκησης  $v$  έχουμε

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v) \leq H_0.$$

Η στρατηγική εξάσκησης θα είναι βέλτιστη αν

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v) = H_0.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Προφανώς για κάθε στρατηγική εξάσκησης  $v$  έχουμε  $X_v \leq H_v$  και άρα  $\mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v) \leq \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_v) = \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_{N \wedge v})$ . Επειδή η  $\tilde{H}_n$  είναι super-martingale το ίδιο είναι και η σταματημένη  $\tilde{H}_{N \wedge v}$ , άρα  $\mathbb{E}^Q(\tilde{H}_{N \wedge v}) \leq H_0$ .

Μένει να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια στρατηγική εξάσκησης τ.ω.  $\mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v) = H_0$ . Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια στρατηγική εξάσκησης  $v$  τ.ω.

- $\tilde{X}_v = \tilde{H}_v$ ,
- $\tilde{H}_{v \wedge n}$  είναι  $Q$ -martingale.

Προφανώς τότε,

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v) = \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_v) = \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_{v \wedge n}) = H_0.$$

Πράγματι, αφού  $v \leq N$  τότε  $\mathbb{E}^Q(\tilde{H}_v) = \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_{v \wedge N}) = \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_{v \wedge n})$  διότι η  $\tilde{H}_{v \wedge n}$  υποθέσαμε ότι είναι martingale.

Θα δείξουμε παρακάτω ότι υπάρχουν δυο τέτοιες στρατηγικές εξάσκησης. Συμβολίζουμε με  $E_n = \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^Q(H_{n+1} | \mathcal{F}_n)$  και θέτοντας  $E_N = -1$  έχουμε  $H_n = \max\{X_n, E_n\}$ .

Ορίζουμε τις παρακάτω στρατηγικές εξάσκησης

$$\begin{aligned} v_{min} &= \min\{n | X_n \geq E_n\}, \\ v_{max} &= \min\{n | X_n > E_n\}. \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι αυτές ικανοποιούν τις δυο προϋποθέσεις παραπάνω και επομένως είναι βέλτιστες.

Έχουμε λοιπόν,

$$\begin{aligned} H_{v_{min}} &= \max\{X_{v_{min}}, E_{v_{min}}\} = X_{v_{min}}, \\ H_{v_{max}} &= \max\{X_{v_{max}}, E_{v_{max}}\} = X_{v_{max}} \end{aligned}$$

και άρα ικανοποιείται η πρώτη προϋπόθεση.

Από την ανάλυση κατά Doob της  $\tilde{H}_n$  έχουμε ότι

$$A_n = - \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{H}_k - \tilde{E}_k), \quad n \leq N.$$

Επίσης, έχουμε ότι  $H_n = E_n$  για  $n \leq v_{max} - 1$  (αφού μέχρι τον  $v_{max} - 1$  έχουμε ότι  $\tilde{H}_n > \tilde{X}_n$ ) δηλαδή και  $A_n = 0$  (το οποίο προκύπτει από την προηγούμενη σχέση για την  $A_n$ ) για  $n \leq v_{max}$  ενώ  $A_n < 0$  για  $n \geq v_{max} + 1$ . 'ρα  $\tilde{H}_n = M_n$  για  $n \leq v_{max}$  (σημαντικό το μέρος αυτό γιατί χρησιμοποιείται στις ασκήσεις).

Επομένως

$$\tilde{H}_{v_{max} \wedge n} = M_{v_{max} \wedge n}, \quad \tilde{H}_{v_{min} \wedge n} = M_{v_{min} \wedge n}.$$

Οι στοχαστικές διαδικασίες λοιπόν  $\tilde{H}_{v_{max} \wedge n}, \tilde{H}_{v_{min} \wedge n}$  είναι martingales κάτω από το μέτρο  $Q$ , δηλαδή ικανοποιείται και η δεύτερη ιδιότητα. Αποδείξαμε λοιπόν ότι υπάρχει τουλάχιστον μια βέλτιστη στρατηγική εξάσκησης και με αυτό έχουμε δείξει ότι η σχέση  $\mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v) = H_0$  είναι και αναγκαία.  $\square$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 329** Αν η  $v$  είναι βέλτιστη για το  $X$  τότε

$$v_{min} \leq v \leq v_{max}.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Ας υποθέσουμε ότι

$$P(v < v_{min}) > 0 \text{ το οποίο σημαίνει ότι } P(\tilde{X}_v < \tilde{H}_v) > 0.$$

Θα δείξουμε ότι η  $v$  δεν μπορεί να είναι βέλτιστη κάτω από αυτή την υπόθεση.

Αφού τα  $P, Q$  είναι ισοδύναμα έχουμε επίσης ότι  $Q(\tilde{X}_v < \tilde{H}_v) > 0$  και επομένως  $\mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v) < \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_v)$ , δηλαδή δεν μπορεί να είναι βέλτιστη.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι  $P(v > v_{max}) > 0$ . Θα δείξουμε ότι κάτω από αυτή την υπόθεση δεν μπορεί η  $v$  να είναι βέλτιστη. Αφού  $A_v < 0$  για  $v \geq v_{max} + 1$  έχουμε ότι και  $\mathbb{E}^Q(A_v) < 0$  άρα

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{H}_v) = \mathbb{E}^Q(M_v) + \mathbb{E}^Q(A_v) < \mathbb{E}^Q(M_v) = M_0 = H_0,$$

όπου στην προτελευταία εξίσωση χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα επιλεκτικής στάσης.  $\square$

### 12.6.3 Αντισταθμιστικές στρατηγικές επένδυσης

Έχουμε δει ότι για τα Αμερικανικά συμβόλαια κατασκευάζουμε στρατηγικές επένδυσης για την martingale  $M_n$ . Αν λοιπόν έχουμε ένα Αμερικανικό συμβόλαιο του τύπου  $X_n = f(S_n)$  τότε προκύπτει ότι και  $\tilde{H}_n = g(S_n)$ .

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την

$$\mathbb{E}^Q(g(S_{n+1})|\mathcal{F}_n).$$

Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι  $S_{n+1} = uS_n$  ή  $S_{n+1} = dS_n$  με πιθανότητα  $q$  και  $1 - q$  αντίστοιχα τότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^Q(g(S_{n+1})|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}^Q(g(uS_n)\mathbb{I}_{\{1+m_{n+1}=u\}}|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}^Q(g(dS_n)\mathbb{I}_{\{1+m_{n+1}=d\}}|\mathcal{F}_n) \\ &= g(uS_n)\mathbb{E}^Q(\mathbb{I}_{\{1+m_{n+1}=u\}}|\mathcal{F}_n) + g(dS_n)\mathbb{E}^Q(\mathbb{I}_{\{1+m_{n+1}=d\}}|\mathcal{F}_n) \\ &= qg(uS_n) + (1 - q)g(dS_n) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι  $g(uS_n)$  και  $g(dS_n)$  είναι  $\mathcal{F}_n$  - μετρήσιμες. Επειδή οι  $m_1, \dots, m_{n+1}$  είναι ανεξάρτητες κάτω από το μέτρο  $Q$  τότε και τα εν-

δεχόμενα  $\{1 + m_{n+1} = u\}$  και  $\{1 + m_{n+1} = d\}$  είναι ανεξάρτητα από οποιοδήποτε ενδεχόμενο της  $\mathcal{F}_n$ . Αυτό σημαίνει ότι οι σ-άλγεβρες που παράγουν οι δείκτριες  $\mathbb{I}_{\{1+m_{n+1}=d\}}$  και  $\mathbb{I}_{\{1+m_{n+1}=u\}}$  (οι οποίες είναι  $\{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$  όπου  $A = \{1 + m_{n+1} = u\}$  για τη μια δείκτρια ενώ για την άλλη είναι το  $\{1 + m_{n+1} = d\}$ ) είναι ανεξάρτητες με την  $\mathcal{F}_n$ . Τελικά, οι δείκτριες  $\mathbb{I}_{\{1+m_{n+1}=d\}}$  και  $\mathbb{I}_{\{1+m_{n+1}=u\}}$  είναι ανεξάρτητες της  $\mathcal{F}_n$  και έτσι εξαφανίζεται η δέσμευση από τις δεσμευμένες μέσες τιμές.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την  $H_n$ , ξεκινώντας από  $H_N = X_N = f(S_N)$  και έπειτα

$$\begin{aligned} E_{N-1} &= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^Q(H_N | \mathcal{F}_{N-1}) \\ &= \frac{1}{1+r} (qf(uS_{N-1}) + (1-q)f(dS_{N-1})) \end{aligned}$$

και τέλος  $H_{N-1} = \max\{X_{N-1}, E_{N-1}\}$ . Συνεχίζουμε και αναδρομικά υπολογίζουμε όλες τις τιμές  $H_n$ .

Ας θυμηθούμε ότι για τα Αμερικανικά δικαιώματα

πρέπει να κατασκευάσουμε αντισταθμιστικές στρατηγικές για την  $M_n$  επομένως πρέπει να υπολογισθούν οι τιμές της  $M_n$ . Αντί αυτού όμως θα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές  $H_n$  που έχουμε υπολογίσει μέχρι το χρόνο  $v_{max}$  διότι  $M_n = \tilde{H}_n$ . Αν δεν εξασκηθεί το δικαίωμα μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις τιμές  $M_n$  για  $n > v_{max}$ .

Ήρα λοιπόν, όπως και στα Ευρωπαϊκά δικαιώματα, (και μέχρι το χρόνο  $v_{max}$ ) θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις

$$\begin{aligned} a_1 u S_0 + b_1(1+r) &= H_{1,1} = H_1(uS_0), \\ a_1 d S_0 + b_1(1+r) &= H_{1,0} = H_1(dS_0), \end{aligned}$$

και λύνοντας θα πάρουμε τις τιμές  $(a_1, b_1)$ . Συνεχίζουμε για  $n = 2$  κτλ.

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της  $M_n$  θα χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό τύπο (δες απόδειξη θεωρήματος [324](#))

$$\begin{aligned} M_0 &= H_0, \\ M_{n+1} &= M_n + \tilde{H}_{n+1} - \tilde{E}_n. \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι η τιμή της  $M_{n+1}$  χρειάζεται την προηγούμενη και επομένως εξαρτάται από το συγκεκριμένο μονοπάτι που έχει ακολουθήσει η μετοχή. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} M_1^u &= M_0 + \tilde{H}_1^u - \tilde{E}_0, \\ M_1^d &= M_0 + \tilde{H}_1^d - \tilde{E}_0, \\ M_2^{ud} &= M_1^u + \tilde{H}_2^{ud} - \tilde{E}_1^u, \\ M_2^{du} &= M_1^d + \tilde{H}_2^{du} - \tilde{E}_1^d \end{aligned}$$

Οι τιμές  $\tilde{H}_2^{ud}, \tilde{H}_2^{du}$  είναι ίσες και το ίδιο ισχύει για τις  $\tilde{E}_2^{ud}, \tilde{E}_2^{du}$ .

Για να υπολογίσουμε την αντισταθμιστική στρατηγική χωρίς να μας ενδιαφέρει ο χρόνος  $v_{max}$  θα λύσουμε τις εξισώσεις,

$$\begin{aligned} a_1 u S_0 + b_1(1+r) &= M_1^u(1+r), \\ a_1 d S_0 + b_1(1+r) &= M_1^d(1+r), \end{aligned}$$

και λύνοντας θα πάρουμε τις τιμές  $(a_1, b_1)$ . Συνεχίζουμε για  $n = 2$  κτλ. Αυτό σημαίνει (απλώς) ότι θα κάνουμε επιπλέον υπολογισμούς για να βρούμε τις τι-

μές της  $M_n$  διότι γνωρίζουμε ότι μέχρι το χρόνο  $v_{max}$  είναι ίσες με τις τιμές της  $\tilde{H}_n$ .

Τέλος, ένα γενικό σχόλιο. Μπορούμε να δούμε ότι η κατασκευή της  $H_n$  (και η επεξήγηση της κατασκευής αυτής) μπορεί να γίνει εμπειρικά (δες απόδειξη θεωρήματος 327) αλλά το ίδιο δεν μπορεί να γίνει με την κατασκευή της αντισταθμιστικής στρατηγικής. Αυτό συμβαίνει διότι στηρίζεται στο θεώρημα 324 (Ανάλυση Doob) και στην απόδειξή του. Επομένως είναι απίθανο κάποιος να την κατασκευάσει και να εξηγήσει την κατασκευή αυτή εμπειρικά, χωρίς να χρησιμοποιήσει το θεώρημα 324 και έπειτα βέβαια το θεώρημα 327. Χωρίς τη γνώση αυτών των θεωρημάτων (και μαθηματικών εργαλείων) το μόνο που μπορεί κάποιος να κάνει είναι τους υπολογισμούς (αν του έχουν δοθεί οι αντίστοιχες φόρμουλες) και μάλιστα χωρίς να γνωρίζει γιατί ισχύουν αυτές οι φόρμουλες. Όμως για αυτήν τη δουλειά οι υπολογιστές (και το κατάλληλο λογισμικό) μάλλον κάνουν καλύτερη δουλειά.

## 12.7 Σχέση μεταξύ Αμερικανικών και Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις το Αμερικανικό δικαίωμα ( $H_n$ ) είναι ίσο με το αντίστοιχο Ευρωπαϊκό ( $H_n^E$ ).

**ΠΡΟΤΑΣΗ 330** Γενικά έχουμε ότι

$$H_n \geq H_n^E, \quad n = 0, \dots, N.$$

Επιπλέον, αν  $H_n^E \geq X_n$  τότε  $H_n = H_n^E$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Ισχύει ότι

$$\tilde{H}_n \geq \mathbb{E}^Q(\tilde{H}_N | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_N | \mathcal{F}_n) = \tilde{H}_n^E.$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει επειδή η  $\tilde{H}_n$  είναι super-martingale ως προς το  $Q$ . Αν υποθέσουμε τώρα ότι  $H_n^E \geq X_n$  τότε αφού η  $\tilde{H}_n^E$  είναι martingale και άρα και super-martingale αναγκαστικά θα ισχύει ότι  $\tilde{H}_n^E \geq \tilde{H}_n$  διότι η  $\tilde{H}_n$  είναι η μικρότερη super-martingale που είναι μεγαλύτερη της  $\tilde{X}_n$ . Τελικά θα έχουμε  $H_n = H_n^E$ .  $\square$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 331** Στην περίπτωση που  $X_n = (S_n - K)^+$  έχουμε ότι  $H_n^E \geq (S_n - K)^+$  και άρα  $H_n = H_n^E$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Ισχύουν τα παρακάτω

$$\tilde{H}_n^E = \frac{1}{B_N} \mathbb{E}^Q((S_N - K)^+ | \mathcal{F}_n) \geq \frac{1}{B_N} \mathbb{E}^Q(S_N - K | \mathcal{F}_n) = \tilde{S}_n - \frac{K}{B_N}.$$

Άρα,

$$H_n^E \geq S_n - K \frac{B_n}{B_N} \geq S_n - K,$$

και αφού  $H_n^E \geq 0$  έχουμε τελικά ότι  $H_n^E \geq (S_n - K)^+$ . Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση παίρνουμε το ζητούμενο.  $\square$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 332** Αν η  $\tilde{X}_n$  είναι  $Q$  sub-martingale τότε  $H_n = H_n^E$ .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε  $v \in \mathcal{T}_n$  έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v|\mathcal{F}_n) &= \sum_{k=n}^N \mathbb{E}^Q(\mathbb{I}_{\{v=k\}}\tilde{X}_k|\mathcal{F}_n) \\
&\leq \sum_{k=n}^N \mathbb{E}^Q(\mathbb{I}_{\{v=k\}}\mathbb{E}^Q(\tilde{X}_N|\mathcal{F}_k)|\mathcal{F}_n) \\
&= \sum_{k=n}^N \mathbb{E}^Q(\mathbb{E}^Q(\mathbb{I}_{\{v=k\}}\tilde{X}_N|\mathcal{F}_k)|\mathcal{F}_n) \\
&= \sum_{k=n}^N \mathbb{E}^Q(\mathbb{I}_{\{v=k\}}\tilde{X}_N|\mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_N|\mathcal{F}_n).
\end{aligned}$$

Τελικά θα έχουμε

$$\tilde{H}_n = \max_{v \in \mathcal{T}_n} \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v|\mathcal{F}_n) \leq \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_N|\mathcal{F}_n) = \tilde{H}_n^E.$$

□

**ΠΡΟΤΑΣΗ 333** Αν  $\tilde{X}_n = g(\tilde{S}_n)$  όπου  $g$  είναι μια κυρτή συνάρτηση τότε η  $\tilde{X}$  είναι  $Q$  sub-martingale. Αν  $r = 0$  τότε και το συμβόλαιο πώλησης συμπίπτει με το αντίστοιχο Ευρωπαϊκό.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Jensen προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}^Q(\tilde{X}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^Q(g(\tilde{S}_{n+1})|\mathcal{F}_n) \geq g(\mathbb{E}^Q(\tilde{S}_{n+1}|\mathcal{F}_n)) = g(\tilde{S}_n) = \tilde{X}_n.$$

Αν  $r = 0$  τότε η απολαβή ενός Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης είναι της μορφής  $X_n = \tilde{X}_n = g(\tilde{S}_n) = g(S_n) = (K - S_n)^+$  όπου η  $g(x) = (K - x)^+$  είναι κυρτή.  $\square$

**ΠΡΟΤΑΣΗ 334** Αν  $r \geq 0$  και αν  $X_n = g(S_n)$  όπου  $g$  είναι μια κυρτή συνάρτηση τ.ω.  $g(0) = 0$  τότε η  $\tilde{X}$  είναι  $Q$  sub-martingale και άρα  $H_n = H_n^E$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Εφόσον η  $g$  είναι κυρτή μπορούμε να δείξουμε ότι

$$g(ax) \leq ag(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad a \in (0, 1).$$

Επειδή η  $\tilde{S}_n$  είναι martingale κάτω από το μέτρο  $Q$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^Q(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) \Rightarrow \\ X_n &= g(S_n) = g\left(\frac{1}{1+r} \mathbb{E}^Q(S_{n+1} | \mathcal{F}_n)\right) \\ &\leq \frac{1}{1+r} g(\mathbb{E}^Q(S_{n+1} | \mathcal{F}_n)) \\ &\leq \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^Q(g(S_{n+1}) | \mathcal{F}_n) \\ &= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^Q(X_{n+1} | \mathcal{F}_n). \end{aligned}$$

□

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 335** Σε όλα τα προηγούμενα θεωρήματα (που δείξαμε ότι το Αμερικανικό δικαίωμα συμπίπτει με το Ευρωπαϊκό) προκύπτει ότι ο χρόνος  $N$  είναι μια βέλτιστη στρατηγική εξάσκησης διότι

$$H_0^E = \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_N) = H_0 = \max_v \mathbb{E}^Q(\tilde{X}_v).$$

Θεωρείστε ένα Αμερικανικό συμβόλαιο αγοράς στο οποίο η αξία της μετοχής αυξάνεται συνεχώς μέχρι κάποιο

χρόνο  $n_0$  και έπειτα μειώνεται μέχρι τη λήξη του συμβολαίου. Ο χρόνος που θα πρέπει να εξασκήσει ο αγοραστής (για να έχει κέρδος) είναι προφανώς ο  $n_0$ , ενώ αν εξασκήσει στο χρόνο  $N$  θα χάσει χρήματα. Παρόλα αυτά ο  $N$  παραμένει βέλτιστη στρατηγική εξάσκησης. Η έννοια της βέλτιστης στρατηγικής εξάσκησης έχει περισσότερο μια μαθηματική χρησιμότητα παρά την έννοια του καταλληλότερου χρόνου για να εξασκήσει ο αγοραστής. Αφού ο  $N$  είναι μια βέλτιστη στρατηγική εξάσκησης τότε  $N \leq v_{max}$  (δες Πρόταση 335) και όπως έχουμε δείξει μέχρι το χρόνο  $v_{max}$  έχουμε ότι  $\tilde{H}_n = M_n$ . Επομένως μέχρι το τέλος του συμβολαίου και προκειμένου να υπολογίσουμε την αντισταθμιστική στρατηγική δεν θα χρειαστεί να υπολογίσουμε καθόλου τις τιμές της  $M_n$  αλλά μόνο της  $\tilde{H}_n$  και θα αντισταθμίσουμε αυτές. Αυτή είναι μια χρησιμότητα της βέλτιστης στρατηγικής εξάσκησης. Παρατηρήστε ότι αν  $v_{max} < N$  τότε θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τις τιμές της  $M_n$  για  $n > v_{max}$ , προκειμένου να υπολογίσουμε την αντισταθμιστική στρατηγική, της οποίας προαπαιτείται ο υπολογισμός των τιμών της  $\tilde{H}_n$ .

Στην πράξη, αν στην αγορά μας επιτρέπεται το να πουλήσεις ανοιχτά μια μετοχή (και σε ποιο βαθμό), μπορεί να δείξει κάποιος ότι δεν συμφέρει τον κάτοχο ενός Αμερικανικού συμβολαίου αγοράς (σε μια υποκειμένη μετοχή χωρίς μερίσματα) να το εξασκήσει πριν τη λήξη του. Αυτό δεν πρέπει όμως να συγχέεται με τη βέλτιστη στρατηγική εξάσκησης (που τυχαίνει να είναι ο χρόνος  $N$ ) διότι είναι ανεξάρτητη από τη δυνατότητα ή όχι του επενδυτή να πουλήσει ανοιχτά (και σε ποιο βαθμό) την υποκειμένη μετοχή. Δηλαδή σε μια αγορά που δεν υπάρχει η δυνατότητα να πουλήσεις ανοιχτά την υποκειμένη μετοχή, η βέλτιστη στρατηγική εξάσκησης ενός Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς παραμένει ο χρόνος  $N$ .

Ας υποθέσουμε ότι ο κάτοχος του συμβολαίου είναι τυχερός (ή γνωρίζει το μέλλον) και πάντοτε εξασκεί την κατάλληλη χρονική στιγμή που του αποφέρει μεγαλύτερο κέρδος. Ο πωλητής, αν έχει ακολουθήσει τη στρατηγική επένδυσης που περιγράψαμε θα έχει πάντοτε στο χαρτοφυλάκιό του ποσό ίσο ή μεγαλύτερο από την απολαβή που πρέπει να δώσει στον αγοραστή

$(V_n \geq X_n)$ . Για να γίνει αυτό θα πρέπει να αντισταθμίσει, όπως είδαμε στη θεωρία, την  $M_n$  και να υπολογίζει όλες τις πιθανές τιμές της. Απλά, μέχρι το χρόνο  $v_{\max}$  οι τιμές της  $\tilde{H}_n$  και της  $M_n$  συμπίπτουν.

Στην πράξη, ο πωλητής αν χρησιμοποιήσει το παραπάνω μοντέλο πρέπει την ημέρα της πώλησης να έχει εκτιμήσει τις παραμέτρους  $u, d$  οι οποίες όμως αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι κατά τη διάρκεια του συμβολαίου μπορεί να αλλάξουν δραματικά με αποτέλεσμα να χάσει ή να κερδίσει αρκετά χρήματα. Δηλαδή, στην πραγματικότητα, ο πωλητής ελπίζει οι εκτιμήσεις του για τα  $u, d, r$  να κινηθούν στα πλαίσια που είχε αρχικά εκτιμήσει (ή και σε ακόμη ευνοϊκότερα για αυτόν).

Όσον αφορά τον αγοραστή μια λογική στρατηγική που μπορεί να ακολουθήσει είναι να εξασκήσει το δικαίωμα όποτε συμβαίνει το εξής,

$$X_n > H_0(1 + r)^n.$$

Δηλαδή, η απολαβή του να είναι μεγαλύτερη από το αν έβαζε το ποσό, που πλήρωσε για την αγορά του συμβο-

λαίου, στην τράπεζα.

## 12.8 Πρακτικά Παραδείγματα και Ασκήσεις

Ας συνοψίσουμε τα αποτελέσματα για πρακτικούς λόγους. Πρώτα υπολογίζουμε την  $q = \frac{1+r-d}{u-d}$ . Η αξία του Αμερικανικού συμβολαίου θα δίνεται από την ακολουθία

$$H_n = \begin{cases} X_N, & n = N, \\ \max\{X_n, E_n\}, & n = 0, \dots, N-1, \end{cases}$$

όπου

$$E_n = \begin{cases} -1, & n = N, \\ \frac{1}{1+r} \mathbb{E}^Q(H_{n+1} | \mathcal{F}_n), & n = 0, \dots, N-1. \end{cases}$$

Θυμηθείτε ότι

$$\mathbb{E}^Q(H_{n+1} | \mathcal{F}_n) = qH_{n+1}^u + (1-q)H_{n+1}^d.$$

Οι βέλτιστες στρατηγικές θα δίνονται από

$$\begin{aligned} v_{\min} &= \min\{n | X_n \geq E_n\}, \\ v_{\max} &= \min\{n | X_n > E_n\}. \end{aligned}$$

Ορίσαμε την  $E_N = -1$  προκειμένου να ισχύει ότι  $v_{\min}, v_{\max} \leq N$ .

Τέλος, πρέπει να υπολογίσουμε την αντισταθμιστική στρατηγική. Ας θυμηθούμε ότι την υπολογίζουμε για να αντισταθμίσουμε την  $M_n$ , δηλαδή πρέπει να φτιάξουμε χαρτοφυλάκιο τ.ω. η κανονικοποιημένη αξία του να είναι ίση με  $M_n$  ( $\tilde{V}_n = M_n$ ). Μέχρι το χρόνο  $v_{max}$  ισχύει ότι  $M_n = \tilde{H}_n$ , δηλαδή για να υπολογίσουμε τη στρατηγική αντιστάθμισης θα λύσουμε τις εξισώσεις

$$a_n S_n + b_n B_n = H_n \quad (\text{ή αλλιώς } a_n \tilde{S}_n + b_n = \tilde{H}_n).$$

Σε ένα διωνυμικό μοντέλο θα έχουμε δυο εξισώσεις με δυο αγνώστους διότι έχουμε δυο πιθανές τιμές  $S_n = (u \text{ ή } d)S_{n-1}$ .

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της  $M_n$  θα χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό τύπο (δες απόδειξη θεωρήματος 330)

$$\begin{aligned} M_0 &= H_0, \\ M_{n+1} &= M_n + \tilde{H}_{n+1} - \tilde{E}_n. \end{aligned}$$

Σημειώστε ότι η τιμή της  $M_{n+1}$  χρειάζεται την προηγούμενη και επομένως εξαρτάται από το συγκεκριμένο

μονοπάτι που έχει ακολουθήσει η μετοχή. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} M_1^u &= M_0 + \tilde{H}_1^u - \tilde{E}_0, \\ M_1^d &= M_0 + \tilde{H}_1^d - \tilde{E}_0, \\ M_2^{ud} &= M_1^u + \tilde{H}_2^{ud} - \tilde{E}_1^u, \\ M_2^{du} &= M_1^d + \tilde{H}_2^{du} - \tilde{E}_1^d \end{aligned}$$

Οι τιμές  $\tilde{H}_2^{ud}, \tilde{H}_2^{du}$  είναι ίσες και το ίδιο ισχύει για τις  $\tilde{E}_2^{ud}, \tilde{E}_2^{du}$ . Σημειώστε ότι  $\tilde{H}_n = \frac{H_n}{B_n}$ .

Για να υπολογίσουμε την αντισταθμιστική στρατηγική χωρίς να μας ενδιαφέρει ο χρόνος  $v_{max}$  θα λύσουμε τις εξισώσεις,

$$\begin{aligned} a_1 u S_0 + b_1(1+r) &= M_1^u(1+r), \\ a_1 d S_0 + b_1(1+r) &= M_1^d(1+r), \end{aligned}$$

και λύνοντας θα πάρουμε τις τιμές  $(a_1, b_1)$ . Συνεχίζουμε για  $n = 2$  κτλ.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 336** Έστω ότι βρισκόμαστε σε ένα διωνυμικό μοντέλο τριών περιόδων ( $N = 3$ ). Θεωρήστε ένα Αμερικανικό δικαίωμα πώλησης με απολαβή  $X_n =$

$(K - S_n)^+$ . Τα δεδομένα μας είναι  $u = 2$ ,  $d = 1/2$ ,  $S_0 = 1$ ,  $K = 1/2$  και  $r \in (0, 1)$ . Θα υπολογίσουμε τις τιμές της στοχαστικής διαδικασίας  $H_n$ , τις βέλτιστες στρατηγικές (ελάχιστη και μέγιστη), τη στρατηγική αντιστάθμισης καθώς και τις τιμές της στοχαστικής διαδικασίας  $M_n$ .

Όπως είδαμε στη θεωρία το μοντέλο δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους και είναι πλήρης αν  $d < 1 + r < u$  το οποίο σημαίνει ότι  $-1/2 < r < 1$  κάτι το οποίο ισχύει.

Αρχικά, υπολογίζουμε το ισοδύναμο μέτρο *martingale*, δηλαδή

$$Q(1 + m_n = u) = \frac{1 + r - d}{u - d} = \frac{1}{3}(1 + 2r),$$

$$Q(1 + m_n = d) = \frac{2}{3}(1 - r).$$

Μετά κατασκευάζουμε το δένδρο όλων των πιθανών τιμών της μετοχής καθώς και των πιθανών τιμών της απολαβής  $X_{n,k}$  και έπειτα υπολογίζουμε τις τιμές  $H_{n,k}$ .

Έχουμε

$$\begin{aligned}H_{3,3} &= X_{3,3} = (1/2 - 8)^+ = 0, \\H_{3,2} &= X_{3,2} = (1/2 - 2)^+ = 0, \\H_{3,1} &= X_{3,1} = (1/2 - 1/2)^+ = 0, \\H_{3,0} &= X_{3,0} = (1/2 - 1/8)^+ = 3/8.\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}E_{2,2} &= \frac{1}{1+r}(qH_{3,3} + (1-q)H_{3,2}) = 0 = E_{2,1}, \\E_{2,0} &= \frac{3}{8(1+r)}(1-q) = \frac{1}{4}\left(\frac{1-r}{1+r}\right).\end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν

$$\begin{aligned}H_{2,0} &= \max\{X_{2,0}, E_{2,0}\} = 1/4, \\H_{2,1} &= H_{2,2} = 0.\end{aligned}$$

Στο χρόνο  $n = 1$  έχουμε  $X_{1,1} = E_{1,1} = H_{1,1} = 0$   
και

$$E_{1,0} = \frac{1}{1+r}(qH_{2,1} + (1-q)H_{2,0}) = \frac{1}{6}\left(\frac{1-r}{1+r}\right).$$

ρα και  $H_{1,0} = E_{1,0}$ .

Τέλος, έχουμε

$$H_{0,0} = E_{0,0} = \frac{1}{1+r}(qH_{1,1} + (1-q)H_{1,0}) = \frac{1}{9}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2.$$

Οι βέλτιστες στρατηγικές εξάσκησης δίνονται από

$$v_{min} = \begin{cases} 1, & \text{στο ενδεχόμενο } \{S_1 = S_{1,1}\} \\ 2, & \text{στο ενδεχόμενο } \{S_1 = S_{1,0}\} \end{cases}$$

και

$$v_{max} = \begin{cases} 2, & \text{στο ενδεχόμενο } \{S_2 = S_{2,0}\} \\ 3, & \text{στο ενδεχόμενο } \{S_2 \neq S_{2,0}\} \end{cases}$$

Υπολογίστε τις τιμές της  $M_n$  αφού ανακαλέσετε τις σχέσεις,

$$M_0 = H_0, \quad M_{n+1} = M_n + \tilde{H}_{n+1} - \tilde{E}_n.$$

Δηλαδή αν θέλουμε να υπολογίσουμε τις  $M^{ud}$ ,  $M^{du}$  θα έχουμε,

$$\begin{aligned} M_2^{ud} &= M_1^u + \tilde{H}_2^{ud} - \tilde{E}_1^u \\ M_2^{du} &= M_1^d + \tilde{H}_2^{du} - \tilde{E}_1^u. \end{aligned}$$

Όταν γράφουμε  $\tilde{H}_2^{ud}$  εννοούμε την τιμή  $\frac{H_{2,1}}{(1+r)^2}$  διότι βρισκόμαστε στον  $n = 2$  και άρα  $B_2 = (1+r)^2$ . Πα-

ρόμοια για την  $\tilde{E}_1$ . Σημειώστε ότι πρέπει να υπολογιστούν ξεχωριστά οι περιπτώσεις  $M_3^{dud}$ ,  $M_3^{ddu}$  διότι, εν γένει, είναι διαφορετικές ποσότητες παρόλο που οι τιμές των μετοχών καταλήγουν στο ίδιο σημείο διότι οι τιμές της  $M_n$  εξαρτώνται από το παρελθόν. Δείξτε ότι πράγματι,  $M_n = \tilde{H}_n$  για  $n \leq v_{max}$ .

Μένει να υπολογίσουμε την αντισταθμιστική στρατηγική. Ξεκινώντας, θα υπολογίσουμε τις  $a_1, b_1$  από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} a_1 S_{1,1} + b_1(1+r) &= H_{1,1}, \\ a_1 S_{1,0} + b_1(1+r) &= H_{1,0} \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι  $a_1 = -\frac{1}{4}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)$ ,  $b_1 = \frac{4r^2-17r+13}{36(1+r)^2}$ . Υπολογίστε τις υπόλοιπες.

Υποθέστε ότι ο κάτοχος του συμβολαίου κινείται στην τροχιά όπου η τιμή της μετοχής πέφτει διαρκώς και υποθέστε ότι γνωρίζει το μέλλον. Ποιος είναι ο χρόνος που θα εξασκήσει το δικαίωμα; Τι σχέση έχει με τον  $v_{max}$ ; Ποια είναι η στρατηγική επένδυσης σε αυτή την περίπτωση;

**ΑΣΚΗΣΗ 337** Θεωρείστε ένα Αμερικανικό δικαίωμα με απολαβή

$$X_n = \min \left\{ \max\{S_n, K_1\}, K_2 \right\}.$$

Τα δεδομένα μας είναι  $u = 2$ ,  $d = 1/2$ ,  $S_0 = 1$ ,  $K_1 = 1$ ,  $K_2 = 2$ ,  $r = 1/2$ ,  $N = 2$ . Να υπολογίσετε την αξία του συμβολαίου, τις βέλτιστες στρατηγικές (ελάχιστη και μέγιστη) και τη στρατηγική αντιστάθμισης. Τέλος, περιγράψτε την περίπτωση όπου ο κάτοχος του δικαιώματος εξασκήσει το δικαίωμα τη χρονική στιγμή  $n = 2$ .

**Λύση** Υπολογίζουμε το  $q = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{2}{3}$ . Στη λήξη του συμβολαίου η αξία του συμβολαίου θα πρέπει να είναι ίση με την απολαβή (θεωρητικά, αν το αγόραζε εκείνη τη στιγμή θα έπρεπε να το εξασκήσει αμέσως). Επομένως, η αξία του πρέπει να είναι ίση με την απολαβή). Δηλαδή έχουμε

$$H_2^{uu} = X_2^{uu} = 2, \quad H_2^{ud} = X_2^{ud} = 1, \quad H_2^{dd} = X_2^{dd} = 1.$$

Έπειτα υπολογίζουμε τις τιμές των  $E_n$ .

$$E_1^u = \frac{1}{1+r}(qH_2^{uu} + (1-q)H_2^{ud}) = 10/9.$$
$$E_1^d = 2/3.$$

Για τον υπολογισμό της αξίας του συμβολαίου τη χρονική στιγμή  $n = 1$  (προκειμένου να είναι καλυμμένος ο αγοραστής) πρέπει να ληφθεί υπόψη το ενδεχόμενο να εξασκήσει τη χρονική στιγμή  $n = 1$  αλλά και το ενδεχόμενο να μην εξασκήσει εκείνη τη χρονική στιγμή. Στο πρώτο ενδεχόμενο η αξία του συμβολαίου πρέπει να είναι ίση με την απολαβή ενώ στο δεύτερο πρέπει να είναι ίση με το ποσό που χρειάζεται ο πωλητής για να αντισταθμίσει το δικαίωμα στο μέλλον. Επομένως, προκύπτει ότι

$$H_1^u = \max\{X_1^u, E_1^u\} = 2,$$
$$H_1^d = \max\{X_1^d, E_1^d\} = 1.$$

Παρόμοια προκύπτει ότι  $H_0 = 10/9$ . Στη συνέχεια πρέπει να υπολογίσουμε την αντισταθμιστική στρατηγική. Αν δεν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε το χρόνο

στάσης  $v_{max}$  (μέχρι τον οποίο οι τιμές των  $\tilde{H}_n, M_n$  συμπίπτουν) θα πρέπει να υπολογίσουμε από την αρχή τις τιμές της  $M_n$  από τον αναδρομικό τύπο,

$$\begin{aligned} M_0 &= H_0, \\ M_{n+1} &= M_n + \tilde{H}_{n+1} - \tilde{E}_n. \end{aligned}$$

Δηλαδή, θα έχουμε

$$\begin{aligned} M_1^u &= M_0 + \frac{H_1^u}{1+r} - E_0, \\ M_1^d &= M_0 + \frac{H_1^d}{1+r} - E_0, \\ M_2^{uu} &= M_1^u + \frac{H_2^{uu}}{(1+r)^2} - \frac{E_1^u}{1+r}, \\ M_2^{ud} &= M_1^u + \frac{H_2^{ud}}{(1+r)^2} - \frac{E_1^u}{1+r}, \\ M_2^{du} &= M_1^d + \frac{H_2^{du}}{(1+r)^2} - \frac{E_1^d}{1+r}, \\ M_2^{dd} &= M_1^d + \frac{H_2^{dd}}{(1+r)^2} - \frac{E_1^d}{1+r}. \end{aligned}$$

Όπως είδαμε στη θεωρία (δες απόδειξη Θεωρήματος

333) πρέπει να αντισταθμίσουμε την  $M_n$  (αντισταθμίζω την  $M_n$  σημαίνει ότι κατασκευάζω χαρτοφυλάκιο η κανονικοποιημένη αξία του οποίου να είναι ίση με την  $M_n$ ). Δηλαδή,

$$\begin{aligned} a_1 \cdot 2 + b_1(1+r) &= M_1^u(1+r), \\ a_1 \cdot 1/2 + b_1(1+r) &= M_1^d(1+r). \end{aligned}$$

Δηλαδή την ημέρα της πώλησης του συμβολαίου ο πωλητής πρέπει να κατασκευάσει ένα χαρτοφυλάκιο (με  $a_1$  το πλήθος μετοχές και  $b_1$  χρήματα κατάθεση στην τράπεζα) έτσι ώστε την επόμενη χρονική περίοδο, δηλαδή την  $n = 1$  (η οποία μπορεί να είναι μια μέρα, μια εβδομάδα, ένα εξάμηνο κτλ.) το χαρτοφυλάκιο του να αξίζει όσο η τιμή της  $M_n$ . Εφόσον έχουμε δεχθεί ότι εργαζόμαστε σε ένα διωνυμικό μοντέλο οι πιθανές τιμές της  $M_n$  την επόμενη χρονική στιγμή θα είναι δυο. Έτσι φτιάχνουμε δυο εξισώσεις με δυο αγνώστους. Αρνητικές τιμές σημαίνουν δανεισμό.

Στη συνέχεια θα αναπροσαρμόσουμε το χαρτοφυλάκιο μας τη χρονική στιγμή  $n = 1$  στην περίπτωση που δεν εξασκηθεί το συμβόλαιο. Αν η μετοχή έχει

ανέβει θα πρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις,

$$\begin{aligned}a_2^u \cdot 4 + b_2^u(1+r)^2 &= M_2^{uu}(1+r)^2, \\a_2^u \cdot 1 + b_2^u(1+r)^2 &= M_2^{ud}(1+r)^2,\end{aligned}$$

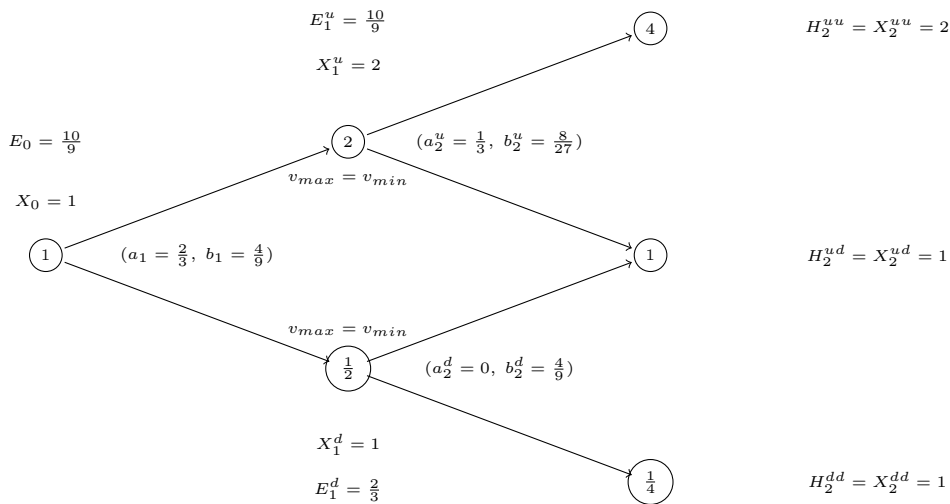
ενώ αν έχει κατέβει θα λύσουμε τις εξισώσεις,

$$\begin{aligned}a_2^d \cdot 4 + b_2^d(1+r)^2 &= M_2^{du}(1+r)^2, \\a_2^d \cdot 1 + b_2^d(1+r)^2 &= M_2^{dd}(1+r)^2.\end{aligned}$$

Μπορούμε να αποφύγουμε τον υπολογισμό των  $M_2$  σε αυτό το σημείο διότι αυτό που χρειαζόμαστε είναι να αντισταθμίσουμε την απολαβή τη χρονική στιγμή  $n = 2$  δηλαδή τις τιμές της  $X_2$ . Στην περίπτωση που δεν εξασκηθεί το δικαίωμα τη χρονική στιγμή  $n = 1$  τότε ο πωλητής έχει στο χαρτοφυλάκιό του περισσότερα χρήματα από ότι χρειάζεται για να αντισταθμίσει το δικαίωμα τη χρονική στιγμή  $n = 2$ . Έχει λοιπόν δυο επιλογές, είτε να καταναλώσει τα επιπλέον χρήματα από το χαρτοφυλάκιο και να επενδύσει τα υπόλοιπα (οπότε σε αυτή την περίπτωση θα λύσει το σύστημα με δεξί μέλος το  $\tilde{X}_2$  αντί για  $M_2$ ) είτε να τα επενδύσει όλα (οπότε σε αυτή την περίπτωση θα λύσει το παραπάνω

σύστημα).

Υπολογίστε το χρόνο  $v_{max}$  και εκτιμήστε τις πράξεις που θα εξοικονομούσατε αν χρησιμοποιούσατε το γεγονός ότι μέχρι τον  $v_{max}$  οι τιμές των  $\tilde{H}_n$  και  $M_n$  συμπίπτουν. Παρακάτω είναι το δένδρο το οποίο έχει τις τιμές της μετοχής μέσα στους κύκλους, τις απολαβές, την αξία του συμβολαίου και τη στρατηγική επένδυσης (υπολογισμένη στο χρόνο  $n = 2$  αντισταθμίζοντας την  $\tilde{X}_2$  και όχι την  $M_2$ ).



Όπως βλέπουμε στο παραπάνω δένδρο οι βέλτιστες στρατηγικές εξάσκησης  $v_{min}$ ,  $v_{max}$  συμπίπτουν στον  $n = 1$ . Επομένως, περιμένουμε οι τιμές των  $M_n, \tilde{H}_n$

να συμπίπτουν για  $n = 0, 1$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 338** Ένας επενδυτής θέλει να αγοράσει ένα Αμερικανικού τύπου συμβόλαιο αλλά δεν έχει αποφασίσει αν θα είναι συμβόλαιο αγοράς ή πώλησης. Θέλει να το αποφασίσει αυτό τη στιγμή που το εξασκήσει. Θεωρήστε τα συνήθη δεδομένα και υπολογίστε την αξία του συμβολαίου και την στρατηγική επένδυσης. Υπολογίστε τα ίδια για το αντίστοιχο συμβόλαιο Ευρωπαϊκού τύπου.

### 13 Μοντέλο Συνεχούς Χρόνου (Black - Scholes)

Υποθέτουμε ότι βρισκόμαστε σε μια αγορά, στην οποία διαπραγματευόμαστε μια μόνο μετοχή. Θα εργαστούμε σε αυτή περίπτωση (μια διάσταση δηλαδή), για να αποφύγουμε μαθηματικές δυσκολίες και να δούμε την ουσία.

Θεωρούμε ένα χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  με φίλτρο  $\mathcal{F}_t$  το οποίο παράγεται από την κίνηση Brown. Θα

δώσουμε το μαθηματικό φορμαλισμό για την περίπτωση των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων. Το μοντέλο που θα περιγράψουμε ονομάζεται μοντέλο των Black-Scholes το οποίο είναι μια προσπάθεια να αποτυπωθεί η πραγματικότητα (πώς κινούνται δηλαδή οι μετοχές). Το μοντέλο αυτό περιγράφει αρκετά καλά την κίνηση των μετοχών αλλά όχι ακριβώς. Για το λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί και άλλα μοντέλα, πιο περίπλοκα. Θα ασχοληθούμε με το μοντέλο των Black-Scholes διότι είναι απλούστερο και καταλήγει σε εύκολα υπολογίσιμες ποσότητες.

Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής κατασκευάζει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από κατάθεση σε λογαριασμό τραπεζής (ή σε ομόλογα) με εξασφαλισμένη απόδοση με ετήσιο επιτόκιο  $r$  συνεχούς ανατοκισμού. Αν υποθέσουμε ότι  $B_t$  είναι το ποσό τη χρονική στιγμή  $t$  με  $B_0 = 1$  τότε θα έχουμε  $B_t = e^{rt}$  όπου  $t$  σε πολλαπλάσια του έτους (όχι κατά ανάγκη ακέραια). Στην περίπτωση που στην επένδυση εξασφαλισμένης απόδοσης εφαρμόζεται περιοδικός ανατοκισμός (π.χ. ετήσιο επιτόκιο  $i$  μηνιαίου ανατοκισμού)

τότε είτε θα πρέπει να εργαστούμε χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο είτε να υπολογίσουμε το ισοδύναμο ετήσιο επιτόκιο  $r$  συνεχούς ανατοκισμού. Στην τελευταία αυτή περίπτωση θα αποκλίνουμε λίγο από την πραγματικότητα αφού τα τοκίζόμενα ποσά θα είναι ίσα μόνο σε πολλαπλάσια του μήνα.

Υποθέτουμε επίσης ότι η κίνηση της υποκείμενης μετοχής ακολουθεί την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση,

$$S_t = S_0 + \int_0^t m S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s$$

όπου  $\sigma \neq 0$  είναι η λεγόμενη μεταβλητότητα της μετοχής. Η λύση της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι

$$S_t = S_0 e^{\sigma W_t + (m - \sigma^2/2)t} \quad (\text{δες παράδειγμα } \color{blue}{266})$$

**ΟΡΙΣΜΟΣ 339** Μια στρατηγική επένδυσης είναι μια στοχαστική διαδικασία  $\phi = (a_t, b_t)$ , προσαρμοσμένη στο  $\mathcal{F}_t$  και τέτοιες ώστε

$$\int_0^T |a_t| dt + \int_0^T b_t^2 dt < \infty.$$

Η αξία του χαρτοφυλακίου  $\phi = (a, b)$  δίνεται από την στοχαστική διαδικασία,

$$V_t(\phi) = a_t S_t + b_t B_t$$

Δηλαδή,  $a_t$  είναι το πλήθος των μετοχών που υπάρχουν στο χαρτοφυλάκιο και  $b_t$  η παρούσα αξία (δηλαδή στον χρόνο 0) του ποσού που έχει εξασφαλισμένη απόδοση (π.χ. κατάθεση σε τράπεζα ή επένδυση σε ομόλογα).

### 13.1 Αυτοχρηματοδοτούμενη Στρατηγική Επένδυσης

**ΟΡΙΣΜΟΣ 340** Μια στρατηγική επένδυσης  $\phi = (a_t, b_t)$  ονομάζεται αυτοχρηματοδοτούμενη αν

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t b_s dB_s,$$

όπου  $dS_t = mS_t dt + \sigma S_t dW_t$  και  $dB_t = re^{rt} dt$ .

Αυτό στην πράξη σημαίνει ότι αλλαγές στην τιμή του χαρτοφυλακίου συμβαίνουν μόνο μετά από αλλαγές της τιμής της μετοχής και του ομολόγου, δηλαδή δεν προστίθενται χρήματα ούτε εξαργυρώνονται από το χαρτοφυλάκιο.

Συμβολίζουμε με  $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$  και  $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$  τις κανονικοποιημένες στοχαστικές διαδικασίες. Δηλαδή, οι κανονικοποιημένες στοχαστικές διαδικασίες είναι μετρημένες σε πολλαπλάσια του  $B_t$ , έχουν ως μονάδα μέτρησης το  $B_t$ . Κάθε μετοχή ή άλλο περιουσιακό στοιχείο που όμως έχει πάντοτε θετικές τιμές σε όλους τους χρόνους μπορεί να παίζει το ρόλο της

μονάδας μέτρησης (numeraire). Η  $B_t^{-1}$  ικανοποιεί

$$B_t^{-1} = 1 - r \int_0^t B_s^{-1} ds \quad (\text{γιατί;})$$

**ΛΗΜΜΑ 341** Για την κανονικοποιημένη  $\tilde{S}_t$  έχουμε την εξής σχέση

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + (m - r) \int_0^t \tilde{S}_s ds + \sigma \int_0^t \tilde{S}_s dW_s.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Θα χρησιμοποιήσουμε τη στοχαστική ολοκλήρωση κατά μέρη για το γινόμενο  $S_t e^{-rt}$ . Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \tilde{S}_t &= S_0 + \int_0^t (-r) S_s B_s^{-1} ds + \int_0^t S_s \cdot 0 dW_s \\ &+ \int_0^t m B_s^{-1} S_s ds + \int_0^t \sigma B_s^{-1} S_s dW_s + \int_0^t \sigma S_s \cdot 0 ds. \end{aligned}$$

□

Έχουμε την παρακάτω πρόταση που περιγράφει (και ορίζει διαφορετικά) την έννοια της αυτοχρηματοδότησης.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 342** Μια στρατηγική  $\phi = (a, b)$  είναι αυτοχρηματοδοτούμενη αν

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) + (m - r) \int_0^t a_s \tilde{S}_s ds + \sigma \int_0^t a_s \tilde{S}_s dW_s.$$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Έστω ότι είναι αυτοχρηματοδοτούμενη. Τότε

$$V_t(\phi) = V_0(\phi) + \int_0^t (ma_s S_s + rb_s e^{rs}) ds + \int_0^t \sigma a_s S_s dW_s,$$

δες Ορισμό 340. Χρησιμοποιούμε τη στοχαστική ολοκλήρωση κατά μέρη στο γινόμενο  $V_t e^{-rt}$  και έχουμε

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t = V_0 &+ \int_0^t V_s (-r) B_s^{-1} ds + \int_0^t V_s \cdot 0 dW_s \\ &+ \int_0^t B_s^{-1} (ma_s S_s + rb_s e^{rs}) ds \\ &+ \int_0^t B_s^{-1} \sigma a_s S_s dW_s + \int_0^t \sigma a_s S_s \cdot 0 ds. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το  $V_s$  από τον ορισμό φτάνουμε στο αποτέλεσμα.

Για το αντίστροφο, θα υποθέσουμε ότι το  $\tilde{V}_t$  έχει την παραπάνω μορφή και θα υπολογίσουμε (δείξτε το)

τη μορφή της  $V_t = e^{rt}\tilde{V}_t$  χρησιμοποιώντας πάλι την ολοκλήρωση κατά μέρη στο γινόμενο  $e^{rt}\tilde{V}_t$ .  $\square$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 343** Αν έχουμε αποφασίσει ποια είναι η αρχική τιμή  $V_0$  και η στοχαστική διαδικασία  $a_t$  τότε κατασκευάζουμε μια στρατηγική επένδυσης ως εξής,

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t a_s d\tilde{S}_s, \quad b_t = \frac{V_t - a_t S_t}{B_t}.$$

Όπως βλέπουμε η στρατηγική  $(a, b)$  είναι αυτοχρηματοδοτούμενη αντικαθιστώντας το  $d\tilde{S}_t = (m - r)\tilde{S}_t dt + \sigma\tilde{S}_t dW_t$ . Θυμηθείτε πώς είχαμε ορίσει το  $d\tilde{S}_t$  και ότι αυτό είναι κάτι συμβολικό, δεν έχει ορισθεί με μαθηματική αυστηρότητα.

## 13.2 Ευκαιρία Σίγουρου Κέρδους

**ΟΡΙΣΜΟΣ 344** Μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική επένδυσης  $\phi$  λέγεται ότι είναι ευκαιρία σίγουρου κέρδους (*arbitrage opportunity*) αν

$$\begin{aligned}V_0(\phi) &= 0, \\V_T(\phi) &\geq 0, \\ \mathbb{P}(V_T(\phi) > 0) &> 0 \quad (\text{ή } \mathbb{E}(V_T(\phi)) > 0)\end{aligned}$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 345** Θα κατασκευάσουμε μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική επένδυσης που αποτελεί ευκαιρία σίγουρου κέρδους. Θεωρούμε τις στοχαστικές διαδικασίες

$$B_t = 1 \quad S_t = S_0 + \int_0^t dW_s$$

Ορίζουμε την

$$I(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{T-s}} dW_s.$$

Αυτή είναι μια συνεχής και προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία στο  $[0, T)$ .

Θεωρούμε το χρόνο στάσης

$$\rho_a = \inf\{t \in [0, T] : I(t) = a\}.$$

Τέλος, κατασκευάζουμε την εξής στρατηγική επένδυσης

$$a_t = \begin{cases} (T - t)^{-1/2} S_t^{-1} \mathbb{I}_{\{t \leq \rho_a\}}, & \text{στο } N \\ 0, & \text{στο } N^c \end{cases}$$

$$b_t = \begin{cases} I(t \wedge \rho_a) - a_t S_t, & \text{στο } N \\ 0, & \text{στο } N^c \end{cases}$$

όπου  $N$  είναι το ενδεχόμενο μηδενικής πιθανότητας  $\{\rho_a \geq T\}$ . Μπορούμε να δείξουμε ότι η  $\phi = (a_t, b_t)$  είναι μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική επένδυσης και μάλιστα

$$V_t(\phi) = \int_0^t a_s S_s dW_s.$$

Επίσης,  $V_0(\phi) = 0$  και  $V_T(\phi) = I(\rho_a) = a > 0$  άρα η  $\phi$  είναι μια ευκαιρία σίγουρου κέρδους.

### 13.3 Ισοδύναμο Μέτρο Martingale

**ΟΡΙΣΜΟΣ 346** Ένα ισοδύναμο *martingale* μέτρο για τη στοχαστική διαδικασία  $X_t$  είναι ένα μέτρο  $P^*$  ορισμένο στο μετρήσιμο χώρο  $(\Omega, \mathcal{F})$  τ.ω. τα  $P, P^*$  είναι ισοδύναμα και η  $X_t$  είναι *martingale* κάτω από το  $P^*$ .

Σημαντικό το επόμενο θεώρημα.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 347** Υπάρχει ισοδύναμο μέτρο  $P^*$  για την  $\tilde{S}_t$ .

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Ας θυμηθούμε τη σχέση που ικανοποιεί η  $\tilde{S}_t$ .

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + (m - r) \int_0^t \tilde{S}_s ds + \sigma \int_0^t \tilde{S}_s dW_s.$$

Χρησιμοποιώντας το παράδειγμα 288 και διαλέγοντας  $H(t) = \frac{m-r}{\sigma}$  διαπιστώνουμε ότι η  $\tilde{S}_t$  ικανοποιεί τη σχέση

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + \int_0^t \sigma \tilde{S}_s d\hat{W}_s$$

όπου  $\hat{W}_t = W_t + \frac{(m-r)t}{\sigma}$  η οποία είναι επίσης κίνηση Brown στο νέο μέτρο  $P^*$ . Από το θεώρημα 272 (δες και παράδειγμα 266) έχουμε ότι η  $\tilde{S}_t$  έχει φραγμένες ροπές όλων των τάξεων επομένως παίρνοντας δεσμευμένη μέση τιμή της παραπάνω σχέσης δεδομένης της  $\mathcal{F}_s$  και χρησιμοποιώντας την κατάλληλη ιδιότητα (ιδιότητα martingale) του στοχαστικού ολοκληρώματος έχουμε ότι η  $\tilde{S}_t$  είναι martingale κάτω από το μέτρο  $P^*$ .  $\square$

**ΑΣΚΗΣΗ 348** Υπάρχει ισοδύναμο μέτρο martingale για την  $\tilde{V}_t$ ; Ποια είναι η σχέση του με το ισοδύναμο μέτρο martingale για την  $\tilde{S}_t$ ; Είναι άραγε μοναδικό;

**ΟΡΙΣΜΟΣ 349** Μια αποδεκτή στρατηγική είναι μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική επένδυσης  $\phi$  τ.ω. η  $\tilde{V}_t$  είναι μη αρνητική και τέτοια ώστε

$$\mathbb{E}_{P^*} \left( \sup_{t \in [0, T]} \tilde{V}_t \right)^2 < \infty$$

### 13.4 Θεμελιώδη θεωρήματα Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

Θα αφήσουμε για λίγο το μοντέλο των Black-Scholes και θα δώσουμε δυο αποτελέσματα που μπορούν να εφαρμοστούν σε κάθε μοντέλο αγοράς. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η αγορά μας αποτελείται από μια μετοχή της οποίας η τιμή στο χρόνο  $t$  είναι  $S_t$ . Δεν υποθέτουμε ότι ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown κατά ανάγκη. Επίσης, η αγορά μας επιτρέπει την κατάθεση ή το δανεισμό σε/από τράπεζα με επιτόκιο  $r$ . Το χαρτοφυλάκιό μας θα είναι

$$V_t = a_t S_t + b_t B_t$$

όπου  $a_t$  είναι ο αριθμός των μετοχών που έχουμε στο χρόνο  $t$ ,  $b_t$  είναι το ποσό των χρημάτων στην τράπεζα και  $B_t = e^{rt}$ , δηλαδή υποθέτουμε συνεχή ανατοκισμό. Με  $\tilde{V}_t = e^{-rt} V_t$  συμβολίζουμε την κανονικοποιημένη τιμή του χαρτοφυλακίου.

Εργαζόμαστε στο χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  μαζί με το φυσικό φιλτράρισμα  $\mathcal{F}_t$  που παράγεται από την κίνηση Brown. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 350 (Πρώτο θεμελιώδες θεώρημα)**

Αν για ένα μοντέλο αγοράς υπάρχει ισοδύναμο μέτρο *martingale* για την  $\tilde{V}_t$  τότε το μοντέλο αγοράς δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Όπως έχουμε δει, αν υπάρχει τέτοιο ισοδύναμο μέτρο  $Q$  τότε η κανονικοποιημένη τιμή του χαρτοφυλακίου  $\tilde{V}_t$  είναι *martingale* (δες ορισμό 346). Αυτό σημαίνει ότι  $\mathbb{E}_Q(\tilde{V}_T) = V_0$ . Έστω λοιπόν ένα χαρτοφυλάκιο με  $V_0 = 0$ . Τότε και  $\mathbb{E}_Q(\tilde{V}_T) = 0$ . Ας υποθέσουμε ότι

$$P(\{\tilde{V}_T < 0\}) = 0$$

Αφού το  $Q$  είναι ισοδύναμο με το  $P$  τότε και

$$Q(\{\tilde{V}_T < 0\}) = 0$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι και

$$Q(\{\tilde{V}_T > 0\}) = 0$$

αφού  $\mathbb{E}_Q(\tilde{V}_T) = 0$ . Πράγματι, ισχύει ότι

$$Q(\{\tilde{V}_T > 0\}) = Q\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\tilde{V}_T > \frac{1}{n}\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q\left(\{\tilde{V}_T > \frac{1}{n}\}\right) = 0$$

αφού

$$Q\left(\{\tilde{V}_T > \frac{1}{n}\}\right) \leq n\mathbb{E}(\tilde{V}_T) = 0$$

Χρησιμοποιώντας πάλι την ισοδυναμία των μέτρων προκύπτει ότι και

$$P(\{\tilde{V}_T > 0\}) = 0$$

το οποίο βέβαια σημαίνει ότι  $P(\{V_T = 0\}) = 1$   $\square$

**ΑΣΚΗΣΗ 351** Αποδείξτε ότι το μοντέλο των *Black-Scholes* δεν περιέχει ευκαιρίες σήγουρου κέρδους.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 352** Ένα μοντέλο αγοράς θα ονομάζεται πλήρες αν κάθε παράγωγο μπορεί να αντισταθμιστεί.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 353 (Δεύτερο θεμελιώδες θεώρημα)**

Έστω ένα μοντέλο αγοράς για το οποίο υπάρχει ισοδύναμο μέτρο martingale για την  $\tilde{V}_t$ . Αν το μοντέλο είναι πλήρες τότε το ισοδύναμο μέτρο είναι μοναδικό.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Υποθέτουμε ότι το μοντέλο είναι πλήρες και θα δείξουμε ότι υπάρχει αναγκαστικά μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale για την  $\tilde{V}_t$ . Έστω ότι υπάρχουν δυο ισοδύναμα μέτρα, τα  $Q_1, Q_2$ . Έστω ένα ενδεχόμενο  $A \in \mathcal{F} = \mathcal{F}_T$  και έστω  $X = \mathbb{I}_A e^{rT}$  (άρα η  $X$  είναι  $\mathcal{F}_T$ -μετρήσιμη). Αφού έχουμε υποθέσει ότι το μοντέλο είναι πλήρες τότε υπάρχει χαρτοφυλάκιο τ.ω.  $V_T = X$ . Αφού  $Q_1, Q_2$  είναι και τα δυο ισοδύναμα μέτρα martingale τότε η κανονικοποιημένη  $\tilde{V}_t$  θα είναι martingale κάτω και από τα δυο μέτρα. Επομένως,  
$$Q_1(A) = \mathbb{E}_{Q_1}(e^{-rT} X) = \mathbb{E}_{Q_1}(e^{-rT} V_T) = V_0 = Q_2(A)$$
Αφού το  $A \in \mathcal{F}$  είναι τυχαία επιλεγμένο τότε αναγκαστικά  $Q_1 = Q_2$ .  $\square$

Έχουμε δώσει απλοποιημένες μορφές των θεμελιω-

δών θεωρημάτων, για περαιτέρω πληροφορίες παραπέμπουμε στο [;].

### 13.5 Ευρωπαϊκά Δικαιώματα

**ΟΡΙΣΜΟΣ 354** (Ευρωπαϊκό δικαίωμα) Ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα (*European contingent claim*) αντιπροσωπεύεται από μια  $\mathcal{F}_T$ -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή  $X$ . Μια στρατηγική αντιστάθμισης (*hedging strategy*) για ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα  $X$  είναι μια αποδεκτή στρατηγική  $\phi$  τ.ω.  $V_T(\phi) = X$ .

### ΘΕΩΡΗΜΑ 355 (Θεώρημα Αναπαράστασης Martingale)

Έστω  $M_t$  είναι μια συνεχής και τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale κάτω από το μέτρο  $P^*$ . Τότε υπάρχει μια  $\mathcal{B}_T \times \mathcal{F}_T$ -μετρήσιμη και προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία  $\eta_t$  τ.ω.  $\int_0^T \eta_s^2 ds < \infty$  σχεδόν βέβαια και

$$M_t = M_0 + \int_0^t \eta_s d\tilde{W}_s,$$

όπου  $\tilde{W}_t$  κίνηση Brown στο χώρο πιθανότητας με φίλτρο  $(\Omega, \mathcal{F}, P^*, \mathcal{F}_t)$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 356** Ένα οποιοδήποτε δικαίωμα που ορίζεται μέσω μιας  $\mathcal{F}_T$  τυχαίας μεταβλητής  $X$  τ.ω.  $\mathbb{E}_{P^*} X^2 < \infty$  μπορεί να αντισταθμιστεί από μια στρατηγική επένδυσης (η οποία είναι μοναδική) και η τιμή του χαρτοφυλακίου τη στιγμή  $t$  θα δίνεται από

$$V_t = \mathbb{E}_{P^*} \left( e^{-r(T-t)} X | \mathcal{F}_t \right)$$

Επομένως και η τιμή του δικαιώματος θα πρέπει να είναι (τουλάχιστον) ίση με την παραπάνω έκφραση προκειμένου να μπορεί να καλύψει ο πωλητής τον αγοραστή σε οποιαδήποτε περίπτωση.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Υποθέτουμε αρχικά ότι υπάρχει μια αποδεκτή στρατηγική επένδυσης  $\phi = (a_t, b_t)$  που αντισταθμίζει το δικαίωμα. Η κανονικοποιημένη τιμή στο χρόνο  $t$  του χαρτοφυλακίου είναι

$$\tilde{V}_t = a_t \tilde{S}_t + b_t$$

και εφόσον είναι αυτοχρηματοδοτούμενη (δες Πρόταση

342 και αντικατέστησε το  $W_t = \hat{W}_t - \frac{m-r}{\sigma}t$ ) προκύπτει ότι

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \sigma a_s \tilde{S}_s d\hat{W}_s.$$

Επομένως, παίρνοντας δεσμευμένη μέση και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η  $\tilde{V}_t$  είναι martingale κάτω από το  $P^*$ , προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}_{P^*}(\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t) = \tilde{V}_t = V_t e^{-rt}$$

Όμως

$$\mathbb{E}_{P^*}(\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{P^*}(e^{-rT} X | \mathcal{F}_t)$$

Οπότε

$$V_t = \mathbb{E}_{P^*}(e^{-r(T-t)} X | \mathcal{F}_t)$$

Πρέπει να δείξουμε όμως ότι υπάρχει αντισταθμιστική στρατηγική επένδυσης. Για το λόγο αυτό παρατηρούμε ότι κάτω από το μέτρο  $P^*$  η στοχαστική διαδικασία

$$M_t = \mathbb{E}_{P^*}(e^{-rT} X | \mathcal{F}_t)$$

είναι μια τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale. Πράγματι, για  $s < t$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{P^*}(M_t|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}_{P^*}(\mathbb{E}_{P^*}(e^{-rT}X|\mathcal{F}_t)) \\ &= \mathbb{E}_{P^*}(e^{-rT}X|\mathcal{F}_s) \\ &= M_s\end{aligned}$$

Από το θεώρημα αναπαράστασης των martingale έχουμε ότι υπάρχει μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία  $k_t$  τ.ω.  $\mathbb{E}_{P^*}\left(\int_0^T k_s^2 ds\right) < +\infty$  και

$$M_t = M_0 + \int_0^t k_s d\tilde{W}_s, \quad t \in [0, T]$$

Ορίζουμε τη στρατηγική επένδυσης  $a_t = \frac{k_t}{\sigma \tilde{S}_t}$  και  $b_t = M_t - a_t \tilde{S}_t$  (οπότε  $M_t = a_t \tilde{S}_t + b_t$ ) η οποία είναι αυτοχρηματοδοτούμενη (διότι αντικαθιστώντας το  $k_t$  στο στοχαστικό ολοκλήρωμα βλέπουμε ότι η  $M_t$  ικανοποιεί την ανάλογη σχέση για να είναι αυτοχρηματοδοτούμενη) και η τιμή του χαρτοφυλακίου δίνεται από

$$e^{rt}(a_t \tilde{S}_t + b_t) = e^{rt} M_t = \mathbb{E}_{P^*}\left(e^{-r(T-t)} X | \mathcal{F}_t\right) = V_t$$

Τέλος, θα δείξουμε ότι είναι και μοναδική. Πράγματι, έστω  $(\hat{a}_s, \hat{b}_s)$  μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική αντιστάθμισης. Τότε

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \sigma \hat{a}_s \tilde{S} d\hat{W}_s,$$

και επομένως

$$\int_0^t \sigma (a_s - \hat{a}_s) \tilde{S}_s d\hat{W}_s = 0.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο, παίρνοντας μέση τιμή και χρησιμοποιώντας την ισομετρία του Ito καταλήγουμε στο ότι το ολοκλήρωμα μιας μη αρνητικής ποσότητας είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι  $a_s = \hat{a}_s$  σβ. και επομένως και  $b_s = \hat{b}_s$  σβ.  $\square$

**ΑΣΚΗΣΗ 357** Αποδείξτε ότι το ισοδύναμο μέτρο *martingale* για την  $\tilde{V}_t$  στο μοντέλο *Black-Scholes* είναι μοναδικό.

13.5.1 Υπολογισμός Αξίας Δικαιώματος Αγοράς και Πώλησης

**ΘΕΩΡΗΜΑ 358** Έστω  $X, Y$  δυο τ.μ. όπου η  $Y$  είναι ανεξάρτητη από την  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{G}$  ενώ η  $X$  είναι  $\mathcal{G}$ -μετρήσιμη τότε για κάθε μη αρνητική ή φραγμένη Borel συνάρτηση  $\Phi$  η συνάρτηση που ορίζεται ως

$$\phi(x) = \mathbb{E}(\Phi(x, Y))$$

είναι συνάρτηση Borel και

$$\mathbb{E}(\Phi(X, Y)|\mathcal{G}) = \phi(X).$$

Αν υποθέσουμε ότι  $X = f(S_T)$  θα εκφράσουμε την  $V_t$  σε σχέση με τα  $t, S_t$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} V_t &= \mathbb{E}_{P^*} \left( e^{-r(T-t)} f(S_T) | \mathcal{F}_t \right) \\ &= \mathbb{E}_{P^*} \left( e^{-r(T-t)} f(S_t e^{r(T-t)} e^{\sigma(\hat{W}_T - \hat{W}_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}) | \mathcal{F}_t \right) \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει διαιρώντας τις δυο επόμενες και λύνοντας ως προς  $S_T$ .

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 e^{\sigma W_t + (m - \frac{\sigma^2}{2})t}, \\ S_T &= S_0 e^{\sigma W_T + (m - \frac{\sigma^2}{2})T} \end{aligned}$$

Επομένως, και αφού θυμηθούμε ότι,  $\hat{W}_t = W_t + \frac{m-r}{\sigma}t$ , παίρνουμε την παραπάνω σχέση.

Αφού η  $S_t$  είναι προσαρμοσμένη ενώ η  $\hat{W}_T - \hat{W}_t$  είναι ανεξάρτητη από την  $\mathcal{F}_t$  τότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα 358 έχουμε ότι

$$V_t = F(t, S_t)$$

όπου

$$F(t, x) = \mathbb{E}_{P^*} \left( e^{-r(T-t)} f(xe^{r(T-t)} e^{\sigma(\hat{W}_T - \hat{W}_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}) \right)$$

Οπότε, γνωρίζοντας την πυκνότητα της  $\hat{W}_T - \hat{W}_t$  και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών  $z = \frac{y}{\sqrt{T-t}}$  προκύπτει

$$F(t, x) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f \left( x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma z \sqrt{T-t}} \right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Συγκεκριμένα, αν  $f(x) = (x - K)_+$ , δηλαδή έχουμε

ένα δικαίωμα αγοράς, τότε αν θέσουμε

$$l_t(x) = \frac{\ln \frac{K}{x} - r(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

προκύπτει ότι, κάνοντας και την αλλαγή μεταβλητής  $u = z - \sigma\sqrt{T-t}$ ,

$$F(t, x) = x\Phi\left(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t}\right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(-l_t(x)) \text{ (call)}$$

Δείξτε τα παραπάνω με κάθε λεπτομέρεια. ΄ρα η τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς είναι

$$V_0 = F(0, S_0)$$

Παρατηρούμε ότι όλα είναι γνωστά στην παραπάνω σχέση εκτός από τη μεταβλητότητα της μετοχής  $\sigma$ , η οποία μπορεί να προσεγγισθεί με ιστορικά δεδομένα ή και με άλλους τρόπους (implied volatility).

Κάνοντας τους ίδιους συλλογισμούς και διαλέγο-

ντας  $f(x) = (K - x)_+$  έχουμε την τιμή του Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης η οποία είναι

$$F(t, x) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(l_t(x)) - x\Phi\left(l_t(x) - \sigma\sqrt{T-t}\right) \quad (\text{put})$$

Ως άσκηση, δείξτε την αναλογία αγοράς - πώλησης (put-call parity) γνωρίζοντας τις εκφράσεις των αντίστοιχων τιμών.

### 13.5.2 Κατασκευή χαρτοφυλακίου αντιστάθμισης

Έχουμε δείξει ότι η αξία του κανονικοποιημένου χαρτοφυλακίου θα πρέπει κάθε χρονική στιγμή να είναι ίση με

$$\tilde{V}_t = e^{-rt}F(t, S_t) = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t)$$

όπου  $\tilde{F}(t, x) = e^{-rt}F(t, xe^{rt})$ . Θα εφαρμόσουμε τη φόρμουλα του Ito στην  $\tilde{V}_t$  σημειώνοντας ότι

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_0 + \int_0^t \sigma \tilde{S}_s d\hat{W}_s.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\tilde{F}(t, \tilde{S}_t) &= \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) \\ &+ \int_0^t \left( \tilde{F}_t(s, \tilde{S}_s) + \tilde{F}_x(s, \tilde{S}_s) \cdot 0 + \frac{\sigma^2}{2} \tilde{F}_{xx}(s, \tilde{S}_s) \tilde{S}_s^2 \right) ds \\ &+ \int_0^t \sigma \tilde{F}_x(s, \tilde{S}_s) \tilde{S}_s d\hat{W}_s.\end{aligned}$$

Όμως η  $\tilde{V}_t$  είναι martingale και αυτό σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα ως προς  $ds$  θα πρέπει να είναι μηδέν το οποίο προκύπτει από τη μοναδικότητα της ανάλυσης κατά Doob-Meyer (Doob-Meyer decomposition).

Επομένως,

$$\tilde{F}(t, \tilde{S}_t) = \tilde{F}(0, \tilde{S}_0) + \int_0^t \sigma \tilde{F}_x(s, \tilde{S}_s) \tilde{S}_s d\hat{W}_s.$$

Ήρα είναι προφανές (δες απόδειξη θεωρήματος 356) ότι θα πρέπει να επιλέξουμε ως  $a_t = \tilde{F}_x(t, \tilde{S}_t) = e^{-rt} F_x(t, \tilde{S}_t)$  και ως  $b_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) - a_t \tilde{S}_t$ . Διαπιστώνουμε ότι το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$F_x(t, x) = \Phi \left( -l_t(x) + \sigma \sqrt{T - t} \right)$$

Πράγματι,

$$F_x(t, x) = \Phi \left( -l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t} \right) + x\Phi' \left( -l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t} \right) - Ke^{-r(T-t)}\Phi'(-l_t(x))$$

Δείξτε ότι

$$\ln \frac{x\Phi'(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t})}{Ke^{-r(T-t)}\Phi'(-l_t(x))} = 0,$$

και έπειτα ότι

$$x\Phi'(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi'(-l_t(x)) = 0.$$

**Πρακτικό Συμπέρασμα** Έστω ότι είστε ο πωλητής ενός δικαιώματος αγοράς ή πώλησης. Ο αγοραστής θα σας ζητήσει ένα συμβόλαιο με λήξη στο χρόνο  $T$  και τιμή εξάσκησης  $K$ . Εσείς, θα πρέπει σε πρώτη φάση να αποτιμήσετε αυτό το συμβόλαιο. Αν υποθέσουμε ότι γνωρίζετε τη μεταβλητότητα της μετοχής (θα δούμε παρακάτω έναν τρόπο πιθανού υπολογισμού της) τότε η τιμή του συμβολαίου (σύμφωνα με το μοντέλο των Black-Scholes) θα είναι

$$V_0 = F(0, S_0).$$

Η  $S_0$  είναι η τιμή της μετοχής σήμερα, δηλαδή την ημέρα που υπογράφουμε το συμβόλαιο, άρα είναι γνωστή (την βλέπουμε στο διαδίκτυο). Αν έχουμε να υπολογίσουμε την τιμή ενός συμβολαίου αγοράς θα αντικαταστήσουμε στον ανάλογο τύπο (δες call) ενώ αν έχουμε να υπολογίσουμε την τιμή ενός συμβολαίου πώλησης θα αντικαταστήσουμε στον άλλο τύπο (δες put).

Το επόμενο που πρέπει να κάνει ο πωλητής, προκειμένου να αντισταθμίσει το δικαίωμα, είναι να προσαρμόζει καθημερινά το χαρτοφυλάκιό του. Δηλαδή, καθημερινά θα πρέπει να έχει  $a_t$  μετοχές στην κατοχή του και  $b_t$  χρήματα (όπου  $b_t$  είναι η παρούσα αξία, δηλαδή στο χρόνο μηδέν) στην τράπεζα (αρνητικά πρόσημα επιτρέπονται και σημαίνουν δανεισμό). Ο αριθμός των μετοχών θα είναι  $a_t = \tilde{F}_x(t, \tilde{S}_t)$  ενώ τα χρήματα στην τράπεζα θα είναι  $b_t = \tilde{F}(t, \tilde{S}_t) - a_t \tilde{S}_t$ . Προσοχή εδώ η  $F$  είναι διαφορετική για το δικαίωμα αγοράς και διαφορετική για το δικαίωμα πώλησης επομένως η στρατηγική θα είναι διαφορετική από συμβόλαιο σε συμβόλαιο. Κατασκευάστε έναν αλγόριθμο χρησιμοποιώντας μαθηματικό λογισμικό για να υπολογίζετε την αξία των

συμβολαίων. Σε αυτό το πρόγραμμα θα δίνετε (input) τα  $K, T, r, S_0, \sigma, put, call$  και θα επιστρέφει (output) την τιμή του κάθε συμβολαίου. Επίσης, κατασκευάστε αλγόριθμο που θα δίνει τη στρατηγική επένδυσης που πρέπει να ακολουθεί ο πωλητής.

Ξαναγυρνώντας στο μοντέλο των Black-Scholes βλέπουμε ότι ικανοποιεί και τα δυο θεμελιώδη θεωρήματα των χρηματοοικονομικών μαθηματικών και άρα δεν περιέχει ευκαιρίες σίγουρου κέρδους και επίσης, αφού έχουμε δείξει ότι είναι πλήρες προκύπτει ότι το ισοδύναμο μέτρο martingale είναι μοναδικό.

**Συμπέρασμα και σχόλια**  $A_S$  υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε σε μια πλήρη αγορά με απουσία ευκαιριών σίγουρου κέρδους. Έστω ότι μια τράπεζα πουλάει σε έναν ιδιώτη (στην εξωχρηματιστηριακή αγορά) ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης και το κόστος του συμβολαίου είναι (τουλάχιστον) όπως υπολογίσαμε παραπάνω, τέτοιο ώστε να είναι ικανό να καλύψει το συμβόλαιο αν εξασκηθεί. Υπάρχει κάποια περίπτωση να χάσει χρήματα η τράπεζα με αυτή την κίνηση; Η απάντηση είναι όχι. ΄ρα είτε θα είναι στα λεφτά της είτε θα κερδίσει

κάποιο ποσό (ποιο είναι το μέγιστο;) Αυτό συνιστά ευκαιρία σίγουρου κέρδους; Όχι, διότι αυτό που πουλά η τράπεζα σε αυτή την τιμή είναι «προϊόν» και σαν τέτοιο έχει πάντα κέρδος. Ας το εξηγήσουμε και με μαθηματικούς όρους. Έχουμε υποθέσει ότι η αγορά μας αποτελείται από κατάθεση σε τράπεζα (με εξασφαλισμένη απόδοση) και από μια μετοχή η οποία υποθέσαμε ότι ακολουθεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση. Στον ορισμό της ευκαιρίας σίγουρου κέρδους αναφερόμαστε σε μια στρατηγική που αποτελείται από κατάθεση σε τράπεζα και αγορά μετοχής. Στην αγορά δεν ανήκει το συμβόλαιο άρα δεν επηρεάζεται έτσι από την οποιαδήποτε τιμή δώσουμε στο συμβόλαιο. Αν προσπαθήσουμε να ενσωματώσουμε το συμβόλαιο στην αγορά, θα είμαστε υποχρεωμένοι να δεχτούμε ότι η τιμή του ακολουθεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση. Αν δεν το δεχτούμε αυτό τότε θα πρέπει να αλλάξουμε το μοντέλο το οποίο θα περιλαμβάνει τώρα επιπλέον και μια άλλη ποσότητα που δεν ακολουθεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση αλλά ούτε είναι κατάθεση σε τράπεζα. Οπότε αντίστοιχα θα πρέπει να αλλάξει και ο ορισμός της ευ-

καιρίας σίγουρου κέρδους καθώς και όλα τα υπόλοιπα που στηρίζονται σε αυτόν τον ορισμό.

Υπάρχουν όμως και άλλα μοντέλα (που περιγράφουν ίσως καλύτερα την πραγματικότητα). Ως παράδειγμα μπορούμε να δούμε το μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας του *Heston* (*Heston stochastic volatility model*) στο οποίο υποθέτουμε ότι η μεταβλητότητα δεν είναι σταθερή (το οποίο πράγματι συμβαίνει) και ακολουθεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση. Αυτό το μοντέλο ίσως περιγράφει καλύτερα την πραγματικότητα αλλά το σίγουρο είναι ότι προσθέτει προβλήματα μαθηματικής φύσεως. Το πλεονέκτημα του μοντέλου *Black-Scholes* είναι ότι μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορες ποσότητες άμεσα. Υπάρχουν και άλλα μοντέλα, αν αντικαταστήσουμε για παράδειγμα την κίνηση *Brown* με μια άλλη στοχαστική διαδικασία (*Jump process*). Όμως και εκεί τα μαθηματικά προβλήματα είναι επίσης μεγάλα.

Ο κάθε πωλητής (*writer*) ενός συμβολαίου επιλέγει να κοστολογήσει το προϊόν του με βάση κάποιο μοντέλο ή ακόμη και εμπειρικά (παίρνοντας το αντίστοιχο

ρίσκο αφού δεν γνωρίζουμε κάποιο μοντέλο που περιγράφει ακριβώς την πραγματικότητα). ΄ρα οι τιμές, για το ίδιο προϊόν, είναι διαφορετικές και εξαρτώμενες από τον τρόπο κοστολόγησης. Ο αγοραστής από την άλλη, ίσως, να επιλέξει το φθηνότερο πωλητή (ίσως διότι εξαρτάται και από την αξιοπιστία του κάθε πωλητή).

Ας υποθέσουμε τώρα, ότι η τιμή του συμβολαίου είναι  $V_0$  χρησιμοποιώντας κάποιο από τα γνωστά μοντέλα. Εφόσον, αυτή η τιμή δεν είναι ακριβώς η σωστή, και αν υποθέσουμε ότι η σωστή είναι  $G_0 < V_0$  τότε υπάρχει η πιθανότητα η μετοχή να ξεπεράσει την τιμή εξάσκησης (οπότε ο αγοραστής του δικαιώματος είναι κερδισμένος) και ταυτόχρονα ο πωλητής έχοντας πάρει περισσότερα από ότι χρειαζόταν τελικά να καταλήξει επίσης με κέρδος. Δηλαδή, σε αυτήν τη περίπτωση είναι και οι δυο κερδισμένοι. Αν όμως  $V_0 < G_0$  τότε υπάρχει περίπτωση ο πωλητής να χάσει όταν (και αν) ο αγοραστής εξασκήσει το δικαίωμα.

Ξαναγυρνώντας στο μοντέλο των *Black-Scholes* διαπιστώνουμε ότι (θεωρητικά) το κέρδος του αγοραστή

θα προέλθει από την αγορά (και όχι από την τράπεζα) ενώ αν χάσει χρήματα αυτά πάλι στην αγορά θα καταλήξουν επομένως είναι ένα «παιχνίδι» μεταξύ του αγοραστή και της υπόλοιπης αγοράς και όχι μεταξύ αγοραστή και πωλητή.

Ας ξαναδούμε την αναλογία αγοράς - πώλησης. Δείξαμε, κάτω από το μοντέλο *Black-Scholes*, ότι οι τιμές πώλησης και αγοράς ικανοποιούν αυτήν τη σχέση. Τι συμβαίνει στην πραγματικότητα; Η σχέση αυτή καθημερινά διαταράσσεται και οι επενδυτές προβαίνουν σε αντίστοιχες κινήσεις για να αποκομίσουν κέρδος με συνέπεια να ξαναγυρνά σε (σχεδόν) ισότητα. Στην πραγματικότητα όμως λόγω ύπαρξης κόστους συναλλαγών δεν συμφέρει τους επενδυτές να κινηθούν στην κατεύθυνση της διόρθωσης αυτής της αναλογίας διότι θα χάσουν περισσότερα από ότι θα κερδίσουν τελικά, όταν τα δυο μέλη της ανισότητας είναι πολύ κοντά. Αυτό που εμείς δείξαμε είναι ότι αν κάποιος πωλητής κοστολογήσει και το δικαίωμα αγοράς και το δικαίωμα πώλησης με βάση το μοντέλο των *Black-Scholes* τότε οι δυο αυτές τιμές θα ικανοποιούν την αναλογία αγο-

ράς - πώλησης. Αυτό στην πράξη βέβαια δεν συμβαίνει (π.χ. στην εξωχρηματιστηριακή αγορά (over the counter), διότι υπάρχει και η καλά οργανωμένη χρηματιστηριακή αγορά παραγώγων π.χ. *Chicago Board Options Exchange*) διότι ο πωλητής *A* θα κοστολογήσει το δικαίωμα αγοράς σε κάποια τιμή χρησιμοποιώντας (ή όχι) κάποιο μοντέλο και ο πωλητής *B* θα κοστολογήσει το δικαίωμα πώλησης (πάνω στην ίδια μετοχή βέβαια) χρησιμοποιώντας άλλο μοντέλο ή άλλον τρόπο ή θα εκτιμήσει με διαφορετικό τρόπο την μεταβλητότητα της μετοχής (με ιστορικά δεδομένα ή συνεπαγόμενη μεταβλητότητα ή οτιδήποτε άλλο). Αυτές οι δυο τιμές σίγουρα δεν ικανοποιούν την αναλογία αγοράς - πώλησης.

Δώστε παραδείγματα στα οποία να περιγράφετε τους λόγους που ο αγοραστής χρειάζεται συμβόλαιο αγοράς ή πώλησης και τι πρόκειται να κερδίσει με αυτή την κίνηση. Αντίστοιχα, δώστε παραδείγματα στα οποία να περιγράφετε λόγους που κάποιος θα θέλει να είναι ο πωλητής ενός συμβολαίου. Τέλος, σκεφτείτε τις διαφορές μεταξύ ενός συμβολαίου το οποίο είναι υπό διαπραγ-

μάτευση στο χρηματιστήριο και του ιδίου τύπου συμβολαίου το οποίο πωλείται (ως ένα προϊόν χρηματιστηριακής εταιρείας) στην εξωχρηματιστηριακή αγορά. Τι συμβαίνει όσον αφορά την τιμή πώλησης;

### 13.6 Αμερικανικά Δικαιώματα

Όπως έχουμε πει τα λεγόμενα Αμερικανικά δικαιώματα διαφέρουν στο (πολύ σημαντικό) σημείο ότι ο κάτοχος του δικαιώματος μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα ανά πάσα στιγμή μέχρι το τέλος της χρονικής περιόδου. Θα δούμε, στην απλή περίπτωση που δεν καταβάλλονται μερίσματα, ότι η τιμή του Αμερικανικού δικαιώματος αγοράς συμπίπτει με του Ευρωπαϊκού ενώ η τιμή του δικαιώματος πώλησης είναι διαφορετική (μεγαλύτερη).

**ΟΡΙΣΜΟΣ 359** *Μια στρατηγική επένδυσης είναι μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία  $\phi = (a_t, b_t)$  με*

τις εξής ιδιότητες

$$i) \int_0^T |a_t| dt + \int_0^T b_t^2 ds < \infty$$

$$ii) a_t S_t + b_t B_t = a_0 S_0 + b_0 B_0 + \int_0^t b_s dB_s + \int_0^t a_s dS_s$$

(αυτοχρηματοδοτούμενη)

**ΟΡΙΣΜΟΣ 360** Ένα Αμερικανικό δικαίωμα είναι μια προσαρμοσμένη στοχαστική διαδικασία  $h_t$ .

Θα υποθέτουμε, για ευκολία, ότι  $h_t = \psi(S_t)$  για μια συνεχή συνάρτηση  $\psi$  τ.ω.  $\psi(x) \leq A + Bx$  για κάθε  $x \geq 0$ .

**ΟΡΙΣΜΟΣ 361** Θα λέμε ότι μια στρατηγική επένδυσης  $\phi$  αντισταθμίζει το Αμερικανικό δικαίωμα αν θέτοντας  $V_t(\phi) = a_t S_t + b_t B_t$  έχουμε

$$V_t(\phi) \geq \psi(S_t).$$

Συμβολίζουμε με  $\Phi^\psi$  το σύνολο των στρατηγικών επένδυσης οι οποίες αντισταθμίζουν το Αμερικανικό δικαίωμα  $h_t = \psi(S_t)$ .

**ΘΕΩΡΗΜΑ 362** Έστω  $u(t, x)$  η συνάρτηση που ορίζεται ως εξής

$$u(t, x) = \sup_{\rho \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_Q \left( e^{-r(\rho-t)} \psi(x e^{\sigma(\hat{W}_\rho - \hat{W}_t) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(\rho-t)}) \right),$$

όπου  $\mathcal{T}_{t,T}$  είναι το σύνολο των χρόνων στάσης στο  $[t, T]$ . Υπάρχει μια στρατηγική  $\hat{\phi} \in \Phi^\psi$  τ.ω.  $V_t(\hat{\phi}) = u(t, S_t)$ . Επιπλέον, για κάθε στρατηγική  $\phi \in \Phi^\psi$  έχουμε  $V_t(\phi) \geq u(t, S_t)$ .

Θυμηθείτε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση  $F(t, x)$  για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα είναι ίδια αν αντικαταστήσουμε το  $\rho$  με το  $T$ . Έτσι, εν γένει, το Αμερικανικό δικαίωμα κοστίζει περισσότερο. Θα δείξουμε όμως το Αμερικανικό και το Ευρωπαϊκό δικαίωμα **αγοράς** συμπίπτουν.

**ΘΕΩΡΗΜΑ 363** Αν η συνάρτηση  $\psi = (x - K)_+$  τότε έχουμε  $u(t, S_t) = F(t, S_t)$

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} u(t, S_t) &\geq \mathbb{E}_Q(e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+) \\ &= \mathbb{E}_Q(e^{rt}(\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+) = F(t, S_t) \end{aligned}$$

Στην πρώτη ανισότητα βγάλαμε το supremum και βάλουμε στη θέση του  $\rho$  συγκεκριμένα το χρόνο  $T$ , όπου σίγουρα η ποσότητα θα είναι μικρότερη ή ίση (ίση αν το supremum επιτυγχάνεται στο χρόνο  $T$ , το οποίο τελικά συμβαίνει!)

Επίσης έχουμε, για οποιοδήποτε χρόνο στάσης  $\rho$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_Q \left( (\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+ | \mathcal{F}_\rho \right) &\geq \mathbb{E}_Q \left( (\tilde{S}_T - e^{-rT}K) | \mathcal{F}_\rho \right) \\ &= \tilde{S}_\rho - e^{-rT}K \geq \tilde{S}_\rho - e^{-r\rho}K,\end{aligned}$$

αφού η  $\tilde{S}$  είναι martingale. Επομένως,

$$\mathbb{E}_Q \left( (\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+ | \mathcal{F}_\rho \right) \geq (\tilde{S}_\rho - e^{-r\rho}K)_+$$

αφού το αριστερό μέλος είναι ήδη θετικό. Τέλος, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη με  $e^{rt}$  και παίρνοντας μέση τιμή κατά μέλη έχουμε

$$\mathbb{E}_Q \left( e^{rt} (\tilde{S}_T - e^{-rT}K)_+ \right) \geq \mathbb{E}_Q \left( e^{rt} (\tilde{S}_\rho - e^{-r\rho}K)_+ \right)$$

Η τελευταία ανισότητα ικανοποιείται για κάθε χρόνο στάσης άρα και για το supremum πάνω σε όλους τους χρόνους στάσης, οπότε ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα.  $\square$

Αν ο αγοραστής αποφασίσει να εξασκήσει τη χρονική στιγμή  $t$  το δικαίωμα αγοράς τότε θα έχει κέρδος  $S_t - K$ . Αν όμως, αντί να το εξασκήσει, πουλήσει ανοικτά (πουλάω ανοικτά σημαίνει ότι πουλάω κάτι που δεν έχω) τις μετοχές τη χρονική στιγμή  $t$  και κλείσει τη θέση του τη χρονική στιγμή  $T$  (δηλαδή παραδώσει τις μετοχές) τότε θα έχει κέρδος  $S_t - \min\{S_T, K\}$  διότι τη χρονική στιγμή  $T$  είτε θα εξασκήσει το δικαίωμα οπότε θα κερδίσει σε αυτήν τη περίπτωση  $S_t - K$  είτε δεν θα συμφέρει να το εξασκήσει, οπότε θα αγοράσει τις μετοχές στην τιμή  $S_T < K$ , θα τις παραδώσει και θα έχει κέρδος  $S_t - S_T$ . Αυτό βέβαια προϋποθέτει ότι ο αγοραστής έχει τη δυνατότητα, ανά πάσα στιγμή, να πουλήσει ανοικτά τις μετοχές που θέλει. Επομένως, (θεωρητικά) θα πρέπει να αποφασίσει στο χρόνο  $T$  (και μόνο) αν θα εξασκήσει το δικαίωμα (οπότε για τον πωλητή είναι ισοδύναμο με το να έχει πουλήσει Ευρωπαϊκό δικαίωμα) με τη διαφορά βέβαια ότι στο ενδιάμεσο έχει την ευκαιρία να πουλήσει ανοικτά τις μετοχές. Την ίδια ακριβώς κίνηση μπορεί να κάνει έχοντας αγοράσει ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα. Αν όμως οι μετοχές

δίνουν μερίσματα τότε είναι πιθανό να συμφέρει να έχει στα χέρια του τις μετοχές το νωρίτερο δυνατό.

### 13.7 Αποτίμηση μέσω μερικών διαφορικών εξισώσεων

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε το ίδιο πρόβλημα από μια άλλη οπτική γωνία. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση τιμής ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος ικανοποιεί μια μερική διαφορική εξίσωση.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 364** Μια στρατηγική  $(a_t, b_t)$  λέγεται Μαρκοβιανή αν

$$a_t = a(t, S_t), \quad b_t = b(t, S_t)$$

όπου  $a, b$  είναι συναρτήσεις δυο μεταβλητών συνεχώς παραγωγίσιμες στην πρώτη και δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες στη δεύτερη μεταβλητή.

Ήρα λοιπόν, η τιμή του χαρτοφυλακίου σε αυτήν τη περίπτωση γράφεται

$$V_t = a(t, S_t)S_t + b(t, S_t)e^{rt}.$$

Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει συνάρτηση  $u(t, x)$  μια φορά συνεχώς παραγωγίσιμη στο  $t$  και δυο στο  $x$  τ.ω.  $u(t, S_t) = V_t$ . Θα δούμε στο επόμενο θεώρημα ότι αυτή η συνάρτηση θα είναι λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης Black-Scholes.

### 13.7.1 Ευρωπαϊκά Δικαιώματα

**ΘΕΩΡΗΜΑ 365** Έστω  $(a, b)$  μια αυτοχρηματοδοτούμενη Μαρκοβιανή στρατηγική. Τότε, αν υπάρχει  $u(t, x) \in C^{1,2}(D)$  (όπου  $D = (0, T) \times (0, +\infty)$ ) τ.ω.  $u(t, S_t) = V_t$ , η  $u(t, x)$  είναι λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx}(t, x) + rxu_x(t, x) + u_t(t, x) = ru(t, x)$$

με  $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}_+$ . Επιπλέον,  $a(t, x) = u_x(t, x)$ . Η παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση ονομάζεται **Black-Scholes**.

**ΑΠΟΔΕΙΞΗ.** Εφόσον η  $(a, b)$  είναι αυτοχρηματοδοτο-

ύμενη στρατηγική έχουμε ότι

$$V_t = V_0 + \int_0^t (ma(s, S_s)S_s + rb(s, S_s)B_s)ds + \int_0^t \sigma a(s, S_s)S_s dW_s.$$

Εφαρμόζουμε τη φόρμουλα του Ito στην  $u(t, S_t)$  και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u(t, S_t) = & u(0, S_0) \\ & + \int_0^t (u_t(s, S_s) + mS_s u_x(s, S_s) + \frac{\sigma^2 S_s^2}{2} u_{xx}(s, S_s)) ds \\ & + \int_0^t \sigma S_s u_x(s, S_s) dW_s. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν γράψει την  $V_t$  ως διαδικασία Ito με δυο διαφορετικούς τρόπους, επομένως χρησιμοποιώντας πάλι τη μοναδικότητα της ανάλυσης κατά Doob-Meyer στη διαφορά τους (η οποία είναι μηδέν), προκύπτει ότι και τα δυο ολοκληρώματα είναι μηδέν. Επομένως, όπως σε προηγούμενο θεώρημα, παίρνουμε την ισότητα

$$a(t, S_t) = u_x(t, S_t) \text{ και άρα } b(t, S_t)B_t = u(t, S_t) - S_t u_x(t, S_t)$$

Για να μηδενιστεί και το ολοκλήρωμα ως προς  $ds$  θα

πρέπει αναγκαστικά η  $u(t, x)$  να ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2} u_{xx}(t, x) + rxu_x(t, x) + u_t(t, x) = ru(t, x)$$

έχοντας αντικαταστήσει κατάλληλα το  $b(t, S_t)B_t$ , διότι θέλουμε να μηδενίζεται το ολοκλήρωμα για οποιαδήποτε πιθανή τροχιά της  $S_t$ . Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμη και η υπόθεση ότι  $u \in C^{1,2}(D)$ .  $\square$

Επομένως, αν θέλουμε να υπολογίσουμε το δικαίωμα πώλησης θα πρέπει να επιλύσουμε την παραπάνω μερική διαφορική εξίσωση με επιπλέον συνθήκη  $u(s, T) = (K - s)^+$ .

Η εξίσωση των Black-Scholes μετασχηματίζεται στην κυματική εξίσωση.

**ΠΡΟΤΑΣΗ 366** Έστω  $k_1 = \frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$  και  $k_2 = r + \frac{k_1^2}{2}$ . Τότε η  $u$  είναι λύση της Black-Scholes αν η  $f(\tau, s) = e^{k_1 s + k_2 \tau} u(T - t, e^{\sigma s})$  ικανοποιεί την

$$f_\tau = \frac{1}{2} f_{ss} \text{ στο } (0, T) \times \mathbb{R}.$$

### 13.7.2 Αμερικανικά Δικαιώματα

Ορίζουμε τον παρακάτω τελεστή

$$\mathcal{L}_t = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + rx \frac{\partial}{\partial x} - r$$

**ΘΕΩΡΗΜΑ 367** Έστω ότι η συνάρτηση  $v(t, x) : \mathbb{R}_+ \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής τ.ω.  $v_t, v_x, v_{xx}$  είναι τοπικά φραγμένες. Η λύση  $v(t, x)$  της παρακάτω μεταβολικής ανισότητας

$$\mathcal{L}_t v(t, x) \leq 0$$

$$v(t, x) \geq (K - x)^+$$

$$v(x, T) = (K - x)^+$$

$$((K - x)^+ - v(t, x)) \mathcal{L}_t v(t, x) = 0,$$

είναι μοναδική και μάλιστα η  $v(t, S_t)$  είναι η τιμή του Αμερικανικού δικαιώματος πώλησης.

### 13.8 Ευαισθησία του κόστους στις παραμέτρους (Greek letters)

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τις παραγώγους της τιμής του συμβολαίου αγοράς (παρόμοια γίνονται και οι υπολογισμοί για το συμβόλαιο πώλησης) σε διάφορες παραμέτρους. Έχουμε ήδη υπολογίσει την παράγωγο

$$\Delta = F_x(t, x) = \Phi(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t})$$

όπου διαπιστώνουμε ότι είναι πάντοτε θετική.

Στη συνέχεια, μπορούμε να υπολογίσουμε την δεύτερη παράγωγο ως προς  $x$  όπου έχουμε

$$\Gamma = F_{xx}(t, x) = \frac{\Phi'(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t})}{x\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Επίσης,

$$\rho = F_r(t, x) = (T-t)Ke^{-r(T-t)}\Phi(-l_t(x))$$

Συνεχίζοντας, έχουμε

$$\Theta = F_t(t, x) = \frac{-x\sigma}{2\sqrt{T-t}}\Phi'(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t}) - rKe^{-r(T-t)}\Phi(-l_t(x)).$$

Τέλος, έχουμε την παράγωγο ως προς τη μεταβλητότητα,

$$vega = F_{\sigma} = x\sqrt{T-t}\Phi'(-l_t(x) + \sigma\sqrt{T-t}) > 0.$$

### 13.9 Συνεπαγόμενη μεταβλητότητα (implied volatility)

Όπως έχουμε αναφέρει, για να υπολογίσουμε την (μικρότερη δυνατή) τιμή ενός Ευρωπαϊκού συμβολαίου θα πρέπει να γνωρίζουμε τη μεταβλητότητα της μετοχής  $\sigma$ . Ένας τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την τιμή του δικαιώματος που προκύπτει από το μοντέλο των Black-Scholes. Έπειτα, λύνουμε ως προς  $\sigma$  (στην πραγματικότητα το κάνουμε με κάποια αριθμητική μέθοδο όπως η Newton-Raphson). Πώς όμως θα γνωρίζουμε την τιμή του συμβολαίου (αφού αυτήν ψάχνουμε;) Υπάρχει συγκεκριμένη αγορά όπου διαπραγματεύονται τις τιμές για διάφορα συμβόλαια με διάφορες υποκείμενες μετοχές. Θα βρούμε τα συμβόλαια εκείνα όπου έχουν την ίδια υποκείμενη μετοχή για την οποία εμείς θέλουμε να υ-

πολογίσουμε τη μεταβλητότητα. Θα υποθέσουμε ότι η τιμή πώλησης των συμβολαίων αυτών είναι κοντά στην τιμή που προέρχεται από το μοντέλο των Black-Scholes και άρα θα υπολογίσουμε τη μεταβλητότητα λύνοντας ως προς  $\sigma$ . Ως μεταβλητότητα θα δεχτούμε το μέσο όρο όλων αυτών που υπολογίσαμε. Στην πράξη διαπιστώνεται ότι η μεταβλητότητα  $\sigma$  είναι εξαρτώμενη από το χρόνο αλλά και από άλλες μεταβλητές όπως η τιμή εξάσκησης. Επομένως, αυτό σημαίνει ότι έχουμε ήδη κάνει μια απλούστευση στο μοντέλο των Black-Scholes υποθέτοντας ότι είναι σταθερά.

Σε σχέση με τη διακριτή περίπτωση, η μεταβλητότητα  $\sigma$  είναι ισοδύναμη με τα  $u$  και  $d$ . Δυο πωλητές του ιδίου συμβολαίου μπορεί να εκτιμήσουν διαφορετικά τα  $u, d$  αν δουλεύουν στη διακριτή περίπτωση ή το  $\sigma$  αν εργάζονται στη συνεχή και έτσι να δώσουν διαφορετική τιμή παρόλο που χρησιμοποιούν το ίδιο μοντέλο.

### 13.10 Γενικεύσεις του μοντέλου Black – Scholes

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο και αυξάνοντας τις περιόδους, διαπιστώσαμε ότι στο όριο συγκλίνει στο μοντέλο Black-Scholes. Στην συνεχή περίπτωση το ίδιο προέκυψε υποθέτοντας ότι η μετοχή ακολουθεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$S_t = S_0 + m \int_0^t S_s ds + \sigma \int_0^t S_s dW_s$$

Χρησιμοποιώντας για παράδειγμα ιστορικά δεδομένα, προσπαθούμε να διαλέξουμε το  $\sigma$  κατάλληλα έτσι ώστε να ταιριάζει όσο το δυνατό καλύτερα με την κίνηση της μετοχής. Για το λόγο αυτόν έχουν προταθεί και άλλες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις τις οποίες μπορεί να ακολουθεί η μετοχή, με περισσότερες παραμέτρους και άρα με μεγαλύτερη ελευθερία επιλογής. Ως παράδειγμα, μπορούμε να δούμε το παρακάτω μοντέλο γνωστό στη διεθνή βιβλιογραφία ως Cox model ή constant elas-

ticity of variance model (CEV model)

$$S_t = S_0 + m \int_0^t S_s ds + a \int_0^t S_s^b dW_s,$$

όπου  $b \in [0, 1]$ . Εδώ υπάρχει η επιπλέον ελευθερία να επιλεγεί η παράμετρος  $b$  κατάλληλα έτσι ώστε η παραπάνω στοχαστική διαφορική εξίσωση να περιγράφει καλύτερα την κίνηση μιας συγκεκριμένης μετοχής. Πράγματι, συμβαίνει κάτι τέτοιο όπως δείχνουν πειράματα που έχουν γίνει (δες [;]). Η ακριβής λύση του CEV μοντέλου δεν είναι γνωστή αλλά μπορεί να προσεγγισθεί αριθμητικά (δες [;], [;] καθώς και τις αναφορές τους). Ειδικότερα στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε τις αξίες συμβολαίων οι οποίες εξαρτώνται από την πορεία που διαγράφει η μετοχή και όχι μόνο από την τελική τιμή (path dependent options) τότε είναι σχεδόν επιβεβλημένη η χρήση αριθμητικών μεθόδων.

Επίσης, έχει προταθεί και το παρακάτω μοντέλο γνωστό ως μοντέλο στοχαστικής μεταβλητότητας το

οποίο είναι το εξής,

$$S_t = S_0 + \int_0^t f(s, S_s) ds + \int_0^t \sigma_s S_s dW_s^1,$$
$$\sigma_t = \sigma_0 + \int_0^t a(s, \sigma_s) ds + \int_0^t b(s, \sigma_s) dW_s^2$$

Έχουν προταθεί διάφορες συναρτήσεις  $f, a, b$  για το παραπάνω μοντέλο και περισσότερο μπορεί να δει κάποιος στο [;]. Τέλος, υπάρχουν και μοντέλα τα οποία δεν χρησιμοποιούν την κίνηση Brown αλλά γενικότερες στοχαστικές διαδικασίες (Jump - diffusion processes).

Σε κάθε νέο μοντέλο που προτείνεται προκύπτουν ερωτήματα ύπαρξης και μοναδικότητας της λύσης, εύρεσή της σε κλειστή μορφή, κατάλληλη αριθμητική μέθοδος αν δεν έχει βρεθεί η λύση σε ικανοποιητική κλειστή μορφή, ερωτήματα πληρότητας του μοντέλου καθώς και υπολογισμού της αξίας ενός συμβολαίου σε κλειστή μορφή, αριθμητική προσέγγιση της αξίας ενός συμβολαίου αν δεν υπάρχει ικανοποιητικός τρόπος υπολογισμού της σε κλειστή μορφή. Για αριθμητική προσέγγιση δείτε τα [;], [;].

## Μειονεκτήματα των μεθόδων αποτίμησης και η ιδέα της ασφαλούς τιμολόγησης

Το μοντέλο αποτίμησης των Black-Scholes υποθέτει αναδιοργάνωση χαρτοφυλακίου σε συνεχή χρόνο το οποίο δεν είναι εφικτό στην πράξη. Στο διωνυμικό μοντέλο η αναδιοργάνωση του χαρτοφυλακίου γίνεται σε διακριτό χρόνο το οποίο είναι εφικτό στην πράξη και επιπλέον στο μοντέλο αυτό μπορεί εύκολα να συμπεριλάβει κανείς Lookback Options κ.τ.λ. Παρόλα αυτά, προκειμένου να έχει πρακτική αξία ως ένας τρόπος αντιστάθμισης του κινδύνου θα πρέπει να ληφθούν υπόψη παράγοντες οι οποίοι εμφανίζονται στην πράξη. Για παράδειγμα δεν είναι ξεκάθαρο αν κάποιος μπορεί να δανείζεται μετοχές ανά πάσα στιγμή και ποιο είναι το κόστος για αυτό. Θα πρέπει να λάβει υπόψη του τα **κόστη συναλλαγής**, τα μερίσματα των μετοχών κ.α. Σε μια τέτοια αντιμετώπιση το μαθηματικό πρόβλημα γίνεται περίπλοκο και αν θελήσουμε να αποτιμήσουμε συμβόλαια πάνω σε περισσότερα από δυο υποκείμενα αγαθά γίνεται σχεδόν μη επιλύσιμο. Ακόμη όμως

και αν κάποιος συμπεριλάβει αυτούς τους παράγοντες το αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο δεν θα καλύψει τον πωλητή στην περίπτωση που οι μεταβλητότητες των υποκείμενων αγαθών προκύψουν μεγαλύτερες από τις προβλέψεις του. Για να καλυφθεί (εν μέρει) και από αυτό το ρίσκο θα πρέπει να ξοδέψει ακόμη περισσότερα χρήματα. Τέλος, όλα τα μοντέλα τα οποία στηρίζονται σε κατασκευή αντισταθμιστικών χαρτοφυλακίων δεν είναι πρακτικά σε μη πλήρεις αγορές.

Θα περιγράψουμε στη συνέχεια μια εντελώς διαφορετική ιδέα τιμολόγησης συμβολαίων, αυτή της **ασφαλούς τιμολόγησης**, η οποία παραμένει πρακτική ακόμη και στη περίπτωση συμβολαίων με περισσότερα από δυο υποκείμενα αγαθά και επίσης σε μη πλήρεις αγορές. Ο σκοπός της ασφαλούς αποτίμησης είναι να εξασφαλίσει εν μέρει τον πωλητή καθότι, γενικά, ο πωλητής και ο αγοραστής δεν είναι ισοδύναμοι απέναντι στον κίνδυνο. Για παράδειγμα, πουλώντας ένα απλό συμβόλαιο αγοράς, ο πωλητής ενδέχεται να χρεοκοπήσει, δηλαδή υπάρχει θετική πιθανότητα να πρέπει να καταβάλλει ένα οσοδήποτε μεγάλο ποσό στον αγοραστή ενώ στην

καλύτερη περίπτωση θα κερδίσει όλο το ποσό της αξίας του συμβολαίου. Από την άλλη μεριά ο αγοραστής στην χειρότερη περίπτωση θα χάσει το ποσό της αξίας του συμβολαίου ενώ στην καλύτερη θα λάβει ένα οσοδήποτε μεγάλο ποσό. Υπό αυτή την έννοια, μάλλον, δεν έχει νόημα να ψάχνουμε κάποιου είδους δίκαιη τιμή πώλησης αλλά μάλλον μια ασφαλή τιμή πώλησης για τον πωλητή για τα συμβόλαια τα οποία η απολαβή τους δεν είναι άνω φραγμένη. Τα συμβόλαια τύπου πώλησης έχουν άνω φραγμένες απολαβές και σε μια τέτοια περίπτωση θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για δίκαιη τιμή πώλησης.

Συμβολίζουμε με  $P_t$  την απολαβή ενός τέτοιου συμβολαίου κατά την χρονική στιγμή  $t$ , για παράδειγμα  $P_t = \max\{K - S_t, 0\}$  όπου  $K$  δοσμένος αριθμός και  $S_t$  η τιμή της μετοχής στο χρόνο  $t$  ή  $V_t = \max\{\frac{S_t + D_t + F_t}{3} - K, 0\}$  όπου  $S_t, D_t, F_t$  οι τιμές τριών μετοχών κατά το χρόνο  $t$ . Η ιδέα είναι να μελετήσουμε τη στοχαστική διαδικασία  $P_t$  και όχι τις διαδικασίες που διέπουν τις κινήσεις των μετοχών, δηλαδή δεν κάνουμε καμιά υπόθεση για την κίνηση των μετοχών παρά μόνο για

την κίνηση των απολαβών. Σημειώστε ότι το  $P_0$  είναι γνωστό διότι οι τιμές των μετοχών είναι γνωστές σήμερα.

Ας υποθέσουμε ότι το συμβόλαιο λήγει στη χρονική στιγμή  $T$ . Τότε μας ενδιαφέρει η διαφορά  $P_T - P_0$  η οποία βεβαίως είναι μια τυχαία μεταβλητή.

**ΟΡΙΣΜΟΣ 368** Έστω  $P_t$  η απολαβή του συμβολαίου κατά τη χρονική στιγμή  $t$  και έστω  $Y$  ένα ποσό. Τότε λέμε ότι το  $Y$  είναι μια ασφαλής τιμή πώλησης για τον πωλητή αν

$$\mathbb{P}(P_t \leq Y) = p$$

για κάποιο  $p \in (0, 1)$  δοσμένο από τον πωλητή.

Έστω ότι υπάρχουν κάποια  $m, \sigma \in \mathbb{R}_+$  τέτοια ώστε

$$P_T - P_0 = \max(X_T, -P_0)$$

όπου  $X_t = mt + \sigma W_t$ .

Μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα ότι η  $Y = P_0 + mT + z_p \sigma \sqrt{T}$  είναι μια ασφαλής τιμή για τον πωλητή όπου  $z_p$  είναι τέτοιο ώστε  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_p} e^{-\frac{r^2}{2}} dr = p$ .

Μπορούμε να εκτιμήσουμε τους  $m$  και  $\sigma$  από παρελθοντικά δεδομένα εργαζόμενοι μονάχα πάνω στις τιμές των απολαβών και όχι στις τιμές των μετοχών. Σημειώστε ότι, κάτω από την υπόθεση 13.10, αν κάποιος πουλήσει το συμβόλαιο φθηνότερα από  $P_0 + mT$  τότε η πιθανότητα ζημιάς είναι μεγαλύτερη από  $1/2$ . Σε αυτή τη περίπτωση θα πρέπει να επενδύσει κατάλληλα αυτό το ποσό για να ελαχιστοποιήσει αυτό το επιπλέον ρίσκο, τοποθετώντας το για παράδειγμα σε μια χωρίς ρίσκο επένδυση ή δημιουργώντας ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο. Πουλώντας στην ασφαλή τιμή ο πωλητής αναλαμβάνει ουσιαστικά το ρίσκο της εκτίμησης των μελλοντικών παραμέτρων  $m, \sigma$  ενώ ο αγοραστής μεταθέτει αυτό το ρίσκο στον πωλητή πληρώνοντας το αντίστοιχο τίμημα. Στην πράξη, προκειμένου ο πωλητής να καλυφθεί (εν μέρει) από το ρίσκο που ανέλαβε θα πρέπει να αγοράσει κατάλληλα call των υποκείμενων αγαθών από την αγορά παραγώγων. Για το λόγο αυτό μπορεί να χρησιμοποιήσει μέρος των χρημάτων για αυτό το σκοπό. Θα μπορούσαμε να ορίσουμε ως τιμή πώλησης την  $Y = P_0 + mT$  η οποία εκ πρώτης

όψεως φαίνεται δίκαιη. Επειδή όμως ο πωλητής είναι εκτεθειμένος σε κίνδυνο χρεοκοπίας θα προσπαθήσει να πουλά τα συμβόλαια αυτά σε μια τιμή μεγαλύτερη αυτής έτσι ώστε κατά κάποιο τρόπο να ισοσταθμίσει τη ζημιά που θα έχει σε κάποια από αυτά.

Σε όλα τα παραπάνω υποθέτουμε ότι το συγκεκριμένο συμβόλαιο δεν μπορεί να καλυφθεί πλήρως και χωρίς ρίσκο με κάποιο σχήμα κατάλληλων call και put από την αγορά παραγώγων αλλιώς ο αγοραστής θα προτιμούσε να αντισταθμίσει τον κίνδυνο μόνος του. Στην περίπτωση λοιπόν που δεν μπορεί, θα καταφύγει στην [εξωχρηματοστηριακή αγορά](#) όπου εκεί έχουν νόημα τα μαθηματικά μοντέλα αποτίμησης.

Περισσότερα για την ιδέα αυτή μπορεί να δει κανείς την [εργασία](#).

Να σημειώσουμε ότι το [διωνυμικό μοντέλο](#) παραμένει χρήσιμο για την εύρεση της ελάχιστης αξίας για την κατασκευή αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου προκειμένου κάποιος να αντισταθμίσει τον κίνδυνο άπειρης ζημιάς αγοράζοντας κατάλληλα συμβόλαια αγοράς.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 369** Έστω ένα Αμερικανικό συμβόλαιο με ένα υποκείμενο αγαθό με αξίες  $S_t$  και έστω η απολαβή του συμβολαίου είναι  $V_t = \{\max_{0 \leq s \leq t} S_t - K, 0\}$ . Ακόμη και αν πωλητής πουλήσει ένα τέτοιο συμβόλαιο σε πολλαπλάσια τιμή της ασφαλούς αξίας του δεν θα είναι ποτέ πλήρως εξασφαλισμένος έναντι μιας χρεοκοπίας. Ένας τρόπος μερικής εξασφάλισης θα ήταν να αγοράσει ένα συμβόλαιο αγοράς με το ίδιο υποκείμενο αγαθό ή μια σειρά από συμβόλαια αγοράς με μικρότερη χρονική διάρκεια.

Ένα άλλο παράδειγμα συμβολαίου με δυο υποκείμενα αγαθά με αξίες  $S_t, D_t$  είναι ένα συμβόλαιο Ευρωπαϊκού τύπου με απολαβή  $P_T = \max\{S_T - D_T, 0\}$ . Στην περίπτωση αυτή, ο πωλητής προκειμένου να καλυφθεί από τον κίνδυνο χρεοκοπίας θα μπορούσε να αγοράσει ένα call option με υποκείμενο αγαθό την  $S_t$ . Με αυτό τον τρόπο θα ήταν πλήρως εξασφαλισμένος έναντι μιας χρεοκοπίας, αρκεί βέβαια η αξία του call option να είναι μικρότερη της τιμής πώλησης του συμβολαίου.

Μπορούμε λοιπόν να διαχωρίσουμε τα συμβόλαια προαίρεσης σε δυο μεγάλες ομάδες. Στην πρώτη ο-

μάδα ανήκουν τα συμβόλαια στα οποία η απολαβή μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλη (όπως στα συμβόλαια αγοράς) και άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας του πωλητή είναι πραγματική. Στη δεύτερη ομάδα ανήκουν τα συμβόλαια στα οποία η απολαβή είναι άνω φραγμένη (όπως στα συμβόλαια πώλησης) και άρα η πιθανότητα χρεοκοπίας του πωλητή είναι μηδενική. Ο πωλητής πουλώντας ένα συμβόλαιο της πρώτης ομάδας θα πρέπει να μετριάσει τον κίνδυνο χρεοκοπίας κατασκευάζοντας ένα αντισταθμιστικό χαρτοφυλάκιο το οποίο θα αποτελείται από κατάλληλα συμβόλαια αγοράς. Υποθέτουμε βέβαια ότι η τιμή πώλησης του συμβολαίου είναι μεγαλύτερη από την αρχική αξία αυτού του αντισταθμιστικού χαρτοφυλακίου μαζί με τα παρελκόμενα έξοδα.

□

## Βιβλιογραφία

Το επόμενο βιβλίο είναι πολύ ενδιαφέρον από πρακτικής άποψης. Σε αυτό βλέπουμε με ποια ακριβώς αντικείμενα ασχολούνται οι επαγγελματίες του είδους αυτού. Το βιβλίο αυτό έχει τίτλο *Algorithmic Trading and Quantitative Strategies*.

Για θέματα θεωρητικού περιεχομένου δείτε τα παρακάτω,

1. R. Korn - E. Korn, *Option Pricing and Portfolio Optimization*, AMS, 2000.

2 I. Karatzas - S. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer, 1991.

3. M. Musiela - M. Rutkowski, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, 2005.

4. A. Pascucci-W. Runggaldier, *Financial Mathematics*, Springer, 2012.

5. S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance I and II*, Springer, 2004.