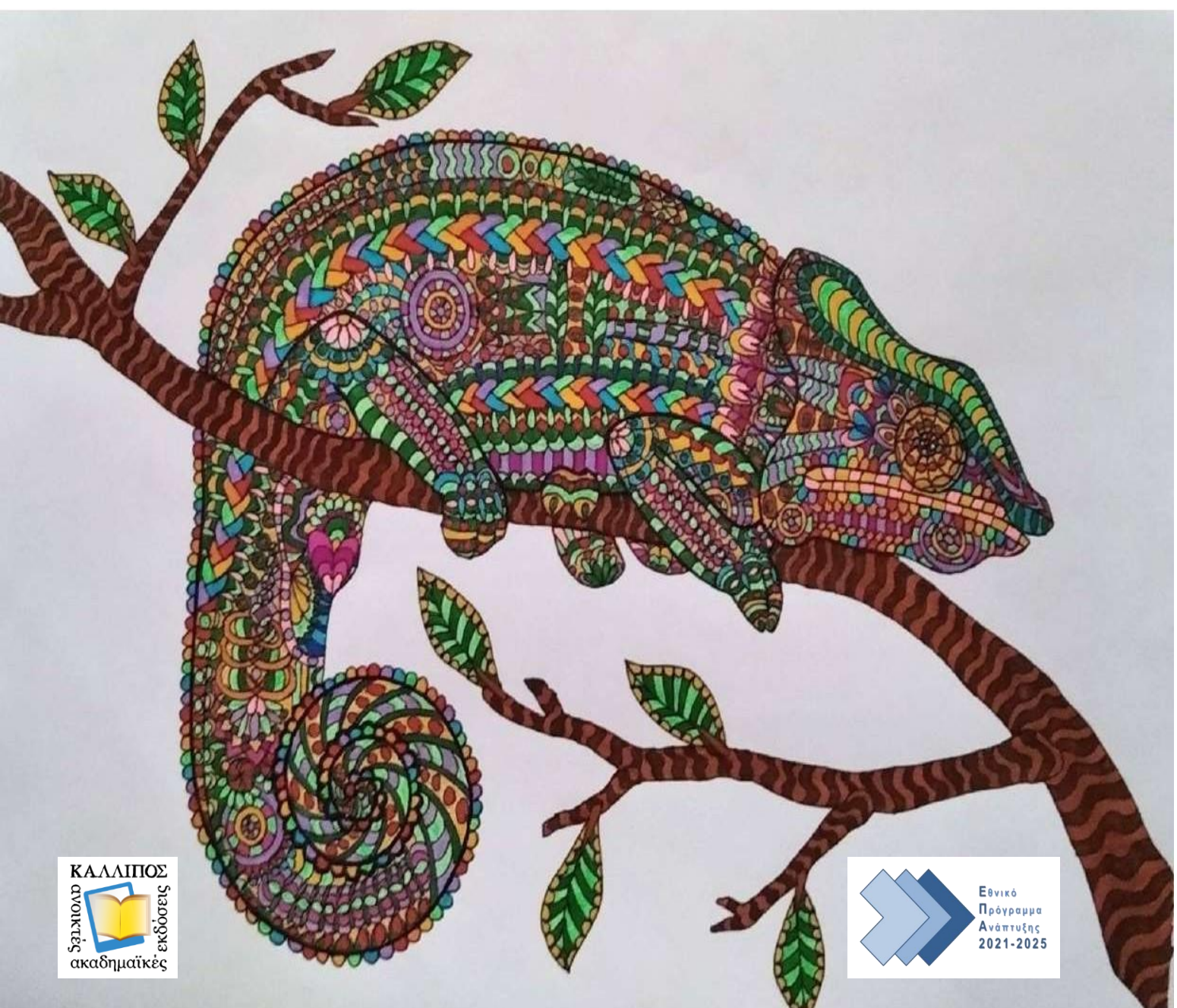


Χαρίλαος Βαβατσούλας
Χαρά-Μυρτώ-Αγάπη Χαραλάμπους

Στοιχεία από τη Γραμμική Άλγεβρα



ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Στοιχεία από τη Γραμμική Άλγεβρα

Χαρίλαος Βαβατσούλας

Τμήμα Μαθηματικών

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Χαρά-Μυρτώ-Αγάπη Χαραλάμπους

Τμήμα Μαθηματικών

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Τίτλος πρωτοτύπου: «Στοιχεία από τη Γραμμική Άλγεβρα»

Copyright © 2023, ΚΑΛΛΙΠΟΣ, ΑΝΟΙΚΤΕΣ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΕΣ ΕΚΔΟΣΕΙΣ
(ΣΕΑΒ + ΕΛΚΕ-ΕΜΠ)



Το παρόν έργο διατίθεται με τους όρους της άδειας Creative Commons Αναφορά Δημιουργού – Μη Εμπορική Χρήση – Παρόμοια Διανομή 4.0. Για να δείτε τους όρους της άδειας αυτής επισκεφτείτε τον ιστότοπο

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/legalcode.el>

Αν τυχόν κάποιο τμήμα του έργου διατίθεται με διαφορετικό καθεστώς αδειοδότησης, αυτό αναφέρεται ρητά και ειδικώς στην οικεία θέση.

Συντελεστές έκδοσης

Γλωσσική επιμέλεια:

Δημήτρης Καλλιάρas

Γραφιστική επιμέλεια:

Χαρίλαος Βαβατσούλας

Τεχνική επεξεργασία:

Χαρίλαος Βαβατσούλας

ΚΑΛΛΙΠΟΣ

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Ηρώων Πολυτεχνείου 9

15780 Ζωγράφου

www.kallipos.gr

Βιβλιογραφική αναφορά:

Βαβατσούλας, Χ. & Χαραλάμπους, Χ-Μ-Α., (2023). *Στοιχεία από τη Γραμμική Άλγεβρα* [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Αθήνα: Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις.

Διαθέσιμο στο:

<http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-286>

ISBN:

978-618-228-053-9

Πνευματικά Δικαιώματα:

- Τα σχήματα του βιβλίου δημιουργήθηκαν με το πρόγραμμα Mathematica και προέρχονται από προσωπικό αρχείο του Χ. Βαβατσούλα.
- Η εικόνα του εξώφυλλου σχεδιάστηκε από τη Μαρία Κρυπωτού.
- Το βιβλίο έχει στοιχειοθετηθεί με το L^AT_EX.

Αφιερώνεται
στους φοιτητές και
στις φοιτήτριές μας
και στη μέντορα και φίλη,
Ομότιμη Καθηγήτρια,
κα Θεοδώρα
Θεοχάρη-Αποστολίδη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	ix
I Στοιχεία από τη Γραμμική Άλγεβρα	1
1 Γνωριμία με το Mathematica	3
1.1 Εισαγωγικά	3
1.2 Ασκήσεις	10
Ασκήσεις για Εξάσκηση	10
Βιβλιογραφία	11
2 Μιγαδικοί Αριθμοί, Μέρος I	13
2.1 Το Σώμα των Μιγαδικών	13
2.2 Μέτρο Μιγαδικών Αριθμών, Συζυγείς Μιγαδικοί	20
2.3 Εργαστήριο με Mathematica	27
2.4 Ασκήσεις	30
Λυμένες Ασκήσεις	30
Ασκήσεις για Εξάσκηση	34
Βιβλιογραφία	34
3 Μιγαδικοί Αριθμοί, Μέρος II	35
3.1 Η δευτεροβάθμια εξίσωση στο \mathbb{C}	35
3.2 Όρισμα, Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικών Αριθμών	38
3.3 Τριγωνομετρική Μορφή Γινομένου, Γεωμετρική Ερμηνεία	43
3.4 n -στές ρίζες	48
3.5 Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας	55
3.6 Εργαστήριο με Mathematica	57
3.7 Ασκήσεις	62
Λυμένες Ασκήσεις	62
Ασκήσεις για Εξάσκηση	65
Βιβλιογραφία	66

4	Πίνακες	67
4.1	Πίνακες, Είδη Πινάκων	67
4.2	Πράξεις Πινάκων	72
4.2.1	Πρόσθεση Πινάκων	72
4.2.2	Πολλαπλασιασμός Πινάκων	74
4.2.3	Γινόμενο Αριθμού με Πίνακα	83
4.3	Ιδιότητες αντιστρέψιμων Πινάκων	85
4.4	Εργαστήριο με Mathematica	88
4.5	Ασκήσεις	97
	Λυμένες Ασκήσεις	97
	Ασκήσεις για Εξάσκηση	105
	Βιβλιογραφία	107
5	Μέθοδος απαλοιφής του Gauss	109
	Εισαγωγή	109
5.1	Στοιχειώδεις Πράξεις Γραμμών - Στοιχειώδεις Πίνακες	110
5.2	Ελαττωμένη Κλιμακωτή Μορφή Γραμμών (ε.κ.μ.γ.)	116
5.3	Βαθμίδα Πίνακα	121
5.4	Μέθοδος Gauss για την εύρεση Αντιστρόφου	124
5.5	Γραμμική Εξάρτηση Στηλών	125
5.6	Εργαστήριο με Mathematica	134
5.7	Ασκήσεις	140
	Λυμένες Ασκήσεις	140
	Ασκήσεις για Εξάσκηση	145
	Βιβλιογραφία	146
6	Ορίζουσα	147
6.1	Ορίζουσα Τετραγωνικών Πινάκων	147
6.2	Βασικές Ιδιότητες Οριζουσών	151
6.3	Ορίζουσα και Βαθμίδα	161
6.4	Ορίζουσα Γινομένου πινάκων	164
6.5	Προσαρτημένος Τετραγωνικού Πίνακα - Αντίστροφος Πίνακα II	166
6.5.1	Ορίζουσα του Vandermonde	169
6.6	Εργαστήριο με Mathematica	171
6.7	Ασκήσεις	177
	Λυμένες Ασκήσεις	177
	Ασκήσεις για Εξάσκηση	182
	Βιβλιογραφία	184
7	Γραμμικά Συστήματα	185
7.1	Βασικοί Ορισμοί	185
7.2	Γραμμικό σύστημα και ο χώρος των στηλών του πίνακα συντελεστών	190
7.3	Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων	191
7.4	Τετραγωνικά Γραμμικά Συστήματα	197
7.5	Διερεύνηση Γραμμικών Συστημάτων	201
7.6	Πολυωνυμικές Καμπύλες	205
7.7	Εργαστήριο με Mathematica	208
7.8	Ασκήσεις	215
	Λυμένες Ασκήσεις	215

Ασκήσεις για Εξάσκηση	220
Βιβλιογραφία	223
8 Διανύσματα	225
8.1 Ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^n	225
8.2 Σημεία και Διανύσματα του \mathbb{R}^n	233
8.3 Ευθείες και επίπεδα στον \mathbb{R}^n	239
8.4 Εργαστήριο με Mathematica	251
8.5 Ασκήσεις	259
Λυμένες Ασκήσεις	259
Ασκήσεις για Εξάσκηση	261
Βιβλιογραφία	261
9 Γραμμικές Συναρτήσεις	263
9.1 Γραμμικές Συναρτήσεις και Πίνακες	263
9.2 Πυρήνας και Εικόνα Γραμμικής Συνάρτησης	272
9.3 Γραμμικές Συναρτήσεις στον \mathbb{R}^2 και στον \mathbb{R}^3	277
9.4 Εργαστήριο με Mathematica	282
9.5 Ασκήσεις	288
Λυμένες Ασκήσεις	288
Ασκήσεις για Εξάσκηση	293
Βιβλιογραφία	295
10 Διαγωνιοποίηση	297
10.1 Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα	297
10.1.1 Βασικοί Ορισμοί	297
10.2 Βασικές Ιδιότητες Ιδιοχώρων και Χαρακτηριστικού Πολυωνύμου	304
10.2.1 Γεωμετρική Ερμηνεία Ιδιοτιμών και Ιδιοχώρων	308
10.3 Διαγωνιοποίηση	311
10.3.1 Διαγωνιοποίηση 2×2 Πινάκων	314
10.3.2 Διαγωνιοποίηση 3×3 Πινάκων	316
10.3.3 Εφαρμογές	320
10.4 Εργαστήριο με Mathematica	323
10.5 Ασκήσεις	328
Λυμένες Ασκήσεις	328
Ασκήσεις για Εξάσκηση	331
Βιβλιογραφία	332
II Παράρτημα	333
Απαντήσεις και Υποδείξεις επιλεγμένων ασκήσεων	335
Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 1	335
Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 2	336
Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 3	336
Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 4	336
Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 5	338
Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 6	338
Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 7	339
Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 8	340

Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 9	341
Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 10	341
Ευρετήριο Ορολογίας	345
Ευρετήριο Συμβολισμών	347

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1.1	Το γράφημα της $y = x \sin x$ με Mathematica.	7
1.2	Τα γραφήματα των $y = x \sin x$, $y = x$, $y = -x$ με Mathematica.	8
1.3	Το γράφημα της $y = x^3 + \cos x$ με Mathematica.	9
1.4	Σιδηροτροχιά πριν και μετά τη διαστολή.	11
2.1	Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C}	14
2.2	Αναπαράσταση του $z = a + ib$ στο μιγαδικό επίπεδο.	17
2.3	Γεωμετρική παράσταση αθροίσματος, διαφοράς μιγαδικών.	18
2.4	Μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών.	21
2.5	Η εξίσωση $ z + 2 - i = 3$ στο μιγαδικό επίπεδο.	21
2.6	Συζυγείς μιγαδικοί.	22
2.7	Άθροισμα, διαφορά συζυγών μιγαδικών.	24
2.8	Μιγαδικοί με ίσο μέτρο.	26
3.1	Όρισμα μιγαδικού.	38
3.2	Αρνητικό πρωτεύον όρισμα.	39
3.3	Διαφορετικά ορίσματα του z	39
3.4	Όρισμα πραγματικών, φανταστικών.	40
3.5	Ιδιότητες ορίσματος.	41
3.6	Τριγωνομετρική μορφή του $z = a + ib = z (\cos \theta + i \sin \theta)$	42
3.7	Τριγωνομετρική μορφή του $z = -2 - 2i$	43
3.8	Γεωμετρική ερμηνεία γινομένου μιγαδικών.	44
3.9	Το γινόμενο $(-1 + i)(1 + i/2)$	44
3.10	Ο $1 + i$ και ο αντίστροφός του.	45
3.11	Αν $ z = 1$, τότε $z^{-1} = \bar{z}$	45
3.12	$w = w z$, όπου $ z = 1$	45
3.13	Πολλαπλασιασμός μιγαδικού με το i	46
3.14	Γεωμετρική αναπαράσταση δυνάμεων του $1 + i$	47
3.15	Γεωμετρική αναπαράσταση δυνάμεων των z και w	47
3.16	Τετραγωνικές ρίζες του i	50
3.17	Οι τέταρτες ρίζες του $2 + 2i$	50

3.18	Οι δυνάμεις των τέταρτων ριζών του $2 + 2i$.	51
3.19	Τέταρτες ρίζες του -1 .	51
3.20	Οι ενδέκατες ρίζες ρ_0 και ρ_1 του $z = 2 + 2i/5$.	52
3.21	Οι ενδέκατες ρίζες r_0 και r_1 του $w = 1/5 + 3i/7$.	52
3.22	Κυβικές ρίζες του 1 .	54
3.23	Ρίζες της μονάδας.	54
3.24	Δυνάμεις του $u = 1.03 e^{i\pi/12}$.	59
3.25	Δυνάμεις του $v = 0.97 e^{i\pi/12}$.	60
3.26	Οι δέκατες τρίτες ρίζες της μονάδας.	60
3.27	Γραφική παράσταση πολυωνυμικών συναρτήσεων.	61
5.1	Αλγόριθμος του Gauss.	118
6.1	Πίνακας και παραλληλόγραμμο.	159
6.2	Ορίζουσα και εμβαδόν παραλληλογράμμου I.	160
6.3	Ορίζουσα και εμβαδόν παραλληλογράμμου II.	160
7.1	Σημεία του επιπέδου.	205
7.2	Πολυωνυμική καμπύλη β' βαθμού που διέρχεται από τρία σημεία.	206
7.3	Πολυωνυμικές καμπύλες γ' βαθμού που διέρχονται από τρία σημεία.	207
8.1	Διανύσματα στον \mathbb{R}^2 και στον \mathbb{R}^3 .	234
8.2	Το (a_1, a_2) ως σημείο ή διάνυσμα του \mathbb{R}^2 .	234
8.3	Αναπαράσταση του $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ ως σημείο ή διάνυσμα του χώρου.	235
8.4	Σχεδίαση του σημείου $A(a_1, a_2, a_3)$ στον χώρο.	235
8.5	Πρόσθεση διανυσμάτων στο επίπεδο και στον χώρο.	236
8.6	Ο φορέας και η γραμμική θήκη διανύσματος στο επίπεδο και στον χώρο.	236
8.7	Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία στον \mathbb{R}^2 .	237
8.8	Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία στον \mathbb{R}^3 .	237
8.9	Διάνυσμα ως γραμμικός συνδυασμός.	238
8.10	Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία στον \mathbb{R}^3 .	239
8.11	Ανάλυση ως γραμμικός συνδυασμός τριών διανυσμάτων.	239
8.12	Η κανονική βάση του χώρου \mathbb{R}^3 .	240
8.13	Ευθείες στον \mathbb{R}^3 .	241
8.14	Παράλληλες ευθείες και παραμετρικές εξισώσεις.	242
8.15	Σχετική θέση ευθειών στο επίπεδο.	243
8.16	Σύστημα τριών ευθειών ανά δύο τεμνόμενες.	244
8.17	Ευθείες του τριδιάστατου χώρου δίχως κοινά σημεία.	245
8.18	Το επίπεδο p .	246
8.19	Το επίπεδο $x + 2z = 4$.	247
8.20	Το επίπεδο $x - 3y + 2z = 1$.	249
8.21	Ευθεία ως τομή δύο επιπέδων.	249
8.22	Παράλληλα επίπεδα.	250
8.23	Σύστημα ανά δύο τεμνόμενων επιπέδων.	251
8.24	Τεμνόμενα επίπεδα.	251
8.25	Μη τεμνόμενα επίπεδα.	252
8.26	Τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου.	252
8.27	Επίπεδα με μία κοινή ευθεία.	253
8.28	Ευθεία του χώρου.	253
8.29	Η κοινή ευθεία τριών επιπέδων.	254

8.30	Επίπεδα με ένα κοινό σημείο.	254
8.31	Γραφική απεικόνιση παραμετρικού συστήματος.	255
8.32	Το διάνυσμα $(3, -2, 2)$ I.	256
8.33	Το διάνυσμα $(3, -2, 2)$ II.	257
8.34	Άθροισμα διανυσμάτων του επιπέδου.	257
8.35	Γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα του χώρου.	257
8.36	Η κανονική βάση του \mathbb{R}^3	258
8.37	Το διάνυσμα $(3, -2, 2) = 3e_1 - 2e_2 + 2e_3$	258
9.1	Αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία θ	268
9.2	Κανονική βάση και αριστερόστροφη περιστροφή.	269
9.3	Αντικατοπτρισμός ως προς τον άξονα των x	269
9.4	Αντικατοπτρισμός ως προς ευθεία ε	270
9.5	Προβολή σε ευθεία.	271
9.6	Περιστροφή κατά γωνία $\pi/6$	278
9.7	Εικόνα της ε και του μοναδιαίου τετραγώνου.	279
9.8	Η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου.	279
9.9	Δράση της f_A	280
9.10	Η εικόνα $f(C)$ του μοναδιαίου κύβου.	282
9.11	Ο μοναδιαίος κύκλος και η εικόνα του.	283
9.12	Το μοναδιαίο τετράγωνο και η εικόνα του.	284
9.13	Η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου.	284
9.14	Η εικόνα του μοναδιαίου τετραγώνου.	285
9.15	Το επίπεδο $\text{Im}f_M$	286
9.16	Η εικόνα της f_M	286
9.17	Η μοναδιαία σφαίρα και η εικόνα της.	287
9.18	Η εικόνα της μοναδιαίας σφαίρας και η $\text{Im}f_M$	287
9.19	Η σύνθεση δύο αντικατοπτρισμών είναι περιστροφή.	293
10.1	Οι ευθείες ζ και ζ' ταυτίζονται με τις εικόνες τους.	300
10.2	Οι ιδιοχώροι του πίνακα A του Παραδείγματος 10.2.1.1.ii.	309
10.3	Η συνάρτηση $2 \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ και η αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία θ	309
10.4	Ιδιοδιανύσματα και ιδιοχώροι του αντικατοπτρισμού ϕ_ε σε ευθεία ε του \mathbb{R}^2	310
10.5	Ιδιοδιανύσματα και ιδιοχώροι της προβολής p_ε σε ευθεία ε του \mathbb{R}^2	310
10.6	Αντικατοπτρισμός στο επίπεδο $z = 0$	311

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Υπάρχουν πολλά βιβλία στην ελληνική βιβλιογραφία που ασχολούνται με τη Γραμμική Άλγεβρα. Το παρόν σύγγραμμα επιχειρεί να συνεισφέρει σε μία ομαλή μετάβαση από την ύλη και τον τρόπο μάθησης που διδάσκεται ο μαθητής και η μαθήτρια στο λύκειο σε έναν μαθηματικό και πιο αφηρημένο τρόπο σκέψης μακριά από την ξερή αποστήθιση. Ταυτόχρονα, το σύγγραμμα εισάγει σε έννοιες που πλέον δεν καλύπτονται στα λυκειακά μαθήματα και που είναι απαραίτητες για την κατανόηση των εννοιών που συναντά ο φοιτητής και η φοιτήτρια των μαθηματικών.

Οι συγγραφείς έχουμε την πεποίθηση ότι η εξάσκηση σε καλυπτόμενα θέματα της Γραμμικής Άλγεβρας με τη χρήση υπολογιστικών προγραμμάτων επιτρέπει την καλύτερη εμπέδωση της ύλης, ενώ παράλληλα επιτρέπει πειραματισμούς και εξερευνήσεις, χωρίς να πληρώνεται το αντίτιμο πολύτιμου χρόνου σε αριθμητικούς υπολογισμούς. Για τον λόγο αυτόν, το σύγγραμμα ξεκινά με ένα σύντομο κεφάλαιο αφιερωμένο στη χρήση του υπολογιστικού προγράμματος Mathematica. Ωστόσο, θεωρούμε απαραίτητο να διευκρινίσουμε ότι αν το Mathematica δεν είναι διαθέσιμο, τότε η χρήση και προσαρμογή σε οποιοδήποτε άλλο υπολογιστικό πρόγραμμα είναι εύκολη και ενθαρρύνεται. Επιπλέον, οι ενότητες με το Mathematica μπορούν να καλυφθούν ανεξάρτητα από την κύρια ύλη σε επόμενη φάση και δεν αποτελούν αναγκαία προϋπόθεση για την κατανόηση της ύλης.

Ο κύριος στόχος του συγγράμματος είναι να προσφέρει τα εργαλεία σκέψης σε όποιον ή όποια τα επιθυμεί και να παράσχει τις βάσεις που θα επιτρέψουν στους αναγνώστες και στις αναγνώστριες αυτόνομη πλοήγηση στα συναρπαστικά μονοπάτια που η γνώση προσφέρει. Για τον λόγο αυτόν, το σύγγραμμα περιλαμβάνει πληθώρα αναλυτικών παραδειγμάτων που θα μπορεί να τα διαβάσει ο ενδιαφερόμενος ή η ενδιαφερόμενη με τον δικό τους χρόνο και με τον δικό τους ρυθμό.

Η ύλη που καλύπτεται περιλαμβάνει τους μιγαδικούς αριθμούς, με έμφαση στη γεωμετρική αναπαράσταση, τις ιδιότητές τους, με εκτεταμένη αναφορά στις ρίζες της μονάδας και στο Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Ακολουθεί κεφάλαιο αφιερωμένο στην άλγεβρα των πινάκων, ενώ στη συνέχεια εξετάζεται η μέθοδος απαλοιφής του Gauss και οι εφαρμογές της. Ξεχωριστό κεφάλαιο ασχολείται με τη μελέτη των ιδιοτήτων των οριζουσών των τετραγωνικών πινάκων, ενώ ακολουθεί κεφάλαιο για την επίλυση των γραμμικών συστημάτων. Οι διανυσματικοί χώροι \mathbb{R}^n μελετώνται με έμφαση στον \mathbb{R}^2 και στον \mathbb{R}^3 και δίνονται προσεκτικά οι ορισμοί των ευθειών και των επιπέδων στον \mathbb{R}^n . Οι λύσεις των γραμμικών συστημάτων ερ-

μηνεύονται στον \mathbb{R}^2 και στον \mathbb{R}^3 με έμφαση πάντα στη γεωμετρική εποπτεία. Ακολουθεί το κεφάλαιο των γραμμικών συναρτήσεων και τέλος το κεφάλαιο των ιδιοδιανυσμάτων και των ιδιοτιμών. Το σύγγραμμα ενσωματώνει τη χρήση του Mathematica σε ξεχωριστή ενότητα σε κάθε κεφάλαιο. Επιπλέον, σε κάθε κεφάλαιο υπάρχει ξεχωριστή ενότητα με πληθώρα λυμένων ασκήσεων, ενώ στο Παράρτημα δίνονται εκτεταμένες υποδείξεις για τις ασκήσεις. Η βιβλιογραφία στο τέλος κάθε κεφαλαίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εμβάθυνση των εννοιών. Στο τέλος του συγγράμματος έχει προστεθεί ευρετήριο όρων και συμβολισμών. Με αυτόν τον τρόπο, ο αναγνώστης ή η αναγνώστρια μπορούν να ανατρέχουν σε ορισμούς και να διευκρινίζουν έννοιες.

Το βιβλίο δεν προτίθεται να αποτελέσει αποκλειστικό σύγγραμμα για μαθήματα Γραμμικής Άλγεβρας. Ωστόσο, το σύγγραμμα μπορεί να αποτελέσει κύριο σύγγραμμα σε εισαγωγικό μάθημα Γραμμικής Άλγεβρας ή Αναλυτικής Γεωμετρίας ή συνοδευτικό σύγγραμμα για οποιοδήποτε άλλο μάθημα Άλγεβρας. Σημειώνουμε ότι έχει γίνει συνειδητή προσπάθεια στο κείμενο να χρησιμοποιηθεί ουδέτερη ως προς το φύλο γλώσσα.

Ως βασική βιβλιογραφία για θέματα Γραμμικής Άλγεβρας αναφέρουμε τα [1], [2], [3]. Για μία σύντομη επισκόπηση αναφέρουμε το [4].

Ευχαριστούμε τους φοιτητές και τις φοιτήτριές μας για τις παρατηρήσεις τους στο αρχικό κείμενο. Ευχαριστούμε, επίσης, τη Μαρία Κρυπωτού για τη σχεδίαση της εικόνας του εξωφύλλου.

Βιβλιογραφία

- [1] Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Βαβατσούλας και Χ. Χαραλάμπους. *Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2017. ISBN: 978-960-418-727-0.
- [2] S. Gilbert. *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*. Κρήτη: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1993. ISBN: 978-960-730-970-9.
- [3] Αθ. Πάπιστας. *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2019. ISBN: 978-960-418-841-3.
- [4] Α. Φωτιάδης και Χ. Χαραλάμπους. *Μία Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις, 2015. ISBN: 978-960-603-273-8. URL: <http://hdl.handle.net/11419/2329>.

Μέρος I

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΓΝΩΡΙΜΙΑ ΜΕ ΤΟ MATHEMATICA

Σύνοψη

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο δίνονται βασικές εντολές και παραδείγματα για τη γνωριμία και την εξοικείωση με το περιβάλλον του Mathematica. Επίσης, δίνονται οι εντολές για τον υπολογισμό του ορίου, της παραγώγου, του ολοκληρώματος και για τη γραφική παράσταση συνάρτησης. Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στα βιβλία [1], [2] και [3].

Προαπαιτούμενη γνώση: Βασικές Λυκειακές γνώσεις συναρτήσεων, ορίου, παραγώγου, ολοκληρώματος.

1.1 Εισαγωγικά

Ανοίγουμε ένα αρχείο Mathematica με διπλοπάτημα του ποντικιού στο εικονίδιο του Mathematica. Όσο χρησιμοποιούμε το Mathematica συνιστούμε να είναι το πληκτρολόγιο γυρισμένο στα αγγλικά. Για να αντιληφθεί το Mathematica ότι έχουμε δώσει κάποια εντολή, αφού την πληκτρολογήσουμε, πρέπει να την «εισάγουμε», δηλ. να πατήσουμε συγχρόνως τα πλήκτρα **[Shift]+[Enter]** (σε κάποια πληκτρολόγια αρκεί να πατήσουμε το πλήκτρο **[Enter]** που βρίσκεται στην κάτω δεξιά γωνία του πληκτρολογίου). Έστω για παράδειγμα ότι θέλουμε να δώσουμε στο Mathematica την εντολή να υπολογίσει το άθροισμα των 5 και 7 και ας υποθέσουμε ότι μόλις έχουμε ξεκινήσει ένα αρχείο Mathematica. Στον κέρσορα εμφανίζεται το «In[1]:=». Πληκτρολογούμε το «5 + 7» και στη συνέχεια εισάγουμε την εντολή.

```
In[1]:= 5 + 7
```

```
Out[1]= 12
```

Για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση χρησιμοποιούμε τα σύμβολα * και / αντίστοιχα. Όταν δεν υπάρχει κίνδυνος παρερμηνείας, μπορούμε να παραλείψουμε το * μεταξύ των πα-

ραγόντων ενός γινομένου, όπως φαίνεται στην τρίτη κατά σειρά εντολή του In[2].

```
In[2]:= s = 5 * 6; A = s/3; f = 2A
Out[2]= 20
```

Το ελληνικό ερωτηματικό¹ που εμφανίζεται στο In[2], μας επιτρέπει να γράφουμε εντολές στη σειρά, χωρίς να εμφανίζεται το αποτέλεσμα των εντολών που προηγούνται του «;». Έτσι στο In[2], δώσαμε τρεις εντολές. Με την πρώτη εντολή, το Mathematica αναγνωρίζει πλέον ως *s* το αποτέλεσμα του γινομένου των 6 και 5, δηλαδή το 30. Με τη δεύτερη εντολή στο In[2], το Mathematica αναγνωρίζει πλέον ως *A* το αποτέλεσμα της διαίρεσης του *s* δια του 3, δηλαδή το 10. Τέλος, με την τρίτη εντολή στο In[2], ορίζουμε το *f*. Στο Out[2] εμφανίζεται το αποτέλεσμα μόνο της τελευταίας εντολής, αφού αυτή δεν ακολουθείται από «;».

Για να δώσουμε την εντολή στο Mathematica να υπολογίσει τη δύναμη a^m , πληκτρολογούμε a^m . Εδώ το m μπορεί να είναι ρητός αριθμός, ενώ η βάση a είναι πραγματικός ή μιγαδικός αριθμός (βλ. Κεφάλαιο 2). Καλούμε τον αναγνώστη να παρατηρήσει τη χρήση των παρενθέσεων.

```
In[3]:= 2^5
Out[3]= 32

In[4]:= 5^(1/2)
Out[4]=  $\sqrt{5}$ 

In[5]:= (5^(1/2))^2
Out[5]= 5.0
```

Η τετραγωνική ρίζα του 5 δεν είναι βέβαια φυσικός αριθμός (δεν είναι καν ρητός!) και μάλιστα η δεκαδική του μορφή έχει άπειρα ψηφία. Έτσι, είναι αδύνατον να γράψουμε διαφορετικά την ακριβή τιμή του και το Mathematica επιστρέφει ως έκφραση τη «συμβολική» τιμή του. Ας δούμε δύο άλλα παραδείγματα συμβολικών τιμών. Το Mathematica έχει δεσμεύσει στη μνήμη του τον συνδυασμό των γραμμάτων **Pi** για τη μαθηματική σταθερά π (το πηλίκο της περιφέρειας του κύκλου δια τη διάμετρό του), καθώς και το γράμμα **E** για τη μαθηματική σταθερά e , τη βάση δηλαδή του φυσικού νεπέριου λογαρίθμου ή ισοδύναμα το όριο της ακολουθίας $(1 + 1/n)^n$. Παρόλο που δεν μπορούμε να γράψουμε όλα τα ψηφία αυτών των σταθερών, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία συγκεκριμένη εντολή του Mathematica για να προσεγγίσουμε τις εκφράσεις αυτές. Γενικότερα, γράφοντας το γράμμα **N** συνοδευόμενο από μία έκφραση σε αγκύλες δίνουμε στο Mathematica την εντολή για τον υπολογισμό της αριθμητικής τιμής της έκφρασης με προσέγγιση 6 ψηφίων.

```
In[6]:= N[Pi]
Out[6]= 3.14159

In[7]:= N[E]
Out[7]= 2.71828
```

Σημειώνουμε ότι εν γένει οι εντολές-συναρτήσεις στο Mathematica συνοδεύονται από αγκύλες μέσα στις οποίες τοποθετούμε την έκφραση στην οποία θα εφαρμοστεί η εντολή-συνάρτηση και επιπλέον ορίσματα. Για παράδειγμα, μπορούμε να καθορίσουμε το πλήθος των δεκαδικών ψηφίων μίας έκφρασης *expr* στο Mathematica προσθέτοντας δεύτερο όρισμα στη συνάρτηση **N**.

```
In[8]:= N[5^(1/2), 10]
Out[8]= 2.236067977
```

¹Υπενθυμίζουμε ότι το πληκτρολόγιό μας είναι γυρισμένο πάντα στα αγγλικά!

In[9]:= **N[Pi, 50]**

Out[9]= 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751

Το Mathematica έχει δεσμεύσει το **Log** για τη συνάρτηση του νεπέριου λογάριθμου. Με άλλα λόγια, **Log[a]** είναι ο εκθέτης b , τέτοιος ώστε $e^b = a$.

In[10]:= **Log[E]**

Out[10]= 1

In[11]:= **Log[10]**

Out[11]= Log[10]

In[12]:= **N[Log[10]]**

Out[12]= 2.30259

Το Mathematica μπορεί να διαχειριστεί και να κάνει πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς που θα συζητήσουμε εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο. Στο Mathematica, η «φανταστική» μονάδα $i \in \mathbb{C}$ με την ιδιότητα $i^2 = -1$, αναγνωρίζεται με το γράμμα **I**.

In[13]:= **I**

Out[13]= i

In[14]:= **I^2**

Out[14]= -1

In[15]:= **z = 2 + 3 I; z^4 + 5 z^3 - 3**

Out[15]= -352 - 75 i

Η εντολή **Abs[a]**, όταν a είναι πραγματικός αριθμός, επιστρέφει την απόλυτη τιμή του a . Γενικότερα, όταν a είναι μιγαδικός αριθμός, τότε **Abs[a]** επιστρέφει το μέτρο² του a . Στο επόμενο παράδειγμα δημιουργούμε **λίστες** στο Mathematica χρησιμοποιώντας άγκιστρα. Οι λίστες είναι διατεταγμένα σύνολα. Σημειώνουμε ότι με διπλές αγκύλες μπορούμε να απομονώσουμε στοιχεία τους.

In[16]:= **F = {Abs[-5], Abs[Pi - 10^(1/2)], Abs[1 + I]}**

Out[16]= {5, $\sqrt{10} - \pi$, $\sqrt{2}$ }

In[17]:= **F[[3]]**

Out[17]= $\sqrt{2}$

In[18]:= **w = 1 + I; L = {w, w^2, w^3, w^4, w^5, w^6, w^7, w^8}**

Out[18]= {1 + i, 2i, -2 + 2i, -4, -4 - 4i, -8i, 8 - 8i, 16}

Ένας αποτελεσματικός τρόπος παραγωγής λιστών είναι με τη χρήση του **Table**:

In[19]:= **T=Table[w^m, {m, 1, 8}]**

Out[19]= {1 + i, 2i, -2 + 2i, -4, -4 - 4i, -8i, 8 - 8i, 16}

In[20]:= **T==L**

Out[20]= **True**

In[21]:= **L[[2]]+L[[6]]**

Out[21]= -6 i

In[22]:= **x = ((5(3 + 1))^2)^ - 1**

Out[22]= $\frac{1}{400}$

²Αν $a = x + yi \in \mathbb{C}$, με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε το μέτρο του a , είναι ο θετικός πραγματικός αριθμός $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Για την ονομασία των εκφράσεων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε γράμμα ή συνδυασμό γραμμάτων, για παράδειγμα **A, d, Nu, I3, O1** κτλ., εκτός από τα κεφαλαία γράμματα του Πίνακα 1.1 που το Mathematica έχει «κλειδώσει».

Πίνακας 1.1: Πίνακας με κεφαλαία γράμματα που το Mathematica έχει κλειδώσει.

Γράμμα	Επεξήγηση Χρήσης
C	Συμβολισμός Σταθερών
D	Συνάρτηση Παραγωγίσις
E	e (Βάση Λογαρίθμου)
I	i (φανταστική μονάδα)
N	Συνάρτηση για Δεκαδικά Ψηφία (Numerical)
O	Ουρά Δυναμοσειρών

Το Mathematica έχει ενσωματώσει πολλές εντολές-συναρτήσεις. Κάποιες τις έχουμε ήδη δει. Όλες οι ενσωματωμένες εντολές-συναρτήσεις του Mathematica ξεκινούν με κεφαλαίο γράμμα, για παράδειγμα η εντολή **Matrix** που θα συναντήσουμε αργότερα καθώς και οι εντολές **Expand**, **Factor**, που όπως προκύπτει από το όνομά τους, αναλύουν και παραγοντοποιούν παραστάσεις. Όταν μάλιστα η εντολή του Mathematica προέρχεται από συνένωση δύο λέξεων, τότε και η δεύτερη λέξη αρχίζει με κεφαλαίο, όπως για παράδειγμα η εντολή **MatrixForm**. Όπως έχουμε ήδη δει, για να εφαρμόσουμε μία εντολή σε κάποια έκφραση, γράφουμε την εντολή και μετά μέσα σε αγκύλες την έκφραση καθώς και τα υπόλοιπα ορίσματα. Σε όλα αυτά θα εξοικειωθούμε με τη χρήση. Μία εξαίρεση στον παρακάτω κανόνα αποτελεί η εντολή που επιστρέφει το παραγοντικό του φυσικού αριθμού n , δηλ. το γινόμενο $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$ και στην οποία το παραγοντικό ακολουθεί τον αριθμό.

```
In[23]:= m = 4!
```

```
Out[23]= 24
```

```
In[24]:= Expand[(a^2 + a + 1)^2 (a - 1)]
```

```
Out[24]= -1 - a - a^2 + a^3 + a^4 + a^5
```

```
In[25]:= Factor[%]
```

```
Out[25]= (-1 + a) (1 + a + a^2)^2
```

```
In[26]:= Factor[x^6 - 1]
```

```
Out[26]= (-1 + x)(1 + x) (1 - x + x^2) (1 + x + x^2)
```

Με το σύμβολο «%» ανακαλούμε το αμέσως προηγούμενο αποτέλεσμα. Γενικότερα, με το «%, n» ανακαλούμε το **Out[n]**. Ας προσπαθήσουμε τώρα να ορίσουμε κάποιες δικές μας συναρτήσεις στο Mathematica. Έστω, λοιπόν, ότι θέλουμε να ορίσουμε τη συνάρτηση των πραγματικών αριθμών $f(x) = x \sin x$. Για να δηλώσουμε ότι το x θα είναι μεταβλητή γράφουμε **x_** στις αγκύλες μετά το **f** (στο αριστερό μόνο σκέλος του ορισμού) και χρησιμοποιούμε το «:=» αντί για απλή ισότητα. Πρώτα, όμως, ας πειραματιστούμε και ας μη φοβηθούμε να κάνουμε λάθη.

```
In[27]:= f[x_] := x * Sin[x]
```

```
... SetDelayed:write : Tag Integer in 20[x_] is protected. >>
```

```
Out[27]= $Failed
```

Το πρόγραμμα «διαμαρτύρεται», διότι στο γράμμα **f** έχει αποδοθεί συγκεκριμένη τιμή στο In[2]. Για να αποφύγουμε τη διαμαρτυρία, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άλλο γράμμα

αντί του **f** ή ακόμα καλύτερα να δώσουμε την εντολή **Clear[f]**, που «καθαρίζει» το **f** από οποιαδήποτε παρελθούσα χρήση. Ακολουθούμε τη δεύτερη επιλογή.

In[28]:= **Clear[f]**

In[29]:= **f[x_]:=x*Sin[x]**

In[30]:= **f[3Pi/2]**

Out[30]= $-\frac{3\pi}{2}$

In[31]:= **{f[0], f[Pi/4], f[Pi/2], f[3Pi/4], f[Pi]}**

Out[31]= $\{0, \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, 0\}$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη συνάρτηση σε λίστες καθώς και να δημιουργήσουμε λίστες έχοντας στο όρισμα συναρτήσεις.

In[32]:= **u = {0, Pi/4, Pi/2, 3Pi/4, Pi}; f[u]**

Out[32]= $\{0, \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, 0\}$

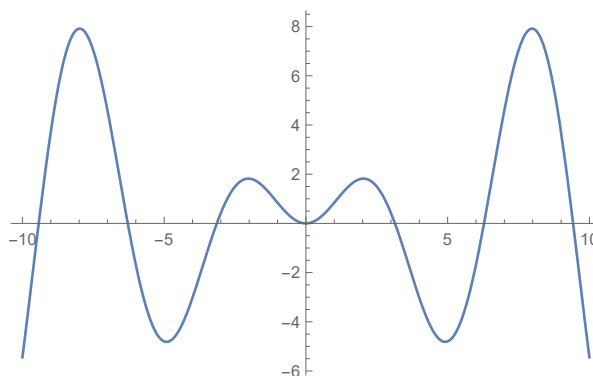
In[33]:= **Table[f[k*Pi/4], {k, 0, 4}]**

Out[33]= $\{0, \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}, 0\}$

Η δυνατότητα που μας δίνει το Mathematica για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Η βασική εντολή είναι **Plot** με δύο ορίσματα σε αγκύλες: στο πρώτο είναι οι συναρτήσεις που θέλουμε το γράφημά τους, στο δεύτερο ορίζουμε το πεδίο ορισμού της μεταβλητής. Τα επόμενα παραδείγματα θα δείξουν τη χρήση της εντολής σε δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις. Πρώτα θα δούμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x)$ που ορίσαμε προηγουμένως (Σχήμα 1.1).

In[34]:= **Plot[f[x], {-10, 10}]**

Out[34]=

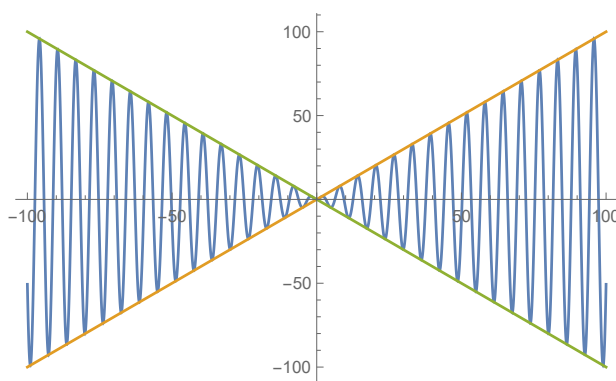


Σχήμα 1.1: Το γράφημα της $y = x \sin x$ με Mathematica.

Με την επόμενη εντολή απεικονίζουμε γραφικά τρεις συναρτήσεις (Σχήμα 1.2).

In[35]:= **Plot[{x*Sin[x], x, -x}, {-100, 100}]**

Out[35]=



Σχήμα 1.2: Τα γραφήματα των $y = x \sin x$, $y = x$, $y = -x$ με Mathematica.

Το Mathematica μπορεί να κάνει απλούς και πολύπλοκους υπολογισμούς διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Η εντολή **Limit**[f , $x \rightarrow x_0$] υπολογίζει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ μίας συνάρτησης $f(x)$. Σχηματίζουμε το βέλος \rightarrow χρησιμοποιώντας διαδοχικά τα πλήκτρα $-$ και $>$, γράφουμε δηλαδή $->$. Το ∞ αναπαρίσταται με το **Infinity**.

```
In[36]:= Limit[Sin[x]/x, x -> 0]
```

```
Out[36]= 1
```

```
In[37]:= Limit[Cos[x]/x, x -> -Infinity]
```

```
Out[37]= 0
```

```
In[38]:= Limit[(1+1/x)^x, x -> Infinity]
```

```
Out[38]= e
```

Στο παράδειγμα που ακολουθεί υπολογίζουμε τα πλευρικά όρια της συνάρτησης $\frac{1}{x}$ καθώς το x πλησιάζει το 0 από τα δεξιά και τα αριστερά.

```
In[39]:= Limit[1/x, x -> 0, Direction -> "FromAbove"]
```

```
Out[39]= Infinity
```

```
In[40]:= Limit[1/x, x -> 0, Direction -> "FromBelow"]
```

```
Out[40]= -Infinity
```

Η εντολή **D**[expr , x] υπολογίζει την παράγωγο μίας συνάρτησης expr ως προς τη μεταβλητή x που καθορίζεται στο δεύτερο όρισμα, ενώ η εντολή **D**[expr , $\{x, \kappa\}$] υπολογίζει την παράγωγο τάξης κ της συνάρτησης ως προς τη μεταβλητή x .

```
In[41]:= D[x^3 + 3x, x]
```

```
Out[41]= 3 + 3x^2
```

```
In[42]:= D[x^3 + 3x, {x, 3}]
```

```
Out[42]= 6
```

Υπολογίζουμε την παράγωγο $f'(x)$ και την τέταρτη παράγωγο $f^{(4)}(x)$ της συνάρτησης $f(x) = x \sin x$.

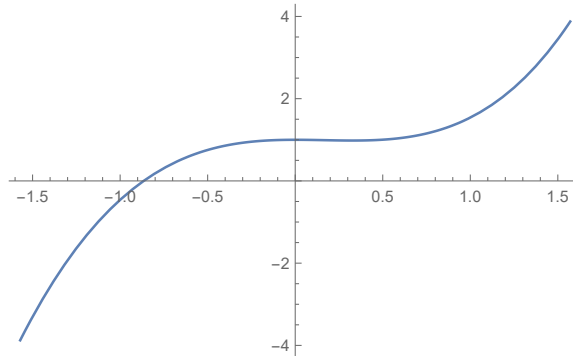
```
In[43]:= {D[f[x], x], D[f[x], {x, 4}]}
```

```
Out[43]= {x cos[x]+sin[x], -4 cos[x]+x sin[x]}
```

Η εντολή **Integrate**[expr , x] δίνει μία παράγουσα της συνάρτησης expr , ενώ η εντολή **Integrate**[expr , $\{x, a, b\}$] υπολογίζει το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^b \text{expr} dx$. Παρακάτω υπολογίζουμε μία παράγουσα

της συνάρτησης $g(x) = x^3 + \cos x$, το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(x) dx$ και το γράφημα της $y = g(x)$ (Σχήμα 1.3).

```
In[44]:= Integrate[ x^3 + Cos[x], x ]
Out[44]=  $\frac{x^4}{4} + \text{Sin}[x]$ 
In[45]:= Integrate[ x^3 + Cos[x], {x, -Pi/2, Pi/2} ]
Out[45]= 2
In[46]:= Plot[ x^3 + Cos[x], {x, -Pi/2, Pi/2} ]
Out[46]=
```



Σχήμα 1.3: Το γράφημα της $y = x^3 + \cos x$ με Mathematica.

Το Mathematica είναι χρήσιμο για την ανάλυση, απλοποίηση ή παραγοντοποίηση τριγωνομετρικών παραστάσεων, καθώς αναγνωρίζει τις τριγωνομετρικές ταυτότητες, αρκεί να μπει το πρόθεμα **Trig** πριν από τις αντίστοιχες εντολές.

```
In[47]:= TrigExpand[ Sin[x+y] ]
Out[47]= Cos[y] Sin[x] + Cos[x] Sin[y]
In[48]:= TrigExpand[ Sin[2x] ]
Out[48]= 2 Cos[x] Sin[x]
In[49]:= TrigExpand[ Sin[2x+y] ]
Out[49]= 2 Cos[x] Cos[y] Sin[x] + Cos[x]^2 Sin[y] - Sin[x]^2 Sin[y]
In[50]:= TrigReduce[ Sin[x]^2 ]
Out[50]=  $\frac{1}{2} (1 - \text{Cos}[2x])$ 
In[51]:= TrigReduce[ Sin[x] * Cos[y] ]
Out[51]=  $\frac{1}{2} (\text{Sin}[x-y] + \text{Sin}[x+y])$ 
In[52]:= TrigFactor[ Cos[x] + Cos[y] ]
Out[52]=  $2 \text{Cos} \left[ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right] \text{Cos} \left[ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \right]$ 
```

1.2 Ασκήσεις

Ασκήσεις για Εξάσκηση

1.2.1 Να υπολογίσετε με προσέγγιση 10 δεκαδικών ψηφίων τους αριθμούς

$$\begin{array}{lllllll} \text{i)} \sqrt[3]{\pi^5} & \text{ii)} \pi^\pi & \text{iii)} \pi^e & \text{iv)} \sqrt{e} & \text{v)} e^e & \text{vi)} e^{\sqrt{e}} & \text{vii)} \ln 10 \\ \text{viii)} \ln(\ln 10) & \text{ix)} \sin \frac{\pi}{5} & \text{x)} \cos \frac{5\pi}{7} & \text{xi)} \cos e & \text{xii)} e^{\cos e}. \end{array}$$

1.2.2 Να βρείτε πόσα ψηφία έχει ο αριθμός $100!$

1.2.3 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

i) $y = \sin x, \quad y = 2 \sin x, \quad y = 3 \sin x$

ii) $y = \sin x, \quad y = \sin 2x$

iii) $y = \sin x, \quad y = \sin^2 x.$

1.2.4 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

i) $1 - x - y + 2xy - x^2y - xy^2 + x^2y^2$

ii) $-x - x^3 + y + xy + x^3y - y^2 + xy^2 - xy^3.$

1.2.5 i) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $-3 - 5x - 4x^2 - x^3 + x^4.$

ii) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = -3 - 5x - 4x^2 - x^3 + x^4$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση C_P της συνάρτησης $y = P(x)$, όταν το x παίρνει τιμές από το -2 έως το 4 .

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_P και τον άξονα x' .

v) Να βρείτε τις εφαπτομένες ϵ_0 και ϵ_1 της C_P στα σημεία $A(0, P(0))$ και $B(1, P(1))$ αντίστοιχα. Πόσα κοινά σημεία έχει η C_P με την ϵ_0 και πόσα με την ϵ_1 ;

vi) Να βρείτε μία ευθεία $\epsilon : y = \alpha x + \beta$ που να τέμνει τη γραφική παράσταση C_P σε 4 σημεία.

1.2.6 Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $10 \cos x = x$ στο διάστημα $[-5, 5]$; Προσπαθήστε να υπολογίσετε μία από αυτές τις ρίζες με προσέγγιση ενός δεκαδικού κάνοντας τη γραφική παράσταση κατάλληλης συνάρτησης.

1.2.7 Στο ίδιο σύστημα αξόνων να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 2 \cos x + x^{\frac{2}{5}}$ και της εφαπτομένης της ϵ στο σημείο με τετμημένη 2π , όταν το x παίρνει τιμές από το 0 έως το 20 .

1.2.8 Να λύσετε γραφικά το σύστημα

$$2x + 5y = 10$$

$$3x - 4y = 2$$

1.2.9 Να βρείτε τις παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης καθώς και μία παράγουσα της συνάρτησης $f(x) = 2^x \cos x.$

1.2.10 Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin e^x}{e^x}$. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα που βρήκατε κάνοντας τη γραφική παράσταση της $f(x)$.

1.2.11 Έστω η συνάρτηση $f(x) = |1 + x|^{\frac{1}{x}}$.

i) Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$.

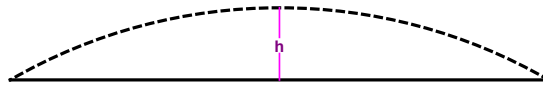
ii) Αφού υπολογίσετε τις τιμές $f(-1.01)$ και $f(-0.99)$, να βρείτε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$, όταν το x παίρνει τιμές από το -5 έως το 5 και όταν παίρνει τιμές από το -50 έως το 50 .

1.2.12 Αν για τη γωνία ϕ ισχύει $\sin \phi = 3/5$, να βρεθούν τα $\cos 3\phi$, $\sin 5\phi$ και $\sin^2(\phi/2)$.

1.2.13 Μία ευθύγραμμη σιδηροτροχιά μήκους 1000 m διαστέλλεται λόγω θερμότητας και αποκτά σχήμα τόξου κύκλου, μήκους 1001 m . Να βρεθεί κατά προσέγγιση η μέγιστη απόσταση h της σιδηροτροχιάς από το έδαφος, βλ. Σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4: Σιδηροτροχιά πριν και μετά τη διαστολή.

Βιβλιογραφία

- [1] Κωνσταντίνος Παπαδόπουλος, *Εισαγωγή στο Mathematica*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2003. ISBN: 978-960-418-217-6.
- [2] Ν. Καραμπετάκης, Σ. Σταματάκης και Ε. Ψωμόπουλος, *Μαθηματικά και Προγραμματισμός στο Mathematica*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Ζήτη, 2004. ISBN: 978-960-431-897-1.
- [3] Στέφανος Τραχανάς, *Mathematica και Εφαρμογές*. Κρήτη: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001. ISBN: 978-960-524-141-4.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ, ΜΕΡΟΣ Ι

Σύνοψη

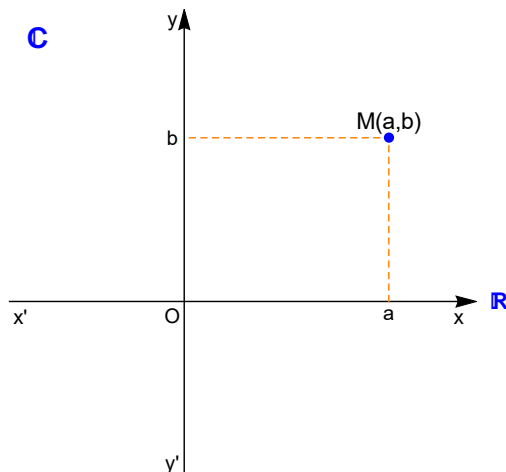
Στο κεφάλαιο αυτό θεμελιώνεται το σώμα των μιγαδικών αριθμών και μελετώνται οι βασικές ιδιότητές τους. Έμφαση δίνεται στη γεωμετρική παράσταση των μιγαδικών αριθμών και στη γεωμετρική ερμηνεία των πράξεών τους. Κάποια από τα παραδείγματα και τις ασκήσεις βασίστηκαν στα [1], [2].

Προαπαιτούμενη γνώση: Βασικές Λυκειακές γνώσεις γεωμετρίας.

2.1 Το Σώμα των Μιγαδικών

Η επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων απασχόλησε από πολύ νωρίς τους μαθηματικούς. Για τις απαρχές της προσπάθειας επίλυσης της δευτεροβάθμιας πάμε ήδη πίσω στους Βαβυλώνιους (2000 π.Χ.), ενώ οι αρχαίοι Έλληνες (400 π.Χ.) με γεωμετρικές μεθόδους μπορούσαν να δώσουν σε κάποιες περιπτώσεις τις ρίζες. Ο Διόφαντος τον τρίτο αιώνα μ.Χ. έδωσε τον τύπο για μία από τις θετικές ρίζες (όταν αυτή υπήρχε), ενώ στη συνέχεια σημαντικές συνεισφορές έκαναν οι Ινδοί και οι Πέρσες μαθηματικοί. Τον 16ο αιώνα μ.Χ. οι Ιταλοί μαθηματικοί κατάφεραν να δώσουν τύπο για τις λύσεις πολυωνυμικών εξισώσεων τρίτου και τετάρτου βαθμού. Σε αυτήν την προσπάθεια έγινε φανερό ότι είναι αναγκαίο να επιτραπεί ο χειρισμός και οι πράξεις (όπως η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός) τετραγωνικών ριζών αρνητικών αριθμών και των συνδυασμών τους. Παράλληλα, προχωρούσε και η θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Έτσι διαφάνηκε η ανάγκη να βρεθεί ένα σύνολο που να «περιέχει» το σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών αλλά και τις τετραγωνικές ρίζες των αρνητικών πραγματικών. Μάλιστα στο σύνολο αυτό, είναι επιθυμητό να έχουν οριστεί πράξεις ανάλογες αυτών των πραγματικών. Το μικρότερο τέτοιο σύνολο είναι αυτό που αποκαλούμε *σώμα των μιγαδικών*

αριθμών και που συμβολίζουμε με \mathbb{C} . Υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι για την κατασκευή του. Εδώ θα ορίσουμε το \mathbb{C} μέσω του **μιγαδικού επιπέδου** \mathbb{R}^2 ορίζοντας παράλληλα το άθροισμα και το γινόμενο των στοιχείων του (Σχήμα 2.1).



Σχήμα 2.1: Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} .

Για να εξηγήσουμε πώς το \mathbb{C} περιέχει το \mathbb{R} , «ταυτίζουμε» τα στοιχεία του \mathbb{R} με σημεία του οριζόντιου άξονα που η πρώτη συντεταγμένη τους είναι ακριβώς το αντίστοιχο στοιχείο του \mathbb{R} . Ονομάζουμε τον οριζόντιο άξονα του μιγαδικού επιπέδου *άξονα των πραγματικών αριθμών*. Μπορούμε να κάνουμε αυτήν την ταύτιση, γιατί η συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C} : a \mapsto (a, 0), \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

είναι 1 – 1. Μένει να ορίσουμε τις πράξεις της πρόσθεσης «+» και του πολλαπλασιασμού «·» στο \mathbb{C} με τέτοιον τρόπο που θα τις κάνει συμβατές με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στο \mathbb{R} . Ο ορισμός της πρόσθεσης είναι απλός, για το άθροισμα δύο στοιχείων του \mathbb{C} αθροίζουμε τις αντίστοιχες συντεταγμένες:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}.$$

Για τον πολλαπλασιασμό όμως στο \mathbb{C} θα χρειαστεί να γίνουμε λίγο πιο εφευρετικοί. Ο κύριος λόγος είναι ότι επιθυμούμε η μονάδα $1_{\mathbb{R}}$ του \mathbb{R} (το $(1, 0)$ του επιπέδου μετά την «ταύτιση» του οριζόντιου άξονα με το \mathbb{R}), να διατηρήσει τον περίοπτο ρόλο της και να είναι και η μονάδα του \mathbb{C} : με άλλα λόγια, θέλουμε ο πολλαπλασιασμός με το $1_{\mathbb{R}}$ να αφήνει αμετάβλητα όλα τα στοιχεία του \mathbb{C} . Ορίζουμε, λοιπόν, τον πολλαπλασιασμό ως εξής:

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc), \quad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}.$$

Η τριάδα $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

Ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στους μιγαδικούς

- (i) η «+» έχει την προσεταιριστική ιδιότητα, δηλ. $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$, $\forall \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
- (ii) Η αρχή των αξόνων, το $(0, 0)$ λειτουργεί ως το μηδενικό στοιχείο του \mathbb{C} : $(0, 0) + \kappa = \kappa + (0, 0) = \kappa$, $\forall \kappa \in \mathbb{C}$. Γράφουμε $0_{\mathbb{C}}$ ή απλά 0 για το $(0, 0)$.
- (iii) κάθε στοιχείο του \mathbb{C} έχει αντίθετο: $\forall \kappa \in \mathbb{C}$, υπάρχει $\kappa' \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\kappa + \kappa' =$

$\kappa' + \kappa = 0_{\mathbb{C}}$. Πράγματι, το αντίθετο του $\kappa = (a, b)$ είναι το $\kappa' = (-a, -b)$. Γράφουμε $-\kappa$ για τον αντίθετο του κ .

(iv) η « + » έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα: $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$, $\forall \kappa, \lambda \in \mathbb{C}$.

(v) ο « · » έχει την προσεταιριστική ιδιότητα: $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$, $\forall \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

(vi) Το \mathbb{C} έχει πολλαπλασιαστική μονάδα: $\forall \kappa \in \mathbb{C}$, ισχύει ότι $(1, 0) \cdot \kappa = \kappa \cdot (1, 0) = \kappa$. Γράφουμε $1_{\mathbb{C}}$ για το $(1, 0)$.

(vii) κάθε μη μηδενικό στοιχείο του \mathbb{C} έχει αντίστροφο: $\forall \kappa \in \mathbb{C}$, $\kappa \neq 0_{\mathbb{C}}$, υπάρχει $\kappa'' \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε $\kappa \cdot \kappa'' = \kappa'' \cdot \kappa = 1_{\mathbb{C}}$. Πράγματι, αν $\kappa = (a, b) \neq (0, 0)$, ο αντίστροφος του κ είναι το $\kappa'' = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$, αφού

$$\kappa \cdot \kappa'' = (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2 - b(-b)}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ba}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) = 1_{\mathbb{C}}$$

και ομοίως για το $\kappa \cdot \kappa''$. Γράφουμε $1/\kappa$ ή κ^{-1} για τον αντίστροφο του κ .

(viii) ο « · » έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα: $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$, $\forall \kappa, \lambda \in \mathbb{C}$.

(ix) οι δύο πράξεις έχουν την επιμεριστική ιδιότητα: $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$ και $(\kappa + \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot \mu + \lambda \cdot \mu$, $\forall \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Κάθε σύνολο με πράξεις που ικανοποιούν τις ιδιότητες που αναφέραμε προηγουμένως λέγεται **σώμα**. Το \mathbb{C} είναι, λοιπόν, σώμα. Η τριάδα $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ επίσης ικανοποιεί τις αντίστοιχες ιδιότητες και το \mathbb{R} είναι και αυτό σώμα. Αντίθετα, η τριάδα $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ δεν ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες: ο αντίστροφος ενός ακεραίου δεν είναι πάντα ακέραιος (για παράδειγμα $2^{-1} = 1/2 \notin \mathbb{Z}$) και έτσι \mathbb{Z} δεν είναι σώμα. Δίνουμε, λοιπόν, συγκεντρωτικά τον ορισμό των μιγαδικών αριθμών.

Ορισμός 2.1.0.1 Το σύνολο $\mathbb{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ με πράξεις « + », « · » που ορίζονται από τις σχέσεις

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc),$$

$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$, αποτελεί σώμα και ονομάζεται **σώμα των μιγαδικών αριθμών**.

Σημειώνουμε ότι η αφαίρεση $z_1 - z_2$ δύο μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 ορίζεται ως η πρόσθεση του αντίθετου του z_2 στο z_1 , δηλαδή

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2),$$

ενώ, αν $z_2 \neq 0$, τότε ορίζεται και η διαίρεση z_1/z_2 ως το γινόμενο του z_1 με τον αντίστροφο του z_2 , δηλαδή

$$z_1/z_2 := z_1 \cdot z_2^{-1}.$$

Γιατί όμως χρειάστηκε να ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό στο \mathbb{C} με τόσο φαινομενικά περίπλοκο τρόπο; Θα μπορούσαμε να είχαμε ορίσει τον πολλαπλασιασμό στο \mathbb{R}^2 με διαφορετικό τρόπο και να προέκυπτε και πάλι σώμα; Ας δούμε μία συγκεκριμένη περίπτωση. Έστω ότι ο πολλαπλασιασμός « · » είχε οριστεί ως εξής: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$. Στην περίπτωση αυτή, το στοιχείο $(1, 1)$ θα λειτουργούσε ως πολλαπλασιαστική μονάδα, αφού $(1, 1) \cdot (a, b) = (a, b) \cdot (1, 1) = (a, b)$. Όμως δεν θα είχαν όλα τα (μη μηδενικά) στοιχεία του \mathbb{R}^2

αντίστροφο στοιχείο. Συγκεκριμένα, κανένα στοιχείο της μορφής $(a, 0)$ ή $(0, b)$ δεν θα μπορούσε να αντιστραφεί, δηλ. να πολλαπλασιαστεί με κάποιο άλλο στοιχείο και να μας δώσει την πολλαπλασιαστική μονάδα $(1, 1)$.

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\phi(a) = (a, 0)$, που ταυτίζει τα στοιχεία του \mathbb{R} με τα στοιχεία του άξονα των πραγματικών, «είναι συμβατή» με τις πράξεις των δύο σωμάτων $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ και $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, δηλαδή $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$\phi(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \phi(a) + \phi(b)$$

και

$$\phi(ab) = (ab, 0) = (a, 0) \cdot (b, 0) = \phi(a) \cdot \phi(b).$$

Στη γλώσσα των μαθηματικών λέμε ότι το \mathbb{R} *εμφυτεύεται* στο \mathbb{C} . Η ταύτιση του οριζόντιου άξονα των πραγματικών με τους πραγματικούς αριθμούς είναι πλήρης από κάθε άποψη. Μάλιστα, θα προχωρήσουμε σε ένα παραπάνω επίπεδο αφαίρεσης και αν το $a \in \mathbb{R}$, θα επιτρέψουμε στους εαυτούς μας να γράφουμε a εννοώντας είτε το $a \in \mathbb{R}$ είτε το $\phi(a) = (a, 0)$ του \mathbb{C} . Άλλωστε θεωρούμε πλέον ότι το \mathbb{R} περιέχεται στο \mathbb{C} και από τα συμφραζόμενα θα είναι ξεκάθαρο τι ακριβώς εννοούμε. Έτσι, αν $a \in \mathbb{R}$ και $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, τότε έχει νόημα να γράφουμε ότι

$$a \cdot z = z \cdot a = (a, 0) \cdot (x, y) = (ax, ay).$$

Μπορούμε, όμως, να πούμε και κάτι ιδιαίτερα ενδιαφέρον για τον κάθετο άξονα του μιγαδικού επιπέδου. Ας θέσουμε $i = (0, 1)$ και ας δοκιμάσουμε να πολλαπλασιάσουμε το i με πραγματικούς αριθμούς, δηλ. με στοιχεία του πραγματικού άξονα. Έστω $b \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι

$$i \cdot b = i \cdot (b, 0) = (0, 1) \cdot (b, 0) = (0, b)$$

και το αποτέλεσμα είναι ένας μιγαδικός αριθμός πάνω στον κάθετο άξονα. Έτσι μπορούμε να γράψουμε τον μιγαδικό $(a, b) \in \mathbb{C}$ ως εξής:

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + i \cdot b = a + b \cdot i,$$

δηλαδή

$$(a, b) = a + ib = a + bi$$

και άρα το σώμα των μιγαδικών αριθμών είναι το σύνολο

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Θα γράψουμε την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό δύο στοιχείων $z_1 = (a, b) = a + ib$, $z_2 = (c, d) = c + id$ του \mathbb{C} χρησιμοποιώντας αυτήν τη γραφή. Από τον ορισμό των πράξεων βλέπουμε ότι

$$z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d),$$

ενώ

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Είναι φανερό ότι

$$z_1 - z_2 = (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d),$$

ενώ αν $z_2 \neq 0$, τότε

$$\frac{1}{z_2} = \frac{c}{c^2 + d^2} - i \frac{d}{c^2 + d^2} \quad \text{και} \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}.$$

Παρατηρούμε, επίσης, ότι το i έχει την εξής εκπληκτική ιδιότητα:

$$i^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1 + i \cdot 0 \Rightarrow i^2 = -1.$$

Με άλλα λόγια, το τετράγωνο του μιγαδικού αριθμού i είναι ίσο με αρνητικό πραγματικό αριθμό, ιδιότητα που δεν υφίσταται στον κόσμο των πραγματικών αριθμών. Για τον λόγο αυτόν, ο μιγαδικός $i \in \mathbb{C}$ ονομάζεται **φανταστική μονάδα**. Τα στοιχεία της μορφής ib , $b \in \mathbb{R}$, που όπως είδαμε βρίσκονται στον κάθετο άξονα του μιγαδικού επιπέδου, λέγονται **φανταστικοί αριθμοί**. Το σύνολο των φανταστικών αριθμών συμβολίζεται με $i\mathbb{R}$ ή \mathbf{I} , δηλαδή

$$i\mathbb{R} = \{ib : b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$$

και ο κάθετος άξονας στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο **άξονας των φανταστικών**. Αν $z = a + ib \in \mathbb{C}$, με $a, b \in \mathbb{R}$, τότε το a λέγεται **πραγματικό μέρος** του z και συμβολίζεται με $\operatorname{Re}(z)$. Το b λέγεται **φανταστικό μέρος** του z και συμβολίζεται με $\operatorname{Im}(z)$. Οποιοσδήποτε μιγαδικός $z \in \mathbb{C}$ γράφεται

$$z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z), \quad \text{όπου } \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{R}.$$

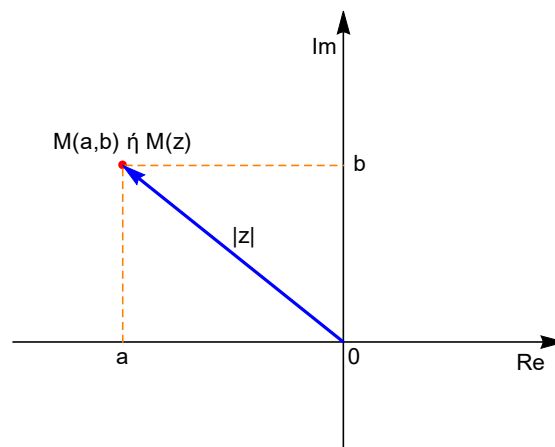
Εδώ θα επιστήσουμε την προσοχή στο ότι το φανταστικό μέρος του z είναι πραγματικός και όχι φανταστικός αριθμός. Επιπλέον, το μηδενικό στοιχείο, $0 = 0 + 0i = 0i$ θεωρείται ταυτόχρονα και πραγματικός, και φανταστικός αριθμός και είναι ο μοναδικός μιγαδικός αριθμός με αυτήν την ιδιότητα, δηλ. $\mathbb{R} \cap i\mathbb{R} = \{0\}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι για να προσθέσουμε δύο μιγαδικούς προσθέτουμε πραγματικά με πραγματικά και φανταστικά με φανταστικά μέρη:

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2), \quad \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2).$$

Ας επιστρέψουμε στο μιγαδικό επίπεδο. Ο πραγματικός άξονας $x'x$ συμβολίζεται με Re , ενώ ο φανταστικός άξονας με Im . Είδαμε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z = a + ib \in \mathbb{C}$, με $a, b \in \mathbb{R}$, αντιστοιχεί στο σημείο $M(a, b)$ του μιγαδικού επιπέδου. Ακόμη πιο παραστατικά, θα αντιστοιχίσουμε στο $z = a + ib$ το βέλος ή διάνυσμα \overrightarrow{OM} που έχει αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων και τελικό σημείο το σημείο $M(a, b)$. Έχουμε, λοιπόν, μία 1-1 και επί απεικόνιση από το σύνολο \mathbb{C} στο σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου (βλ. Σχήμα 2.2),

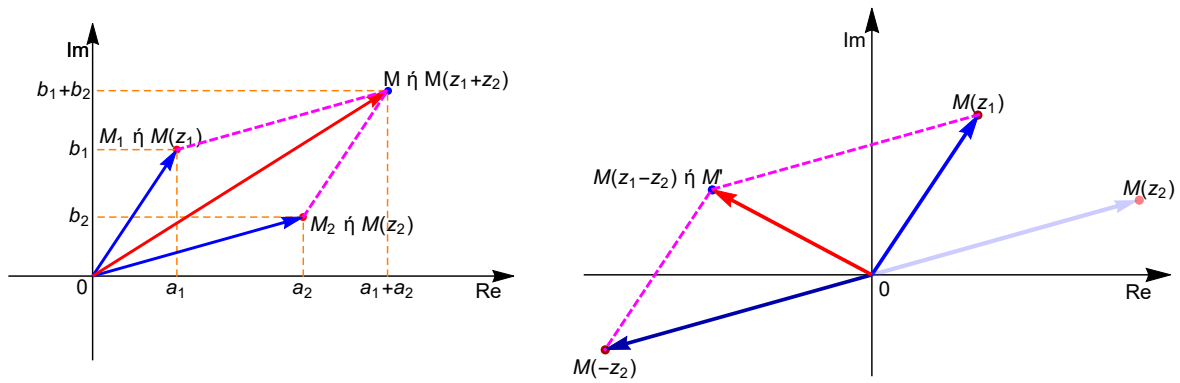
$$z = a + ib \longleftrightarrow M(a, b) \longleftrightarrow \overrightarrow{OM}.$$

Το σημείο M με συντεταγμένες (a, b) λέγεται **εικόνα του μιγαδικού** $z = a + ib$ και συμβολίζεται με $M(z)$ (ή χάριν ευκολίας απλά με z) και το διάνυσμα \overrightarrow{OM} λέγεται **διανυσματική ακτίνα** του μιγαδικού $z = a + ib$.



Σχήμα 2.2: Αναπαράσταση του $z = a + ib$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ακτίνα των μιγαδικών μπορούμε να έχουμε τη γραφική απεικόνιση του αθροίσματος και της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών με τον « κανόνα του παραλληλογράμμου », βλ. Σχήμα 2.3.



Σχήμα 2.3: Γεωμετρική παράσταση αθροίσματος, διαφοράς μιγαδικών.

Δεν είναι τόσο απλό να απεικονίσουμε γραφικά το γινόμενο δύο μιγαδικών. Σε κάθε περίπτωση, σημειώνουμε ότι για τον πολλαπλασιασμό δύο μιγαδικών αριθμών, ακόμα και αν δεν θυμόμαστε τον τύπο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την επιμεριστική ιδιότητα και τη σχέση $i^2 = -1$. Ας το επιβεβαιώσουμε για τους $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id \in \mathbb{C}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + ib) \cdot (c + id) = a(c + id) + ib(c + id) = ac + aid + ibc + i^2bd = \\ &= ac + iad + ibc - bd = (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned}$$

Παραδείγματα 2.1.0.2

- i. $\operatorname{Re}(i) = 0$, $\operatorname{Im}(i) = 1$,
- ii. Αν $a \in \mathbb{R}$, τότε $\operatorname{Re}(a) = a$ και $\operatorname{Im}(a) = 0$.
- iii. $(3 + 5i) + (-2 + 4i) = 1 + 9i$.
- iv. $3 + 5i - (-2 + 4i) = 3 + 5i + 2 - 4i = 5 + i$.
- v. $(3 + 5i)^{-1} = 3/34 - 5/34i$.
- vi. Έστω $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Αφού $z + 1 = (a + 1) + ib$ και $z + i = a + i(b + 1)$, έχουμε ότι

$$\operatorname{Re}(z + 1) = \operatorname{Re}(z) + 1, \operatorname{Im}(z + 1) = \operatorname{Im}(z), \operatorname{Re}(z + i) = \operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z + i) = \operatorname{Im}(z) + 1.$$
- vii. $-2(5 + 3i) = -10 - 6i$.
- viii. $(3 + 2i)(-4 + 5i) = -12 + 15i - 8i + 10i^2 = -22 + 7i$.
- ix. $i(2 + i) - (5 + i)(3 - 2i) + (2 + 3i)^2 = 2i - 1 - (15 - 10i + 3i + 2) + 2^2 + 12i + (3i)^2 = -23 + 21i$.
- x. $i^{-1} = (0 + 1i)^{-1} = \frac{0}{1} - i \frac{1}{1} = -i$.
- xi. $\frac{2 + i}{1 + 3i} = \frac{1}{2} + i \frac{-1}{2}$.

xii. Ορίζουμε δυνάμεις μιγαδικών αριθμών με ακέραιο εκθέτη όπως ορίζουμε δυνάμεις στο \mathbb{R} . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι για τις δυνάμεις μιγαδικών ισχύουν οι ιδιότητες που ισχύουν στο \mathbb{R} . Παρατηρούμε ότι

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$$

Για να υπολογίσουμε το i^n , $n \in \mathbb{Z}$, εκτελούμε την Ευκλείδεια διαίρεση του n με το 4, $n = 4\rho + \nu$, $\rho, \nu \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \nu < 4$. Τότε

$$i^n = i^{4\rho + \nu} = (i^4)^\rho \cdot i^\nu = 1^\rho \cdot i^\nu = i^\nu.$$

Έτσι

$$i^n = \begin{cases} 1, & n = 4\rho \\ i, & n = 4\rho + 1 \\ -1, & n = 4\rho + 2 \\ -i, & n = 4\rho + 3. \end{cases}$$

Για παράδειγμα, $-17 = 4(-5) + 3$ και $i^{-17} = i^3 = -i$.

Δύο μιγαδικοί είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσα πραγματικά και φανταστικά μέρη, Έτσι,

$$a + ib = c + id \Leftrightarrow a = c \quad \text{και} \quad b = d$$

ή ισοδύναμα

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2) \quad \text{και} \quad \operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2).$$

Ειδικά για το μηδέν έχουμε

$$a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0 \quad \text{και} \quad b = 0.$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν την παρατήρηση για να λύσουμε εξισώσεις με μιγαδικούς αριθμούς, όπως στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.1.0.3 Θα βρούμε τους $x, y \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει

$$(3 - 2i)(2x - yi) = -2i(y + 2xi) + 2i - 1$$

Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} (6x - 2y) + (-4x - 3y)i &= (4x - 1) + (-2y + 2)i \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6x - 2y = 4x - 1 \\ -4x - 3y = -2y + 2 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - 2y = -1 \\ -4x - y = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1/2 \\ y = 0 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Η μεγάλη χρησιμότητα των μιγαδικών αριθμών είναι ότι εξισώσεις που δεν είχαν λύσεις στους πραγματικούς αριθμούς μπορούν να λυθούν εάν επιτρέψουμε οι λύσεις να είναι μιγαδικοί.

Παρατηρήσεις 2.1.0.4

(α) Στο σύνολο \mathbb{C} το πολυώνυμο $x^2 + 1$ παραγοντοποιείται. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ έχουμε ότι

$$x^2 + 1 = x^2 - (-1) = x^2 - i^2 = (x - i)(x + i),$$

Επομένως, η εξίσωση $x^2 = -1$ έχει τις λύσεις $\pm i$, αφού

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - i)(x + i) = 0 \Leftrightarrow x = i \quad \text{ή} \quad x = -i.$$

- (β) Αντίστοιχα, στο σύνολο \mathbb{C} το πολυώνυμο $x^2 + a$ παραγοντοποιείται ακόμα και όταν a είναι θετικός πραγματικός. Για να το δούμε αυτό. Έχουμε:

$$x^2 + a = x^2 - (-a) = x^2 - (i^2 \sqrt{a}^2) = x^2 - (i\sqrt{a})^2 = (x - i\sqrt{a})(x + i\sqrt{a}).$$

Επομένως, η εξίσωση $x^2 = b$ έχει λύση ακόμα και όταν b είναι αρνητικός πραγματικός. Πράγματι, όταν $b < 0$, τότε $-b = |b|$ και

$$x^2 = b \Leftrightarrow x^2 + |b| = 0 \Leftrightarrow (x - i\sqrt{|b|})(x + i\sqrt{|b|}) = 0 \Leftrightarrow x = i\sqrt{|b|} \text{ ή } x = -i\sqrt{|b|}.$$

- (γ) Είναι εκπληκτικό, παρόλο που δεν είμαστε σε θέση αυτήν τη στιγμή να το αποδείξουμε, ότι όλες οι πολυωνυμικές εξισώσεις που μπορούμε να φανταστούμε με συντελεστές από το \mathbb{C} , οποιουδήποτε βαθμού, έχουν λύσεις στο \mathbb{C} .

2.2 Μέτρο Μιγαδικών Αριθμών, Συζυγείς Μιγαδικοί

Ονομάζουμε **μέτρο** του μιγαδικού αριθμού $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ και συμβολίζουμε με $|z|$ τον μη αρνητικό πραγματικό αριθμό $\sqrt{a^2 + b^2}$. Με άλλα λόγια, $|z|$ ισούται με την απόσταση του $M(a, b)$ στο μιγαδικό επίπεδο από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ (βλ. Σχήμα 2.2). Έτσι

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z)}.$$

Παραδείγματα 2.2.0.1

i. $|\pm 1| = |\pm i| = 1.$

ii. $|3 - 5i| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}, |2i| = 2, |-7i| = 7.$

- iii. Αν $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$, τότε

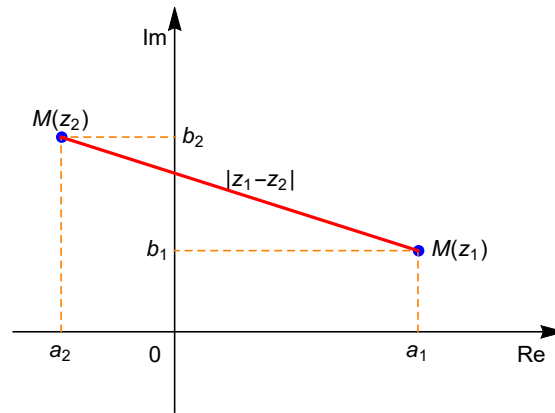
$$|z + 1|^2 = |(x + 1) + yi|^2 = (x + 1)^2 + y^2, \quad |z + i|^2 = x^2 + (y + 1)^2.$$

- iv. Οι πραγματικοί αριθμοί, ως στοιχεία του \mathbb{C} , έχουν μέτρο ίσο με την απόλυτη τιμή τους: πράγματι, αν $a \in \mathbb{R}$ και $z = a + 0i$, τότε $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$. Με αυτόν τον τρόπο δικαιολογείται και η χρήση συμβολισμού της απόλυτης τιμής για το μέτρο μιγαδικού αριθμού.

- v. Αν $z_1 = a_1 + ib_1$ και $z_2 = a_2 + ib_2$ και $M_1 = M(z_1)$, $M_2 = M(z_2)$, τότε

$$|z_1 - z_2| = |(a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2} = (M_1 M_2),$$

δηλαδή το μέτρο $|z_1 - z_2|$ της διαφοράς δύο μιγαδικών ισούται με την απόσταση των εικόνων τους $(M_1 M_2)$ στο μιγαδικό επίπεδο, βλ. Σχήμα 2.4.



Σχήμα 2.4: Μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών.

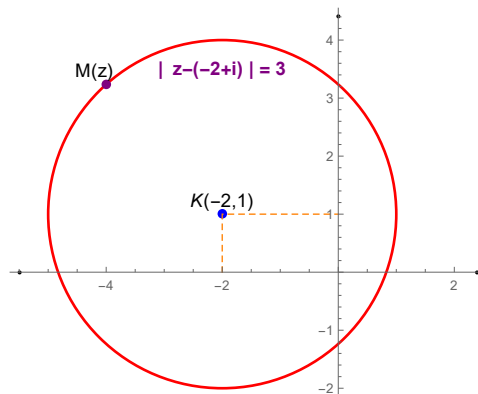
- vi. Έστω $M(z_0)$ η εικόνα του μιγαδικού $z_0 = a_0 + ib_0$ και $\rho \in \mathbb{R}, \rho > 0$. Οι εικόνες $M(z)$ όλων των μιγαδικών $z = x + yi$ που επαληθεύουν τη σχέση $|z - z_0| = \rho$ απέχουν από το σημείο $M(z_0)$ απόσταση ρ . Έτσι οι λύσεις της εξίσωσης

$$|z - z_0| = \rho$$

γραφικά στο μιγαδικό επίπεδο αντιστοιχούν σε κύκλο κέντρου $M(z_0)$, με συντεταγμένες $(\text{Re}(z_0), \text{Im}(z_0))$ και ακτίνας ρ . Ας το επιβεβαιώσουμε κάνοντας τις πράξεις αλγεβρικά:

$$|z - z_0| = \rho \Leftrightarrow |(x - a_0) + i(y - a_0)|^2 = \rho^2 \Leftrightarrow (x - a_0)^2 + (y - a_0)^2 = \rho^2.$$

- vii. Στο Σχήμα 2.5 βλέπουμε τον κύκλο κέντρου $K(-2, 1)$ και ακτίνας $\rho = 3$ που παριστάνει η εξίσωση $|z + 2 - i| = 3$.



Σχήμα 2.5: Η εξίσωση $|z + 2 - i| = 3$ στο μιγαδικό επίπεδο.

- viii. Ειδικότερα, ο **μοναδιαίος κύκλος** στο μιγαδικό επίπεδο αποτελείται από όλους τους μιγαδικούς αριθμούς που ικανοποιούν την εξίσωση $|z| = 1$.
- ix. Όταν $z \in \mathbb{R}$, τότε $|z|^2 = z^2$. Τι συμβαίνει, όμως, στη γενική περίπτωση; Τι μπορούμε να συμπεράνουμε αν για τον μιγαδικό z ισχύει η ισότητα $|z|^2 = z^2$; Έστω ότι $z = a + ib \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$. Έχουμε ότι $|z|^2 = a^2 + b^2$ ενώ $z^2 = (a^2 - b^2) + i2ab$. Κατά συνέπεια, αν $|z|^2 = z^2$, τότε $a^2 + b^2 = (a^2 - b^2) + i2ab$ και άρα

$$a^2 + b^2 = a^2 - b^2 \quad \text{και} \quad i2ab = 0.$$

Αυτό, όμως, μπορεί να συμβεί, αν και μόνο αν $b = 0$, δηλ., αν και μόνο αν $z \in \mathbb{R}$.

- x.** Η εξίσωση $|z|^2 = 1$ έχει άπειρες λύσεις στο \mathbb{C} (όλα τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου), ενώ η εξίσωση $z^2 = 1$ έχει μόνο δύο λύσεις στο \mathbb{C} , τις ± 1 . Για να δούμε το τελευταίο, βλέπουμε ότι αν $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, τότε για να ισχύει $z^2 = 1$ θα πρέπει να έχουμε ότι $a^2 - b^2 = 1$ και $2ab = 0$ και αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν $b = 0$ και $a = \pm 1$, καθώς η περίπτωση $a = 0$ οδηγεί στη σχέση $b^2 = -1$ που δεν έχει λύση στους πραγματικούς.
- xi.** Έστω $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Τότε $|z|^2 = a^2 + b^2$ και άρα $|z|^2 \geq a^2$. Άρα $|a| \leq |z|$ και αφού $a \leq |a|$, έχουμε τελικά ότι $a \leq |z|$. Βλέπουμε λοιπόν ότι $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Είδαμε ότι αν $z = a + ib \in \mathbb{C}$, τότε $|z|^2 = a^2 + b^2$. Παρατηρούμε ότι

$$|z|^2 = a^2 + b^2 = a^2 - (ib)^2 = (a + ib)(a - ib).$$

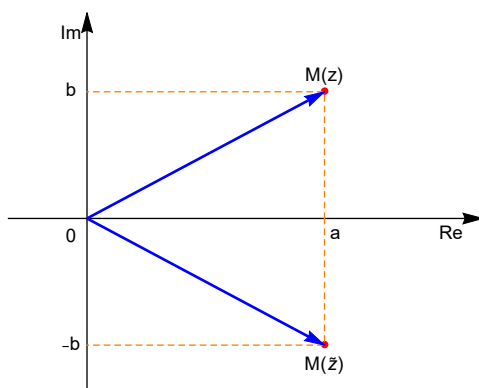
Θα μελετήσουμε τον μιγαδικό αριθμό $a - ib$, που το γινόμενο του με τον z μας δίνει το τετράγωνο του μέτρου του z . Ονομάζουμε **συζυγή** του μιγαδικού $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$, και συμβολίζουμε με \bar{z} τον μιγαδικό αριθμό $a - ib$:

$$\overline{a + ib} = a - ib.$$

Έτσι συζυγείς είναι δύο μιγαδικοί που έχουν ίσα πραγματικά και αντίθετα φανταστικά μέρη,

$$\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z), \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z).$$

Οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών $z = a + ib$ και $\bar{z} = a - ib$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα των πραγματικών x' , όπως βλέπουμε στο Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Συζυγείς μιγαδικοί.

Στην πρόταση που ακολουθεί συγκεντρώνουμε τις ιδιότητες των συζυγών.

Πρόταση 2.2.0.2 *Ιδιότητες συζυγών* Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε

- (i) $z \neq 0 \Leftrightarrow \bar{z} \neq 0$.
- (ii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
- (iii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- (iv) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

$$(v) \text{ Αν } z_2 \neq 0, \text{ τότε } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2},$$

$$(vi) \overline{(z^n)} = (\bar{z})^n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{αν } n < 0, \text{ πρέπει } z \neq 0).$$

$$(vii) \overline{(\bar{z})} = z.$$

$$(viii) z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \in \mathbb{R}.$$

$$(ix) z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z) i \in i\mathbb{R}.$$

$$(x) \bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

$$(xi) \bar{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}.$$

$$(xii) z_1 = z_2 \Leftrightarrow \bar{z}_1 = \bar{z}_2.$$

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ενδεικτικά τις ιδιότητες (iv), (v) και (xi).

(iv) Έστω $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}, a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Τότε $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$ και άρα

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

Αντίστοιχα

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) = a_1 a_2 - ia_1 b_2 - ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

και συνεπώς $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

(v) Μπορούμε να αποδείξουμε την ιδιότητα (v), κάνοντας αναλυτικά τις πράξεις, όπως και με την ιδιότητα (iv). Θα δείξουμε όμως ότι η (v) προκύπτει από την (iv) χρησιμοποιώντας το παρακάτω τέχνασμα:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \cdot \bar{z}_2 = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2\right)} \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \cdot \bar{z}_2 = \bar{z}_1.$$

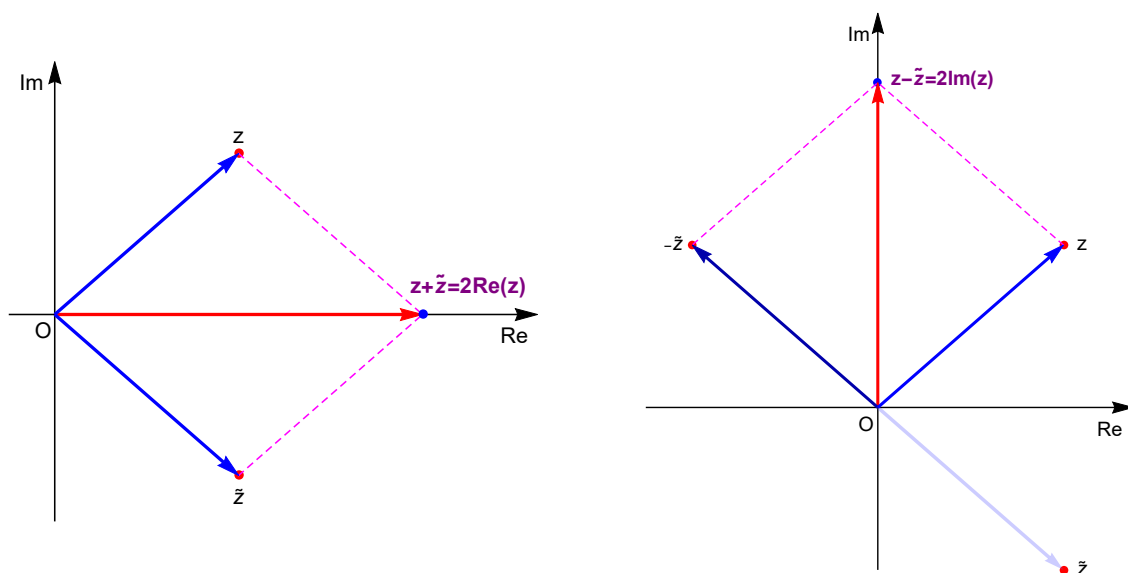
Διαιρώντας τώρα με \bar{z}_2 και τα δύο μέρη της ισότητας προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

(xi) Έστω $z = a + ib \in \mathbb{C}, a, b \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$\bar{z} = -z \Leftrightarrow a - ib = -a - ib \Leftrightarrow a = -a \Leftrightarrow a = 0 \Leftrightarrow z = ib \in i\mathbb{R}.$$

Όμοια γίνονται και οι αποδείξεις των υπόλοιπων ιδιοτήτων και αφήνονται ως άσκηση. Για την απόδειξη της ιδιότητας (vi) συνιστούμε να κάνετε πρώτα την περίπτωση $n > 0$ και να χρησιμοποιήσετε μαθηματική επαγωγή για $n > 0$, ενώ για $n < 0$ να παρατηρήσετε ότι $z^n = (1/z)^{-n}$ και να βασιστείτε στην προηγούμενη περίπτωση και στην ιδιότητα (v).

Στο Σχήμα 2.7 βλέπουμε τη γεωμετρική αναπαράσταση των ιδιοτήτων (viii) και (ix). ■



Σχήμα 2.7: Άθροισμα, διαφορά συζυγών μιγαδικών.

Παρατηρήσεις 2.2.0.3 Πολλαπλασιασμός με τον συζυγή μιγαδικό μας επιτρέπει έναν εύκολο υπολογισμό του αντιστρόφου του μιγαδικού και του πηλίκου δύο μιγαδικών, χωρίς τη μηχανική απομνημόνευση τύπων.

(α) **Υπολογισμός αντίστροφου** Έστω $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Τότε

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2},$$

(β) **Υπολογισμός πηλίκου** Έστω $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. Για να γράψουμε το πηλίκο z/w στη μορφή $a + ib$ πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του w .

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{z \cdot \bar{w}}{|w|^2}.$$

Ο παρονομαστής είναι τώρα θετικός πραγματικός και για τον αριθμητή αρκεί να υπολογίσουμε το αναφερόμενο γινόμενο.

Παραδείγματα 2.2.0.4

i. Ας γράψουμε τον μιγαδικό $\frac{-2 + 3i}{3 + 2i}$ στη μορφή $a + ib$.

$$\frac{-2 + 3i}{3 + 2i} = \frac{(-2 + 3i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{13i}{3^2 + 2^2} = i.$$

ii. Έστω $u = \frac{1 - i}{1 + i}$. Θα δείξουμε ότι $u^{2021} = -i$. Πρώτα θα φέρουμε τον u στη μορφή $a + bi$ πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με τον συζυγή του $1 + i$.

$$u = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{1 - 2i + i^2}{2} = -i,$$

επομένως,

$$u^{2021} = (-i)^{2021} = (-1)^{2021} i^{2021} = (-1) i^{4 \cdot 505 + 1} = -i.$$

Στη συνέχεια επανερχόμαστε στις ιδιότητες του μέτρου των μιγαδικών αριθμών.

Πρόταση 2.2.0.5 Ιδιότητες μέτρου μιγαδικών Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Τότε

(i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (το 0 είναι ο μοναδικός μιγαδικός με μέτρο ίσο με το 0).

(ii) $|z| = |-z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}|$.

(iii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|$.

(iv) Αν $z_2 \neq 0$, τότε $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

(v) $|z^n| = |z|^n, \quad n \in \mathbb{Z}$ (αν $n < 0$, πρέπει $z \neq 0$).

(vi) **Τριγωνική Ανισότητα** $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε ενδεικτικά τις ιδιότητες (iii) και (vi). Οι αποδείξεις των υπόλοιπων ιδιοτήτων αφήνονται ως άσκηση. Καθώς το μέτρο είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, αρκεί να αποδείξουμε τις σχέσεις για τα τετράγωνα των μέτρων.

(iii) Έχουμε ότι

$$|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

(vi) Αποδεικνύουμε αρχικά ότι

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Στην πορεία θα χρησιμοποιήσουμε ότι οι μιγαδικοί $z_1 \bar{z}_2, z_2 \bar{z}_1$ είναι συζυγείς (αποδείξτε το), αλλά και σχέσεις που έχουμε ήδη δει, όπως ότι το άθροισμα $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ και ότι $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ που θα εφαρμόσουμε για $z = z_1 \bar{z}_2$. Σημειώνουμε ότι αφού

$$|z_1 \cdot \bar{z}_2| = |z_1| |\bar{z}_2| = |z_1| |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$$

και $\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) \leq |z_1 \cdot \bar{z}_2|$, τελικά προκύπτει ότι $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leq |z_1 \cdot z_2|$. Ας επιστρέψουμε στην έκφραση $|z_1 + z_2|^2$ για να αποδείξουμε την επιθυμητή ανισότητα. Έχουμε:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2.$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα $z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 = 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)$ (αφού $z_1 \bar{z}_2, z_2 \bar{z}_1$ είναι συζυγείς). Επιπλέον, $z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2$ και $z_2 \bar{z}_2 = |z_2|^2$. Επομένως,

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2.$$

Όμως, όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως, $\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) \leq |z_1 \cdot z_2|$. Άρα

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2 |z_1 \cdot z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Αποδείξαμε λοιπόν την επιθυμητή ανισότητα για τα τετράγωνα των μέτρων και αφού τα μέτρα είναι μη αρνητικοί πραγματικοί, παίρνοντας τις τετραγωνικές ρίζες προκύπτει ότι $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Για το αριστερό σκέλος της τριγωνικής ανισότητας παρατηρούμε ότι αν $a, b \in \mathbb{R}$ με $b > 0$, τότε $|a| \leq b$, αν και μόνο αν $-b \leq a \leq b$. Για να αποδείξουμε, λοιπόν, την ανισότητα $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2|$, πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$-|z_1 + z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

Παρατηρούμε ότι

$$|z_1| = |z_1 + (z_2 - z_2)| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leq |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|$$

(η ανισότητα προκύπτει από το δεξί σκέλος της τριγωνικής ανισότητας που έχουμε ήδη αποδείξει). Επομένως,

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

Ξεκινώντας από το z_2 , αντί του $|z_1|$, έχουμε ότι

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_1 + z_2|$$

και αλλάζοντας τα πρόσημα βρίσκουμε ότι

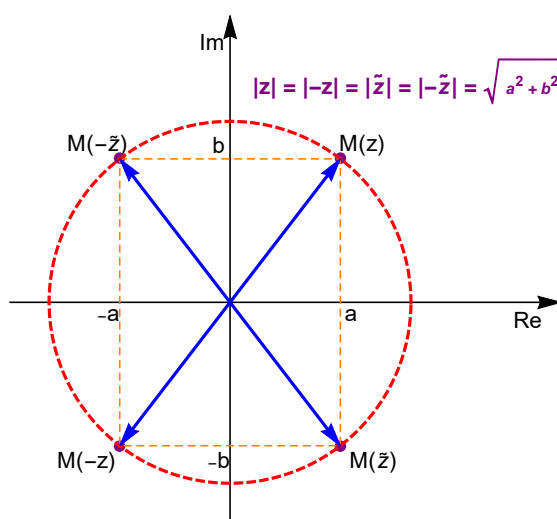
$$-|z_1 + z_2| \leq |z_1| - |z_2|.$$

Ολοκληρώσαμε λοιπόν την απόδειξη και για το πρώτο σκέλος της τριγωνικής ανισότητας. ■

Σημειώνουμε ότι οι ανισότητες στα σκέλη της τριγωνικής ανισότητας μπορεί να είναι αυστηρές: για παράδειγμα $|1| = 1$, $|i| = 1$ και $|1 + i| = \sqrt{2} < |1| + |i|$. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και ότι εν γένει

$$|z_1 + z_2| \neq |z_1| + |z_2|.$$

Έχει ενδιαφέρον να εξεταστεί σε ποιες περιπτώσεις ισχύει η ισότητα. Μπορείτε να σκεφτείτε γεωμετρικά τι θα σήμαινε αυτό; Στο Σχήμα 2.8 απεικονίζεται γεωμετρικά η Ιδιότητα (ii).



Σχήμα 2.8: Μιγαδικοί με ίσο μέτρο.

Παραδείγματα 2.2.0.6

- i. Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ και ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 3. Θα δείξουμε ότι

$$|z + w| + |z - w| \geq 6.$$

Από την υπόθεση έχουμε $|z| = 3$. Επιπλέον, από την τριγωνική ανισότητα προκύπτει

$$|z + w| + |z - w| \geq |z + w + z - w| = |2z| = |2||z| = 2 \cdot 3 = 6.$$

- ii. Έστω $z \in \mathbb{C}$ και ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο. Τότε z^{-1} ανήκει και αυτό στον μοναδιαίο κύκλο. Πράγματι, αφού $|z^{-1}| = |z|^{-1}$, συμπεραίνουμε ότι $|z^{-1}| = 1$. Επιπλέον:

$$|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \Leftrightarrow \bar{z} = z^{-1}.$$

Έτσι η εικόνα ενός μιγαδικού ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο, αν και μόνο αν ο αντίστροφος του μιγαδικού είναι ο συζυγής του.

2.3 Εργαστήριο με Mathematica

Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 1 - 5i$.

{z1 = 3 + 2I, z2 = 1 - 5I}

{3 + 2i, 1 - 5i}

Οι εντολές **Re[z]**, **Im[z]** επιστρέφουν αντίστοιχα το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού $z = a + bi$, ενώ η εντολή **ReIm[z]** αντιστοιχεί τον z στο σημείο $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Re[z1]

3

Im[z1]

2

ReIm[z1]

{3, 2}

Η εντολή **Conjugate[z]** υπολογίζει τον συζυγή \bar{z} του μιγαδικού z .

Conjugate[z1]

3 - 2i

Επαληθεύουμε την ιδιότητα $|z|^2 = z\bar{z}$ για τον μιγαδικό z_1 .

{Abs[z1], z1 * Conjugate[z1]}

{√13, 13}

Φέρνουμε τους μιγαδικούς $\frac{1}{z_1}$ και $\frac{z_1}{z_2}$ στη μορφή $x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ και ελέγχουμε την ορθότητα της σχέσης $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

1/z1

$$\frac{3}{13} - \frac{2i}{13}$$

{z1/z2, z1 * Conjugate[z2]/Abs[z2]^2}

$$\left\{ -\frac{7}{26} + \frac{17i}{26}, -\frac{7}{26} + \frac{17i}{26} \right\}$$

Επιβεβαιώνουμε τις ιδιότητες $\frac{|z_1|}{|z_1|} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|$, $\frac{\bar{z}_1}{z_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)}$ και $\overline{(z_1^{10})} = (\bar{z}_1)^{10}$.

{Abs[z1], Abs[z2], Abs[z1/z2]}

$$\left\{ \sqrt{13}, \sqrt{26}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

{Conjugate[z1]/Conjugate[z2], Conjugate[z1/z2], }

$$\left\{ -\frac{7}{26} - \frac{17i}{26}, -\frac{7}{26} - \frac{17i}{26} \right\}$$

{Conjugate[z1^10], Conjugate[z1]^10}

$$\{341525 + 145668i, 341525 + 145668i\}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τον μιγαδικό $(a + bi)^2$, $a, b \in \mathbb{R}$.

(a + b * I)^2

$$(a + ib)^2$$

Το Mathematica επέστρεψε τον $(a + bi)^2$. Φέρνουμε μία έκφραση `expr` στη μορφή $x + yi$ χρησιμοποιώντας την εντολή **ComplexExpand[expr]**. Οι μεταβλητές που εμφανίζονται στην έκφραση θεωρούνται πραγματικές.

ComplexExpand[(a + b * I)^2]

$$a^2 + 2iab - b^2$$

ComplexExpand[ReIm[(a + b * I)^2]]

$$\{a^2 - b^2, 2ab\}$$

Το πραγματικό μέρος του $(a + bi)^2$ ισούται με $a^2 - b^2$ και το φανταστικό μέρος με ab . Υπολογίζουμε όμοια τον z^2 .

ComplexExpand[z^2]

$$z^2$$

Η εντολή **ComplexExpand** επέστρεψε τον z^2 , διότι θεωρεί το z πραγματική μεταβλητή. Το z γίνεται μιγαδική μεταβλητή χρησιμοποιώντας και δεύτερο όρισμα στην εντολή, όπως φαίνεται παρακάτω.

ComplexExpand[z^2, z]

$$-\text{Im}[z]^2 + 2i\text{Im}[z]\text{Re}[z] + \text{Re}[z]^2$$

ComplexExpand[$z * w, \{z, w\}$]

$$-\text{Im}[w]\text{Im}[z] + \text{Re}[w]\text{Re}[z] + i(\text{Im}[z]\text{Re}[w] + \text{Im}[w]\text{Re}[z])$$

Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $(a + bi)^{4n+2} + (b - ai)^{4n+2} = 0$, για παράδειγμα

ComplexExpand[($a + b * I$)²⁰²² + ($b - a * I$)²⁰²²]

0

Υπολογίζουμε τον πραγματικό αριθμό $\frac{\text{Im}(z^4)}{\text{Re}(z^2)}$.

ComplexExpand[**Im**[z^4]/**Re**[z^2], z]

$$-\frac{4\text{Im}[z]^3\text{Re}[z]}{-\text{Im}[z]^2 + \text{Re}[z]^2} + \frac{4\text{Im}[z]\text{Re}[z]^3}{-\text{Im}[z]^2 + \text{Re}[z]^2}$$

Κάνουμε χρήση της εντολής **Simplify**[*expr*] για να πάρουμε την απλούστερη δυνατή μορφή της έκφρασης *expr*.

Simplify[**ComplexExpand**[**Im**[z^4]/**Re**[z^2], z]]

$$4\text{Im}[z]\text{Re}[z]$$

Συμπεραίνουμε ότι $\frac{\text{Im}(z^4)}{\text{Re}(z^2)} = 4\text{Re}(z)\text{Im}(z)$.

Η εικόνα του μιγαδικού $u = \frac{z}{|z|}$ ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο, αφού

$$|u| = \left| \frac{1}{|z|} \right| |z| = \frac{1}{|z|} |z| = 1,$$

ComplexExpand[**Abs**[$z/\text{Abs}[z]$], z]

1

Θεωρούμε το πηλίκο $\frac{z + w}{z w + 1}$.

Simplify[**ComplexExpand**[($z + w$)/($z * w + 1$)] { z, w }]]

$$\frac{\text{Im}[w] + \text{Im}[z] - i(\text{Re}[w] + \text{Re}[z])}{\text{Im}[z]\text{Re}[w] + \text{Im}[w](i\text{Im}[z] + \text{Re}[z]) - i(1 + \text{Re}[w]\text{Re}[z])}$$

Στην περίπτωση που οι μιγαδικοί u, v έχουν μέτρο 1, θα διαπιστώσουμε ότι το πηλίκο $\frac{u + v}{u v + 1}$ είναι πραγματικός αριθμός.

$u = z/\text{Abs}[z]; v = w/\text{Abs}[w];$ **Simplify**[**ComplexExpand**[**Im**[($u + v$)/($u * v + 1$)], { z, w }]]

0

Επίσης, όταν $|u| = 1$, τότε και $\left| \frac{2u - i}{iu + 2} \right| = 1$:

Simplify[**ComplexExpand**[**Abs**[($2u - I$)/($I * u + 2$)], z]]

1

Βρίσκουμε τέλος τους μιγαδικούς που ικανοποιούν τη σχέση $\bar{z} = z^2$. Η εντολή **Solve[eq, var]** επιχειρεί να λύσει την εξίσωση **eq** ως προς τη μεταβλητή **var**. Δώστε έμφαση στο «διπλό ίσον» με το οποίο συντάσσεται η εξίσωση.

Solve[Conjugate[z] == z^2, z]

$$\left\{ \{z \rightarrow 0\}, \{z \rightarrow 1\}, \left\{ z \rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right\}, \left\{ z \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right\} \right\}$$

Εξάσκηση με το Mathematica

1. Έστω $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -3 + i \in \mathbb{C}$. Να φέρετε στη μορφή $x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$ τους παρακάτω αριθμούς

$$\frac{1}{z_1}, \quad z_1^2 + iz_2^5, \quad \bar{z}_1^2 + (2i - z_2)^3, \quad \frac{z_1}{z_2} + \frac{\bar{z}_1}{z_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} - \frac{\bar{z}_1}{z_2}.$$

2. Έστω $u, v \in \mathbb{C}$, με $|u| = |v| = 1$, $u \neq 1$ και $uv + 1 \neq 0$. Να δείξετε χρησιμοποιώντας το Mathematica ότι τα πηλίκα $\frac{u+1}{u-1}$ και $\frac{u-v}{uv+1}$ είναι φανταστικοί αριθμοί.

3. Να βρεθούν οι μιγαδικοί $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει

$$\text{i) } \bar{z} = z^3, \quad \text{ii) } \bar{z}^2 = z^3.$$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις $(1+z)^n = (1-z)^n$, για $n = 3, 4, 5, 6$ και να διαπιστώσετε σε κάθε περίπτωση ότι όλες οι λύσεις είναι φανταστικοί αριθμοί.

5. Να βρεθούν οι μιγαδικοί $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει $(z-1)^3 = i(z+1)^3$.

2.4 Ασκήσεις

Λυμένες Ασκήσεις

2.4.1 Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$, αν

$$\frac{x}{1-2i} + \frac{y}{2-3i} = \frac{6+7i}{1-8i}. \quad (2.4.1)$$

Λύση. Πριν κάνουμε την πρόσθεση με κοινούς παρονομαστές στο αριστερό σκέλος, θα απλοποιήσουμε τα κλάσματα πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή και παρονομαστή καθενός από αυτά με τον συζυγή του παρονομαστή. Η σχέση (2.4.1) γίνεται

$$\frac{x(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} + \frac{y(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{(6+7i)(1+8i)}{(1-8i)(1+8i)}.$$

Επομένως

$$\frac{x+2xi}{5} + \frac{2y+3yi}{13} = \frac{-50+55i}{65} \Leftrightarrow 13(x+2xi) + 5(2y+3yi) = -50+55i$$

και άρα

$$(13x+10y) + (26x+15y)i = -50+55i \Leftrightarrow \begin{cases} 13x+10y = -50 \\ 26x+15y = 55 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = -31 \end{cases}$$

□

2.4.2 Έστω ότι για τους (μη πραγματικούς) μιγαδικούς $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$z_1 + z_2 \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι οι z_1, z_2 είναι συζυγείς.

Λύση. Έστω $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$. Τότε

- $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b_1 + b_2 = 0 \Leftrightarrow b_2 = -b_1$. Σημειώνουμε ότι $b_1 \neq 0$ αφού $z_1 \notin \mathbb{R}$.
- $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 + ib_1)(a_2 - ib_1) = (a_1 a_2 + b_1^2) + (-a_1 b_1 + b_1 a_2)i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b_1(-a_1 + a_2) = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2$,

$$\text{Άρα } z_2 = a_1 - ib_1 = \bar{z}_1. \quad \square$$

2.4.3 Να βρεθούν οι μιγαδικοί $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει $\bar{z} = z^2$.

Λύση. Έστω $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{z} = z^2 &\Leftrightarrow x - yi = (x + yi)^2 \Leftrightarrow x - yi = (x^2 - y^2) + 2xyi \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x^2 - y^2 \\ -y = 2xy \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x^2 - y^2 \\ y(2x + 1) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = x^2 - y^2 \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} x = x^2 - y^2 \\ 2x + 1 = 0 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x(1 - x) = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} y^2 = 3/4 \\ x = -1/2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ ή } x = 1 \\ y = 0 \end{array} \right\} \text{ ή } \left\{ \begin{array}{l} y = \pm\sqrt{3}/2 \\ x = -1/2 \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow (x, y) = (0, 0) \text{ ή } (x, y) = (1, 0) \text{ ή } (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ή } (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Άρα οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι οι $z = 0, z = 1, z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι οι τρεις τελευταίες λύσεις λέγονται κυβικές ρίζες της μονάδας. Προς το παρόν, σας καλούμε να επιβεβαιώσετε ότι οι τρεις τελευταίες λύσεις ικανοποιούν την εξίσωση $z^3 = 1$. \square

2.4.4 Να βρεθεί μιγαδικός $z \in \mathbb{C}$ του οποίου η εικόνα στο μιγαδικό επίπεδο να ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο και να ισχύει

$$|z - 1| = 2|z + 1|. \quad (2.4.2)$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι η σχέση (2.4.2) είναι ισοδύναμη με τη σχέση που προκύπτει υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο σκέλη:

$$|z - 1|^2 = 4|z + 1|^2,$$

καθώς το μέτρο είναι πάντα μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Έστω $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$. Για τον z ισχύει

$$|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1. \quad (2.4.3)$$

Επομένως:

$$|z - 1|^2 = 4|z + 1|^2 \Leftrightarrow |(x - 1) + iy|^2 = 4|(x + 1) + iy|^2$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 &= 4(x+1)^2 + 4y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2 \\ \Leftrightarrow 3(x^2 + y^2) + 10x + 3 &= 0 \xrightarrow{(2.4.3)} 3 \cdot 1 + 10x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}. \end{aligned}$$

Η σχέση (2.4.3), για $x = -3/5$, γίνεται

$$\frac{9}{25} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow y = \pm \frac{4}{5}.$$

$$\text{Έτσι } z = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i \quad \text{ή} \quad z = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i. \quad \square$$

2.4.5 Αν οι εικόνες των μιγαδικών $z_1, z_2, \dots, z_\kappa$, $\kappa \geq 1$, ανήκουν στον μοναδιαίο κύκλο, να δείξετε ότι

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_\kappa| = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_\kappa} \right|.$$

Λύση. Αφού $|z_j| = 1$, $j = 1, \dots, \kappa$, οι αντίστροφοι των z_i είναι ακριβώς οι συζυγείς τους, βλ. Παράδειγμα 2.2.0.6.ii. Επομένως

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_\kappa} \right| &= |\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_\kappa| = \\ &= |\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_\kappa}| = |z_1 + z_2 + \dots + z_\kappa|. \quad \square \end{aligned}$$

2.4.6 Να αποδείξετε ότι $(a + ib)^{10} + (b - ia)^{10} = 0$, για $a, b \in \mathbb{R}$.

Λύση. Παρατηρούμε

$$b - ia = -(-1)b - ia = -i^2b - ia = -i(a + bi).$$

Έτσι

$$\begin{aligned} (a + ib)^{10} + (b - ia)^{10} &= (a + ib)^{10} + [-i(a + bi)]^{10} = (a + ib)^{10} + (-i)^{10}(a + bi)^{10} = \\ &= (a + ib)^{10} + (i^2)^5(a + bi)^{10} = (a + bi)^{10} - (a + bi)^{10} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

2.4.7 Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των $z_1 = \frac{7-5i}{3+9i}$ και $z_2 = \frac{7+5i}{3-9i}$ είναι πραγματικός και η διαφορά τους μιγαδικός αριθμός.

5

Λύση. Παρατηρούμε ότι οι z_1, z_2 είναι συζυγείς:

$$z_2 = \frac{\overline{7-5i}}{\overline{3+9i}} = \overline{\left(\frac{7-5i}{3+9i} \right)} = \bar{z}_1,$$

έτσι

$$z_1 + z_2 = z_1 + \bar{z}_1 = 2\operatorname{Re}(z_1) \in \mathbb{R}, \quad z_1 - z_2 = z_1 - \bar{z}_1 = 2\operatorname{Im}(z_1)i \in i\mathbb{R}. \quad \square$$

2.4.8 Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, με $|z_1| = |z_2| = 1$ και $z_1 z_2 \neq -1$. Να δείξετε ότι

$$\text{(α)} \quad \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2 + 1} \in \mathbb{R}, \quad \text{(β)} \quad \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2 + 1} \in i\mathbb{R}.$$

Λύση. Θα αποδείξουμε το (β) ερώτημα της άσκησης. Το (α) ερώτημα αφήνεται ως άσκηση. Για τον z_j , $j = 1, 2$, έχουμε

$$|z_j|^2 = 1 \Leftrightarrow z_j \bar{z}_j = 1 \Leftrightarrow \bar{z}_j = \frac{1}{z_j}. \quad (2.4.4)$$

Έστω $w = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2 + 1}$. Θα δείξουμε ότι $\bar{w} = -w \Leftrightarrow w \in i\mathbb{R}$. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.4.4), έχουμε

$$\bar{w} = \overline{\left(\frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2 + 1} \right)} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{\bar{z}_1 \bar{z}_2 + 1} = \frac{\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}}{\frac{1}{z_1} \frac{1}{z_2} + 1} = \frac{\frac{z_2 - z_1}{z_1 z_2}}{\frac{1 + z_1 z_2}{z_1 z_2}} = -\frac{(z_1 - z_2)}{z_1 z_2 + 1} = -w. \quad \square$$

2.4.9 Αν για τον $z \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$|z + |z|| + |z - |z|| = 2|z|, \quad (2.4.5)$$

να δείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Λύση. Και τα δύο μέλη της (2.4.5) είναι μη αρνητικοί πραγματικοί, επομένως

$$\begin{aligned} (2.4.5) &\Leftrightarrow (|z + |z|| + |z - |z||)^2 = 4|z|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |z + |z||^2 + 2|z + |z|| \cdot |z - |z|| + |z - |z||^2 = 4|z|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (z + |z|)(\overline{z + |z|}) + 2|(z + |z|)(z - |z|)| + (z - |z|)(\overline{z - |z|}) = 4|z|^2 \xleftrightarrow[|z|=|z|]{z \bar{z} = |z|^2} \\ &\Leftrightarrow (z + |z|)(\bar{z} + |z|) + 2|z^2 - |z|^2| + (z - |z|)(\bar{z} - |z|) = 4|z|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} + z|z| + \bar{z}|z| + |z|^2 + 2|z^2 - |z|^2| + z\bar{z} - z|z| - \bar{z}|z| + |z|^2 = 4|z|^2 \xleftrightarrow{z\bar{z} = |z|^2} \\ &\Leftrightarrow |z^2 - |z|^2| = 0 \Leftrightarrow z^2 - |z|^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z(z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ή} \\ z = \bar{z} \end{cases} \end{aligned}$$

Και στις δύο περιπτώσεις διαπιστώνουμε ότι $z \in \mathbb{R}$. □

2.4.10 Να δείξετε ότι για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$|z - w|^2 \leq (1 + |z|^2)(1 + |w|^2). \quad (2.4.6)$$

Λύση. (2.4.6) $\Leftrightarrow (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \leq 1 + |w|^2 + |z|^2 + |z|^2|w|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w} \leq 1 + w\bar{w} + z\bar{z} + z\bar{z}w\bar{w} \Leftrightarrow 0 \leq 1 + z\bar{w} + \bar{z}w + z\bar{z}w\bar{w} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (1 + z\bar{w}) + \bar{z}w(1 + z\bar{w}) \Leftrightarrow 0 \leq (1 + z\bar{w})(1 + \bar{z}w) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq (1 + z\bar{w})\overline{(1 + z\bar{w})} \Leftrightarrow 0 \leq |1 + z\bar{w}|^2,$$

που ισχύει, επομένως ισχύει και η ισοδύναμη ανισότητα (2.4.6). □

Ασκήσεις για Εξάσκηση

2.4.1 Αν η εικόνα του $z \in \mathbb{C}$ στο μιγαδικό επίπεδο δεν ανήκει στις ευθείες $y = x$, $y = -x$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{\operatorname{Im}(z^4)}{\operatorname{Re}(z^2)} = 4 \operatorname{Re}(z) \operatorname{Im}(z).$$

2.4.2 Να λυθεί στο \mathbb{C} η εξίσωση $\bar{z} = z^3$.

2.4.3 Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $(1+i)^{20} - (1-i)^{20}$.

2.4.4 Να αποδείξετε ότι για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, ο $z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2$ είναι φανταστικός αριθμός.

2.4.5 Έστω $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Να δείξετε ότι $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ είναι πραγματικός και $\frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z}$ είναι φανταστικός αριθμός.

2.4.6 Να βρεθούν οι μιγαδικοί z που ικανοποιούν τη σχέση $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 1$.

2.4.7 Για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, να δείξετε ότι ισχύει

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

2.4.8 Έστω $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -1$. Να δείξετε ότι $|z| = 1 \Leftrightarrow \frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}$.

2.4.9 Έστω $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Να δείξετε ότι $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ή $|z| = 1$.

2.4.10 Έστω $z \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $z \neq ai$. Να δείξετε ότι $\frac{z+ai}{iz+a} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$.

2.4.11 Έστω $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 2i$ και $w = \frac{2z-i}{iz+2}$. Να δείξετε ότι $|w| = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

Βιβλιογραφία

- [1] Βαρουχάκης Ν. κ.ά. *Μαθηματικά Ι, Γ' Λυκείου, Άλγεβρα*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, 1987.
- [2] Ανδρεαδάκης Στ. κ.ά. *Μαθηματικά Γ' Τάξης Γενικού Λυκείου Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση*. ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ, 2012. ISBN: 978-960-060-703-1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ, ΜΕΡΟΣ II

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζονται οι λύσεις πολυωνυμικών εξισώσεων με μιγαδικούς συντελεστές και ιδιαίτερα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Επιπλέον, εξετάζεται η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών με ειδική αναφορά στις n -στές ρίζες της μονάδας. Παρουσιάζεται το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας και η έννοια της αλγεβρικής πολλαπλότητας μίας ρίζας. Για τη σχετική βιβλιογραφία παραπέμπουμε στα [1], [2].

Προαπαιτούμενη γνώση: Κεφάλαιο 2, Ευκλείδειος Αλγόριθμος, Τριγωνομετρικές Ταυτότητες.

3.1 Η δευτεροβάθμια εξίσωση στο \mathbb{C}

Έχουμε ήδη δει ότι η εξίσωση $x^2 = \eta$, όπου η είναι αρνητικός πραγματικός αριθμός, έχει λύσεις στο σύνολο \mathbb{C} και οι λύσεις αυτές είναι οι φανταστικοί αριθμοί, $\pm i\sqrt{|\eta|}$. Γνωρίζουμε, επίσης, καλά, ότι η δευτεροβάθμια εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, όπου $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) έχει τις λύσεις

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

στο \mathbb{R} , όταν η διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4a\gamma$ είναι μη αρνητική. Θα δείξουμε, τώρα, ότι η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ έχει πάντα δύο λύσεις στο \mathbb{C} , ακόμα και όταν η διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4a\gamma$ είναι αρνητική. Πρώτα παρατηρούμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ είναι ακριβώς οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$, αφού

$$ax^2 + bx + \gamma = \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \text{ και άρα } ax^2 + bx + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = x^2 + 2\frac{\beta}{2\alpha}x + \left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right) + \frac{\gamma}{\alpha} = \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2}.$$

Επιπλέον:

$$\Delta = \begin{cases} (\sqrt{\Delta})^2, & \text{όταν } \Delta \geq 0 \\ -|\Delta| = i^2\sqrt{\Delta^2} = (i\sqrt{|\Delta|})^2, & \text{όταν } \Delta < 0 \end{cases}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας ότι $x + \frac{\beta}{2\alpha} = x - \frac{-\beta}{2\alpha}$, προκύπτει ότι το πολυώνυμο $x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha}$ παραγοντοποιείται ως εξής στο \mathbb{C} :

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} = \left(x - \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\left(x - \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right), \quad \text{όταν } \Delta \geq 0$$

ή

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{i^2|\Delta|}{4\alpha^2} = \left(x - \frac{-\beta + i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right)\left(x - \frac{-\beta - i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}\right), \quad \text{όταν } \Delta < 0.$$

Επομένως, η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ έχει τις εξής λύσεις:

$$\frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}, \quad \text{όταν } \Delta \geq 0, \quad \text{διαφορετικά } \frac{-\beta \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}, \quad \text{όταν } \Delta < 0.$$

Παρατηρούμε, τέλος, ότι στην περίπτωση που $\Delta < 0$ οι δύο μιγαδικές λύσεις είναι συζυγείς. Αποδείξαμε, λοιπόν, το επόμενο:

Πρόταση 3.1.0.1 Η δευτεροβάθμια εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, με αρνητική διακρίνουσα, $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, έχει δύο **συζυγείς** μιγαδικές ρίζες, z_1, z_2 , που δίνονται από τους τύπους

$$z_1 = \frac{-\beta + i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}, \quad z_2 = \frac{-\beta - i\sqrt{|\Delta|}}{2\alpha}.$$

Παρατήρηση 3.1.0.2 Έστω z_1, z_2 οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Αυτό σημαίνει ότι

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = (x - z_1)(x - z_2) = x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1 \cdot z_2.$$

Επομένως

$$z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}. \quad (3.1.1)$$

Οι τύποι της (3.1.1) είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta προς τιμή του Γάλλου Μαθηματικού Franciscus Vieta (1540-1603), ο οποίος συνεισέφερε σημαντικά στον αλγεβρικό συμβολισμό. Στην περίπτωση που οι ρίζες είναι συζυγείς (όταν οι συντελεστές είναι πραγματικοί αριθμοί, αλλά η διακρίνουσα είναι αρνητική) διαπιστώνουμε ότι

$$z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = z_1 + \bar{z}_1 = 2\operatorname{Re}(z_1) = 2\operatorname{Re}(z_2), \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2 = |z_2|^2.$$

Παράδειγμα 3.1.0.3 Θα λύσουμε στο \mathbb{C} την εξίσωση $z^2 - 2z + 10 = 0$. Βρίσκουμε ότι $\Delta = 4 - 40 = -36 < 0$, άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm i\sqrt{36}}{2}, \quad \text{δηλαδή } z_1 = 1 + 3i, \quad z_2 = 1 - 3i.$$

Όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα, ισχύει ότι κάθε μιγαδικός $\Delta \in \mathbb{C}$ έχει ακριβώς δύο τετραγωνικές ρίζες στο \mathbb{C} . Υπάρχουν δηλαδή $d, d' \in \mathbb{C}$, τέτοια ώστε $d^2 = d'^2 = \Delta$. Μάλιστα, οι δύο αυτές ρίζες είναι αντίθετοι μιγαδικοί, δηλ. $d = -d'$. Έτσι, είμαστε σε θέση να λύσουμε με τον ίδιο τρόπο τη δευτεροβάθμια εξίσωση με μιγαδικούς συντελεστές.

Δευτεροβάθμια εξίσωση με μιγαδικούς συντελεστές

Έστω η εξίσωση $az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Για να βρούμε τις λύσεις, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.
- Βρίσκουμε έναν μιγαδικό $d = x + iy \in \mathbb{C}$, με $d^2 = \Delta$.
- Οι ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης στο \mathbb{C} (δεν είναι απαραίτητα συζυγείς μεταξύ τους) δίνονται από τον τύπο

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm d}{2a}.$$

- Ισχύουν και στην περίπτωση αυτή οι τύποι του Vieta,

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}, \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}.$$

Παράδειγμα 3.1.0.4 Θα λύσουμε στο \mathbb{C} την εξίσωση $iz^2 + (1+3i)z + 3+4i = 0$ ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα.

- $\Delta = (1+3i)^2 - 4i(3+4i) = 1 + 6i - 9 - 12i + 16 = 8 - 6i$.
- Ψάχνουμε $d \in \mathbb{C}$, τέτοιο ώστε $d^2 = \Delta$. Έστω $d = x + iy$, με $x, y \in \mathbb{R}$.

$$d^2 = \Delta \Leftrightarrow (x^2 - y^2) + 2xyi = 8 - 6i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases}$$

Από τη σχέση $2xy = -6$ συμπεραίνουμε ότι $x \neq 0$ και ότι $y = -3/x$. Αντικαθιστώντας το y στη σχέση $x^2 - y^2 = 8$ έχουμε

$$x^2 - \frac{9}{x^2} = 8 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$$

Για να λύσουμε αυτήν την τεταρτοβάθμια εξίσωση στο \mathbb{R} , θέτουμε $x^2 = \omega$ και η εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ γίνεται τώρα $\omega^2 - 8\omega - 9 = 0$. Θέλουμε, πλέον, να βρούμε κάποιον ω μη αρνητικό πραγματικό αριθμό που να ικανοποιεί την τελευταία εξίσωση. Ο ω πρέπει να είναι μη αρνητικός, αφού είναι ίσος με το τετράγωνο του πραγματικού αριθμού x .

$$\omega^2 - 8\omega - 9 = 0 \Leftrightarrow \omega = 9 > 0 \text{ (δεκτή)} \quad \text{ή} \quad \omega = -1 < 0 \text{ (απορρίπτεται)}.$$

Έτσι $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$. Επιλέγουμε μία οποιαδήποτε από τις δύο τιμές. Για $x = 3$, από τη σχέση $y = -3/x$ παίρνουμε $y = -1$ και $d = 3 - i$ (επαληθεύουμε, $d^2 = (3-i)^2 = 8 - 6i = \Delta$).

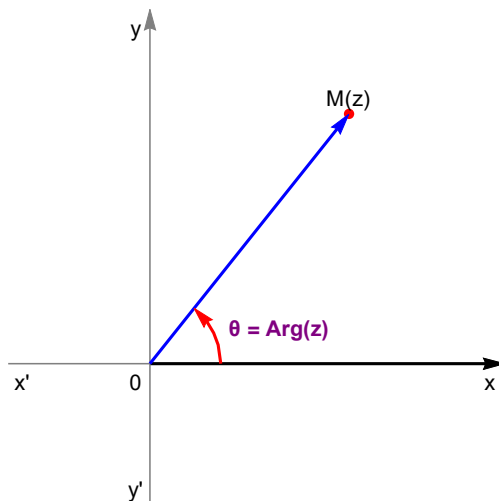
- Οι ρίζες της εξίσωσης δίνονται από τον τύπο $z_{1,2} = \frac{-b \pm d}{2a}$. Έτσι:

$$z_1 = \frac{2 - 4i}{2i} = -2 - i, \quad z_2 = \frac{-4 - 2i}{2i} = -1 + 2i.$$

Παρατηρούμε ότι z_1, z_2 δεν είναι συζυγείς, όπως άλλωστε είχαμε τονίσει. Τι θα γινόταν, όμως, αν είχαμε επιλέξει την άλλη λύση για το x ; Παρατηρούμε ότι για $x = -3$, παίρνουμε $y = 1$ και βρίσκουμε τη ρίζα $-3 + i$, που είναι η d' , η δεύτερη τετραγωνική ρίζα της Δ . Αυτό βέβαια δεν είναι τυχαίο. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ο τύπος $\frac{-b \pm d'}{2a}$ μας οδηγεί στις ίδιες ρίζες z_1, z_2 που βρήκαμε προηγουμένως.

3.2 Όρισμα, Τριγωνομετρική Μορφή Μιγαδικών Αριθμών

Η τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών θα μας επιτρέψει να ερμηνεύσουμε γεωμετρικά το γινόμενο μιγαδικών και είναι πολύ χρήσιμη στον υπολογισμό δυνάμεων μιγαδικών και στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων. Επισημαίνουμε ότι, όταν ορίζουμε προσανατολισμένη γωνία, θεωρούμε *θετική φορά* την αντίθετη της φοράς των δεικτών του ρολογιού. Έστω $M(z)$ η εικόνα ενός μη μηδενικού μιγαδικού $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, στο μιγαδικό επίπεδο. Μία προσανατολισμένη γωνία που έχει αρχική πλευρά τον ημιάξονα Ox και τελική πλευρά την ημιευθεία $OM(z)$ ονομάζεται **όρισμα** του z και συμβολίζεται με $\arg(z)$.

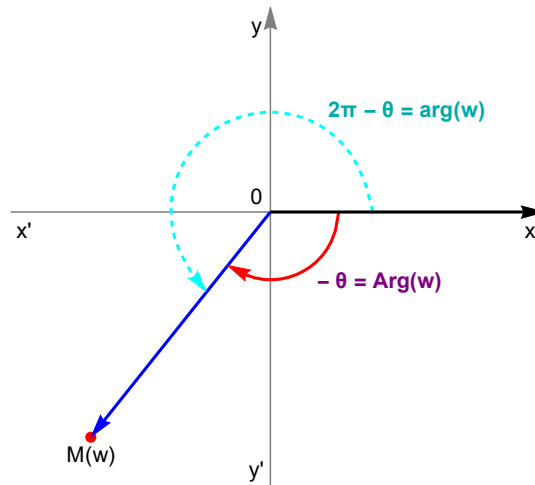


Σχήμα 3.1: Όρισμα μιγαδικού.

Κάθε μη μιγαδικός αριθμός έχει άπειρα όρια (μπορείτε να τα βρείτε;) Από όλα τα όρια του z , ένα ακριβώς ανήκει στο $(-\pi, \pi]$. Αυτό λέγεται **πρωτεύον όρισμα** του z και συμβολίζεται με $\text{Arg}(z)$ (βλ. Σχήμα 3.1). Τονίζουμε ότι αν η εικόνα $M(w)$ του μιγαδικού w ανήκει στο τρίτο ή στο τέταρτο τεταρτημόριο (δηλ. αν $\text{Im}(w) < 0$), τότε το πρωτεύον όρισμα του w είναι αρνητικό, $\text{Arg}(w) \in (-\pi, 0)$, (βλ. Σχήμα 3.2).

Παρατηρήσεις 3.2.0.1

- (α) Για το $z = 0$ δεν ορίζεται όρισμα. Για τον λόγο αυτόν στη συνέχεια, όταν θα αναφερόμαστε σε όρισμα μιγαδικού, θα εννοούμε ότι ο μιγαδικός είναι διάφορος του μηδενός.



Σχήμα 3.2: Αρνητικό πρωτεύον όρισμα.

(β) Έστω ϕ_1, ϕ_2 δύο ορίσματα του z . Τα ορίσματα διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π ,

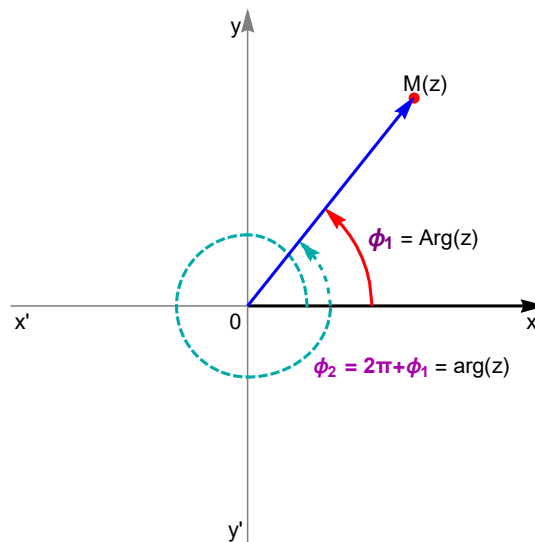
$$\phi_1, \phi_2 \text{ είναι ορίσματα του } z \Rightarrow \exists \kappa \in \mathbb{Z} \text{ τέτοιο ώστε } \phi_1 - \phi_2 = 2\kappa\pi,$$

(βλ. Σχήμα 3.3). Αυτό σημαίνει ότι $\cos \phi_1 = \cos \phi_2, \sin \phi_1 = \sin \phi_2$.

Αντιστρόφως, αν το ϕ είναι ένα όρισμα του z , τότε και το $\phi + 2\lambda\pi$ είναι ένα άλλο όρισμα του $z, \forall \lambda \in \mathbb{Z}$. Στη συνέχεια γράφουμε $\phi = \arg(z)$, αν υπάρχει ένα όρισμα του z που ισούται με τη γωνία ϕ . Επίσης, αν $w \in \mathbb{C}$ με $\text{Arg}(w) = \text{Arg}(z)$, θα γράφουμε

$$\arg(z) = \arg(w)$$

εννοώντας ότι υπάρχει όρισμα του z που είναι ίσο με ένα δοθέν όρισμα του w και αντιστρόφως, ενώ οποιαδήποτε δύο ορίσματα των z και w διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π .



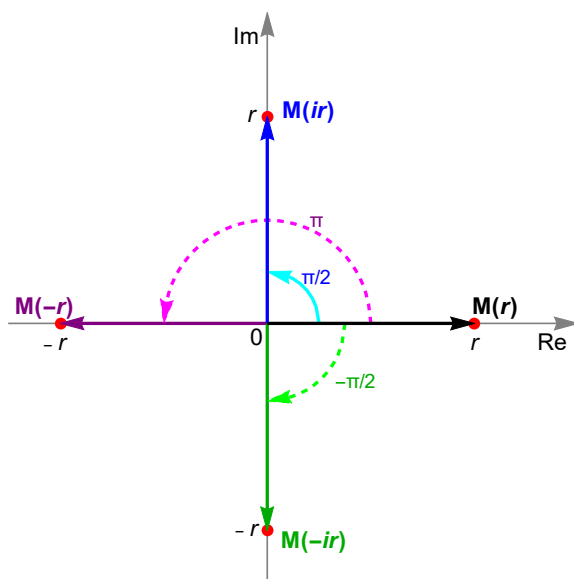
Σχήμα 3.3: Διαφορετικά ορίσματα του z .

Γενικά, για τον $w \in \mathbb{C}$ έχουμε

$$\text{Arg}(w) = \theta \Rightarrow \arg(w) \in \{ \dots, -4\pi + \theta, -2\pi + \theta, \theta, 2\pi + \theta, 4\pi + \theta, \dots \}.$$

(γ) Οι πραγματικοί αριθμοί έχουν ως πρωτεύον όρισμα το 0 ή το π , ενώ οι φανταστικοί αριθμοί έχουν ως πρωτεύον όρισμα το $\pi/2$ ή το $-\pi/2$. Συγκεκριμένα, έστω r ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Τότε, όπως διαπιστώνουμε και από το Σχήμα 3.4,

$$\text{Arg}(r) = 0, \quad \text{Arg}(-r) = \pi, \quad \text{Arg}(ir) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{Arg}(-ir) = -\frac{\pi}{2}.$$



Σχήμα 3.4: Όρισμα πραγματικών, φανταστικών.

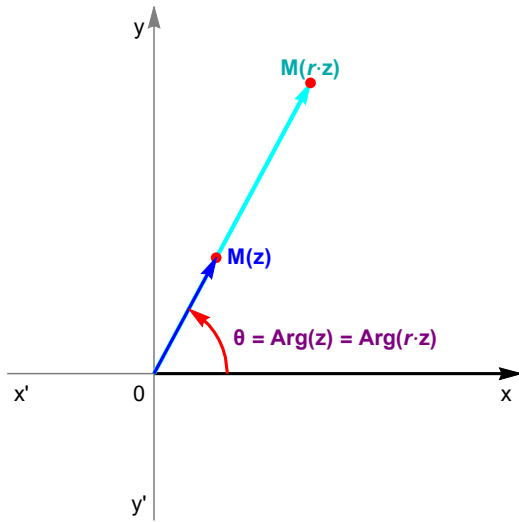
Θα δούμε ότι αν z είναι μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός, τότε ο συζυγής του και ο αντίστροφός του έχουν αντίθετα όρισμα. Προσοχή: ο αντίθετος του z δεν έχει εν γένει όρισμα το αντίθετο όρισμα του z .

Πρόταση 3.2.0.2 Ιδιότητες Ορίσματος Έστω $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ και $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Τότε

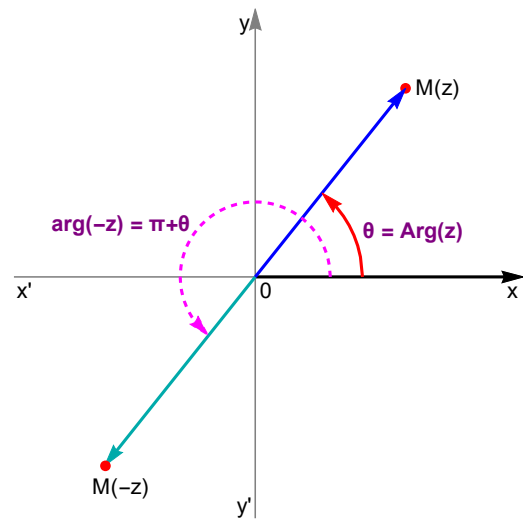
- (i) $\arg(r \cdot z) = \arg(z)$.
- (ii) $\arg(-z) = \pi + \arg(z)$.
- (iii) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$,
- (iv) $\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$,

Απόδειξη. Για το (i), παρατηρούμε ότι αν (a, b) είναι η εικόνα του $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, τότε (ra, rb) είναι η εικόνα του rz , δηλ. $M(rz) = (ra, rb)$ και ότι $M(rz)$ βρίσκεται πάνω στην ημιευθεία $OM(z)$. Αντίστοιχα, είναι φανερό ότι η εικόνα του $-z$, το σημείο $(-a, -b)$ είναι στην ίδια ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και την εικόνα (a, b) του z , ωστόσο στη αντικείμενη ημιευθεία της $OM(z)$. Για το (iii) παρατηρούμε ότι ο συζυγής του z έχει εικόνα το $(a, -b)$ και άρα το όρισμά του είναι το αντίθετο του z . Για το (iv) παρατηρούμε ότι $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$, και αφού $\frac{1}{|z|^2} > 0$, από τα (i) και (iii) συμπεραίνουμε ότι $\arg(z^{-1}) = \arg(\bar{z}) = -\arg(z)$. ■

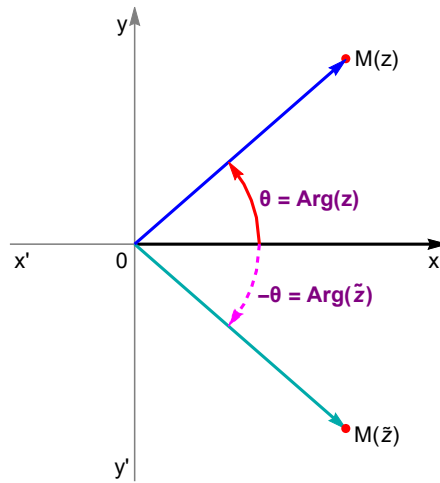
Το Σχήμα 3.5 αποτυπώνει τις περιπτώσεις (i), (ii), (iii) της Πρότασης 3.2.0.2.



(α) Μιγαδικοί με ίδιο όρισμα.



(β) Όρισμα αντίθετων μιγαδικών.



(γ) Όρισμα συζυγών μιγαδικών.

Σχήμα 3.5: Ιδιότητες ορίσματος.

Έστω $z = a+ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $M(a, b)$ η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο και $\theta = \arg(z)$ ένα όρισμα του z . Η αρχική πλευρά της προσανατολισμένης γωνίας θ είναι ο ημιάξονας Ox και η τελική πλευρά της είναι η ημιευθεία OM . Έστω (OM) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος OM . Είναι φανερό ότι $(OM) = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Από τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας θ , έχουμε ότι

$$\cos \theta = \frac{a}{(OM)}, \quad \sin \theta = \frac{b}{(OM)}$$

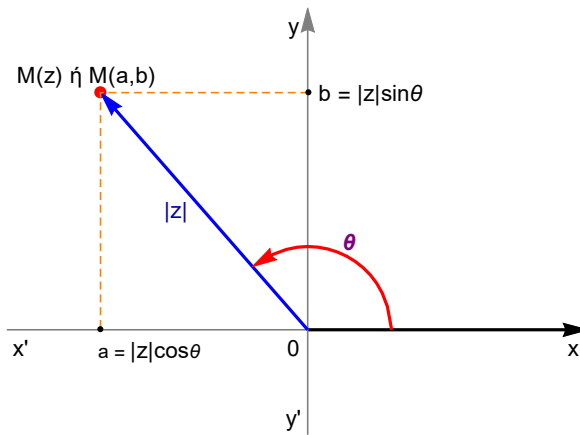
και άρα

$$a = |z| \cos \theta, \quad b = |z| \sin \theta,$$

επομένως

$$z = |z| (\cos \theta + i \sin \theta), \quad \text{όπου } \theta = \arg(z), \quad (3.2.1)$$

(βλ. Σχήμα 3.6). Το δεύτερο σκέλος της σχέσης (3.2.1) ονομάζεται η **τριγωνομετρική μορφή** του μιγαδικού z . Τονίζουμε ότι στην τριγωνομετρική μορφή θέλουμε απαραίτητα να γράφουμε την έκφραση $\cos \theta + i \sin \theta$.



Σχήμα 3.6: Τριγωνομετρική μορφή του $z = a + ib = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Παρ' ότι το όρισμα $\arg(z)$ δεν είναι μοναδικό, η τριγωνομετρική μορφή του z είναι μοναδική, αφού σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.2.0.1.β διαφορετικά όρισμα του z έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Μάλιστα ισχύει και ένα είδος αντιστρόφου της σχέσης (3.2.1): αυτό μας λέει το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.2.0.3 Έστω $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Αν $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, τότε $r = |z|$ και ϕ είναι όρισμα του z .

Απόδειξη. Έστω $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ η τριγωνομετρική μορφή του z για θ κάποιο όρισμα του z . Αφού $z = r(\cos \phi + i \sin \phi) = r \cos \phi + i \sin \phi$ έχουμε

$$|z| = \sqrt{(r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2} = \sqrt{r^2(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)} = \sqrt{r^2} = r.$$

Αντικαθιστώντας και διαιρώντας με το r προκύπτει ότι $\cos \phi + i \sin \phi = \cos \theta + i \sin \theta$ και επομένως $\cos \phi = \cos \theta$ και $\sin \phi = \sin \theta$. Άρα υπάρχει $\kappa \in \mathbb{Z}$ τέτοιο, ώστε $\phi = 2\kappa\pi + \theta$ και το ϕ είναι όρισμα του z . ■

Παραδείγματα 3.2.0.4

i. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $x > 0$, τότε η τριγωνομετρική μορφή του x είναι $x(\cos(0) + i \sin(0))$. Αν $x < 0$, τότε η τριγωνομετρική μορφή του x είναι $x = |x|(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$.

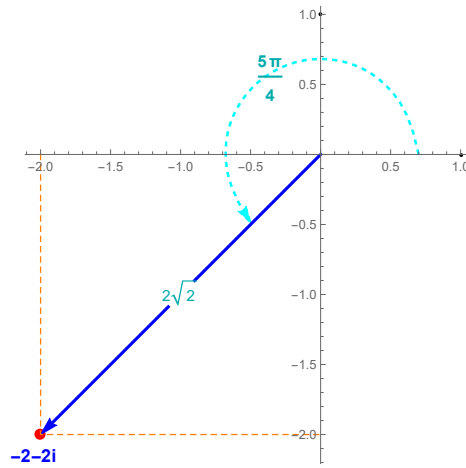
ii. Η τριγωνομετρική μορφή του i είναι $i = 1(\cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2))$.

iii. Έστω $r(\cos \phi + i \sin \phi)$ η τριγωνομετρική μορφή του u . Η τριγωνομετρική μορφή του $-u$ είναι $r(\cos(\pi + \phi) + i \sin(\pi + \phi))$.

iv. Έστω $r(\cos \phi + i \sin \phi)$ η τριγωνομετρική μορφή του u . Η τριγωνομετρική μορφή του u^{-1} είναι $u^{-1} = r^{-1}(\cos(-\phi) + i \sin(-\phi))$,

v. Έστω $z = -2 - 2i$ (Σχήμα 3.7). Το μέτρο του z είναι $|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$. Επιπλέον, $\phi = \arg(z)$, αν και μόνο αν $\cos(\phi) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\sin(\phi) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, ενώ η εικόνα του z είναι στο τρίτο τεταρτημόριο. Παρατηρούμε ότι $\phi = 5\pi/4$ δίνει τους σωστούς τριγωνομετρικούς αριθμούς και σημειώνουμε ότι το πρωτεύον όρισμα του z είναι βέβαια το $-3\pi/4$. Κατά συνέπεια,

$$z = 2\sqrt{2}(\cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4)) = 2\sqrt{2}(\cos(-3\pi/4) + i \sin(-3\pi/4)).$$



Σχήμα 3.7: Τριγωνομετρική μορφή του $z = -2 - 2i$.

Τα υπολογιστικά προγράμματα έχουν συναρτήσεις που υπολογίζουν το όρισμα. Για παράδειγμα, στο Mathematica η εντολή για το όρισμα είναι **Arg[a+Ib]**. Πώς μπορούμε όμως να καταλάβουμε αν δύο μιγαδικοί αριθμοί που μας έχουν δοθεί σε τριγωνομετρική μορφή είναι ίσοι αφού τα όριάματα δεν είναι μοναδικά; Από το Λήμμα 3.2.0.3 προκύπτει το εξής:

Πόρισμα 3.2.0.5 *Οι μιγαδικοί $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ είναι ίσοι, αν και μόνο αν έχουν ίσα μέτρα και η διαφορά των ορισμάτων τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π .*

3.3 Τριγωνομετρική Μορφή Γινομένου, Γεωμετρική Ερμηνεία

Χρησιμοποιώντας τις παρακάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\cos(\phi + \theta) = \cos \phi \cdot \cos \theta - \sin \phi \cdot \sin \theta, \quad \sin(\phi + \theta) = \sin \phi \cdot \cos \theta + \cos \phi \cdot \sin \theta,$$

αποδεικνύουμε το επόμενο σημαντικό αποτέλεσμα, το οποίο μας δίνει την τριγωνομετρική μορφή και ερμηνεύει γεωμετρικά το γινομένο μιγαδικών.

Θεώρημα 3.3.0.1 *Έστω $0 \neq z, w \in \mathbb{C}$. Ισχύει ότι*

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w), \quad \arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w).$$

Αν ϕ, θ είναι ορίσματα του z και w αντίστοιχα, τότε

$$z \cdot w = |z| |w| (\cos(\phi + \theta) + i \sin(\phi + \theta)), \quad \frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} (\cos(\phi - \theta) + i \sin(\phi - \theta)).$$

Απόδειξη. Έστω $z = |z|(\cos \phi + i \sin \phi)$, $w = |w|(\cos \theta + i \sin \theta)$, οι τριγωνομετρικές μορφές των z, w αντίστοιχα. Τότε

$$z \cdot w = |z| |w| \left[(\cos \phi \cdot \cos \theta - \sin \phi \cdot \sin \theta) + i(\sin \phi \cdot \cos \theta + \cos \phi \cdot \sin \theta) \right] \Rightarrow$$

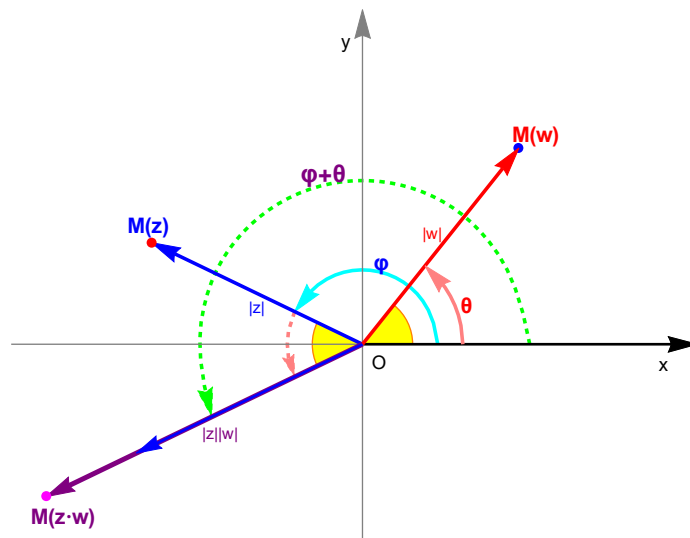
$$z \cdot w = |z| |w| (\cos(\phi + \theta) + i \sin(\phi + \theta)).$$

Αφού $|z| |w| > 0$, από το Λήμμα 3.2.0.3 συμπεραίνουμε ότι το δεύτερο μέλος της τελευταίας σχέσης είναι η τριγωνομετρική μορφή του $z \cdot w$, δηλαδή $|z \cdot w| = |z| |w|$ (κάτι που γνωρίζαμε) και το $\phi + \theta$ είναι ένα όρισμα του $z \cdot w$, επομένως $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$. Τέλος, έχουμε

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg\left(z \cdot \frac{1}{w}\right) = \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w),$$

βλ. Πρόταση 3.2.0.2.iv. ■

Για να βρούμε λοιπόν τη διανυσματική ακτίνα $OM(z \cdot w)$ του γινομένου δύο μιγαδικών z, w στο μιγαδικό επίπεδο, στρέφουμε τη διανυσματική ακτίνα $OM(z)$ του z κατά γωνία $\theta = \arg(w)$ και την πολλαπλασιάζουμε με $|w|$, (βλ. Σχήμα 3.8).



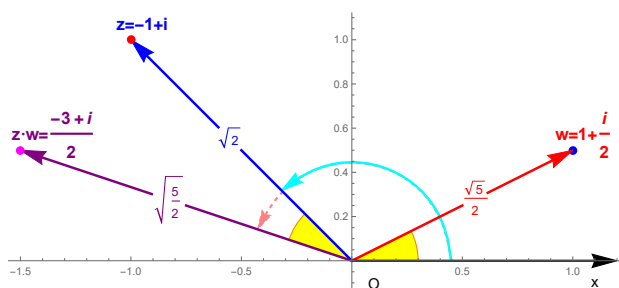
Σχήμα 3.8: Γεωμετρική ερμηνεία γινομένου μιγαδικών.

Παραδείγματα 3.3.0.2

i. Αν $z = 4\left(\cos \frac{17\pi}{18} + i \sin \frac{17\pi}{18}\right)$ και $w = 2\left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9}\right)$, τότε

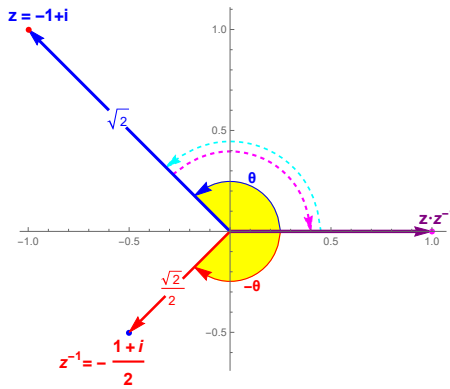
$$\begin{aligned} z \cdot w^{-1} &= \frac{4}{2} \left(\cos \left(\frac{17\pi}{18} - \frac{\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{17\pi}{18} - \frac{\pi}{9} \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \\ &= 2 \left(\cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right) = 2 \left(-\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\sqrt{3} + i. \end{aligned}$$

ii. Έστω $z = -1 + i$, $w = 1 + i/2$. Στο Σχήμα 3.9 βλέπουμε τη γεωμετρική απεικόνιση του γινομένου $z \cdot w$.



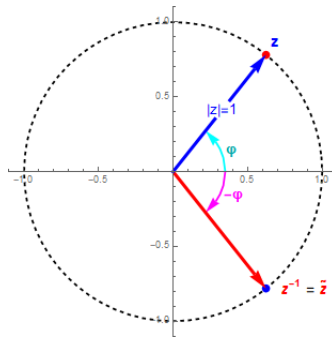
Σχήμα 3.9: Το γινόμενο $(-1 + i)(1 + i/2)$.

iii. Έστω $z = -1 + i$. Ο αντίστροφος του z είναι ο μιγαδικός αριθμός $z^{-1} = \frac{1}{-1 + i} = -\frac{1 + i}{2}$. Το γινόμενό τους είναι βέβαια το 1 (βλ. Σχήμα 3.10).



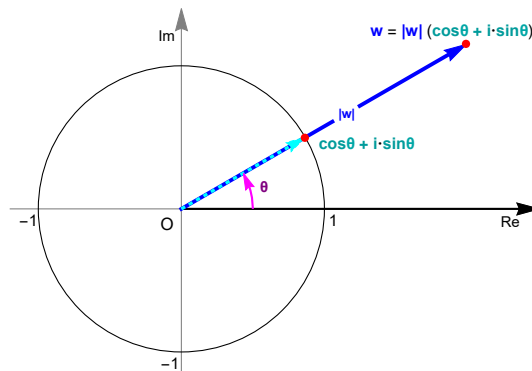
Σχήμα 3.10: Ο $1 + i$ και ο αντίστροφός του.

iv. **Μοναδιαίος κύκλος.** Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι μιγαδικοί που η εικόνα τους στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο, δηλαδή οι μιγαδικοί που έχουν μέτρο 1. Στην περίπτωση αυτή ο αντίστροφος του μιγαδικού ταυτίζεται με τον συζυγή του, όπως προκύπτει εύκολα από τη σχέση $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$ (βλ. Σχήμα 3.11).



Σχήμα 3.11: Αν $|z| = 1$, τότε $z^{-1} = \bar{z}$.

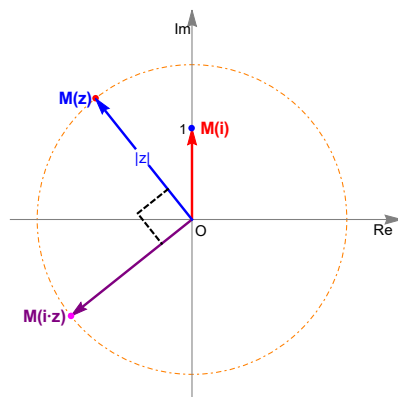
Σημειώνουμε ότι κάθε μιγαδικός $0 \neq w \in \mathbb{C}$ γράφεται ως γινόμενο ενός μιγαδικού με μέτρο 1 με κάποιον θετικό πραγματικό αριθμό (Σχήμα 3.12). Ειδικότερα, αν $\theta = \arg(w)$, τότε $z = \cos \theta + i \sin \theta$ έχει μέτρο 1 και $w = |w|z$.



Σχήμα 3.12: $w = |w|z$, όπου $|z| = 1$.

v. Έστω $z \in \mathbb{C}$. Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $i \cdot z$ έχει μέτρο $|i \cdot z| = |z|$ και όρισμα $\arg(i \cdot z) = \arg(z) + \pi/2$. Έτσι βρίσκουμε τη διανυσματική ακτίνα του γινομένου $i \cdot z$, αν

περιστρέψουμε αριστερόστροφα τη διανυσματική ακτίνα του z κατά $\pi/2$, (βλ. Σχήμα 3.13).



Σχήμα 3.13: Πολλαπλασιασμός μιγαδικού με το i .

Έστω θ ένα όρισμα του $z \in \mathbb{C}$. Από το Θεώρημα 3.3.0.1 προκύπτει ότι

$$z^2 = z \cdot z = |z| |z| (\cos(\theta + \theta) + i \sin(\theta + \theta)) \Rightarrow z^2 = |z|^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta).$$

Αφού z^{-2} είναι ο αντίστροφος του z^2 , συμπεραίνουμε ότι

$$z^{-2} = (z^2)^{-1} = \frac{1}{|z|^2} (\cos(-2\theta) + i \sin(-2\theta)).$$

Γενικεύουμε για μεγαλύτερες θετικές δυνάμεις του $n \in \mathbb{Z}$ χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή και αποδεικνύουμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τις αρνητικές ακέραιες δυνάμεις. Το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως το Θεώρημα του De Moivre.

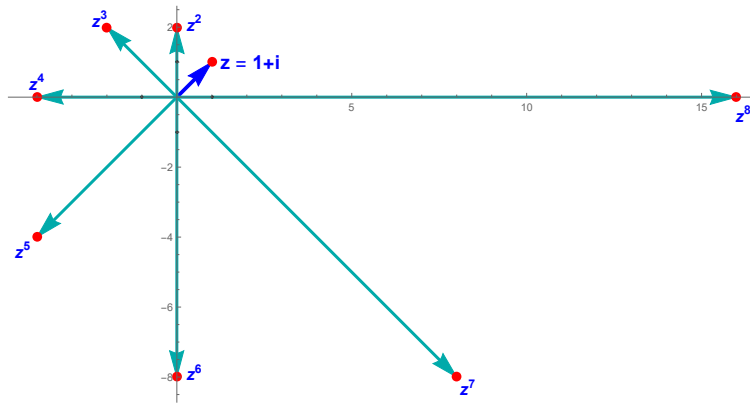
Θεώρημα 3.3.0.3 (De Moivre.) Έστω $0 \neq z \in \mathbb{C}$, $\theta = \arg(z)$. Για κάθε ακέραιο n ισχύει ότι $\arg(z^n) = n\theta$ και $z^n = |z|^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$.

Παραδείγματα 3.3.0.4

- i. Έστω $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. Θα υπολογίσουμε τη δύναμη z^{-6} . Αρχικά φέρνουμε σε τριγωνομετρική μορφή τον z . Παρατηρούμε ότι $|z| = 1$ και ότι η εικόνα του z βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, με όρισμα $\theta = \pi/4$. Άρα

$$\begin{aligned} z^{-6} &= \left[1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{-6} = \cos \left(-\frac{6\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{6\pi}{4} \right) = \\ &= \cos \left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{2} + 2\pi \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i. \end{aligned}$$

- ii. Έστω $z = 1 + i$. Η τριγωνομετρική μορφή του z είναι $z = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$. Στο Σχήμα 3.14 απεικονίζονται στο μιγαδικό επίπεδο οι δυνάμεις z^1, z^2, \dots, z^8 . Βρίσκουμε τη διανυσματική ακτίνα του z^{n+1} από τη διανυσματική ακτίνα του z^n , περιστρέφοντάς την κατά γωνία $\arg(z) = \pi/4$ και πολλαπλασιάζοντάς την με $\sqrt{2}$ που είναι το μέτρο του z .

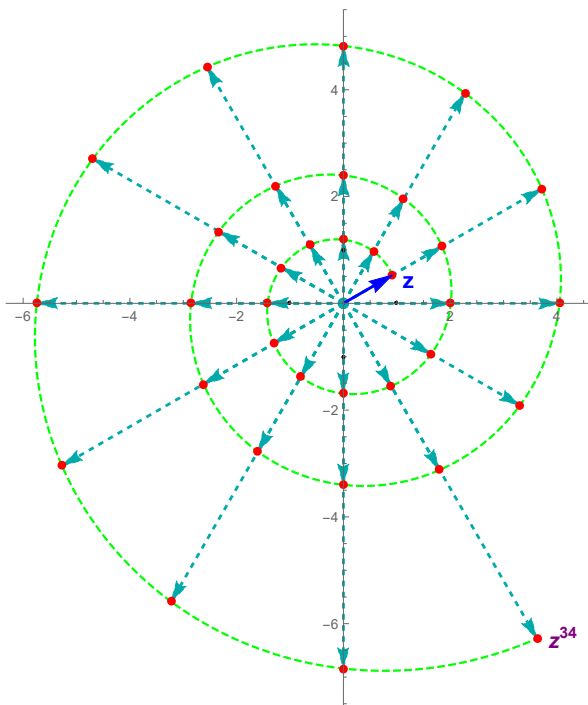


Σχήμα 3.14: Γεωμετρική αναπαράσταση δυνάμεων του $1 + i$.

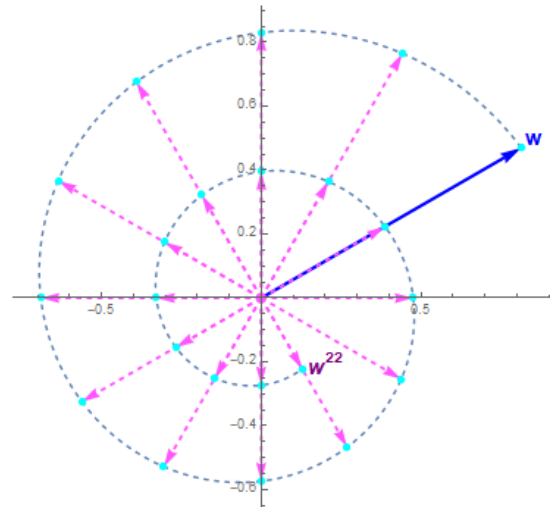
iii. Έστω

$$z = 1.06 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), \quad w = 0.94 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Στο Σχήμα 3.15 απεικονίζονται στο μιγαδικό επίπεδο οι δυνάμεις z^1, z^2, \dots, z^{34} και w^1, w^2, \dots, w^{22} .



(α) Δυνάμεις του $z = 0.53\sqrt{3} + 0.53i$.



(β) Δυνάμεις του $w = 0.47\sqrt{3} + 0.47i$.

Σχήμα 3.15: Γεωμετρική αναπαράσταση δυνάμεων των z και w .

Παρατηρούμε ότι $|z| < |z^2| < \dots < |z^{34}|$ και οι εικόνες των δυνάμεων του z απομακρύνονται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ όσο αυξάνεται ο εκθέτης τους (γιατί $|z| = 1.06 > 1$, επομένως η συνάρτηση $f(x) = |z|^x$ είναι γνησίως αύξουσα). Αντίθετα, $|w| > |w^2| > \dots > |w^{22}|$ και οι εικόνες των δυνάμεων του w πλησιάζουν την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ όσο αυξάνεται ο εκθέτης (γιατί $0 < |w| = 0.94 < 1$, επομένως η συνάρτηση $g(x) = |w|^x$ είναι γνησίως φθίνουσα).

Η ταυτότητα του Euler

Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη την ταυτότητα

$$\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}. \quad (3.3.1)$$

Θα δείτε την απόδειξη της ταυτότητας σε επόμενο μάθημα μιγαδικής ανάλυσης. Έστω $z \neq 0$ και $\phi = \arg(z)$. Από την τριγωνομετρική έκφραση του z και την ταυτότητα (3.3.1), βλέπουμε ότι

$$z = |z| (\cos \phi + i \sin \phi) = |z| e^{i\phi}.$$

Έτσι, κάποια από τα αποτελέσματα που έχουμε δει προκύπτουν εύκολα από τις ιδιότητες των δυνάμεων. Για παράδειγμα, έστω ότι $0 \neq w = |w| (\cos \theta + i \sin \theta) = |w| e^{i\theta}$. Τότε

$$z \cdot w = |z||w| e^{i(\phi+\theta)},$$

όπως προβλέπει το Θεώρημα 3.3.0.1. Επιπλέον, αν $n \in \mathbb{Z}$, τότε

$$z^n = (|z|e^{i\phi})^n = |z|^n e^{i \cdot n\phi},$$

όπως προβλέπει το Θεώρημα 3.3.0.3. Η σχέση (3.3.1) για $\phi = \pi$ γίνεται $e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$, δηλαδή

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Ο παραπάνω τύπος θεωρείται από πολλούς ως ο « κομψότερος » τύπος των μαθηματικών, αφού συμπεριλαμβάνει στην ίδια σχέση τα $0, 1, e, \pi$ και τη φανταστική μονάδα i . Ονομάζεται ταυτότητα του Euler προς τιμήν του μεγαλοφυούς Ελβετού μαθηματικού. Το σύμβολο e προέρχεται από το αρχικό γράμμα του ονόματος του Euler.

Είδαμε ως τώρα πώς υπολογίζουμε ακέραιες δυνάμεις μιγαδικών αριθμών. Στην επόμενη ενότητα θα ασχοληθούμε με το αντίστροφο πρόβλημα. Θα δούμε δηλαδή πώς βρίσκουμε n -στές ρίζες μιγαδικών αριθμών, όπου n είναι κάποιος θετικός ακέραιος.

3.4 n -στές ρίζες

Έστω $0 \neq c \in \mathbb{C}$ και n κάποιος θετικός ακέραιος. Λέμε ότι ο μιγαδικός αριθμός ρ είναι **n -στή ρίζα** του c αν $\rho^n = c$. Εάν $\rho^2 = c$, λέμε ότι ρ είναι **τετραγωνική ρίζα** του c , εάν $\rho^3 = c$, λέμε ότι ρ είναι **κυβική ρίζα** του c . Θα αποδείξουμε ότι κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός έχει ακριβώς n διακριτές ρίζες και θα δείξουμε πώς τις υπολογίζουμε. Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε στις n -στές ρίζες της μονάδας.

Πρόταση 3.4.0.1 Έστω $0 \neq c \in \mathbb{C}$ και έστω $\varphi = \arg(c)$. Ο c έχει ακριβώς n διαφορετικές n -στές ρίζες που δίνονται από τον τύπο:

$$\rho_k = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) \right), \text{ για } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε τρία πράγματα: α) ότι $\rho_k^n = c$, για $0 \leq k \leq n-1$, β) ότι οι ρίζες αυτές είναι διακριτές, ισοδύναμα ότι οι ρίζες ανά δύο δεν είναι ίσες και γ) ότι αν w είναι ρίζα, τότε w θα ταυτίζεται με κάποια από τις ρ_k .

Από το Θεώρημα 3.3.0.3 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} (\rho_k)^n &= (\sqrt[n]{|c|})^n \left(\cos \left(n \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) + i \sin \left(n \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \right) \right) = \\ &= |c| \left(\cos \left(\varphi + k \cdot 2\pi \right) + i \sin \left(\varphi + k \cdot 2\pi \right) \right) = |c| (\cos \varphi + i \sin \varphi) = c, \end{aligned}$$

επομένως ισχύει το α).

Για να δείξουμε το β), χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 3.2.0.5, αρκεί να δείξουμε ότι η διαφορά των ορισμάτων των ριζών δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π . Πράγματι, αν $0 \leq \kappa < \lambda \leq n - 1$, τότε

$$\arg(\rho_\lambda) - \arg(\rho_\kappa) = \frac{\varphi + \lambda \cdot 2\pi}{n} - \frac{\varphi + \kappa \cdot 2\pi}{n} = 2\pi \frac{\lambda - \kappa}{n}$$

και $0 < \frac{\lambda - \kappa}{n} < 1$. Επομένως, η διαφορά των ορισμάτων των ριζών δεν είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π και ισχύει και το β).

Τέλος, για να δείξουμε το γ) υποθέτουμε ότι ρ είναι n -στή ρίζα και ότι $\theta = \arg(\rho)$. Αφού

$$\rho = |\rho|(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ και } \rho^n = |\rho|^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = |c|(\cos \phi + i \sin \phi) = c,$$

συμπεραίνουμε ότι $|\rho| = \sqrt[n]{|c|}$ και ότι $n\theta$ είναι όρισμα του c . Αυτό σημαίνει ότι η διαφορά $n\theta - \phi$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π , έστω $2t\pi$, όπου $t \in \mathbb{Z}$. Από τον Ευκλείδειο Αλγόριθμο Διάρθρωσης του t με το n , έχουμε ότι υπάρχουν $q \in \mathbb{Z}$ και $k \in \mathbb{Z}$, τέτοια ώστε $0 \leq k < n$ και $t = nq + k$. Επομένως:

$$n\theta - \phi = 2(nq + k)\pi \Rightarrow \theta = 2q\pi + \frac{\phi + 2k\pi}{n}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\frac{\phi + 2k\pi}{n}$ είναι όρισμα του ρ και αποδείξαμε το γ). ■

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε γραφικά κάποια παραδείγματα. Τονίζουμε ότι σύμφωνα με την ορολογία της Πρότασης 3.4.0.1, ξεκινώντας με κάποιο όρισμα ϕ του c το όρισμα της n -στής ρίζας ρ_0 (του c), είναι το ϕ/n και στη συνέχεια για να βρούμε τα ορίσματα των επόμενων ριζών προσθέτουμε διαδοχικά στο προηγούμενο το $2\pi/n$.

Παραδείγματα 3.4.0.2

- i. Έστω $0 \neq c \in \mathbb{C}$ και έστω $\varphi = \arg(z)$. Σύμφωνα με τον τύπο της Πρότασης 3.4.0.1 οι τετραγωνικές ρίζες του c δίνονται από τον τύπο

$$\rho_0 = \sqrt{|c|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad \rho_1 = \sqrt{|c|} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi}{2} \right) \right).$$

Παρατηρούμε ότι $\rho_1 = -\rho_0$. Πράγματι από τις τριγωνομετρικές ταυτότητες έχουμε:

$$\rho_1 = \sqrt{|c|} \left(\cos \left(\pi + \frac{\varphi}{2} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\varphi}{2} \right) \right) = \sqrt{|c|} \left(-\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = -\rho_0.$$

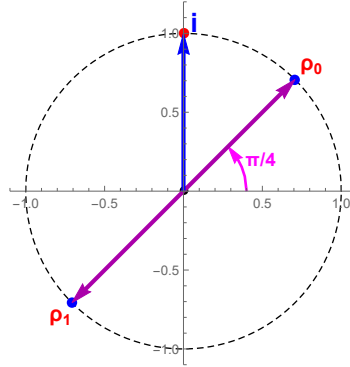
- ii. Θα βρούμε τις τετραγωνικές ρίζες του i , δηλαδή τις ρίζες της εξίσωσης $z^2 = i$. Αφού $|i| = 1$, $\text{Arg}(i) = \pi/2$, η εξίσωση γράφεται

$$z^2 = i \Leftrightarrow z^2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

και έχει δύο αντίθετες τετραγωνικές ρίζες (βλ. Σχήμα 3.16):

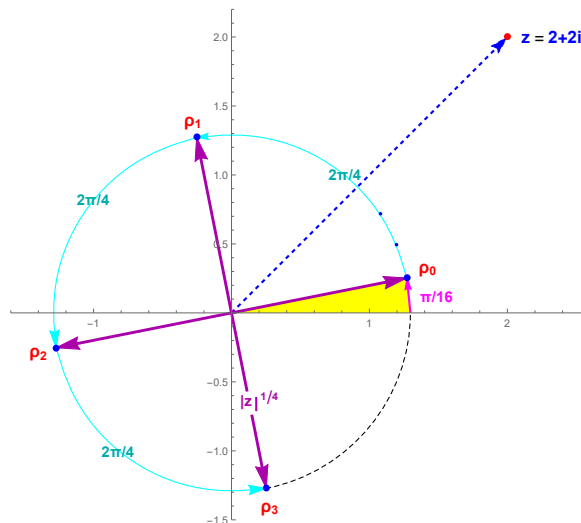
$$\rho_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2},$$

$$\rho_1 = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{2} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = -\rho_0.$$



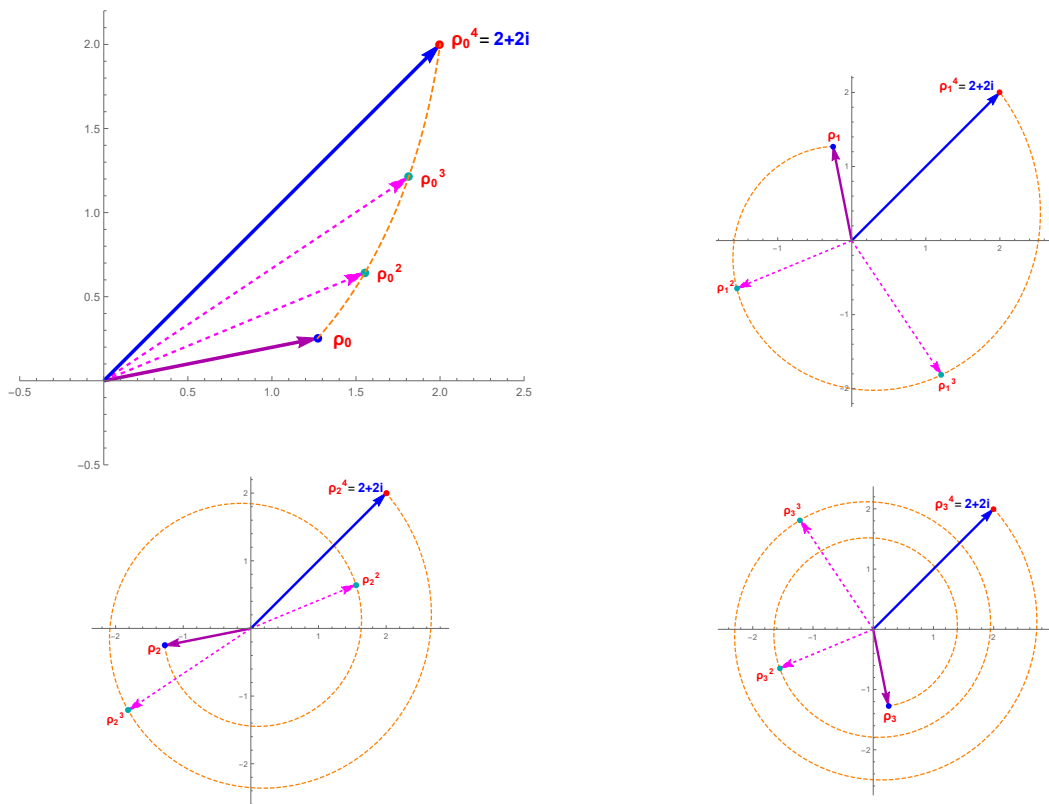
Σχήμα 3.16: Τετραγωνικές ρίζες του i .

- iii. Έστω $z = 2 + 2i$. Εύκολα προκύπτει ότι η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι επί της ευθείας που περνά από την αρχή των αξόνων και διχοτομεί τη γωνία του πρώτου τεταρτημόριου, έτσι $\pi/4 = \arg(z)$, ενώ από τον τύπο του μέτρου βρίσκουμε ότι $|z| = \sqrt{8}$. Στο Σχήμα 3.17 απεικονίζουμε τις τέταρτες ρίζες του z , ρ_0, \dots, ρ_3 . Παρατηρούμε ότι οι ρίζες αυτές βρίσκονται επί του κύκλου που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα το $\sqrt[4]{8}$. Για τη ρ_0 έχουμε όρισμα το $\pi/16$, ενώ για το όρισμα της επόμενης ρίζας προσθέτουμε το $2\pi/4$, δηλ. το $\pi/2$.



Σχήμα 3.17: Οι τέταρτες ρίζες του $2 + 2i$.

Στο Σχήμα 3.18 απεικονίζουμε γραφικά τις πρώτες τέσσερις δυνάμεις για κάθε μία από τις ρίζες και φθάνουμε κάθε φορά στο z .



Σχήμα 3.18: Οι δυνάμεις των τέταρτων ριζών του $2 + 2i$.

iv. Θα λύσουμε στο \mathbb{C} την εξίσωση $x^4 + 1 = 0$. Παρατηρούμε ότι $x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1$. Αρκεί, λοιπόν, να βρούμε τις τέταρτες ρίζες του -1 . Αφού $|-1| = 1$ και $\text{Arg}(-1) = \pi$, οι ρίζες του -1 είναι

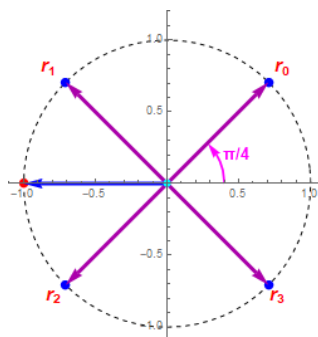
$$r_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2},$$

$$r_1 = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} + i \cos \frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

$$r_2 = \cos \left(\frac{\pi}{4} + 2 \frac{2\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2 \frac{2\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = \bar{r}_1$$

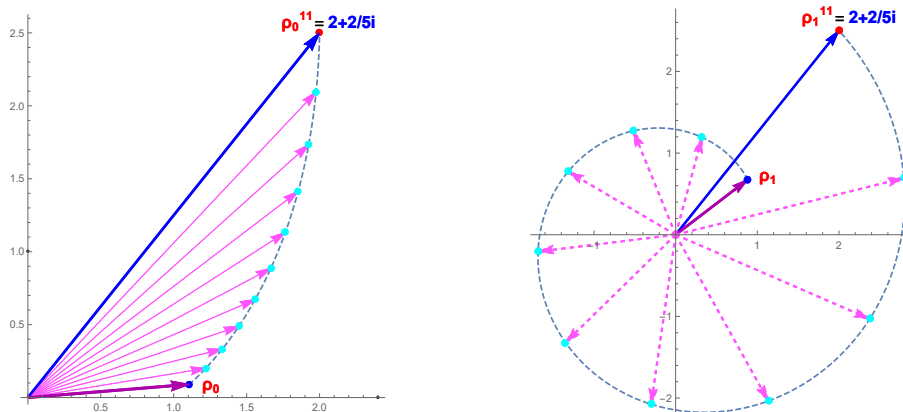
$$r_3 = \cos \left(\frac{\pi}{4} + 3 \frac{2\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + 3 \frac{2\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} - i \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2} = \bar{r}_0,$$

βλ. Σχήμα 3.19. Παρατηρούμε ότι οι ρίζες είναι ανά δύο συζυγείς,



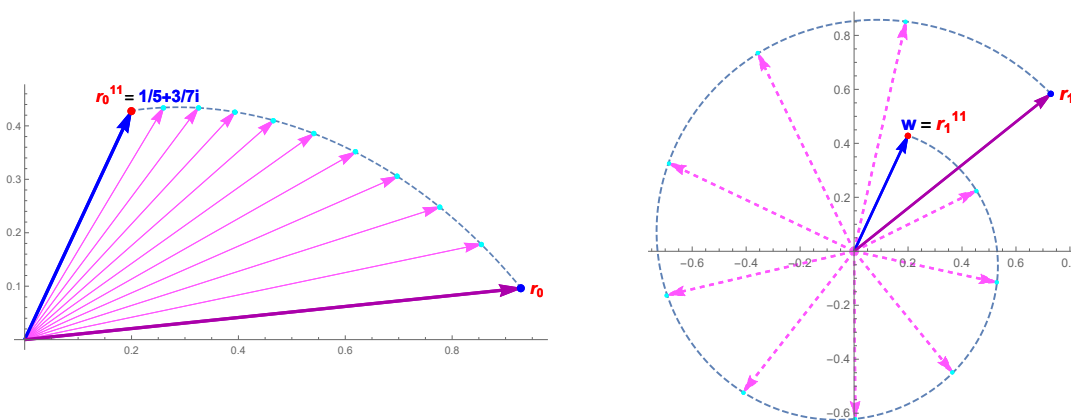
Σχήμα 3.19: Τέταρτες ρίζες του -1 .

- v. Έστω οι μιγαδικοί $z = 2 + 2i/5$ και $w = 1/5 + 3i/7$. Παρατηρούμε ότι $|z| = \sqrt{41}/2 > 1$, ενώ $|w| = \sqrt{274}/35 < 1$. Στο Σχήμα 3.20 απεικονίζονται δύο από τις ενδέκατες ρίζες του z και οι δυνάμεις τους,



Σχήμα 3.20: Οι ενδέκατες ρίζες ρ_0 και ρ_1 του $z = 2 + 2i/5$.

ενώ στο Σχήμα 3.21 απεικονίζονται δύο από τις ενδέκατες ρίζες του w και οι δυνάμεις τους



Σχήμα 3.21: Οι ενδέκατες ρίζες r_0 και r_1 του $w = 1/5 + 3i/7$.

Ας εξετάσουμε πιο αναλυτικά τις n -στές ρίζες της μονάδας, δηλαδή τους μιγαδικούς αριθμούς z που ικανοποιούν την εξίσωση $z^n = 1$. Παρατηρούμε ότι $0 = \arg(1)$, ενώ το μέτρο του 1 είναι βέβαια 1. Από τον τύπο της Πρότασης 3.4.0.1 προκύπτει ότι οι n -στές ρίζες είναι οι μιγαδικοί

$$\cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right), \text{ για } k = 0, \dots, n-1.$$

Έστω $\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$, η ρίζα που αντιστοιχεί στο $k = 1$. Παρατηρούμε ότι όλες οι άλλες n -στές ρίζες προκύπτουν ως δυνάμεις του ζ . Ειδικότερα,

$$\zeta^k = \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right).$$

Για τον λόγο αυτόν, ο μιγαδικός αριθμός

$$\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

ονομάζεται **κύρια** ή **πρωταρχική** n -ρίζα της μονάδας. Σε προχωρημένο μάθημα αλγεβρικών δομών θα δείτε ότι οι n -στές ρίζες της μονάδας αποτελούν *κυκλική ομάδα* με *γεννήτορα* το ζ . Προς το παρόν ας εξετάσουμε κάποιες από τις ιδιότητες που ικανοποιούνται από τις ρίζες της μονάδας.

Αρχικά, παρατηρούμε ότι όλες οι εικόνες των n -στών ριζών της μονάδας κείτονται επί του μοναδιαίου κύκλου, αφού το μέτρο τους είναι ίσο με 1. Μάλιστα, καθώς τα ορίσματά τους διαφέρουν μεταξύ τους κατά $2\pi/n$, οι εικόνες αυτές είναι κορυφές κανονικού n -γώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο. Το γινόμενο δύο ριζών της μονάδας είναι και πάλι ρίζα της μονάδας: πράγματι, έστω ζ_1, ζ_2 δύο ρίζες της μονάδας. Τότε $\zeta_1^n = \zeta_2^n = 1$, επομένως $(\zeta_1\zeta_2)^n = 1$ και άρα $\zeta_1\zeta_2$ είναι n -στή ρίζα της μονάδας. Γνωρίζουμε ήδη ότι ο αντίστροφος μίας n -στής ρίζας της μονάδας είναι ο συζυγής της (βλ. Παράδειγμα 3.3.0.2.iv). Ας δούμε τι σημαίνει αυτό για τη ρίζα ζ^k . Αφού $\zeta^{n-k}\zeta^k = \zeta^n = 1$, αυτό σημαίνει ότι $(\zeta^k)^{-1} = \zeta^{n-k}$. Επομένως

$$\overline{\zeta^k} = (\zeta^k)^{-1} = \zeta^{n-k}.$$

Επίσης, εξαιρετικό ενδιαφέρον έχει να δούμε τι ισχύει για το άθροισμα και το γινόμενο όλων των n -στών ριζών της μονάδας. Πρώτα, ένα σχόλιο για το πολυώνυμο $P(X) = X^n - 1$. Είναι φανερό ότι οι ρίζες του πολυωνύμου στο \mathbb{C} είναι ακριβώς οι n -στές ρίζες της μονάδας. Αφού $P(X)$ έχει τόσες ρίζες όσες και ο βαθμός του, το πολυώνυμο $P(X)$ παραγοντοποιείται πλήρως στο \mathbb{C} , δηλαδή γράφεται ως το γινόμενο πολυωνύμων βαθμού 1 (ένα πολυώνυμο για κάθε ρίζα του $P(X)$) ως εξής:

$$P(X) = (X - 1)(X - \zeta) \cdots (X - \zeta^{n-1}).$$

Κάνοντας τον πολλαπλασιασμό στο δεξιό σκέλος της εξίσωσης και αντικαθιστώντας το $P(X)$ με το $X^n - 1$, βλέπουμε ότι

$$X^n - 1 = X^n - (1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1})X^{n-1} + \cdots + (-1)^n(1\zeta \cdots \zeta^{n-1}).$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές του X στα δύο σκέλη της εξίσωσης προκύπτει ότι το άθροισμα των ριζών είναι $1 + \zeta + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$, ενώ το γινόμενο ικανοποιεί τη σχέση $\zeta \cdots \zeta^{n-1} = (-1)^{n-1}$.

Ιδιότητες των n -στών ριζών της μονάδας

Έστω $\zeta = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ πρωταρχική n -ρίζα της μονάδας. Τότε

- (i) Οι δυνάμεις του ζ είναι οι n -στές ρίζες της μονάδας και οι εικόνες τους στο μιγαδικό επίπεδο αποτελούν κορυφές κανονικού n -γώνου εγγεγραμμένου στον μοναδιαίο κύκλο.
- (ii) Το γινόμενο δύο n -στών ριζών της μονάδας είναι n -στή ρίζα της μονάδας.
- (iii) Ο αντίστροφος μίας n -στής ρίζας της μονάδας ισούται με τον συζυγή της ρίζας και είναι επίσης n -στή ρίζα της μονάδας και $\overline{\zeta^k} = \zeta^{n-k}$.
- (iv) Το άθροισμα όλων των n -στών ριζών της μονάδας ισούται με 0,

$$1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0.$$

Παραδείγματα 3.4.0.3

- i. Ας λύσουμε στο \mathbb{C} την εξίσωση $x^3 - 1 = 0$. Το x θα είναι λύση της εξίσωσης, αν και μόνο αν $x^3 = 1$, επομένως οι λύσεις είναι οι κυβικές ρίζες της μονάδας. Η πρωταρχική κυβική ρίζα της μονάδας είναι

$$\zeta = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

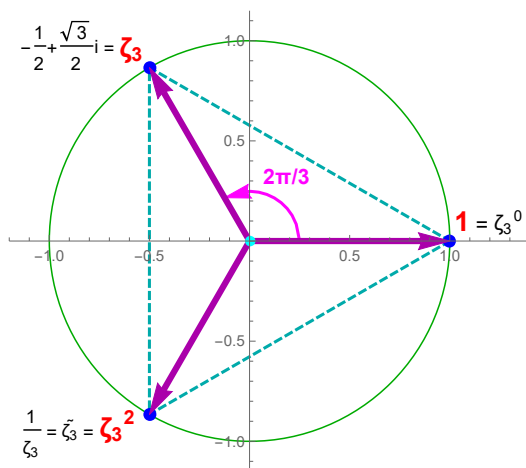
Παρατηρούμε ότι

$$\zeta^{-1} = \zeta^2 = \bar{\zeta} \text{ και } 1 + \zeta + \zeta^2 = 0.$$

Τέλος,

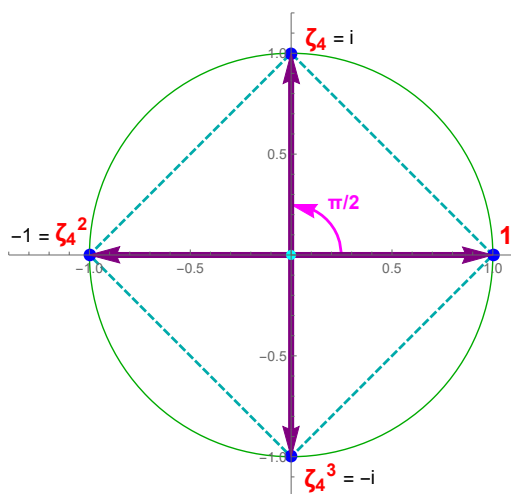
$$X^3 - 1 = (X - 1)(X - \zeta)(X - \zeta^2) \text{ ενώ } (X - \zeta)(X - \zeta^2) = X^2 + X + 1.$$

Το πολυώνυμο $X^2 + X + 1$ ονομάζεται το **τρίτο κυκλοτομικό** πολυώνυμο και συμβολίζεται συνήθως με $\Phi_3(X)$. Οι κυβικές ρίζες της μονάδας και το κανονικό τρίγωνο που σχηματίζουν απεικονίζονται στο Σχήμα 3.22.

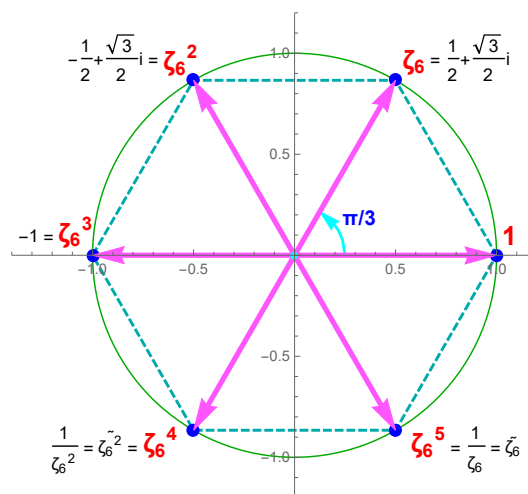


Σχήμα 3.22: Κυβικές ρίζες του 1.

- ii. Στα Σχήματα 3.23 απεικονίζονται στον μοναδιαίο κύκλο οι n -στές ρίζες της μονάδας για $n = 4$ και $n = 6$. Οι αντίστοιχες πρωταρχικές ρίζες συμβολίζονται με ζ_4 και ζ_6 .



(α) Τέταρτες ρίζες του 1.



(β) Έκτες ρίζες του 1.

Σχήμα 3.23: Ρίζες της μονάδας.

3.5 Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Όπως αναφέραμε, η ανακάλυψη των μιγαδικών αριθμών οφείλεται σε σημαντικό βαθμό στην προσπάθεια των μαθηματικών να βρουν λύσεις σε πολυωνυμικές εξισώσεις. Για τη σημασία της ανακάλυψής τους αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα των μαθηματικών. Πρώτα, θυμίζουμε ότι αν $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ είναι ένα μη μηδενικό πολυώνυμο με συντελεστές a_0, \dots, a_n στο \mathbb{R} (ή γενικότερα στο \mathbb{C}) και με $a_n \neq 0$, τότε ο βαθμός του $P(X)$ συμβολίζεται με $\deg P(x)$ και είναι ο δείκτης n , δηλαδή $\deg P(X) = n$, ενώ το X είναι η μεταβλητή. Όταν αναφερόμαστε σε **ρίζες** του $P(X)$ στο \mathbb{C} , εννοούμε μιγαδικούς αριθμούς z οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$. Υπάρχει εδώ ένα λεπτό σημείο: πολλές φορές, χάριν ευκολίας, γράφουμε $P(X) = 0$ ή $a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 = 0$ και συνεχίζουμε κάνοντας τις πράξεις, προσπαθώντας να βρούμε τις ρίζες του $P(X)$. Αυτό δεν είναι τυπικά σωστό, καθώς γράφοντας $P(X) = 0$ είναι ισοδύναμο με το να λέμε ότι το πολυώνυμο $P(X)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο και το οποίο ισχύει μόνο αν $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$. Είναι άλλο, λοιπόν, να λύνουμε μία πολυωνυμική εξίσωση και άλλο να γράφουμε ότι ένα πολυώνυμο είναι μηδέν. Όταν γράφουμε την πολυωνυμική εξίσωση $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$, θεωρούμε ότι το z είναι ο άγνωστος (όχι μεταβλητή) και λύνουμε ως προς το z . Μετά από αυτήν την παρένθεση, λέμε ότι το πολυώνυμο $Q(x)$ είναι **παράγοντας** του $P(X)$, αν οι συντελεστές του $Q(X)$ είναι στο ίδιο σώμα όπως και οι συντελεστές του $P(X)$ και εάν υπάρχει πολυώνυμο $H(X)$ τέτοιο ώστε $P(X) = Q(X)H(X)$. Σημειώνουμε ότι η Ευκλείδεια Διαίρεση πολυωνύμων είναι ένα πολύ δυνατό εργαλείο για τον υπολογισμό του πηλίκου και του υπόλοιπου της διαίρεσης δύο πολυωνύμων. Θα θεωρήσουμε επίσης γνωστό ότι z είναι ρίζα του $P(X)$, αν και μόνο αν το $(X - z)$ είναι παράγοντας του $P(X)$, δηλ. αν υπάρχει πολυώνυμο $Q(X)$ με συντελεστές στο \mathbb{C} , τέτοιο ώστε

$$P(X) = (X - z)Q(X).$$

Θα δείτε σε επόμενο μάθημα αλγεβρικών δομών ότι ισχύει η *μοναδική παραγοντοποίηση* για πολυώνυμα με συντελεστές στο \mathbb{R} ή γενικότερα στο \mathbb{C} . Εξαιτίας της ιδιότητας της μοναδικής παραγοντοποίησης, αν z_1, \dots, z_s είναι ρίζες του $P(X)$, τότε $(X - z_1) \cdots (X - z_s)$ είναι παράγοντας του $P(X)$. Δεν υπάρχει λόγος οι ρίζες ενός πολυωνύμου να είναι διακριτές. Αν z είναι ρίζα του $P(X)$ και για κάποιο πολυώνυμο $Q(X)$ ισχύει ότι z δεν είναι ρίζα του $Q(X)$, ενώ για τον θετικό ακέραιο s ισχύει ότι $P(X) = (X - z)^s Q(X)$, τότε λέμε ότι s είναι η **αλγεβρική πολλαπλότητα** της ρίζας z .

Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Έστω $P(X)$ ένα μη μηδενικό πολυώνυμο με συντελεστές στο \mathbb{C} . Αν $n = \deg P(x)$, τότε το $P(X)$ έχει ακριβώς n ρίζες μετρώντας τις ρίζες με την αλγεβρική πολλαπλότητά τους.

Παραδείγματα 3.5.0.1

- i. Το πολυώνυμο $X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ έχει ρίζα το 1 με αλγεβρική πολλαπλότητα 2.
- ii. Έστω $P(X) = X^3 - 1$. Τότε $P(X) = (X - 1)\Phi_3(X) = (X - 1)(X^2 + X + 1) = (X - 1)(X - \zeta_3)(X - \bar{\zeta}_3)$, όπου ζ_3 είναι η πρωταρχική κυβική ρίζα της μονάδας.
- iii. Το πολυώνυμο $P(X) = X^5 - 3X^4 - 7X^3 + 7X^2 + 18X + 8$ παραγοντοποιείται ως εξής στο \mathbb{R} :

$$P(X) = (X + 1)^3(X - 2)(X - 4).$$

Εδώ η ρίζα -1 έχει αλγεβρική πολλαπλότητα 3.

iv. Το πολυώνυμο $P(X) = 2X^5 - 8X^3 + 28X^2 - 26X - 60$ παραγοντοποιείται στο \mathbb{R} ως εξής:

$$P(X) = 2(X + 1)(X - 2)(X + 3)(X^2 - 2X + 5),$$

ενώ στο \mathbb{C} παραγοντοποιείται ως εξής:

$$P(X) = 2(X + 1)(X - 2)(X + 3)(X - (1 + 2i))(X - (1 - 2i)).$$

Στα παραπάνω παραδείγματα, παρατηρούμε ότι οι μη πραγματικές ρίζες ενός πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές εμφανίζονται ανά ζεύγη, ως συζυγείς. Αυτό δεν είναι τυχαίο, καθώς ισχύει η επόμενη πρόταση. Λέμε ότι το $P(X)$ αναλύεται **πλήρως** σε γινόμενο πολυωνύμων αν το $P(X)$ γράφεται ως το γινόμενο αυτών των πολυωνύμων που δεν μπορούν να αναλυθούν περισσότερο. Σημειώνουμε ότι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού με αρνητική διακρίνουσα δεν μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων πρώτου βαθμού στο \mathbb{R} , διαφορετικά θα είχε ρίζες στο \mathbb{R} .

Πρόταση 3.5.0.2 Έστω $P(X)$ ένα μη μηδενικό πολυώνυμο με συντελεστές στο \mathbb{R} . Αν ο μιγαδικός z είναι ρίζα του $P(X)$, τότε \bar{z} είναι ρίζα του $P(X)$. Αν $\text{Im}(z) \neq 0$, τότε το πολυώνυμο $X^2 - 2\text{Re}(z)X + |z|^2$ είναι παράγοντας του $P(X)$ στο \mathbb{R} . Κατά συνέπεια, αν $P(X)$ είναι ένα μη μηδενικό πολυώνυμο με συντελεστές στο \mathbb{R} , τότε το $P(X)$ αναλύεται πλήρως σε γινόμενο πολυωνύμων πρώτου ή δευτέρου βαθμού με συντελεστές στο \mathbb{R} .

Απόδειξη. Έστω $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$, όπου $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Αφού z είναι ρίζα του $P(X)$, ισχύει ότι $a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$. Επομένως,

$$\overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{a}_n \bar{z}^n + \dots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0 = 0$$

και, αφού οι συντελεστές a_i του $P(X)$ είναι πραγματικοί, έχουμε $\bar{a}_i = a_i$, και καταλήγουμε στο ότι

$$a_n \bar{z}^n + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0 \Rightarrow \bar{z} \text{ είναι ρίζα του } P(X).$$

Έστω τώρα ότι $\text{Im}(z) \neq 0$. Αφού \bar{z} είναι ρίζα του $P(X)$, συμπεραίνουμε ότι

$$(X - z)(X - \bar{z})$$

είναι παράγοντας του $P(X)$ στο \mathbb{C} . Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι

$$Q(X) = (X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\text{Re}(z)X + |z|^2$$

είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές το οποίο διαιρεί το $P(X)$ (στο \mathbb{C}) και άρα είναι παράγοντας του $P(X)$ (στο \mathbb{C}). Από τον Ευκλείδειο αλγόριθμο, αφού διαιρούμε πραγματικούς με πραγματικούς, προκύπτει ότι το πηλίκο της διαίρεσης του $P(X)$ με το $Q(X)$ είναι και αυτό πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές! Τελικά αποδείξαμε το ζητούμενο, δηλαδή ότι $Q(X)$ είναι παράγοντας του $P(X)$ στο \mathbb{R} . Το τελευταίο συμπέρασμα της πρότασης προκύπτει από διαδοχική εφαρμογή του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας στο πηλίκο της διαίρεσης του $P(X)$ με το $X - z$ και χρήση των προηγούμενων σκελών της πρότασης. ■

Η Πρόταση 3.5.0.2 ισχύει *μόνο* για τα πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές. Επίσης, αν η ρίζα z του πολυωνύμου είναι πραγματικός αριθμός, τότε $\bar{z} = z$ και δεν κερδίζουμε γνώση από την εφαρμογή της πρότασης.

Παραδείγματα 3.5.0.3

- i. Το πολυώνυμο $P(X) = X^2 - (1 + i)X + i = (X - 1)(X - i)$ έχει μία πραγματική και μία μιγαδική ρίζα με πολλαπλότητα 1.
- ii. Έστω $P(X) = 2X^4 - 6X^3 - 10X^2 + 58X - 60$. Γνωρίζοντας ότι το $2 + i$ είναι ρίζα του $P(X)$ θα βρούμε τις υπόλοιπες ρίζες και θα αναλύσουμε το $P(X)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων πολυωνύμων με συντελεστές στο \mathbb{R} . Πράγματι, αφού το $2 + i$ είναι ρίζα του $P(X)$, το $\overline{2 + i} = 2 - i$ θα είναι ρίζα του $P(X)$. Έτσι το $P(X)$ θα έχει παράγοντα το πολυώνυμο

$$(X - 2 - i)(X - 2 + i) = (X - 2)^2 - i^2 = X^2 - 4X + 5.$$

Εκτελώντας την Ευκλείδεια διαίρεση του $P(x)$ με το $X^2 - 4X + 5$ βρίσκουμε

$$P(X) = (X^2 - 4X + 5)(2X^2 + 2X - 12).$$

Οι ρίζες του $2X^2 + 2X - 12$ είναι οι $\frac{-2 \pm 10}{4}$. Άρα

$$2X^2 + 2X - 12 = 2(X - 2)(X + 3)$$

και επομένως

$$P(X) = 2(X - 2)(X + 3)(X^2 - 4X + 5).$$

Οι τέσσερις ρίζες του $P(X)$ στο \mathbb{C} είναι οι μιγαδικοί αριθμοί: $2, -3, 2 + i, 2 - i$. Στο \mathbb{R} , το $P(X)$ έχει μόνο δύο ρίζες.

- iii. Θα αναλύσουμε πλήρως το $X^4 + 1$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων πολυωνύμων με συντελεστές στο \mathbb{R} . Όπως έχουμε ήδη δει, οι ρίζες του $X^4 + 1$ είναι οι: $z_0 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}, z_1 = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$ και οι συζυγείς τους. βλ. Παράδειγμα 3.4.0.2.iv. Αφού $(X - z_0)(X - \overline{z_0}) = X^2 - \sqrt{2}X + 1, (X - z_1)(X - \overline{z_1}) = X^2 + \sqrt{2}X + 1$, έχουμε ότι

$$X^4 + 1 = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1).$$

- iv. Όμοια, αν $0 \neq a \in \mathbb{R}$, τότε το πολυώνυμο $X^4 + a^4$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και αναλύεται σε γινόμενο δευτεροβάθμιων πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές ως εξής:

$$X^4 + a^4 = (X^2 - \sqrt{2}aX + a^2)(X^2 + \sqrt{2}aX + a^2).$$

3.6 Εργαστήριο με Mathematica

Θεωρούμε τους μιγαδικούς $z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + \sqrt{3}i, z_3 = -5 - i$.

{z1 = 1 - I, z2 = 1 + 3^(1/2)I, z3 = -5 - I}

{1 - i, 1 + i√3, -5 - i}

Η εντολή **Arg[z]** επιστρέφει το πρωτεύον όρισμα $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ ενός μιγαδικού $z \in \mathbb{C}$.

{Arg[z1], Arg[z2]}

{-π/4, π/3}

Arg[z3]

$$-\pi + \text{ArcTan}\left[\frac{1}{5}\right]$$

N[Arg[z3]/Pi]

$$-0.937167$$

Το όρισμα του z_3 δεν περιγράφεται αριθμητικά με απόλυτη ακρίβεια, είναι περίπου ίσο με -0.937167π .

Υπολογίζουμε στη συνέχεια το όρισμα πραγματικών και φανταστικών αριθμών και επιβεβαιώνουμε τις ιδιότητες

- $\text{Arg}(5z_1) = \text{Arg}(z_1)$,
- $|\text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(-z_1)| = \pi$,
- $\text{Arg}(\bar{z}_1) = \text{Arg}(z_1^{-1}) = -\text{Arg}(z_1)$,
- $\arg(z_1^3) = 3\arg(z_1)$,
- $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$,
- $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

{Arg[3], Arg[-5], Arg[2I], Arg[-7I]}

$$\left\{0, \pi, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right\}$$

{Arg[5z1], Arg[-z1], Arg[Conjugate[z1]], Arg[1/z1], Arg[z1^3]}

$$\left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$$

Simplify[{Arg[z1 * z2], Arg[z1] + Arg[z2], Arg[z1/z2], Arg[z1] - Arg[z2]}]

$$\left\{\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}\right\}$$

Ακολουθούν η τριγωνομετρική και η εκθετική μορφή του z_3 ,

$$z_3 = |z_3|(\cos \theta + i \sin \theta), \quad z_3 = |z_3|e^{i\theta},$$

όπου $\theta = \text{Arg}(z_3)$. Το Mathematica έχει δεσμεύσει το **Exp** για τη συνάρτηση $y = e^x$.

Abs[z3] * (Cos[Arg[z3]] + Sin[Arg[z3]] * I)

$$-5 - i$$

ComplexExpand[Abs[z3] * Exp[Arg[z3] * I]]

$$-5 - i$$

Ελέγχουμε την ορθότητα της διάσημης σχέσης $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Exp[I * Pi]

-1

Φέρνουμε τους μιγαδικούς $w = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i}$ και $w' = (-1 - i\sqrt{3})^5(1 - i)$ σε τριγωνομετρική μορφή. Η εντολή **AbsArg[z]** επιστρέφει τη λίστα $(|z|, \text{Arg}(z))$.

$$w = z2/(-3^{1/2} - I)$$

$$\frac{1 + i\sqrt{3}}{-i - \sqrt{3}}$$

AbsArg[w]

$$\left\{ 1, -\frac{5\pi}{6} \right\}$$

Simplify[AbsArg[z1 * z2^5]]

$$\left\{ 32\sqrt{2}, -\frac{7\pi}{12} \right\}$$

Συμπεραίνουμε ότι

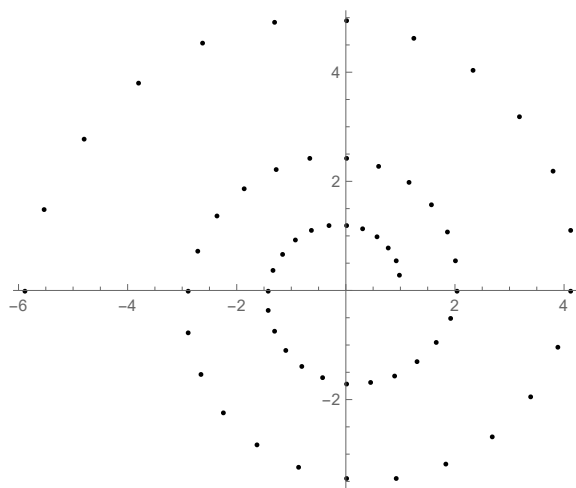
$$w = \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right), \quad w' = 32\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) \right).$$

Αναπαριστούμε στο μιγαδικό επίπεδο τις δυνάμεις u^1, \dots, u^{60} , του μιγαδικού $u = 1.03 e^{i\pi/12}$ (Σχήμα 3.24), και v^1, \dots, v^{144} , του μιγαδικού $v = 0.97 e^{i\pi/12}$ (Σχήμα 3.25). Κάνουμε χρήση της εντολής **Graphics**, στην οποία θα αναφερθούμε εκτενέστερα στην ενότητα 8.4, και τις εντολές **Table** και **Point**. Παρατηρήστε ότι $|u| = 1.03 > 1$, $|v| = 0.97 < 1$, ενώ $\text{Arg}(u) = \text{Arg}(v) = \pi/12$.

$$u = 1.03 \text{Exp}[\text{Pi} * I/12]$$

$$0.994904 + 0.266584 i$$

Graphics[Table[Point[ReIm[u^n]], {n, 1, 60}], Axes → True]

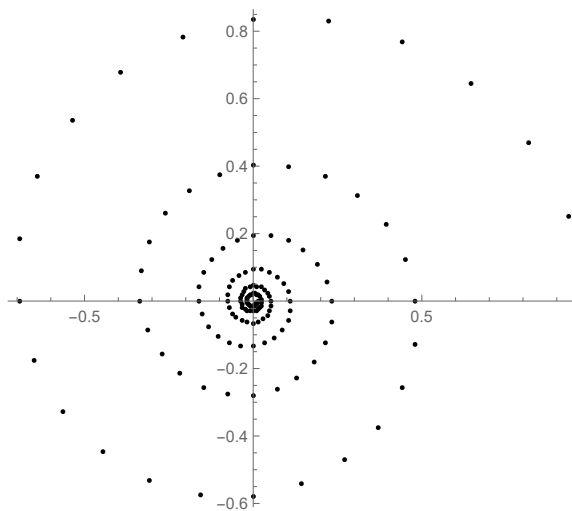


Σχήμα 3.24: Δυνάμεις του $u = 1.03 e^{i\pi/12}$.

$$v = 0.97 \text{Exp}[\text{Pi} * I/12]$$

$$0.936948 + 0.251054 i$$

`Graphics[Table[Point[ReIm[v^n]], {n, 1, 144}], Axes → True]`



Σχήμα 3.25: Δυνάμεις του $v = 0.97 e^{i\pi/12}$.

Αναπαριστούμε στο μιγαδικό επίπεδο και τις δέκατες τρίτες ρίζες της μονάδας, $1, r, r^2, \dots, r^{12}$, όπου

$$r = \cos \frac{\pi}{13} + i \sin \frac{\pi}{13} = e^{i\pi/13}$$

είναι η πρωταρχική δέκατη τρίτη ρίζα της μονάδας (Σχήμα 3.26).

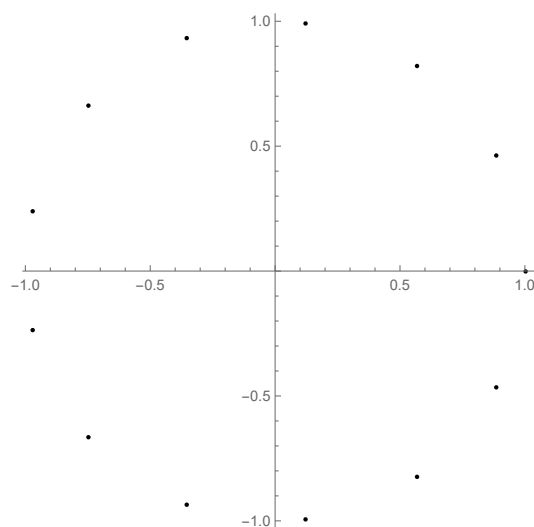
`r = Exp[2Pi * I/13]`

$$e^{\frac{2i\pi}{13}}$$

`{N[r], r^13}`

`{0.885456 + 0.464723 i, 1}`

`Graphics[Table[Point[ReIm[r^n]], {n, 0, 12}], Axes → True]`



Σχήμα 3.26: Οι δέκατες τρίτες ρίζες της μονάδας.

Θεωρούμε τέλος τα πολυώνυμα 5ου βαθμού

- $p_1(x) = x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 18x + 8,$

- $p_2(x) = 2x^5 - 8x^3 + 28x^2 - 26x - 60,$

- $p_3(x) = x^5 - x^4 + 5x^3 - 17x^2 - 24x - 72.$

Θα αναλύσουμε πλήρως τα $p_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, σε γινόμενο πολυωνύμων πρώτου ή δευτέρου βαθμού με συντελεστές από το \mathbb{R} .

p1 = x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 18x + 8; Factor[p1]

$$(-4 + x)(-2 + x)(1 + x)^3$$

Το $p_1(x)$ έχει πέντε πραγματικές ρίζες, το -1 είναι ρίζα αλγεβρικής πολλαπλότητας 3.

p2 = 2x^5 - 8x^3 + 28x^2 - 26x - 60; Factor[p2]

$$2(-2 + x)(1 + x)(3 + x)(5 - 2x + x^2)$$

Το $p_2(x)$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες και δύο συζυγείς μιγαδικές (τις ρίζες του τριωνύμου $5 - 2x + x^2$) όπως φαίνεται παρακάτω.

Solve[p2 == 0, x]

$$\{\{x \rightarrow -3\}, \{x \rightarrow -1\}, \{x \rightarrow 1 - 2i\}, \{x \rightarrow 1 + 2i\}, \{x \rightarrow 2\}\}$$

p3 = x^5 - x^4 + 5x^3 - 17x^2 - 24x - 72; Factor[p3]

$$(-3 + x)(8 + x^2)(3 + 2x + x^2)$$

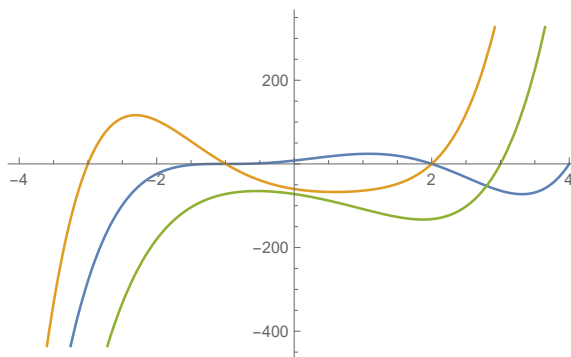
Το $p_3(x)$ έχει μία πραγματική ρίζα και τέσσερις μιγαδικές, συζυγείς ανά δύο:

Solve[p3 == 0, x]

$$\{\{x \rightarrow 3\}, \{x \rightarrow -2i\sqrt{2}\}, \{x \rightarrow 2i\sqrt{2}\}, \{x \rightarrow -1 - i\sqrt{2}\}, \{x \rightarrow -1 + i\sqrt{2}\}\}$$

Στο Σχήμα 3.27 βλέπουμε τη γραφική παράσταση των πολυωνυμικών συναρτήσεων $y = p_j(x)$, $j = 1, 2, 3$.

Plot[{p1, p2, p3}, {x, -4, 4}]



Σχήμα 3.27: Γραφική παράσταση πολυωνυμικών συναρτήσεων.

Εξάσκηση με το Mathematica

Χρησιμοποιήστε όπου είναι αναγκαίο την εντολή **ComplexExpand** για να φέρετε έναν μιγαδικό στη μορφή $x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών

$$i, \quad -1 + i, \quad (-1 + i)^{10}, \quad 2 - \frac{2i}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad w = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$$

και να υπολογίσετε τους μιγαδικούς z^{2023} , w^{12} , w^{26} , w^{144} , w^{2022} .

2. Να λύσετε στο \mathbb{C} τις εξισώσεις

i) $x^2 = i$, **ii)** $x^2 = 2 + 2i$, **iii)** $x^2 - (1 + i)x + i = 0$,

iv) $ix^2 + (1 + 3i)x + 3 + 4i = 0$, **v)** $x^2 - (5 + 3i)x + 4 + 7i = 0$,

vi) $x^2 + (3 + i)x + 2 + 2i = 0$, **vii)** $x^4 + 1 = 0$.

3. Να υπολογίσετε τις πέμπτες και τις δέκατες έκτης ρίζες της μονάδας και να τις αναπαράσχετε στο μιγαδικό επίπεδο.

4. Να παραγοντοποιήσετε πλήρως στο \mathbb{R} και στο \mathbb{C} τα παρακάτω πολυώνυμα

$$P(X) = X^4 + 5X^2 + 4, \quad Q(X) = X^4 + 2X^2 - 8X + 5,$$

$$R(X) = 2X^4 - 6X^3 - 10X^2 + 58X - 60.$$

3.7 Ασκήσεις

Λυμένες Ασκήσεις

- 3.7.1** Να δείξετε ότι η πολυωνυμική εξίσωση $(1 + x)^n = (1 - x)^n$, $n \geq 1$, έχει μόνο φανταστικές λύσεις.

Λύση. Το $\rho \in \mathbb{C}$ είναι λύση της εξίσωσης $(1 + x)^n = (1 - x)^n$ αν και μόνο αν

$$(1 + \rho)^n = (1 - \rho)^n \Rightarrow |(1 + \rho)^n| = |(1 - \rho)^n| \Leftrightarrow |1 + \rho|^n = |1 - \rho|^n \stackrel{\substack{|w| \geq 0 \\ \forall w \in \mathbb{C}}}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow |1 + \rho| = |1 - \rho| \Leftrightarrow |1 + \rho|^2 = |1 - \rho|^2 \Leftrightarrow (1 + \rho)(\overline{1 + \rho}) = (1 - \rho)(\overline{1 - \rho}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + \rho)(1 + \bar{\rho}) = (1 - \rho)(1 - \bar{\rho}) \Leftrightarrow 1 + \bar{\rho} + \rho + \rho\bar{\rho} = 1 - \bar{\rho} - \rho + \rho\bar{\rho} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\rho + \bar{\rho}) = 0 \Leftrightarrow \bar{\rho} = -\rho \Leftrightarrow \rho \in i\mathbb{R}.$$

Έτσι, αν το ρ είναι λύση της εξίσωσης, τότε $\rho \in i\mathbb{R}$ και οι πιθανές λύσεις της εξίσωσης είναι όλοι οι φανταστικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, οι ρίζες της εξίσωσης $(1 + x)^3 = (1 - x)^3$ είναι οι αριθμοί $0, \sqrt{3}i, -\sqrt{3}i \in i\mathbb{R}$. \square

- 3.7.2** Να βρεθεί η τριγωνομετρική μορφή του

(α) $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{-\sqrt{3} - i}$,

(β) $w = (-1 - i\sqrt{3})^5(1 - i)$.

Λύση. **(α)** Παρατηρούμε ότι

$$z = \frac{(1 + i\sqrt{3})(-\sqrt{3} + i)}{(-\sqrt{3} - i)(-\sqrt{3} + i)} = \frac{-\sqrt{3} + i - 3i - \sqrt{3}}{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \frac{-2\sqrt{3} - 2i}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Έτσι $|z| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$. Ψάχνουμε $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ με $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$. Αφού η εικόνα του z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκει στο γ' τεταρτημόριο, ένα όρισμα του z είναι το $\phi = \pi + \frac{\pi}{6}$, επομένως η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή είναι

$$z = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}.$$

(β) Φέρνουμε τους $w_1 = -1 - i\sqrt{3}$, $w_2 = 1 - i$ σε τριγωνομετρική μορφή. Έχουμε $|w_1| = 2$, $|w_2| = \sqrt{2}$ και αν $\theta_1, \theta_2 \in (0, \pi/2)$ με

$$\cos \theta_1 = 1/2 \Rightarrow \theta_1 = \pi/3, \quad \cos \theta_2 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow \theta_2 = \pi/4.$$

Οι εικόνες των w_1, w_2 ανήκουν αντίστοιχα στο γ' και δ' τεταρτημόριο, επομένως $\arg(w_1) = \pi + \pi/3$, $\text{Arg}(w_2) = -\pi/4$. Έτσι από το Θεώρημα 3.3.0.3 έχουμε

$$w_1 = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \Rightarrow w_1^5 = 2^5 \left(\cos \frac{20\pi}{3} + i \sin \frac{20\pi}{3} \right) = 2^5 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$w_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right),$$

και από το Θεώρημα 3.3.0.1 η τριγωνομετρική μορφή του $w = w_1^5 w_2$ είναι

$$w = 2^5 \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = 2^5 \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right). \quad \square$$

3.7.3 Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 + \lambda z + 1 = 0$.

(i) Να βρεθούν οι ρ_1, ρ_2 για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Αν λ είναι μιγαδικός, μη πραγματικός αριθμός, να δείξετε ότι $\rho_1, \rho_2 \notin \mathbb{R}$.

Λύση. (i) Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα $\Delta = \lambda^2 - 4$. Ανάλογα με το πρόσημο της Δ διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Αν $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, τότε $\Delta \geq 0$ και $\rho_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2} \in \mathbb{R}$.
- $\lambda = -2$. Τότε $\Delta = 0$ και $\rho_1 = \rho_2 = -(-2)/2 = 1$.
- $\lambda = 2$. Τότε $\Delta = 0$ και $\rho_1 = \rho_2 = -2/2 = -1$.
- Αν $\lambda \in (-2, 2)$, τότε $\Delta \leq 0$ και $\rho_{1,2} = \frac{-\lambda \pm i\sqrt{|\lambda^2 - 4|}}{2} = \frac{-\lambda \pm i\sqrt{4 - \lambda^2}}{2}$.

(ii) Έστω $\lambda \notin \mathbb{R}$. Αν $\rho_1 \in \mathbb{R}$, από τους τύπους του Vieta έχουμε

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = 1 \Rightarrow \rho_1 \neq 0 \text{ και } \rho_2 = \frac{1}{\rho_1} \in \mathbb{R}. \text{ Τότε } \lambda = -(\rho_1 + \rho_2) \in \mathbb{R},$$

το οποίο είναι άτοπο. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι $\rho_2 \in \mathbb{R}$, επομένως $\rho_1, \rho_2 \notin \mathbb{R}$. \square

3.7.4 Να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης $z^2 + (3+i)z + 2+2i = 0$.

Λύση. Έχουμε $\Delta = (3+i)^2 - 4(2+2i) = -2i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Ψάχνουμε $d \in \mathbb{C}$, με $d^2 = \Delta$.

α' τρόπος Έστω $d = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Έχουμε

$$d^2 = \Delta \Leftrightarrow (x + iy)^2 = -2i \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 1, y = -1 \quad (\text{βλ. Παράδειγμα 3.1.0.4}).$$

β' τρόπος Φέρνουμε τη Δ σε τριγωνομετρική μορφή,

$$\Delta = -2i = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Τότε μία τετραγωνική ρίζα της Δ είναι η

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi/2}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi/2}{2} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = 1 - i. \end{aligned}$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι αριθμοί

$$z_1 = \frac{-(3+i) + (1-i)}{2} = -1 - i \quad \text{και} \quad z_2 = \frac{-(3+i) - (1-i)}{2} = -2. \quad \square$$

3.7.5 Αν η εξίσωση $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει ρίζα το $\rho = 3 + 2i$, να βρεθούν τα β, γ .

Λύση. *α' τρόπος* Το $\rho = 3 + 2i$ είναι ρίζα της $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$, αν και μόνο αν

$$2(3 + 2i)^2 + \beta(3 + 2i) + \gamma = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \beta = -12, \quad \gamma = 26.$$

β' τρόπος Η πολωνυμική εξίσωση $2x^2 + \beta x + \gamma = 0$, δευτέρου βαθμού, με πραγματικούς συντελεστές, έχει ρίζα το $\rho = 3 + 2i$. Από την Πρόταση 3.5.0.2 προκύπτει ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης είναι ο συζυγής $\bar{\rho} = 3 - 2i$ και από τους τύπους του Vieta έχουμε

$$\rho + \bar{\rho} = -\frac{\beta}{2} \Leftrightarrow 6 = -\frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \beta = -12, \quad \rho \cdot \bar{\rho} = \frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow 3^2 + 2^2 = \frac{\gamma}{2} \Leftrightarrow \gamma = 26. \quad \square$$

3.7.6 Να λύσετε στο \mathbb{C} τις εξισώσεις **(i)** $w^3 = i$,

$$\textbf{(ii)} \quad (z - 1)^3 - i(z + 1)^3 = 0. \quad (3.7.1)$$

Λύση. **(i)** Φέρνουμε το i σε τριγωνομετρική μορφή,

$$w^3 = i \Leftrightarrow w^3 = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

Έτσι οι κυβικές ρίζες του i είναι

$$w_0 = \cos \left(\frac{\pi/2}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi/2}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_1 = \cos \left(\frac{\pi/2 + 2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi/2 + 2\pi}{3} \right) = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow$$

$$w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$w_2 = \cos \left(\frac{\pi/2 + 2 \cdot 2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi/2 + 2 \cdot 2\pi}{3} \right) = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow w_2 = -i.$$

(ii) Παρατηρούμε ότι το -1 δεν επαληθεύει την εξίσωση (3.7.1) $((-1-1)^3 - i \cdot 0 = -8 \neq 0)$. Έτσι $z \neq -1$ και η εξίσωση (3.7.1) ισοδύναμα γράφεται

$$(z-1)^3 = i(z+1)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = i \xLeftrightarrow{w = \frac{z-1}{z+1}} w^3 = i \xLeftrightarrow{(i)} \\ w = \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2} \quad \text{ή} \quad w = -i,$$

όπου θέσαμε

$$w = \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z-1 = wz+w \Leftrightarrow z-wz = w+1 \Leftrightarrow z(1-w) = 1+w \Leftrightarrow z = \frac{w+1}{1-w}.$$

Έτσι για $w = (\sqrt{3} + i)/2$, $w = (-\sqrt{3} + i)/2$, $w = -i$, βρίσκουμε αντίστοιχα

$$z = \frac{(\sqrt{3} + 2) + i}{(2 - \sqrt{3}) - i}, \quad z = \frac{(2 - \sqrt{3}) + i}{(2 + \sqrt{3}) - i}, \quad z = \frac{1 - i}{1 + i} = -i. \quad \square$$

3.7.7 Να δείξετε ότι το $X^2 - X + 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$$P(X) = X^{2n+1} + (X-1)^{n+2}, \quad n \geq 1.$$

Λύση. Η άσκηση λύνεται με διάφορους τρόπους, όπως για παράδειγμα με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Παρακάτω θα λύσουμε την άσκηση με χρήση της θεωρίας των μιγαδικών που αναπτύχθηκε στο παρόν κεφάλαιο. Έστω $\rho, \bar{\rho}$ οι ρίζες του τριωνύμου $X^2 - X + 1$ ($\rho, \bar{\rho} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$), έτσι $X^2 - X + 1 = (X - \rho)(X - \bar{\rho})$. Επειδή το ρ είναι ρίζα του $X^2 - X + 1$, ισχύει

$$\rho^2 - \rho + 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^2 = \rho - 1 \quad (3.7.2)$$

$$\Rightarrow \rho^{2n} = (\rho - 1)^n \quad (3.7.3)$$

Από τη σχέση (3.7.2) έχουμε

$$(\rho - 1)^2 = \rho^2 - 2\rho + 1 = (\rho - 1) - 2\rho + 1 = -\rho \\ \Rightarrow \rho = -(\rho - 1)^2 \quad (3.7.4)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις (3.7.3) και (3.7.4) παίρνουμε

$$\rho^{2n+1} = -(\rho - 1)^{n+2} \Leftrightarrow \rho^{2n+1} + (\rho - 1)^{n+2} = 0 \Leftrightarrow P(\rho) = 0,$$

δηλαδή το ρ είναι ρίζα του $P(X)$ και το $(X - \rho)$ είναι παράγοντάς του. Τότε, από την Πρόταση 3.5.0.2, και το $\bar{\rho}$ είναι ρίζα του $P(X)$ και το $(X - \bar{\rho})$ είναι παράγοντάς του. Έτσι το πολυώνυμο

$$(X - \rho)(X - \bar{\rho}) = X^2 - X + 1$$

είναι παράγοντας του $P(X)$. □

Ασκήσεις για Εξάσκηση

3.7.1 Να υπολογίσετε τον μιγαδικό $w = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{2021}$.

3.7.2 Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των $-i$, $-1 + i$, $(-1 + i)^{10}$, $2 - \frac{2i}{\sqrt{3}}$, $1 + i\sqrt{3}$, $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$, $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$ και να υπολογίσετε τους μιγαδικούς z^{12} και z^{26} .

3.7.3 Να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης $z^2 - (5 + 3i)z + 4 + 7i = 0$.

3.7.4 Αν το $-2 + i$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(X) = 3X^3 + 10X^2 + 7X - 10$, να βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες και να γράψετε το $P(X)$ ως γινόμενο πολυωνύμων με συντελεστές από το \mathbb{R} .

3.7.5 Να λύσετε στο \mathbb{C} την εξίσωση $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$.

3.7.6 Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου $P(X) = X^4 + 2X^2 - 8X + 5$ στο \mathbb{C} και να γράψετε το $P(X)$ ως γινόμενο πολυωνύμων πρώτου ή δευτέρου βαθμού με συντελεστές από το \mathbb{R} .

3.7.7 Αν ζ είναι μία κυβική ρίζα της μονάδας (δηλαδή $\zeta^3 = 1$), με $\zeta \neq 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = (1 - \zeta + \zeta^2)(1 + \zeta - \zeta^2)$.

Βιβλιογραφία

- [1] Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Βαβατσούλας και Χ. Χαραλάμπους. *Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2017. ISBN: 978-960-418-727-0.
- [2] Κ. Λάκκης. *Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη, 1993.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΙΝΑΚΕΣ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται η άλγεβρα των πινάκων. Μελετώνται οι ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πινάκων καθώς και του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα. Εισάγονται οι έννοιες του ανάστροφου πίνακα, του συμμετρικού πίνακα και του ίχνους πίνακα και εξετάζονται οι ιδιότητές τους. Επιπλέον, εξετάζεται η ύπαρξη αντιστρόφου πίνακα. Το κεφάλαιο περιλαμβάνει μία ενότητα «Εργαστήριο με Mathematica». Η χρήση των εντολών που περιέχει αυτή η ενότητα επιτρέπει γρήγορους υπολογισμούς και πειραματισμό πάνω στις έννοιες που αναπτύχθηκαν. Το κεφάλαιο κλείνει με μια ενότητα ασκήσεων πάνω στη θεωρία που αναπτύχθηκε. Για την παρουσίαση και τα παραδείγματα ακολουθούμε το [1].

Προαπαιτούμενη γνώση: Βασικές Λυκειακές γνώσεις.

4.1 Πίνακες, Είδη Πινάκων

Η άλγεβρα των πινάκων ξεκίνησε με τη μελέτη συστημάτων γραμμικών εξισώσεων. Από τις πήλινες πλάκες που έχουν διασωθεί και που χρονολογούνται από το 1800 στο 1600 π.Χ. φαίνεται ότι οι Βαβυλώνιοι είχαν μελετήσει προβλήματα που οδηγούν σε γραμμικές εξισώσεις που έχουν ταυτόχρονη λύση. Πρώτοι, όμως, οι Κινέζοι μαθηματικοί ανέπτυξαν μεθόδους επίλυσης συστημάτων πολύ κοντύτερα στις σημερινές. Στο κείμενο «Τα Εννέα Κεφάλαια της Μαθηματικής Τέχνης» (βλ. [2]), που γράφτηκε μεταξύ του 10ου και 2ου αιώνα π.Χ. από γενιές Κινέζων μελετητών, συναντάμε το ακόλουθο πρόβλημα (σε ελεύθερη μετάφραση):

Κάποιος πουλά 2 βόδια και 5 πρόβατα και αγοράζει 13 γουρούνια και του δίνουν 1000 νομίσματα. Πουλώντας 3 βόδια και 3 γουρούνια αγοράζει 9 πρόβατα. Πουλώντας 6 πρόβατα

και 8 γουρουνία και αγοράζοντας 5 βόδια χρωστά 600 νομίσματα. Πόσο κοστίζει το βόδι, το πρόβατο και το γουρούνι;

Θεωρώντας, βέβαια, ότι η τιμή πώλησης και αγοράς είναι η ίδια, το πρόβλημα αυτό ανάγεται στην επίλυση ενός **γραμμικού συστήματος** με τρεις εξισώσεις και τρεις αγνώστους, σύστημα που σήμερα θα γράφαμε ως εξής:

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 13z &= 1000 \\ 3x - 9y + 3z &= 0 \\ -5x + 6y + 8z &= -600 \end{aligned}$$

όπου x, y, z είναι το κόστος του βοδιού, προβάτου και γουρουνιού αντίστοιχα.

Για να λύσουν το πρόβλημα, οι Κινέζοι μαθηματικοί ουσιαστικά απομόνωσαν και επεξεργάστηκαν τους συντελεστές του συστήματος. Ας τοποθετήσουμε, λοιπόν, τους συντελεστές των αγνώστων από το κινέζικο γραμμικό σύστημα σε έναν 3×3 πίνακα (ο πίνακας A κάτω αριστερά), ενώ ας καταγράψουμε όλες τις πληροφορίες του συστήματος, δηλαδή τους συντελεστές των αγνώστων και τους σταθερούς όρους στον *επαυξημένο* 3×4 -πίνακα (ο πίνακας B κάτω δεξιά):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -13 \\ 3 & -9 & 3 \\ -5 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ -5 & 6 & 8 & -600 \end{array} \right).$$

Ο πίνακας A έχει βέβαια 9 στοιχεία, ενώ ο πίνακας B έχει 12 στοιχεία. Γενικότερα, όταν δουλεύουμε με πίνακες, θέλουμε να προσδιορίσουμε το σύνολο στο οποίο ανήκουν τα στοιχεία. Οι πίνακες A και B έχουν στοιχεία ακέραιους. Γράφουμε ότι $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{Z})$, ενώ $B \in M_{3 \times 4}(\mathbb{Z})$. Ας θέσουμε τα παραπάνω στο γενικό θεωρητικό πλαίσιο.

Έστω K ένα σύνολο. Μία συλλογή $n \cdot m$ στοιχείων του K τοποθετημένων με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματίζονται n γραμμές και m στήλες ονομάζεται $n \times m$ -**πίνακας** με στοιχεία από το K . Το σύνολο των $n \times m$ -πινάκων με στοιχεία από το K συμβολίζεται με $M_{n \times m}(K)$. Οριοθετούμε τον πίνακα με αγκύλες ή με παρενθέσεις. Όταν πρόκειται για ένα μόνο στοιχείο k , τότε μπορούμε να ταυτίσουμε τον 1×1 -πίνακα $[k] \in M_{1 \times 1}(K)$ με το στοιχείο $k \in K$. Συνήθως, παίρνουμε το K να είναι σώμα. Θα δούμε αργότερα σε ποια σημεία της θεωρίας αυτό είναι αναγκαίο. Για ό,τι θα κάνουμε στη συνέχεια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το K είναι ένα από τα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$. Γράφουμε $A = (a_{ij})$ εννοώντας ότι

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Τα στοιχεία a_{ij} είναι τα **στοιχεία** του A . Η i -γραμμή του A καθορίζεται από τα στοιχεία $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im}$, ενώ η j -στήλη του A καθορίζεται από τα στοιχεία $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$. Συμφωνούμε να θεωρούμε τη i -γραμμή ως $1 \times m$ -πίνακα και τη j -στήλη του A ως $n \times 1$ -πίνακα. Έτσι, αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $n \times m$ πίνακας και Γ_i, Σ_j είναι η i -γραμμή και η j -στήλη του A (για $1 \leq i \leq n$ και $1 \leq j \leq m$), τότε ισχύει:

$$\Gamma_i = [a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{im}], \quad \Sigma_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{bmatrix} = [\Sigma_1 \mid \Sigma_2 \mid \cdots \mid \Sigma_m].$$

Το στοιχείο $a_{\kappa\lambda}$ του πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ βρίσκεται στην κ -γραμμή και στην λ -στήλη, δηλαδή ο πρώτος δείκτης κ του $a_{\kappa\lambda}$ είναι ο δείκτης γραμμών και ο δεύτερος δείκτης λ είναι ο δείκτης των στηλών και ονομάζεται **στοιχείο στην (κ, λ) -θέση** του πίνακα A . Τα στοιχεία του A που αποτελούν την **κύρια διαγώνιο** του πίνακα A είναι τα στοιχεία της μορφής a_{ii} , όπου ο δείκτης γραμμών ισούται με τον δείκτη στηλών. Έτσι, η κύρια διαγώνιος του $A \in M_{n \times m}(K)$ αποτελείται από τα στοιχεία

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{\kappa\kappa}, \text{ όπου } \kappa = \min \{n, m\}.$$

Ένας πίνακας με ίδιο πλήθος γραμμών και στηλών ονομάζεται **τετραγωνικός**. Το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων $M_{n \times n}(K)$ με στοιχεία από το K συμβολίζεται για συντομία με $M_n(K)$. Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Στην περίπτωση αυτή η κύρια διαγώνιος του A αποτελείται από τα στοιχεία

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}.$$

Το **ίχνος** του τετραγωνικού πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, συμβολίζεται με $\text{Tr}(A)$ και είναι το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγώνιου του A , δηλ.

$$\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \in K.$$

Δύο πίνακες είναι **ίσοι** αν και μόνο αν έχουν τις ίδιες διαστάσεις και αν σε κάθε θέση των δύο πινάκων τα αντίστοιχα στοιχεία είναι ίσα. Ένας $1 \times m$ -πίνακας ονομάζεται **πίνακας γραμμή**, ενώ ένας $n \times 1$ -πίνακας ονομάζεται **πίνακας στήλη**. Ο πίνακας του $M_{n \times m}(K)$ που όλα τα στοιχεία του είναι ίσα με 0 ονομάζεται **μηδενικός $n \times m$ -πίνακας** και συμβολίζεται με 0 ή $0_{n \times m}$, αν χρειάζεται να τονίσουμε τις διαστάσεις του. Ο μηδενικός $n \times n$ -πίνακας $0_{n \times n}$ συμβολίζεται με 0_n .

Παραδείγματα 4.1.0.1

i. Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

είναι ένας 2×3 -πίνακας, $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$. Το στοιχείο στην $(1, 2)$ -θέση του πίνακα είναι το $a_{12} = 3$, αντίστοιχα $a_{23} = 4$, $a_{21} = 0$ κ.τ.λ. Την κύρια διαγώνιο του πίνακα A αποτελούν τα στοιχεία $a_{11} = 2$ και $a_{22} = 1$. Ο A έχει δύο γραμμές,

$$\Gamma_1 = [2 \ 3 \ 5], \quad \Gamma_2 = [0 \ 1 \ 4]$$

και τρεις στήλες

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$A = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad A = [\Sigma_1 \ \Sigma_2 \ \Sigma_3].$$

ii. Έστω ο πίνακας στήλη

$$S = \begin{bmatrix} 5 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R}).$$

Ο S έχει τρεις γραμμές και η κύρια διαγώνιος του αποτελείται μόνο από το στοιχείο $s_{11} = 5$.

iii. Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$. Ο $n \times m$ -πίνακας $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ είναι ο **συζυγής** του A . Σημειώνουμε ότι

$$A = \bar{\bar{A}} \text{ αν-ν } a_{ij} = \bar{a}_{ij} \text{ αν-ν } a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ για } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m.$$

Με άλλα λόγια, ο A είναι ίσος με τον συζυγή του, αν και μόνο αν τα στοιχεία του A είναι πραγματικοί αριθμοί.

iv. Αν $A = \begin{pmatrix} 1 - 2i & 0 \\ 5 & i \end{pmatrix}$, τότε $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 + 2i & 0 \\ 5 & -i \end{pmatrix}$. Επιπλέον,

$$\text{Tr}(A) = 1 - i \text{ και } \text{Tr}(\bar{A}) = 1 + i.$$

$$\text{v. } 0_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, 0_{1 \times 2} = [0 \ 0], 0_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ένας πίνακας ονομάζεται **άνω τριγωνικός**, αν είναι τετραγωνικός και όλα τα στοιχεία του *κάτω* από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Έτσι,

$$T = (t_{ij}) \in M_n(K) \text{ είναι άνω τριγωνικός} \Leftrightarrow t_{\kappa\lambda} = 0 \text{ για } 1 \leq \lambda < \kappa \leq n.$$

Ένας πίνακας ονομάζεται **κάτω τριγωνικός**, αν είναι τετραγωνικός και όλα τα στοιχεία του *πάνω* από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Έτσι,

$$Q = (q_{ij}) \in M_n(K) \text{ είναι κάτω τριγωνικός} \Leftrightarrow q_{\kappa\lambda} = 0 \text{ για } 1 \leq \kappa < \lambda \leq n.$$

Ένας πίνακας ονομάζεται **διαγώνιος**, αν είναι τετραγωνικός και αν όλα τα στοιχεία πάνω και κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν. Έτσι,

$$D = (d_{ij}) \in M_n(K) \text{ είναι διαγώνιος} \Leftrightarrow d_{\kappa\lambda} = 0 \text{ για } \kappa \neq \lambda.$$

Γράφουμε $D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$ για τον διαγώνιο πίνακα D , σημειώνοντας μόνο τα στοιχεία της κυρίας διαγώνιου. Ο διαγώνιος πίνακας $\text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ του $M_n(K)$ ονομάζεται **μοναδιαίος $n \times n$ -πίνακας** και συμβολίζεται με I_n . Σημειώνουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας είναι διαγώνιος, αν και μόνο αν είναι ταυτόχρονα άνω και κάτω τριγωνικός. Σχηματικά έχουμε:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}}_{\text{άνω τριγωνικός}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 \\ * & \dots & * & * \end{pmatrix}}_{\text{κάτω τριγωνικός}} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix}}_{\text{διαγώνιος}},$$

όπου $*$ μπορεί να είναι οποιοδήποτε στοιχείο του K .

Παράδειγμα 4.1.0.2 Έστω οι 3×3 πίνακες

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ο T είναι άνω τριγωνικός, ο Q είναι κάτω τριγωνικός ενώ $D = \text{diag}(1, 2, 0)$. Παρατηρούμε ότι $I_3 = (\delta_{ij})$, όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker, δ_{ij} . Σημειώνουμε ότι γενικότερα

$$I_n = (\delta_{ij}), \text{ όπου } \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} .$$

Έστω τώρα $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$. Ο **αντίθετος** του A συμβολίζεται με $-A$ και είναι ο πίνακας $-A = (-a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$. Είναι φανερό ότι αν $A = -A$, τότε $a_{ij} = -a_{ij}$ και άρα $2a_{ij} = 0$, συνεπώς $a_{ij} = 0$ και άρα ο πίνακας A είναι ο μηδενικός πίνακας ($A = \mathbf{0}$). Κατά συνέπεια, ο μόνος πίνακας στο $M_{n \times m}(K)$ που είναι ίσος με τον αντίθετό του είναι ο μηδενικός πίνακας. Ο **ανάστροφος** του A συμβολίζεται με A^T και είναι ο πίνακας $A^T = (a'_{pq}) \in M_{m \times n}(K)$ με $a'_{pq} = a_{qp}$ για $1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n$. Τονίζουμε ότι ο αριθμός γραμμών του A^T είναι ακριβώς ο αριθμός των στηλών του A , ενώ ο αριθμός στηλών του A^T είναι ακριβώς ο αριθμός των γραμμών του A . Είναι φανερό ότι παίρνοντας συνεχόμενα δύο φορές τον ανάστροφο, επιστρέφουμε στον αρχικό πίνακα, δηλαδή

$$(A^T)^T = A .$$

Στην περίπτωση που ο πίνακας είναι τετραγωνικός, έστω για παράδειγμα ότι $A \in M_n(K)$, τότε A^T είναι τετραγωνικός και μάλιστα $A^T \in M_n(K)$. Μπορούμε, λοιπόν, να συγκρίνουμε σε αυτήν την περίπτωση τον A με τον ανάστροφό του. Ειδικότερα, μας ενδιαφέρει η περίπτωση που ο $A \in M_n(K)$ είναι ίσος με τον ανάστροφο ή με τον αντίθετο του ανάστροφού του. Στην πρώτη περίπτωση, λέμε ότι ο A είναι **συμμετρικός**: δηλ. ο A είναι συμμετρικός, αν $A = A^T$. Αυτό σημαίνει ότι $a_{ji} = a_{ij}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ και έτσι η κύρια διαγώνιος λειτουργεί ως καθρέφτης (δείτε και τα παραδείγματα παρακάτω). Όταν $A = -A^T$, τότε ο A λέγεται **αντισυμμετρικός**. Στην περίπτωση αυτή, $a_{ji} = -a_{ij}, \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$. Ειδικότερα για τα στοιχεία της κύριας διαγώνιου, όπου $i = j$, έχουμε ότι $a_{ii} = -a_{ii}$, άρα $2a_{ii} = 0$ και κατά συνέπεια $a_{ii} = 0$ για $i = 1, \dots, n$. Τα στοιχεία λοιπόν της κύριας διαγώνιου ενός αντισυμμετρικού πίνακα είναι 0. Τα επόμενα παραδείγματα θα αποσαφηνίσουν αυτές τις έννοιες.

Παραδείγματα 4.1.0.3

i. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. Τότε $-A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

ii. Ο ανάστροφος ενός πίνακα στήλη είναι πίνακας γραμμή και τανάπαλιν.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n], \quad [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} .$$

iii. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ και $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$. Ισχύουν τα εξής:

- οι στήλες του A έγιναν γραμμές του A^T ,
- οι γραμμές του A έγιναν στήλες του A^T ,
- το στοιχείο 5 στην (3, 1)-θέση του A βρίσκεται στην (1, 3)-θέση του A^T ,

- ο A είναι 3×2 -πίνακας, ενώ ο A^T είναι 2×3 -πίνακας,
- η κύρια διαγώνιος του A ταυτίζεται με την κύρια διαγώνιο του A^T .

iv. Για τους επόμενους πίνακες παρατηρούμε τα εξής:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 4 \\ -7 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 4 \\ 7 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

συμμετρικός αντισυμμετρικός συμμετρικός

η κύρια διαγώνιος τα στοιχεία κύριας η κύρια διαγώνιος

λειτουργεί σαν καθρέφτης διαγώνιου είναι 0

v. $I_n^T = I_n$.

vi. Αν $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, τότε $D = D^T$.

4.2 Πράξεις Πινάκων

Πότε μπορούμε να προσθέσουμε μεταξύ τους δύο πίνακες; Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε δύο πίνακες; Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε κάποιον αριθμό με έναν πίνακα; Θα απαντήσουμε στα ερωτήματα αυτά ευθύς αμέσως.

4.2.1 Πρόσθεση Πινάκων

Δύο πίνακες μπορούν να προστεθούν, αν και μόνο αν είναι του ίδιου τύπου, δηλ. αν έχουν τον ίδιο αριθμό γραμμών, τον ίδιο αριθμό στηλών και εάν βέβαια τα στοιχεία τους ανήκουν στο ίδιο σύνολο. Το αποτέλεσμα της πρόσθεσης είναι ένας πίνακας ίδιου τύπου: ο πίνακας αυτός σε κάθε θέση έχει ως στοιχείο το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των δύο πινάκων.

$$+ : M_{n \times m}(K) \times M_{n \times m}(K) \rightarrow M_{n \times m}(K) : (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Τονίζουμε ότι δεν έχει νόημα να προσθέσουμε πίνακες διαφορετικού τύπου.

Παραδείγματα 4.2.1.1

i. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 4 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2+\sqrt{2} \\ 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix},$

ii. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$

iii. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},$

iv. Έστω $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. Τότε $A + (-A) = (-A) + A = \mathbf{0}$.

v. Αν $A, B \in M_{n \times m}(K)$, τότε $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι οι πίνακες $(A + B)^T, A^T, B^T \in M_{m \times n}(K)$ και μπορούν και να προστεθούν και να συγκριθούν. Στη συνέχεια συγκρίνουμε τα στοιχεία

στη θέση (i, j) του πίνακα $(A + B)^T$ και του πίνακα $A^T + B^T$. Παρατηρούμε ότι το στοιχείο στη θέση (i, j) του $(A + B)^T$ είναι το στοιχείο στη θέση (j, i) του $A + B$, είναι λοιπόν ίσο με το $a_{ji} + b_{ji}$. Αντίστοιχα, το στοιχείο στη θέση (i, j) του $A^T + B^T$ προκύπτει ως το άθροισμα των στοιχείων στη θέση (i, j) του A^T (δηλ. του a_{ji}) και του αντίστοιχου στοιχείου του B^T , δηλ. του b_{ji} . Η επιθυμητή ισότητα προκύπτει αμέσως.

vi. Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9/2 \\ 9/2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

και έτσι ο A είναι ίσος με το άθροισμα ενός συμμετρικού με έναν αντισυμμετρικό πίνακα. Στην Άσκηση 4.5.3 θα αποδείξουμε ότι αυτό ισχύει για όλους τους τετραγωνικούς πίνακες ανεξαιρέτως.

Όταν K είναι σώμα, η πράξη της πρόσθεσης ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες που παραθέτουμε στην επόμενη πρόταση. Με αυτές τις ιδιότητες, το σύνολο $M_{n \times m}(K)$ μαζί με την πράξη της πρόσθεσης αποκτά την *αλγεβρική δομή μίας αβελιανής ή αντιμεταθετικής ομάδας*. Θα μελετήσετε τις δομές αυτές σε επόμενο μάθημα αλγεβρικών δομών.

Πρόταση 4.2.1.2 Έστω K ένα σώμα. Η πράξη της πρόσθεσης στο $M_{n \times m}(K)$ ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

- (i) Προσεταιριστική ιδιότητα: $A + (B + C) = (A + B) + C, \forall A, B, C \in M_{n \times m}(K)$.
- (ii) Υπαρξη μηδενικού στοιχείου για την πρόσθεση: $A + \mathbf{0} = A = \mathbf{0} + A, \forall A \in M_{n \times m}(K)$.
- (iii) Υπαρξη αντίθετου στοιχείου για την πρόσθεση: $A + (-A) = \mathbf{0} = (-A) + A, \forall A \in M_{n \times m}(K)$.
- (iv) Αντιμεταθετική ιδιότητα: $A + B = B + A, \forall A, B \in M_{n \times m}(K)$.

Απόδειξη. Για το (i), ας υποθέσουμε ότι $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$. Για να δείξουμε ότι $A + (B + C) = (A + B) + C$ θα συγκρίνουμε τα στοιχεία στη θέση (i, j) των δύο πινάκων. Το στοιχείο στη θέση (i, j) του $A + (B + C)$ προκύπτει ως το άθροισμα του a_{ij} με το στοιχείο στη θέση (i, j) του $B + C$, άρα είναι ίσο με $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$. Αντίστοιχα, το στοιχείο στη θέση (i, j) του $(A + B) + C$ προκύπτει ως το άθροισμα του στοιχείου στη θέση (i, j) του $A + B$ με το στοιχείο c_{ij} , δηλ. είναι $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$. Αφού ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης στο K , έχουμε ότι

$$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι $A + (B + C) = (A + B) + C$. Δεν θα δώσουμε την αναλυτική απόδειξη των υπόλοιπων σκελών της πρότασης, αλλά θα σημειώσουμε ότι οι ιδιότητες της πρόσθεσης των πινάκων προκύπτουν από τις αντίστοιχες ιδιότητες της πρόσθεσης στο K . Καλείστε, λοιπόν, να συμπληρώσετε τις λεπτομέρειες της απόδειξης, ως άσκηση. ■

4.2.2 Πολλαπλασιασμός Πινάκων

Ας δούμε τώρα πώς πολλαπλασιάζουμε δύο πίνακες. Αρχικά, διευκρινίζουμε ότι η σειρά με την οποία πολλαπλασιάζουμε πίνακες έχει μεγάλη σημασία. Για να πραγματοποιηθεί ο πολλαπλασιασμός $A \cdot B$ πινάκων A και B , θα πρέπει ο αριθμός στηλών του A να είναι ίσος με τον αριθμό γραμμών του B . Ας δούμε, πρώτα από όλα, πώς γίνεται ο πολλαπλασιασμός όταν ο A είναι πίνακας γραμμή και B είναι πίνακας στήλη.

Ο αριθμός των στηλών του πίνακα γραμμή A πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του πίνακα στήλη B , έστω m . Οπότε, αναφερόμαστε σε έναν $1 \times m$ πίνακα γραμμή A που πολλαπλασιάζουμε με έναν $m \times 1$ πίνακα στήλη B . Το γινόμενό τους είναι ένας 1×1 πίνακας:

$$\underbrace{[\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \cdots \quad \kappa_m]}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{bmatrix}}_B = [\kappa_1 \lambda_1 + \kappa_2 \lambda_2 + \cdots + \kappa_m \lambda_m].$$

Τώρα που ξέρουμε πώς πολλαπλασιάζεται ένας πίνακας γραμμή με έναν πίνακα στήλη, ας δούμε πώς ορίζεται το γινόμενο $A \cdot B$, όπου $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$ και $B = (b_{jt}) \in M_{m \times s}(K)$. Το αποτέλεσμα είναι ένας πίνακας με τόσες γραμμές όσες έχει ο A και τόσες στήλες όσες έχει ο B , δηλ. $A \cdot B$ είναι $n \times s$ πίνακας και ανήκει στο $M_{n \times s}(K)$. Ποια είναι τα στοιχεία αυτού του πίνακα; Το στοιχείο στη θέση (i, t) θα προκύψει από το γινόμενο της i -γραμμής του A με την t -στήλη του B . Έχει όμως νόημα το γινόμενο που περιγράφουμε; Σημειώστε ότι κάθε μία από τις γραμμές του A είναι ένας $1 \times m$ πίνακας γραμμή, ενώ κάθε μία από τις στήλες του B είναι ένας $m \times 1$ πίνακας στήλη, οπότε πράγματι το γινόμενο των γραμμών του A με τις στήλες του B είναι εφικτό και μπορούμε να το πάρουμε για κάθε μία από τις γραμμές του A (n γραμμές) και κάθε μία από τις στήλες του B (s στήλες). Προκύπτουν $n \times s$ συνδυασμοί που μας δίνουν τον $n \times s$ πίνακα $A \cdot B$. Για ευκολία θα γράφουμε AB για το γινόμενο $A \cdot B$. Έτσι, $AB = C$, όπου $C = (c_{it})$ και

$$c_{it} = \underbrace{[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{im}]}_{i\text{-γραμμή του } A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1t} \\ b_{2t} \\ \vdots \\ b_{mt} \end{bmatrix}}_{t\text{-στήλη του } B} = a_{i1} b_{1t} + a_{i2} b_{2t} + \cdots + a_{im} b_{mt} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kt}.$$

Συνοπτικά, ο πολλαπλασιασμός πινάκων ορίζει μία συνάρτηση από το καρτεσιανό γινόμενο $M_{n \times m}(K) \times M_{m \times s}(K)$ στο $M_{n \times s}(K)$:

$$M_{n \times m}(K) \times M_{m \times s}(K) \longrightarrow M_{n \times s}(K) : ((a_{ij}), (b_{jt})) \mapsto \left(\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kt} \right).$$

Παρατηρούμε ότι αν $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ είναι οι γραμμές του πίνακα $A \in M_{n \times m}(K)$ και $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s$ είναι οι στήλες του πίνακα $B \in M_{m \times s}(K)$, τότε

$$AB = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{bmatrix} [\Sigma_1 \mid \Sigma_2 \mid \cdots \mid \Sigma_s] = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \Sigma_1 & \Gamma_1 \Sigma_2 & \cdots & \Gamma_1 \Sigma_s \\ \Gamma_2 \Sigma_1 & \Gamma_2 \Sigma_2 & \cdots & \Gamma_2 \Sigma_s \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma_n \Sigma_1 & \Gamma_n \Sigma_2 & \cdots & \Gamma_n \Sigma_s \end{pmatrix} = (\Gamma_i \Sigma_t) \in M_{n \times s}(K).$$

Ας δούμε κάποια παραδείγματα.

Παραδείγματα 4.2.2.1

- i. Το γινόμενο ενός 2×2 πίνακα με έναν 2×3 πίνακα έχει ως αποτέλεσμα έναν 2×3 πίνακα. Έτσι,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \\ 3 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 5 & 19 & 23 \end{pmatrix}.$$

- ii. Το γινόμενο ενός 2×3 πίνακα με έναν 2×3 πίνακα δεν ορίζεται, αφού το πλήθος των στηλών του πρώτου πίνακα δεν είναι ίσο με το πλήθος των γραμμών του δεύτερου.
- iii. Έστω A ένας 3×2 -πίνακας. Πολλαπλασιάζοντας τον A με τον μοναδιαίο πίνακα I_2 παρατηρούμε ότι το γινόμενο $A \cdot I_2$ είναι ίσο με τον πίνακα A . Πράγματι:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot 0 & \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 1 \\ \beta_1 \cdot 1 + \beta_2 \cdot 0 & \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 \cdot 1 \\ \gamma_1 \cdot 1 + \gamma_2 \cdot 0 & \gamma_1 \cdot 0 + \gamma_2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}$$

Όμοια διαπιστώνουμε ότι $I_3 \cdot A = A$ (κάντε το!).

- iv. Γενικότερα ισχύει ότι

$$I_n \cdot A = A, \quad A \cdot I_m = A, \quad \forall A \in M_{n \times m}(K).$$

- v. Αντίστοιχα, το γινόμενο με τον μηδενικό πίνακα δίνει πάντα τον μηδενικό πίνακα των διαστάσεων που προκύπτει από το γινόμενο. Έτσι,

$$A \cdot 0_{m \times s} = 0_{n \times s}, \quad 0_{s \times n} \cdot A = 0_{s \times m}, \quad \forall A \in M_{n \times m}(K).$$

- vi. Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ και $A' = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι

$$A \cdot A' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = A' \cdot A.$$

Λέμε ότι ο A' είναι ο *αντίστροφος* πίνακας του A , καθώς το γινόμενο με τον A (και από τις δύο μεριές) δίνει τον μοναδιαίο πίνακα και γράφουμε $A^{-1} = A'$.

- vii. Έστω οι 3×3 πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 2 \\ 6 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ -4 & -6 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι εν γένει $AB \neq BA$. Επιπλέον, βλέπουμε ότι το γινόμενο δύο μη μηδενικών πινάκων δύναται να είναι ο μηδενικός πίνακας. Τέλος, αφού

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A \cdot B, \text{ ενώ } B \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

βλέπουμε ότι στη γενική περίπτωση:

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C.$$

viii. Έστω ότι $A \in M_{n \times m}(K)$ και έστω ότι πολλαπλασιάζουμε από τα δεξιά τον A με έναν πίνακα στήλη B (οπότε ο αριθμός των στηλών του A είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του B και $B \in M_{m \times 1}(K)$). Το γινόμενο AB θα είναι πίνακας στήλη με τόσες γραμμές όσες και ο A , δηλ. $AB \in M_{n \times 1}(K)$. Αντίστοιχα, αν πολλαπλασιάσουμε από τα αριστερά τον A με έναν πίνακα γραμμή C (οπότε αναγκαστικά $C \in M_{1 \times n}(K)$), τότε το γινόμενο CA θα είναι πίνακας γραμμή και $CA \in M_{1 \times m}(K)$.

ix. Έστω

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, C = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \text{ και } A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Τότε}$$

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} -x - 2y + 2z \\ 2x + 2y \\ 3x + y + 4z \\ x \end{bmatrix}, \text{ ενώ } C \cdot A = [-c_1 + 2c_2 + 3c_3 + c_4 \quad -2c_1 + 2c_2 + c_3 \quad 2c_1 + 4c_3].$$

x. Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$ με γραμμές $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ και $B \in M_{m \times s}(K)$ με στήλες $\Sigma_1, \dots, \Sigma_s$. Τότε

$$AB = \begin{bmatrix} \Gamma_1 B \\ \Gamma_2 B \\ \vdots \\ \Gamma_n B \end{bmatrix} = [A\Sigma_1 \mid A\Sigma_2 \mid \cdots \mid A\Sigma_s].$$

xi. Αν $A \in M_n(K)$, τότε μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε τον A με τον εαυτό του. Γράφουμε A^2 για το $A \cdot A$. Γενικότερα γράφουμε A^m για το γινόμενο του A με τον εαυτό του m φορές.

xii. Αν $A, B \in M_n(K)$ είναι δύο διαγώνιοι πίνακες, τότε προκύπτει εύκολα ότι AB είναι διαγώνιος πίνακας και μάλιστα τα στοιχεία της κυρίας διαγώνιου του AB είναι το γινόμενο των αντίστοιχων στοιχείων των πινάκων A και B . Έτσι

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n b_n \end{pmatrix}$$

ή ισοδύναμα

$$\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \cdot \text{diag}(b_1, \dots, b_n) = \text{diag}(a_1 b_1, \dots, a_n b_n).$$

Σημειώνουμε ότι ο πολλαπλασιασμός δύο διαγώνιων πινάκων είναι αντιμεταθετικός, παρόλο που αυτό δεν ισχύει στη γενική περίπτωση για δύο τυχαίους τετραγωνικούς πίνακες.

xiii. Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$, $B \in M_{m \times s}(K)$. Τότε $(AB)^T = B^T A^T$.

Απόδειξη. Έστω $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ και ας συγκρίνουμε τα στοιχεία στη θέση (i, j) των πινάκων $(AB)^T$ και $B^T A^T$. Το στοιχείο c_{ij} στη θέση (i, j) του $(AB)^T$ είναι ίσο με το στοιχείο στη θέση (j, i) του AB . Άρα προκύπτει ως το γινόμενο της j -γραμμής του A με τη i -στήλη του B και

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{jk} b_{ki}.$$

Αντίστοιχα, το στοιχείο στη θέση (i, j) του $B^T A^T$ είναι το γινόμενο της i -γραμμής του B^T με τη j -στήλη του A^T . Όμως, η i -γραμμή του B^T είναι ο ανάστροφος πίνακας της i -στήλης του B και αντίστοιχα η j -στήλη του A^T είναι ο ανάστροφος της j -γραμμής του A . Έχουμε λοιπόν το γινόμενο:

$$[b_{1i} \ \dots \ b_{mi}] \cdot \begin{bmatrix} a_{j1} \\ \vdots \\ a_{jm} \end{bmatrix} = \sum_{t=1}^m b_{ti} a_{jt} = \sum_{t=1}^m a_{jt} b_{ti} = c_{ij}$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι $(AB)^T = B^T A^T$ ■

Στην πρόταση που ακολουθεί συγκεντρώνουμε δύο βασικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων.

Πρόταση 4.2.2.2 Έστω $A, A' \in M_{n \times m}(K)$, $B, B' \in M_{m \times s}(K)$ και $C \in M_{s \times r}(K)$. Τότε

- (i) (προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
- (ii) (επιμεριστική ιδιότητα) $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$ και $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πινάκων και ζητούμε να επιβεβαιώσετε την επιμεριστική ιδιότητα με την ίδια τεχνική.

Έστω $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jt})$, $C = (c_{tq})$. Θα υπολογίσουμε το στοιχείο στη θέση (i, q) του πίνακα $(A \cdot B) \cdot C$. Σημειώνουμε ότι το στοιχείο αυτό είναι ίσο με το γινόμενο της i -γραμμής του $(A \cdot B)$ με τη q -στήλη του C . Η i -γραμμή του $(A \cdot B)$ είναι ο $1 \times s$ πίνακας γραμμή

$$\left[\sum_{\kappa=1}^m a_{i\kappa} b_{\kappa 1} \quad \sum_{\kappa=1}^m a_{i\kappa} b_{\kappa 2} \quad \dots \quad \sum_{\kappa=1}^m a_{i\kappa} b_{\kappa s} \right].$$

Πολλαπλασιάζοντας με τη q -στήλη του C βρίσκουμε ότι το στοιχείο στη θέση (i, q) του $(A \cdot B) \cdot C$ είναι ίσο με

$$\sum_{\lambda=1}^s \left(\sum_{\kappa=1}^m a_{i\kappa} b_{\kappa \lambda} \right) c_{\lambda q} = (a_{i1} b_{11} + \dots + a_{im} b_{m1}) c_{1q} + \dots + (a_{i1} b_{1s} + \dots + a_{im} b_{ms}) c_{sq}.$$

Βγάζοντας, τώρα, κοινό παράγοντα το στοιχείο a_{ik} (για $k = 1, \dots, m$) έχουμε ότι το στοιχείο στη θέση (i, q) του $(A \cdot B) \cdot C$ είναι:

$$a_{i1}(b_{11}c_{1q} + \dots + b_{1s}c_{sq}) + \dots + a_{im}(b_{m1}c_{1q} + \dots + b_{ms}c_{sq}) = \sum_{\kappa=1}^m a_{i\kappa} \left(\sum_{\lambda=1}^s b_{\kappa\lambda}c_{\lambda q} \right).$$

Όμως, το τελευταίο είναι ακριβώς το στοιχείο που προκύπτει από το γινόμενο της i -γραμμής του A με τη q -στήλη του $B \cdot C$, είναι δηλαδή το στοιχείο στην (i, q) -θέση του πίνακα $A \cdot (B \cdot C)$. Αποδείξαμε επομένως ότι $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ και ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων ικανοποιεί την προσεταιριστική ιδιότητα. ■

Σημειώνουμε ότι όπως έχουμε ήδη δει στα παραδείγματα, ο πολλαπλασιασμός πινάκων **δεν** ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα. Ας δούμε πόσο χρήσιμη είναι η προσεταιριστική ιδιότητα. Έστω ότι $A \in M_n(K)$ είναι κάποιος τετραγωνικός πίνακας. Έχουμε ήδη ορίσει τον πίνακα A^2 ως το γινόμενο $A \cdot A$. Μπορούμε να ορίσουμε τον A^3 ; Υπάρχει ένας μικρός δισταγμός εδώ. Ποιος είναι ο πιο κατάλληλος ορισμός; Σαφώς και θέλουμε $A^3 = A \cdot A \cdot A$. Ωστόσο, γνωρίζουμε μόνο πώς να πολλαπλασιάσουμε δύο (και όχι τρεις) πίνακες. Θα πρέπει, λοιπόν, στην έκφραση $A \cdot A \cdot A$ να εισάγουμε παρενθέσεις για να δηλώσουμε τους πίνακες που πολλαπλασιάζουμε ανά δύο. Και εδώ, δημιουργείται ένα δίλημα: είναι $A^3 = (A \cdot A) \cdot A$ ή μήπως $A^3 = A \cdot (A \cdot A)$; Η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού απαντά ότι αυτό τελικά είναι ψευδοδίλημμα καθώς

$$(A \cdot A) \cdot A = A \cdot (A \cdot A),$$

έτσι και οι δύο τρόποι είναι ισοδύναμοι. Γενικότερα, ορίζουμε

$$A^m := (A^{m-1}) \cdot A = \underbrace{A \cdots A}_{m\text{-φορές}}, \quad \text{για } m \in \mathbb{N},$$

με $A^0 = I_n$. Με χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας μπορείτε εύκολα να επιβεβαιώσετε (κάντε το!) ότι για έναν τετραγωνικό πίνακα A ισχύει ότι

$$A^\kappa A^\lambda = A^{\kappa+\lambda}, \quad (A^\kappa)^\lambda = A^{\kappa\lambda}, \quad \text{για } \kappa, \lambda \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρήσεις 4.2.2.3

(α) Είδαμε ότι $(AB)^T = B^T A^T$. Εύκολα γενικεύεται η ιδιότητα αυτή σε γινόμενο περισσότερων παραγόντων. Αν A_1, A_2, \dots, A_μ είναι πίνακες με στοιχεία από το σώμα K , κατάλληλου τύπου ώστε να έχουν νόημα οι πράξεις που σημειώνονται, τότε

$$(A_1 \cdot A_2 \cdots A_\mu)^T = A_\mu^T \cdots A_2^T \cdot A_1^T.$$

Η απόδειξη γίνεται με χρήση μαθηματικής επαγωγής και καλείστε να την κάνετε.

(β) Αν $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ και $m \in \mathbb{N}$, τότε A^m είναι διαγώνιος πίνακας και είναι πολύ απλό να περιγράψουμε τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο (τα στοιχεία του A ανυψωμένα στη m -στή δύναμη). Δοκιμάστε, λοιπόν, να αποδείξετε το επόμενο με μαθηματική επαγωγή στο m :

$\text{Έστω } A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n). \text{ Τότε } A^m = \text{diag}(a_1^m, \dots, a_n^m), \forall m \in \mathbb{N}.$

Για τους τετραγωνικούς πίνακες, ενδιαφέρει ιδιαίτερα, αν ξεκινώντας με έναν τετραγωνικό πίνακα και πολλαπλασιάζοντας από τα δεξιά ή τα αριστερά με έναν άλλον τετραγωνικό πίνακα θα έχουμε ως αποτέλεσμα τον μοναδιαίο πίνακα. Με βάση αυτήν την ιδιότητα, μελετάμε μία εξαιρετικά σημαντική κατηγορία πινάκων, τους *αντιστρέψιμους πίνακες*. Συγκεκριμένα, έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(K)$. Αν υπάρχει $A' \in M_n(K)$ τέτοιος ώστε $A \cdot A' = A' \cdot A = I_n$, τότε ο A λέγεται **αντιστρέψιμος** και ο A' λέγεται ο **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται με A^{-1} .

Παρατηρήσεις 4.2.2.4

- (α) Ο μηδενικός πίνακας είναι προφανώς μη αντιστρέψιμος. Ωστόσο, δεν είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε παραδείγματα μη μηδενικών τετραγωνικών πινάκων που επίσης δεν αντιστρέφονται (δείτε τα παραδείγματα που ακολουθούν).
- (β) Ο μοναδιαίος $n \times n$ -πίνακας I_n είναι αντιστρέψιμος και μάλιστα $I_n^{-1} = I_n$, αφού

$$I_n \cdot I_n = I_n.$$

- (γ) Αν ο πίνακας $A \in M_n(K)$ είναι αντιστρέψιμος, τότε αποδεικνύεται ότι ο πίνακας A^{-1} είναι μοναδικός και ορθά αναφερόμαστε στον αντίστροφο του A . Τι σημαίνει αυτό; Έστω ότι υπάρχουν δύο πίνακες $B, C \in M_n(K)$ για τους οποίους γνωρίζουμε μόνον ότι ικανοποιούν την ιδιότητα του αντίστροφου πίνακα του A . Δηλαδή έστω ότι η πληροφορία που έχουμε για τους B, C είναι ότι $AB = BA = I_n$ και ότι $AC = CA = I_n$. Είναι αρκετό αυτό για να τους αναγνωρίσουμε; Η απάντηση είναι θετική και μπορούμε με βεβαιότητα να πούμε ότι $B = C$. Πράγματι:

$$AB = I_n \Rightarrow C(AB) = CI_n \Rightarrow (CA)B = C \Rightarrow I_n B = C \Rightarrow B = C.$$

Παραδείγματα 4.2.2.5

- i. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Θα δείξουμε ότι A δεν είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

Πράγματι, έστω $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ τέτοιος ώστε $A \cdot A' = I_2$. Τότε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και άρα } \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

το οποίο είναι αδύνατον (δείτε τη δεύτερη γραμμή στην εξίσωση των πινάκων), άρα A δεν είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

- ii. Είναι φανερό, ότι αν ο πίνακας $A \in M_n(K)$ έχει τη i -γραμμή μηδέν, τότε δεν υπάρχει πίνακας A' τέτοιος ώστε $A \cdot A' = I_n$, αφού για κάθε πίνακα $B \in M_n(K)$, η i -γραμμή του $A \cdot B$ είναι μηδέν, ενώ η i -γραμμή του I_n δεν είναι μηδέν. Επομένως, ο A δεν είναι αντιστρέψιμος πίνακας.
- iii. Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι αν ο πίνακας $A \in M_n(K)$ έχει κάποια μηδενική στήλη, τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος πίνακας (καθώς για όλους τους πίνακες $B \in M_n(K)$ η αντίστοιχη στήλη του γινόμενου $B \cdot A$ είναι και αυτή μηδέν).

- iv. Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα μη αντιστρέψιμου πίνακα. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ και έστω ότι υπάρχει $A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, τέτοιο ώστε $A \cdot A' = I_2$. Τότε

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ και άρα } \begin{pmatrix} x+z & y+w \\ x+z & y+w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ας συγκρίνουμε, τώρα, την πρώτη στήλη των δύο πινάκων στην τελευταία εξίσωση πινάκων. Αφού οι πίνακες είναι ίσοι, θα πρέπει οι ακόλουθες εξισώσεις να ισχύουν ταυτόχρονα: $x+z=1$ και $x+z=0$. Αυτό όμως είναι αδύνατον (σε αντίστοιχο αδιέξοδο θα οδηγούμασταν αν συγκρίναμε τις δεύτερες στήλες, ήδη όμως έχουμε δείξει το άτοπο και δεν υπάρχει λόγος να συνεχίσουμε την ανάλυση). Καταλήξαμε σε άτοπο και επομένως ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

- v. Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Θα δείξουμε ότι A είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

Ας προσπαθήσουμε αρχικά να βρούμε έναν πίνακα A' , τέτοιον ώστε $A \cdot A' = I_2$. Καθώς δεν γνωρίζουμε a priori τις τιμές των στοιχείων του A' , βάζουμε αγνώστους στη θέση των τιμών αυτών. Η διαδικασία αυτή μας δίνει ένα σύστημα εξισώσεων. Συγκεκριμένα έστω

$$A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{ και έστω ότι } A \cdot A' = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -z & -w \\ -x & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από την ισότητα των πινάκων, παίρνουμε τέσσερις εξισώσεις, $-z=1$, $-w=0$, $-x=0$, $-y=1$ και αφού οι εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν ταυτόχρονα με $y=z=-1$ και $x=w=0$, βλέπουμε ότι ο πίνακας $A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ έχει την ιδιότητα $A \cdot A' = I_2$. Παρατηρούμε ότι $A = A'$, δηλ. βλέπουμε ότι $A^2 = I_2$. Αυτό σημαίνει ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A$.

- vi. Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$. Για να δείξουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, επιβεβαιώνουμε ότι η εξίσωση πινάκων $A \cdot A' = I_2$ έχει λύση, όπου

$$A' = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Πράγματι προκύπτουν τέσσερις εξισώσεις με λύσεις $x=0$, $y=w=-1$ και $z=1$. Έτσι ο πίνακας

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

έχει την ιδιότητα $A \cdot A' = I_2$. Αρκεί αυτό για να συμπεράνουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος; Η *προσωρινή* απάντηση είναι «όχι», καθώς σύμφωνα με τον ορισμό θα πρέπει να βεβαιωθούμε ότι το γινόμενο $A' \cdot A$ (και όχι μόνο το γινόμενο $A \cdot A'$) είναι ίσο με τον μοναδιαίο πίνακα I_2 . Στη συγκεκριμένη περίπτωση αυτό ισχύει (επιβεβαιώστε το!) και έτσι ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Θα δούμε αργότερα ότι τελικά ο έλεγχος αυτός δεν θα είναι αναγκαίος, ωστόσο δεν είμαστε ακόμα σε θέση να το αποδείξουμε.

vii. Έστω τώρα D ένας διαγώνιος πίνακας. Αν έστω και ένα από τα στοιχεία της κύριας διαγώνιου του D είναι μηδέν, τότε εκείνη η γραμμή του D έχει μόνο μηδενικά στοιχεία και κατά συνέπεια ο D δεν είναι αντιστρέψιμος, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει νωρίτερα.

Αν τα στοιχεία της κύριας διαγώνιου του διαγώνιου πίνακα D δεν είναι μηδέν, τότε ο D είναι αντιστρέψιμος και ο D^{-1} είναι και αυτός διαγώνιος: τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο του D^{-1} είναι τα αντίστροφα των στοιχείων στην κύρια διαγώνιο του D . Συγκεκριμένα:

$$\text{Αν } d_1 \cdots d_n \neq 0, \text{ τότε } \text{diag}(d_1, \dots, d_n)^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}\right).$$

Πράγματι, αν $d_1 \cdots d_n \neq 0$, τότε πολλαπλασιάζοντας τους διαγώνιους πίνακες $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ και $\text{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}\right)$ από τα δεξιά και τα αριστερά προκύπτει ο διαγώνιος πίνακας που τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο είναι τα γινόμενα των αντίστοιχων στοιχείων, δηλαδή ο μοναδιαίος πίνακας I_n .

Αν $A \in M_n(K)$ και A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε, εκτός από τις θετικές δυνάμεις του A , μπορούμε να ορίσουμε και τις αρνητικές δυνάμεις του A ως εξής:

$$A^{-\mu} = (A^{-1})^\mu = \underbrace{A^{-1} \cdot A^{-1} \cdots A^{-1}}_{\mu\text{-φορές}}, \quad \text{για } \mu \in \mathbb{N}.$$

Παρατηρήσεις 4.2.2.6

(α) Έχουμε ήδη παρατηρήσει ότι για έναν τετραγωνικό πίνακα A ισχύει η ισότητα $A^\kappa A^\lambda = A^{\kappa+\lambda}$ και $(A^\kappa)^\lambda = A^{\kappa\lambda}$, για φυσικούς αριθμούς κ, λ . Αν ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε οι σχέσεις αυτές εύκολα αποδεικνύονται για όλους τους ακέραιους, δηλαδή $A^\kappa A^\lambda = A^{\kappa+\lambda}$ και $(A^\kappa)^\lambda = A^{\kappa\lambda}$ για, $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ (επιβεβαιώστε το!).

(β) $I_n^\mu = I_n$, για $\mu \in \mathbb{Z}$.

(γ) Σημειώνουμε ότι εν γένει $(AB)^\kappa \neq A^\kappa B^\kappa$, για $A, B \in M_n(K)$, ακόμα και αν οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι. Αυτό σημαίνει ότι δεν ισχύουν στους πίνακες οι ταυτότητες που ισχύουν στους αριθμούς. Για παράδειγμα:

- $(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$ και όχι $A^2 + 2AB + B^2$.
- $(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$ και όχι $A^2 - B^2$.

(δ) Αν $A \in M_n(K)$, τότε ισχύει ότι

$$(A^\mu)^T = (A^T)^\mu$$

για θετικά μ . Το είδαμε αυτό, όταν σχολιάσαμε τη συμπεριφορά του ανάστροφου σε σχέση με το γινόμενο πινάκων (πάρτε εδώ A_1, \dots, A_μ να είναι όλα A). Εναλλακτικά, χρησιμοποιήστε και πάλι τη μαθηματική επαγωγή. Επιπλέον, αφού ήδη έχετε δείξει το παραπάνω, δοκιμάστε να δείξετε ότι για αντιστρέψιμους πίνακες ισχύει η σχέση

$$(A^\mu)^T = (A^T)^\mu$$

για όλα τα $\mu \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 4.2.2.7 Έστω $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(K)$. Σε προηγούμενο παράδειγμα είδαμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Θα υπολογίσουμε τον πίνακα A^{-2021} και στη συνέχεια τις δυνάμεις A^n , για $n \in \mathbb{Z}$. Αρχικά, υπολογίζουμε τις πρώτες θετικές δυνάμεις του A . Έχουμε:

$$\begin{aligned} \bullet A^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \bullet A^3 &= A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αφού $A^3 = A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = I_2$, ο αντίστροφός του A είναι στην πραγματικότητα δύναμη του A : $A^{-1} = A^2$. Αυτό είναι εξαιρετικά χρήσιμο στο να υπολογίσουμε θετικές και αρνητικές δυνάμεις του A . Καθώς $A^3 = I_2$, για να υπολογίσουμε τον A^{-2021} , κάνουμε πρώτα την Ευκλείδεια διαίρεση του -2021 με το 3. Βλέπουμε ότι $-2021 = 3 \cdot (-674) + 1$. Επομένως,

$$A^{-2021} = A^{3 \cdot (-674) + 1} = A^{3 \cdot (-674)} A = (A^3)^{-674} A = (I_2)^{-674} A = I_2 A = A.$$

Έστω, τώρα, $n \in \mathbb{Z}$. Για να υπολογίσουμε τον A^n , εκτελούμε πρώτα την Ευκλείδεια διαίρεση του n με το 3. Έστω ότι $n = 3\rho + v$, όπου $\rho, v \in \mathbb{Z}$ και $0 \leq v < 3$. Έχουμε ότι:

$$A^n = A^{3\rho+v} = (A^3)^\rho \cdot A^v = I_2^\rho \cdot A^v = I_2 \cdot A^v = A^v.$$

$$\text{Επομένως } A^n = \begin{cases} I_2, & \text{αν } n = 3\rho \\ A, & \text{αν } n = 3\rho + 1 \\ A^2, & \text{αν } n = 3\rho + 2 \end{cases}.$$

Παρατηρήσεις 4.2.2.8

(α) Αν $A, B \in M_n(K)$ και $AB = 0_n$ ενώ $B \neq \mathbf{0}$, τότε με βεβαιότητα μπορούμε να πούμε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, αν ο A ήταν αντιστρέψιμος και υπήρχε ο πίνακας A^{-1} , τότε

$$AB = \mathbf{0} \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}\mathbf{0} \Rightarrow (A^{-1}A)B = \mathbf{0} \Rightarrow I_n B = \mathbf{0} \Rightarrow B = \mathbf{0},$$

το οποίο είναι άτοπο.

Όμοια αν $A, B \in M_n(K)$ και $AB = 0_n$ ενώ $A \neq \mathbf{0}$, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο B δεν είναι αντιστρέψιμος (μμηθείτε την προηγούμενη απόδειξη!).

(β) Αν αναρωτιέστε πώς είναι δυνατόν δύο μη μηδενικοί πίνακες να έχουν γινόμενο τον μηδενικό πίνακα, σας υπενθυμίζουμε ότι σε προηγούμενο παράδειγμα έχουμε ήδη δει δύο μη μηδενικούς 3×3 πίνακες που το γινόμενό τους είναι ο μηδενικός πίνακας. Μάλιστα, χωρίς μεγάλη δυσκολία, μπορούμε να κατασκευάσουμε πίνακες $A \in M_n(K)$ που δεν είναι μηδέν και που παρόλα αυτά κάποια δύναμή τους A^m είναι μηδέν. Σημειώνουμε ότι ο A σε όλες αυτές τις περιπτώσεις είναι βέβαια μη αντιστρέψιμος, αφού $A^m = A^{m-1}A = \mathbf{0}$. Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ενός 3×3 μη μηδενικού πίνακα A , με $A^3 = \mathbf{0}$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \quad A^3 = \mathbf{0}.$$

(γ) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $AB = AC$, τότε αυτόματα έχουμε ότι $B = C$, δηλ. ισχύει ο νόμος της διαγραφής. Ας δούμε την απόδειξη:

$$\begin{aligned} B = AC &\Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow \\ &\Rightarrow I_n B = I_n C \Rightarrow B = C. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι αν $A \in M_n(K)$ δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε υπάρχουν πίνακες $B, C \in M_n(K)$ με $AB = AC$, ενώ $B \neq C$. Παρόλο που έχουμε ήδη δει τέτοια παραδείγματα για συγκεκριμένο (μη αντιστρέψιμο) πίνακα A , δεν είναι καθόλου προφανές ότι αν μας δοθεί ένας οποιοσδήποτε μη αντιστρέψιμος πίνακας A θα μπορέσουμε να βρούμε δύο τέτοιους πίνακες B, C . Ωστόσο, όπως θα δούμε όταν μιλήσουμε για ορίζουσες πινάκων και προσαρτημένους πίνακες, αν $A \in M_n(K)$ δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε ο προσαρτημένος πίνακας B του A ικανοποιεί την ιδιότητα $AB = 0$ και έτσι, για την επιβεβαίωση του ισχυρισμού μας, αρκεί να βεβαιωθούμε ότι B δεν είναι ο μηδενικός πίνακας. Θα τα δούμε, όμως, αυτά αργότερα.

4.2.3 Γινόμενο Αριθμού με Πίνακα

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$. Ορίζουμε το γινόμενο ενός στοιχείου $\kappa \in K$ με τον πίνακα A να είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A , αν πολλαπλασιάσουμε κάθε στοιχείο του A επί το κ . Ο πίνακας αυτός συμβολίζεται με $\kappa \cdot A$ ή κA ,

$$\kappa A = (\kappa a_{ij}) \in M_{n \times m}(K).$$

Η πράξη

$$K \times M_{n \times m}(K) \rightarrow M_{n \times m}(K) : (\kappa, A) \mapsto \kappa A$$

ονομάζεται **βαθμωτός ή σκαλινός πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα** ώστε να γίνεται διάκριση από τον πολλαπλασιασμό πινάκων.

Παραδείγματα 4.2.3.1

$$\text{i. } 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$\text{ii. } 0 \cdot A = \mathbf{0}, \text{ για } A \in M_{n \times m}(K).$$

$$\text{iii. Αντίστροφα, αν } \kappa A = \mathbf{0}, \text{ τότε } \kappa = 0 \text{ ή } A = \mathbf{0}.$$

Πράγματι, έστω $A = (a_{ij})$ και έστω ότι $\kappa A = \mathbf{0}$. Αν $\kappa = 0$, δεν έχουμε κάτι άλλο να αποδείξουμε. Αν όμως $\kappa \neq 0$, τότε πρέπει να δείξουμε ότι $a_{ij} = 0, \forall i, j$. Αυτό προκύπτει ως εξής:

$$\kappa A = \mathbf{0} \Rightarrow (\kappa a_{ij}) = \mathbf{0} \Rightarrow \kappa a_{ij} = 0, \forall i, j \Rightarrow a_{ij} = 0, \forall i, j \text{ (αφού } \kappa \neq 0) \Rightarrow A = \mathbf{0}.$$

$$\text{iv. Έστω } d \in K. \text{ Τότε } dI_n = \text{diag}(d, \dots, d). \text{ Επιπλέον, παρατηρούμε ότι αν } A \in M_{n \times m}(K), \text{ τότε } dA = (dI_n)A = \text{diag}(d, \dots, d)A = A(dI_m). \text{ Έτσι, ο πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα είναι ειδική περίπτωση πολλαπλασιασμού πινάκων.}$$

Στην επόμενη πρόταση συγκεντρώνουμε τις ιδιότητες του βαθμωτού γινομένου αριθμού με πίνακα.

Πρόταση 4.2.3.2 Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$ και $\kappa, \lambda \in K$. Τότε

- (i) $\kappa(A + B) = \kappa A + \kappa B, \quad \forall B \in M_{n \times m}(K)$.
- (ii) $(\kappa + \lambda)A = \kappa A + \lambda A$.
- (iii) $(\kappa\lambda)A = \kappa(\lambda A)$.
- (iv) $(\kappa A)B = A(\kappa B) = \kappa(AB), \quad \forall B \in M_{m \times s}(K)$.
- (v) $(\kappa A)^T = \kappa A^T$.

Απόδειξη. Οι αποδείξεις είναι εύκολες και καλείστε να συμπληρώσετε τις λεπτομέρειες ως άσκηση. ■

Παρατηρήσεις 4.2.3.3

(α) Έστω $A \in M_n(K)$, $\kappa \in K$. Με χρήση της μαθηματικής επαγωγής μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\boxed{(\kappa A)^m = \kappa^m A^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}.}$$

Θα δείξουμε το επαγωγικό βήμα από το $m - 1$ στο m :

$$\begin{aligned} (\kappa A)^m &= (\kappa A)^{m-1}(\kappa A) \stackrel{(a)}{=} (\kappa^{m-1} A^{m-1})(\kappa A) \stackrel{(b)}{=} \kappa ((\kappa^{m-1} A^{m-1})A) \stackrel{(c)}{=} \\ &\quad \kappa (\kappa^{m-1} (A^{m-1} A)) = \kappa (\kappa^{m-1} A^m) \stackrel{(d)}{=} (\kappa \kappa^{m-1}) A^m = \kappa^m A^m, \end{aligned}$$

όπου η ισότητα στο (a) είναι λόγω εφαρμογής της υπόθεσης της επαγωγής για το $(\kappa A)^{m-1}$, στο (b) είναι λόγω πρώτης εφαρμογής της ιδιότητας (iv) της Πρότασης 4.2.3.2, στο (c) είναι λόγω δεύτερης εφαρμογής της ίδιας ιδιότητας, ενώ στο (d) προκύπτει με εφαρμογή της ιδιότητας (iii) της Πρότασης 4.2.3.2.

Στην επόμενη ενότητα θα δούμε ότι αν A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, $\kappa \neq 0$, τότε ισχύει γενικότερα ότι

$$\boxed{(\kappa A)^m = \kappa^m A^m, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.}$$

(β) Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$. Παρατηρούμε ότι $(-1)A = (-a_{ij}) = -A$, δηλ. το γινόμενο αριθμού με πίνακα $(-1)A$ ισούται με τον αντίθετο του A ,

$$(-1)A = -A.$$

Ένας $n \times m$ -πίνακας **μονάδα** είναι ένας $n \times m$ -πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία του 0 εκτός από ένα, η τιμή του οποίου είναι 1. Ένας πίνακας μονάδα συμβολίζεται με E_{ij} εφόσον στην (i, j) -θέση έχει το 1. Είναι σημαντικό να προσδιορίζουμε τον τύπο του πίνακα μονάδα που χρησιμοποιούμε κάθε φορά. Για παράδειγμα, οι επόμενοι δύο πίνακες μονάδα συμβολίζονται και οι δύο με E_{12} , ο πρώτος είναι 2×2 -πίνακας μονάδα, ενώ ο δεύτερος είναι 2×3 -πίνακας μονάδα:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Κάθε πίνακας μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός πινάκων μονάδα. Ειδικότερα, αν $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$, τότε

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} E_{ij}.$$

Η έμφαση στην προηγούμενη σχέση είναι στους δείκτες n, m των αθροισμάτων.

Παραδείγματα 4.2.3.4

- i. Θα γράψουμε τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ ως γραμμικό συνδυασμό πινάκων μονάδα. Έχουμε:

$$A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$E_{11} \qquad E_{12} \qquad E_{21} \qquad E_{23}$

Σημειώνουμε επίσης ότι

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 5x_1 + 8x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} = x_1 \Sigma_1 + x_2 \Sigma_2 + x_3 \Sigma_3 ,$$

όπου $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ οι στήλες του A .

- ii. Γενικότερα, έστω $A \in M_{n \times m}(K)$ με στήλες $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$. Τότε

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \cdots & \Sigma_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1 \Sigma_1 + \cdots + x_m \Sigma_m .$$

4.3 Ιδιότητες αντιστρέψιμων Πινάκων

Σε αυτήν την ενότητα καταγράφουμε και πειραματιζόμαστε με ιδιότητες αντιστρέψιμων πινάκων.

Πρόταση 4.3.0.1 Έστω $A, B \in M_n(K)$ αντιστρέψιμοι, $0 \neq \kappa \in K$ και $\mu \in \mathbb{N}$. Τότε

- (i) AB είναι αντιστρέψιμος και $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$,
- (ii) A^μ είναι αντιστρέψιμος και $(A^\mu)^{-1} = (A^{-1})^\mu$, για $\mu \in \mathbb{N}$,
- (iii) κA είναι αντιστρέψιμος και $(\kappa A)^{-1} = \frac{1}{\kappa} A^{-1}$,
- (iv) A^{-1} είναι αντιστρέψιμος και $(A^{-1})^{-1} = A$,
- (v) A^T είναι αντιστρέψιμος και $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ενδεικτικά τις ιδιότητες (i), (v). Για το (i), θέλουμε να δείξουμε ότι ο αντίστροφος του $M = AB$ είναι ο πίνακας $M' = B^{-1}A^{-1}$. Για να δείξουμε το ζητούμενο, θα θεωρήσουμε τα γινόμενα MM' και $M'M$ και θα δείξουμε ότι δίνουν τον μοναδιαίο πίνακα. Πράγματι:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = [A(BB^{-1})]A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n .$$

Όμοια έχουμε $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$, επομένως το γινόμενο AB είναι αντιστρέψιμος πίνακας και $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Για το (v), θέλουμε να δείξουμε ότι ο αντίστροφος του $M = A^T$ είναι ο πίνακας $M' = (A^{-1})^T$. Για να δείξουμε το ζητούμενο, θα θεωρήσουμε τα γινόμενα MM' και $M'M$ και θα δείξουμε ότι δίνουν τον μοναδιαίο πίνακα. Πράγματι:

$$A^T (A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n.$$

Όμοια ισχύει $(A^{-1})^T A^T = I_n$, επομένως ο ανάστροφος του A , δηλ. ο πίνακας A^T είναι αντιστρέψιμος πίνακας και ο αντίστροφός του είναι ο ανάστροφος του A^{-1} . ■

Το σύνολο των αντιστρέψιμων πινάκων του $M_n(K)$ εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων συμβολίζεται με $GL_n(K)$ και ονομάζεται **γενική γραμμική ομάδα**. Είναι μία από τις πιο σημαντικές ομάδες που εμφανίζεται σε διαφορετικές επιστήμες. Έτσι:

$$GL_n(K) = \{A \in M_n(K) : A \text{ είναι αντιστρέψιμος}\}.$$

Παρατηρήσεις 4.3.0.2

(α) Με εύκολη επαγωγή στον αριθμό των παραγόντων αποδεικνύεται ότι αν $A_1, \dots, A_s \in GL_n(K)$, τότε και το γινόμενο $A_1 \cdots A_s \in GL_n(K)$ και

$$(A_1 \cdot A_2 \cdots A_s)^{-1} = A_s^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

(β) Αν ο πίνακας $A \in GL_n(K)$, τότε, αφού $(-1) \cdot A = -A$, έχουμε ότι $-A \in GL_n(K)$ και

$$(-A)^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot A^{-1} = (-1) \cdot A^{-1} = -A^{-1}.$$

(γ) Αν ο πίνακας $A \in GL_n(K)$, $\kappa \neq 0$, τότε $(\kappa A)^m = \kappa^m A^m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Έχουμε ήδη δει ότι η ισότητα ισχύει για θετικούς ακέραιους m και για όλους τους τετραγωνικούς πίνακες, βλ. Παρατήρηση 4.2.3.3.α. Μένει, λοιπόν, να τη δείξουμε για αρνητικούς ακέραιους m . Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή $m = -|m|$. Επομένως,

$$(\kappa A)^{-|m|} \stackrel{(a)}{=} ((\kappa A)^{-1})^{|m|} \stackrel{(b)}{=} \left(\frac{1}{\kappa} A^{-1}\right)^{|m|} \stackrel{(c)}{=} \frac{1}{\kappa^{|m|}} (A^{-1})^{|m|} \stackrel{(d)}{=} \kappa^m A^m,$$

όπου η ισότητα στο (a) είναι από τον ορισμό, η ισότητα στο (b) είναι με εφαρμογή του (iii) της Πρότασης 4.3.0.1, η ισότητα στο (c) είναι με εφαρμογή της Παρατήρησης 4.2.3.3.α για τον θετικό εκθέτη $|m|$ και τον πίνακα A^{-1} , ενώ η ισότητα στο (d) είναι από τον ορισμό.

Σημειώνουμε ότι αν $A, B \in GL_n(K)$, τότε $A + B$ δύναται να μην είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Πάρτε για παράδειγμα $B = -A$. Τότε $A + B = \mathbf{0}$ που ασφαλώς δεν είναι αντιστρέψιμος. Εύκολα επίσης κατασκευάζουμε παραδείγματα με μη αντιστρέψιμους πίνακες που το άθροισμά τους είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Δείτε ότι ο μοναδιαίος πίνακας I_2 γράφεται ως τέτοιο άθροισμα:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Σε κάποιες περιπτώσεις, μπορούμε να δείξουμε ότι ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος από κάποια γραμμική σχέση που ικανοποιούν οι δυνάμεις του πίνακα.

Παραδείγματα 4.3.0.3

i. Έστω ότι για τον $A \in M_n(K)$ ισχύει

$$A^3 - 7A + 6I_n = \mathbf{0}.$$

Θα δείξουμε ότι ο $A \in GL_n(K)$.

$$A^3 - 7A + 6I_n = \mathbf{0} \Leftrightarrow -A^3 + 7A = 6I_n \Leftrightarrow -\frac{1}{6}A^3 + \frac{7}{6}A = I_n$$

Από την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού μπορούμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα τον πίνακα A από τα αριστερά ή τα δεξιά του πρώτου σκέλους αυτής της ισότητας. Έτσι έχουμε:

$$A\left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}I_n\right) = I_n \quad \text{και} \quad \left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}I_n\right)A = I_n,$$

επομένως ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, με $A^{-1} = -\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}I_n$.

ii. Έστω ότι για τον $A \in M_n(K)$ ισχύει

$$A^3 - A^2 + 2A = \mathbf{0}.$$

Θα δείξουμε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, από την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού μπορούμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα τον πίνακα A από τα αριστερά του πρώτου σκέλους αυτής της ισότητας και έχουμε:

$$A^3 - A^2 + 2A = \mathbf{0} \Leftrightarrow A(A^2 - A + 2I_n) = \mathbf{0}.$$

Από την Παρατήρηση 4.2.2.8.α βλέπουμε αμέσως ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Θυμίζουμε ότι αν $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, τότε το ίχνος του A είναι το άθροισμα $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$. Έστω $A, B \in M_n(K)$. Το ίχνος συμπεριφέρεται πολύ καλά ως προς το άθροισμα, αφού είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι αν $A, B \in M_n(K)$, τότε $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$. Δεν υπάρχει, όμως, λόγος και δεν είναι σωστό να θεωρήσουμε ότι το ίχνος του γινομένου AB είναι το γινόμενο των ιχνών του A και του B . Για ένα απλό παράδειγμα που δείχνει ότι αυτό δεν ισχύει, παρατηρήστε ότι $\text{Tr}(I_2) = 2$, $I_2^2 = I_2$, ενώ ασφαλώς $2 = \text{Tr}(I_2) \neq (\text{Tr}(I_2))^2 = 4$. Θα δούμε όμως ότι μία πολύ ενδιαφέρουσα κατηγορία πινάκων έχουν το ίδιο ίχνος. Έστω $A, B \in M_n(K)$. Συγκεντρώνουμε τις ιδιότητες του ίχνους στην επόμενη πρόταση:

Πρόταση 4.3.0.4 Έστω $A, B \in M_n(K)$. Τότε ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

- (i) $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$.
- (ii) $\text{Tr}(\kappa A) = \kappa \text{Tr}(A)$, για κάθε $\kappa \in K$.
- (iii) $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$.
- (iv) $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- (v) $\text{Tr}(PAP^{-1}) = \text{Tr}(A)$, για κάθε $P \in GL_n(K)$.

Απόδειξη. Οι ιδιότητες (i) και (ii) προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ίχνους, του αθροίσματος πινάκων και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα, ενώ η (iii) έπεται από το γεγονός ότι οι πίνακες A και A^T έχουν ίδια κύρια διαγώνιο.

Για το (iv), έστω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$. Επιπλέον, ας θεωρήσουμε για συντομία ότι $AB = (c_{ij})$, ενώ $BA = (d_{ij})$. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία c_{ii} και d_{ii} στη θέση (i, i) της κύριας διαγώνιου των AB και BA αντίστοιχα είναι τα αθροίσματα

$$c_{ii} = \sum_{\kappa=1}^n a_{i\kappa} b_{\kappa i}, \quad d_{ii} = \sum_{\lambda=1}^n b_{i\lambda} a_{\lambda i}.$$

Τα στοιχεία αυτά δεν υπάρχει λόγος να είναι ίσα. Ωστόσο, παίρνοντας το άθροισμά τους ως προς όλα τα i , από το 1 έως το n , βλέπουμε ότι κάθε προσθετός του $\text{Tr}(AB)$ αντιστοιχεί σε έναν ακριβώς προσθετέο του $\text{Tr}(BA)$. Συγκεκριμένα, ο προσθετέος $a_{i\kappa} b_{\kappa i}$ του c_{ii} του $\text{Tr}(AB)$ είναι ο προσθετέος $b_{\kappa i} a_{i\kappa}$ του $d_{\kappa\kappa}$ του $\text{Tr}(BA)$. Έτσι:

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{\kappa=1}^n a_{i\kappa} b_{\kappa i} = \sum_{\kappa=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i\kappa} b_{\kappa i} = \sum_{\kappa=1}^n \sum_{i=1}^n b_{\kappa i} a_{i\kappa} = \sum_{\kappa=1}^n d_{\kappa\kappa} = \text{Tr}(BA)$$

και αποδείχθηκε η επιθυμητή ισότητα.

Για το (v) εφαρμόζουμε την ιδιότητα (iv) για το ίχνος του πίνακα $(PA)P^{-1}$:

$$\text{Tr}(PAP^{-1}) = \text{Tr}[(PA)P^{-1}] = \text{Tr}[P^{-1}(PA)] = \text{Tr}[(P^{-1}P)A] = \text{Tr}(I_n A) = \text{Tr}(A)$$

και αποδείχθηκε η επιθυμητή ισότητα. ■

Οι πίνακες A, B λέγονται **όμοιοι** αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(K)$ τέτοιος ώστε $B = PAP^{-1}$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι όμοιοι πίνακες έχουν ίδιο ίχνος.

4.4 Εργαστήριο με Mathematica

Εισάγουμε έναν πίνακα στο Mathematica ως μία «**λίστα**» αποτελούμενη από «**λίστες**» (τις γραμμές του πίνακα). Έτσι χρησιμοποιούμε δύο εξωτερικά άγκιστρα στην αρχή και το τέλος και εσωτερικά άγκιστρα για τις γραμμές. Εισάγουμε για παράδειγμα τον 3×4 -πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

στο Mathematica με τον ακόλουθο τρόπο

$$A = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{0, 5, 6, 7\}, \{8, 9, 1, 0\}\}$$

$$\{\{1, 2, 3, 4\}, \{0, 5, 6, 7\}, \{8, 9, 1, 0\}\}$$

Εμφανίζουμε έναν πίνακα A στη συνήθη μορφή του με την εντολή **MatrixForm[A]** :

MatrixForm[A]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρακάτω υπολογίζουμε τα βαθμωτά γινόμενα $10A$ και κA :

{ MatrixForm[10A], MatrixForm[κ * A] }

$$\left\{ \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ 0 & 50 & 60 & 70 \\ 80 & 90 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \kappa & 2\kappa & 3\kappa & 4\kappa \\ 0 & 5\kappa & 6\kappa & 7\kappa \\ 8\kappa & 9\kappa & \kappa & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Εισάγουμε στο σύστημα τον τετραγωνικό 3×3 -πίνακα $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = \{-1, 2, 0\}, \{3, -2, 1\}, \{1, 0, 2\}$; MatrixForm[B]

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

τον 1×3 πίνακα γραμμή $v = [2 \ 1 \ -1]$ (προσοχή στα **διπλά άγκιστρα**),

$v = \{2, 1, -1\}$; MatrixForm[v]

$$(2 \ 1 \ -1)$$

καθώς και τον 3×1 πίνακα στήλη $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ (κάθε γραμμή του w περιέχει ένα μόνο στοιχείο)

$w = \{1\}, \{3\}, \{2\}$; MatrixForm[w]

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το γινόμενο δύο πινάκων M, N τοποθετώντας ανάμεσά τους τελεία « \cdot » (dot), $M \cdot N$:

MatrixForm[B.A]

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 5 & -2 & -2 \\ 17 & 20 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

MatrixForm[A.B]

Dot::dotch: Tensor {{1,2,3,4},{0,5,6,7},{8,9,1,0}} and {{-1,2,0},{3,-2,1},{1,0,2}} have incompatible shapes.

Το πρόγραμμα « διαμαρτύρεται », γιατί δεν μπορεί να υπολογιστεί το γινόμενο $A \cdot B$, πλήθος στηλών $A \neq$ πλήθος γραμμών B .

Το γινόμενο του 3×1 -πίνακα w με τον 1×3 -πίνακα v είναι ένας 3×3 -πίνακας τον οποίο ονομάζουμε M :

MatrixForm[M = w.v]

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Το γινόμενο $v \cdot w$ είναι 1×1 -πίνακας:

MatrixForm[v.w]

(3)

Υπολογίζουμε τα γινόμενα $B \cdot M$ και $M \cdot B$ για να διαπιστώσουμε ότι ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός, $B \cdot M \neq M \cdot B$.

{ MatrixForm[B.M], MatrixForm[M.B] }

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 10 & 5 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \\ 10 & 5 & -5 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -2 \end{array} \right) \right\}$$

Προσθέτουμε πίνακες που έχουν τον ίδιο τύπο. Για παράδειγμα

{ MatrixForm[B + M], MatrixForm[B - M], MatrixForm[-3B + 7M] }

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & -1 \\ 9 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} -3 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & 4 \\ -3 & -2 & 4 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 17 & 1 & -7 \\ 33 & 27 & -24 \\ 25 & 14 & -20 \end{array} \right) \right\}$$

Δεν υπολογίζεται το άθροισμα $A + B$, αφού ο πίνακας A έχει περισσότερες στήλες από τον B :

MatrixForm[A + B]

Thread::tlen : Objects of unequal length in {1,2,3,4}+{-1,2,0} cannot be combined....

Με την εντολή **Transpose[A]** βρίσκουμε τον ανάστροφο A^T ενός πίνακα A :

At = Transpose[A]; MatrixForm[At]

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \end{array} \right)$$

Ονομάσαμε **At** τον ανάστροφο A^T . Έτσι μπορούμε να τον ανακαλέσουμε γράφοντας At αντί για $Transpose[A]$.

{ MatrixForm[A], MatrixForm[At], MatrixForm[Transpose[At]] }

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 6 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \end{array} \right) \right\}$$

Επαληθεύσαμε την ιδιότητα $(A^T)^T = A, \forall A \in M_{n \times m}(K)$.

Υπολογίζουμε τους 3×3 -πίνακες $(B \cdot M)^T, (M \cdot B)^T, B^T \cdot M^T, M^T \cdot B^T$:

Bt = Transpose[B]; Mt = Transpose[M];

{ MatrixForm[Transpose[B.M]], MatrixForm[Transpose[M.B]], MatrixForm[Bt.Mt],

MatrixForm[Mt.Bt] }

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 10 & -2 & 10 \\ 5 & -1 & 5 \\ -5 & 1 & -5 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -3 & -2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 10 & -2 & 10 \\ 5 & -1 & 5 \\ -5 & 1 & -5 \end{array} \right) \right\}$$

Επαληθεύσαμε τη σημαντική ιδιότητα για την αναστροφή γινομένου πινάκων,

$$(B \cdot M)^T = M^T \cdot B^T, \quad (M \cdot B)^T = B^T \cdot M^T, \quad \forall B, M \in M_n(K),$$

όπου οι παράγοντες του γινομένου αλλάζουν σειρά.

Ορίζουμε τον 3×3 -πίνακα $S = A \cdot A^T$, ο οποίος είναι συμμετρικός, $S^T = S$:

MatrixForm[S = A.At]

$$\begin{pmatrix} 30 & 56 & 29 \\ 56 & 110 & 51 \\ 29 & 51 & 146 \end{pmatrix}$$

Με το διπλό ίσον «**==**» το Mathematica ελέγχει την ορθότητα ενός συλλογισμού, δίνοντας ως απάντηση «True», όταν αυτός είναι σωστός, ή «False» στην αντίθετη περίπτωση:

Transpose[A.At] == A.At

True

Ο 4×4 -πίνακας $Z = A^T \cdot A$ είναι επίσης συμμετρικός, αφού

$$Z^T = (A^T \cdot A)^T = A^T \cdot (A^T)^T = A^T \cdot A = Z:$$

Z = At.A // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 65 & 74 & 11 & 4 \\ 74 & 110 & 45 & 43 \\ 11 & 45 & 46 & 54 \\ 4 & 43 & 54 & 65 \end{pmatrix}$$

Μπορούμε να εφαρμόσουμε μία εντολή σε μία έκφραση χρησιμοποιώντας διπλό «/», **έκφραση // Εντολή**, αντί του **Εντολή[έκφραση]**. Αποφεύγουμε να χρησιμοποιούμε αυτόν τον τρόπο όταν δίνουμε ταυτόχρονα όνομα στην έκφραση, όπως εδώ, όπου ονομάσαμε Z τον πίνακα $A^T \cdot A$. Το Mathematica δεν αναγνωρίζει ως Z το γινόμενο $A^T \cdot A$, αλλά το **MatrixForm[At.A]**.

{ MatrixForm[P = B + Bt], MatrixForm[Q = B - Bt] }

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

Ορίσαμε τον συμμετρικό πίνακα $P = B + B^T$, με $P^T = P$ και τον αντισυμμετρικό πίνακα $Q = B - B^T$, με $Q^T = -Q$. Διαπιστώνουμε ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας $B \in M_n(K)$ γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα,

$$B = \frac{1}{2}(B + B^T) + \frac{1}{2}(B - B^T) = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q:$$

{ MatrixForm[B], MatrixForm[(1/2)P], MatrixForm[(1/2)Q] }

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

Η εντολή **IdentityMatrix[n]** μας δίνει τον μοναδιαίο $n \times n$ -πίνακα I_n :

I3 = IdentityMatrix[3]; MatrixForm[I3]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

{ **MatrixForm**[**I3.M**], **MatrixForm**[**M.I3**], **MatrixForm**[**M**] }

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Ονομάσαμε **I3** τον μοναδιαίο 3×3 -πίνακα I_3 και επαληθεύσαμε την ιδιότητα $I_n \cdot M = M \cdot I_n$, $\forall M \in M_n(K)$.

Με την εντολή **ConstantArray**[*c*, {*n*, *m*}] δημιουργούμε τον $n \times m$ -πίνακα με όλα τα στοιχεία του ίσα με *c*. Παρακάτω κατασκευάζουμε τους μηδενικούς 2×3 και 4×2 -πίνακες που ονομάζουμε αντίστοιχα **O23** και **O42**:

O23 = **ConstantArray**[0, {2, 3}]; **MatrixForm**[**O23**]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O42 = **ConstantArray**[0, {4, 2}]; **MatrixForm**[**O42**]

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε με τον 3×4 -πίνακα *A*:

{ **MatrixForm**[**O23.A**], **MatrixForm**[**A.O42**] }

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Για κάθε $A \in M_{n \times m}(K)$, $0_{s \times n} \cdot A = 0_{s \times m}$, $A \cdot 0_{m \times s} = 0_{n \times s}$.

Με την εντολή **Table**[**Random**[**Integer**, {*κ*, *λ*}], {*n*}, {*m*}] δημιουργούμε $n \times m$ -πίνακες με στοιχεία ακέραιους (**Integer**), επιλεγμένα τυχαία από το σύνολο {*κ*, ..., *λ*}, $\kappa < \lambda$.

X = **Table**[**Random**[**Integer**, {0, 6}], {4}, {5}]; **MatrixForm**[**X**]

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Όμοια, με την εντολή **RandomChoice**[*S*, {*n*, *m*}] δημιουργούμε $n \times m$ -πίνακες με στοιχεία επιλεγμένα τυχαία από ένα σύνολο *S*.

Y = **RandomChoice**[{-2, -1, 0, 1, 2}, {5, 2}]; **MatrixForm**[**Y**]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Παρακάτω επαληθεύουμε την ιδιότητα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού αριθμού επί πίνακα,

$$(k \cdot A)B = A(k \cdot B) = k \cdot (AB), \quad \forall k \in K, A \in M_{n \times m}(K), B \in M_{m \times s}(K):$$

{ MatrixForm[(k * X).Y], MatrixForm[X.(k * Y)], MatrixForm[k * (X.Y)] }

$$\left\{ \begin{pmatrix} -16k & 12k \\ -11k & 17k \\ -3k & 11k \\ -9k & 15k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16k & 12k \\ -11k & 17k \\ -3k & 11k \\ -9k & 15k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16k & 12k \\ -11k & 17k \\ -3k & 11k \\ -9k & 15k \end{pmatrix} \right\}$$

Clear[A, B, M]

Διαγράψαμε τους ορισμούς που δώσαμε στα σύμβολα A, B, M ώστε να τα χρησιμοποιήσουμε εκ νέου.

Ορίζουμε παρακάτω τον πίνακα $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$:

M = {{1, 2, 3, 0}, {0, -1, 2, 1}, {1, 2, 1, 3}, {4, 1, -2, 0}, {-1, 3, 0, 5}}; MatrixForm[M]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Στην ενότητα 1.1 είδαμε ότι με τις διπλές αγγύλες **L[[n]]** ανακαλούμε το n -στό στοιχείο μίας λίστας L. Έτσι με την εντολή **M[[1]]** παίρνουμε το 1ο στοιχείο της λίστας M, δηλαδή μία «**λίστα**» αποτελούμενη από τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του πίνακα M:

M[[1]]

{1, 2, 3, 0}

M[[4]]

{4, 1, -2, 0}

(τα στοιχεία της τέταρτης γραμμής του M).

Ο πίνακας $M = (m_{ij})$ έχει οριστεί στο Mathematica ως μία λίστα αποτελούμενη από λίστες (τις γραμμές του πίνακα). Με την εντολή **M[[κ, λ]]** ανακαλούμε το λ-στοιχείο της κ-γραμμής του M, δηλαδή το στοιχείο $m_{κλ}$:

M[[4, 3]]

Μπορούμε να δημιουργήσουμε μία λίστα αποτελούμενη από τα στοιχεία μιας στήλης του πίνακα M (για παράδειγμα της Σ_3) με τους επόμενους τρεις τρόπους:

$$M[\{1, 2, 3, 4, 5\}, 3]$$

$$\{3, 2, 1, -2, 0\}$$

(διαλέξαμε το 3ο στοιχείο από την 1η, 2η, 3η, 4η και 5η γραμμή του M),

$$M[1; ; 5, 3]$$

$$\{3, 2, 1, -2, 0\}$$

(αντικαταστήσαμε τους διαδοχικούς αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5 με το 1; ; 5),

$$M[\mathbf{All}, 3]$$

$$\{3, 2, 1, -2, 0\}$$

(διαλέξαμε το 3ο στοιχείο όλων «**All**» των γραμμών του M).

Υποπίνακας ενός πίνακα $M \in M_{n \times m}(K)$ ονομάζεται ένας πίνακας που προκύπτει από τον M αν διαγράψουμε ορισμένες γραμμές ή στήλες του M .

Διαγράφουμε για παράδειγμα την 3η και 4η γραμμή του M και τη 2η στήλη του,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Προκύπτει ο 3×3 -υποπίνακας A , που αποτελείται από τα στοιχεία του M που ανήκουν ταυτόχρονα στην 1η, 2η, 5η γραμμή και 1η, 3η, 4η στήλη:

$$A = M[\{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}]; \text{MatrixForm}[A]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε και τον 3×3 -υποπίνακα B που αποτελείται από τα κοινά στοιχεία της 2ης, 3ης, 4ης γραμμής και 2ης, 3ης, 4ης στήλης του M :

$$B = M[\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}]; \text{MatrixForm}[B]$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις δυνάμεις A^2 και A^3 του πίνακα A :

$$\{ \text{MatrixForm}[A.A], \text{MatrixForm}[A.A.A] \}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 9 & 3 \\ -1 & 4 & 7 \\ -6 & -3 & 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 21 & 24 \\ -8 & 5 & 39 \\ -31 & -24 & 122 \end{pmatrix} \right\}$$

Ο τρόπος αυτός δεν είναι πρακτικός όταν θέλουμε να υπολογίσουμε δυνάμεις πινάκων με μεγάλο εκθέτη, για παράδειγμα A^8 . Με την εντολή **MatrixPower**[A, m] υπολογίζουμε τη δύναμη A^m ενός τετραγωνικού πίνακα A :

MatrixForm[MatrixPower[A, 8]]

$$\begin{pmatrix} -22589 & -21321 & 86160 \\ -28720 & -29696 & 107773 \\ -79053 & -86160 & 293623 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις δυνάμεις L^1, L^2, \dots, L^6 του πίνακα $L = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$L = \{\{0, -1\}, \{1, -1\}\}$; **Table[MatrixForm[MatrixPower[L, m]], {m, 1, 6}]**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Παρατηρούμε ότι $L^3 = I_2$. Έτσι $L^{2021} = L^{3 \cdot 673 + 2} = (L^3)^{673} L^2 = I_2 L^2 = L^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Με την εντολή **Inverse[M]** υπολογίζουμε τον αντίστροφο ενός τετραγωνικού πίνακα $M \in GL_n(K)$. Παρακάτω υπολογίζουμε τους αντίστροφους A^{-1}, B^{-1} των πινάκων $A, B \in GL_3(\mathbb{R})$ και επαληθεύουμε ότι $AA^{-1} = I_3, A^{-1}A = I_3$:

rr{ MatrixForm[Inverse[A]], MatrixForm[Inverse[B]] }

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{10}{7} & -\frac{15}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{6}{5} & \frac{2}{5} & -1 \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

{ MatrixForm[A.Inverse[A]], MatrixForm[Inverse[A].A] }

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Υπολογίζουμε τα γινόμενα $(A \cdot B)^{-1}, (B \cdot A)^{-1}, A^{-1} \cdot B^{-1}, B^{-1} \cdot A^{-1}$:

{ MatrixForm[Inverse[A.B]], MatrixForm[Inverse[B.A]],

MatrixForm[Inverse[A].Inverse[B]], MatrixForm[Inverse[B].Inverse[A]] }

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{72}{35} & \frac{23}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{41}{35} & \frac{13}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{12}{7} & -\frac{18}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{8}{7} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{35} & -\frac{5}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{35} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{7} & \frac{8}{7} \\ -\frac{2}{5} & \frac{3}{35} & -\frac{5}{7} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{35} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{72}{35} & \frac{23}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{41}{35} & \frac{13}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{12}{7} & -\frac{18}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix} \right\}$$

Επαληθεύσαμε την ιδιότητα του αντίστροφου του γινομένου δύο αντιστρέψιμων πινάκων,

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}, \quad (B \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}, \quad A, B \in GL_n(K),$$

όπου οι παράγοντες του γινομένου αλλάζουν σειρά, όπως γίνεται και στην αντίστοιχη ιδιότητα της αναστροφής γινομένου πινάκων.

Με την εντολή **DiagonalMatrix[{d1, d2, ..., dn}]** σχηματίζουμε τον διαγώνιο $n \times n$ -πίνακα με στοιχεία κύριας διαγώνιου τα d_1, d_2, \dots, d_n :

D2 = DiagonalMatrix[{d1, d2}]; MatrixForm[D2]

$$\begin{pmatrix} d1 & 0 \\ 0 & d2 \end{pmatrix}$$

Ονομάσαμε D2 τον διαγώνιο 2×2 -πίνακα $\text{diag}(d1, d2)$. Θεωρούμε ότι $d1, d2 \neq 0$ και υπολογίζουμε τους πίνακες $D2^2, D2^7, D2^{-1}, D2^{-7}$, ώστε να επαληθεύσουμε την ιδιότητα

$$[\text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)]^m = \text{diag}(d_1^m, d_2^m, \dots, d_n^m),$$

$m \in \mathbb{N}$, ή $m \in \mathbb{Z}$ όταν $d_1 \cdot d_2 \cdots d_n \neq 0$:

{ **MatrixForm**[D2.D2], **MatrixForm**[**MatrixPower**[D2, 7]],

MatrixForm[**Inverse**[D2]], **MatrixForm**[**MatrixPower**[D2, -7]] }

$$\left\{ \begin{pmatrix} d1^2 & 0 \\ 0 & d2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d1^7 & 0 \\ 0 & d2^7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{d1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{d1^7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{d2^7} \end{pmatrix} \right\}$$

Πολλαπλασιάζουμε τον πίνακα $Q = \begin{pmatrix} x1 & x2 & x3 \\ y1 & y2 & y3 \end{pmatrix}$ από αριστερά με τον διαγώνιο πίνακα D2:

$$Q = \{\{x1, x2, x3\}, \{y1, y2, y3\}\};$$

{ **MatrixForm**[D2], **MatrixForm**[Q], **MatrixForm**[D2.Q] }

$$\left\{ \begin{pmatrix} d1 & 0 \\ 0 & d2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x1 & x2 & x3 \\ y1 & y2 & y3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d1x1 & d1x2 & d1x3 \\ d2y1 & d2y2 & d2y3 \end{pmatrix} \right\}$$

Το αποτέλεσμα είναι ότι κάθε γραμμή του Q πολλαπλασιάζεται με το αντίστοιχο στοιχείο της κύριας διαγώνιου του $D2$.

Πολλαπλασιάζουμε τον Q από δεξιά με τον διαγώνιο 3×3 -πίνακα $D3 = \text{diag}(d1, d2, d3)$:

$$D3 = \text{DiagonalMatrix}\{d1, d2, d3\};$$

{ **MatrixForm**[Q], **MatrixForm**[D3], **MatrixForm**[Q.D3] }

$$\left\{ \begin{pmatrix} x1 & x2 & x3 \\ y1 & y2 & y3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d1 & 0 & 0 \\ 0 & d2 & 0 \\ 0 & 0 & d3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d1x1 & d2x2 & d3x3 \\ d1y1 & d2y2 & d3y3 \end{pmatrix} \right\}$$

Το αποτέλεσμα είναι ότι κάθε στήλη του Q πολλαπλασιάζεται με το αντίστοιχο στοιχείο της κύριας διαγώνιου του $D3$.

Με την εντολή **Tr**[M] υπολογίζουμε το ίχνος, δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγώνιου ενός τετραγωνικού πίνακα M . Για παράδειγμα

Tr[D3]

$$d1 + d2 + d3$$

Παρακάτω υπολογίζουμε τα ίχνη των πινάκων $A, B, A+B, A \cdot B, B \cdot A, B \cdot A \cdot B^{-1}, A \cdot B \cdot A^{-1}$ για να επαληθεύσουμε ότι

- $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$,
- $\text{Tr}(A \cdot B) \neq \text{Tr}(A) \cdot \text{Tr}(B)$,
- $\text{Tr}(A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot A)$,
- όμοιοι πίνακες έχουν ίδιο ίχνος, $\text{Tr}(B \cdot A \cdot B^{-1}) = \text{Tr}(A)$, $\text{Tr}(A \cdot B \cdot A^{-1}) = \text{Tr}(B)$:

{ **Tr**[A], **Tr**[B], **Tr**[A+B], **Tr**[A.B], **Tr**[B.A], **Tr**[B.A.**Inverse**[B]] , **Tr**[A.B.**Inverse**[A]] }

$$\{8, 0, 8, 4, 4, 8, 0\}$$

Εξάσκηση με το Mathematica

- Χρησιμοποιώντας τις εντολές `Table[Random[...]]` και `RandomChoice[...]` δημιουργήστε τυχαίους $n \times m$ και $n \times n$ -πίνακες και επαναλάβετε τις εντολές της ενότητας, επιλέγοντας εσείς τιμές για τα n, m .
- Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
 - Να δείξετε ότι $B^m = I_2$ ή B ή B^2 , $\forall m \in \mathbb{Z}$.
 - Να δείξετε ότι $A^2 = -3B^2$, $A^4 = 3^2B$, $A^{12} = 3^6I_2$.
 - Να γράψετε τους πίνακες A^{20} , A^{56} , A^{100} στη μορφή $\pm 3^s B^t$, όπου $t = 0, 1, 2$.

Να επαληθεύσετε τα αποτελέσματά σας στο Mathematica.

- Θεωρούμε τους πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν οι πίνακες X, Y, Z, W , αν

$$AX = B, \quad YA^T + 2I_3 = B, \quad ZA + AA^T = A^2 + I_3, \quad AWA^T - 2B = I_3.$$
- Δίνονται οι πίνακες γραμμή $m = [1 \ 2 \ 3]$, $s = [-1 \ -1 \ 1]$.
 - Να υπολογίσετε τους πίνακες $M = m^T m + I_3$, M^2 , M^{10} , M^{-1} , M^{-4} .
 - Έστω $P = \frac{1}{14} m^T m$. Να δείξετε ότι $P^2 = P$ και ότι ο P δεν αντιστρέφεται.
 - Τι παρατηρείτε για τον αντίστροφο του πίνακα $A = 2P - I_3$;
 - Να δείξετε ότι $S^2 = S$ και $(S + P)^2 = S + P$, όπου $S = \frac{1}{3} s^T s$. Τι παρατηρείτε για τα γινόμενα SP και PS ;

4.5 Ασκήσεις

Λυμένες Ασκήσεις

4.5.1 Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(K)$ ονομάζεται **ταυτοδύναμος**, αν

$$A^2 = A.$$

Έστω ο πίνακας γραμμή

$$v = [a_1 \ \cdots \ a_n] \in M_{1 \times n}(\mathbb{R}), \quad a = a_1^2 + \cdots + a_n^2 \neq 0.$$

Να δείξετε ότι ο συμμετρικός $n \times n$ -πίνακας

$$A = \frac{1}{a} v^T v = \frac{1}{a_1^2 + \cdots + a_n^2} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [a_1 \ \cdots \ a_n]$$

είναι ταυτοδύναμος.

Λύση. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (iv) της Πρότασης 4.2.3.2 έχουμε

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\frac{1}{a} v^T v\right) \left(\frac{1}{a} v^T v\right) = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [a_1 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [a_1 \ \cdots \ a_n] = \\
&= \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [a_1^2 + \cdots + a_n^2] [a_1 \ \cdots \ a_n] = \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [a] [a_1 \ \cdots \ a_n] = \\
&= \frac{1}{a^2} \begin{bmatrix} a \cdot a_1 \\ \vdots \\ a \cdot a_n \end{bmatrix} [a_1 \ \cdots \ a_n] = \frac{a}{a^2} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [a_1 \ \cdots \ a_n] = \frac{1}{a} v^T v = A. \quad \square
\end{aligned}$$

Έστω για παράδειγμα $v = [1 \ 0 \ -1]$, $u = [1 \ 2 \ 1]$. Οι πίνακες

$$A = \frac{1}{1^2 + 1^2} v^T v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{1^2 + 2^2 + 1^2} u^T u = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

είναι ταυτοδύναμοι. Παρατηρούμε ότι $vu^T = [0]$ και $AB = 0_3$. Έτσι και ο πίνακας

$$A + B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ είναι ταυτοδύναμος (βλ. επόμενη Άσκηση, ε).}$$

4.5.2 Έστω $A \in M_n(K)$ ταυτοδύναμος πίνακας, $A \neq I_n$. Να δείξετε ότι

- Ο A είναι μη αντιστρέψιμος.
- Ο $I_n - A$ είναι ταυτοδύναμος πίνακας, ενώ ο πίνακας $2A - I_n$ είναι αντιστρέψιμος, με $(2A - I_n)^{-1} = 2A - I_n$.
- Κάθε πίνακας όμοιος με τον A είναι επίσης ταυτοδύναμος, PAP^{-1} ταυτοδύναμος πίνακας $\forall P \in GL_n(K)$.
- $A^m = A$, $\forall m \geq 1$.
- Έστω ότι και ο πίνακας $B \in M_n(K)$ είναι ταυτοδύναμος. Τότε $A + B$ είναι ταυτοδύναμος $\Leftrightarrow AB = BA = 0_n$.

Λύση. Ο A είναι ταυτοδύναμος πίνακας, δηλαδή ισχύει

$$A^2 = A.$$

α) Έστω ότι $\exists A^{-1}$. Τότε $A^2 = A \Rightarrow A^{-1}A^2 = A^{-1}A \Rightarrow A = I_n$, το οποίο είναι άτοπο. Έτσι ο A είναι μη αντιστρέψιμος. Ο μόνος ταυτοδύναμος πίνακας του $M_n(K)$ που είναι αντιστρέψιμος είναι ο I_n .

β) Παρατηρούμε ότι

$$(I_n - A)^2 = (I_n - A)(I_n - A) = I_n - A - A + A^2 = I_n - A - A + A = I_n - A,$$

δηλαδή $(I_n - A)^2 = I_n - A$ και ο πίνακας $I_n - A$ είναι ταυτοδύναμος. Επίσης,

$$(2A - I_n)^2 = (2A - I_n)(2A - I_n) = 4A^2 - 4A + I_n = 4A - 4A + I_n = I_n.$$

Έτσι $(2A - I_n)(2A - I_n) = I_n$ και ο $2A - I_n$ είναι αντιστρέψιμος, με $(2A - I_n)^{-1} = 2A - I_n$.

γ) Έχουμε

$$\begin{aligned} (PAP^{-1})^2 &= (PAP^{-1})(PAP^{-1}) = PA(P^{-1}P)AP^{-1} = \\ &= PAI_nAP^{-1} = PA^2P^{-1} = PAP^{-1}, \end{aligned}$$

επομένως ο πίνακας PAP^{-1} είναι ταυτοδύναμος.

δ) Από τη σχέση $A^2 = A$ έπεται $AA^2 = AA \Rightarrow A^3 = A^2 = A$, όμοια $A^4 = A$ κτλ. Για μια σωστά τεκμηριωμένη απόδειξη, θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Θα δείξουμε ότι ισχύει η πρόταση

$$P(m) : A^m = A, \quad \forall m \geq 1.$$

- Ισχύει η $P(1) : A^1 = A$.
- (Υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής) Έστω ότι ισχύει η $P(\kappa) : A^\kappa = A$.
- Θα δείξουμε ότι ισχύει η $P(\kappa + 1) : A^{\kappa+1} = A$.

Πράγματι, αφού $A^\kappa = A$ και $A^2 = A$, έχουμε $A^{\kappa+1} = A^\kappa A = AA = A^2 = A$.

ε) Έστω οι ταυτοδύναμοι πίνακες A, B με $A^2 = A, B^2 = B$.

Αρχικά δείχνουμε ότι αν και ο $A+B$ είναι ταυτοδύναμος πίνακας, τότε $AB = BA = 0_n$:

$$\begin{aligned} (A+B)^2 = A+B &\Leftrightarrow (A+B)(A+B) = A+B \Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A+B \stackrel{\substack{A^2=A \\ B^2=B}}{\Leftrightarrow} \\ &\Leftrightarrow AB + BA = 0_n. \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (4.5.1) με A , αρχικά από αριστερά και έπειτα από δεξιά:

$$\left. \begin{aligned} (4.5.1) \Rightarrow A^2B + ABA &= A \cdot 0_n = 0_n \stackrel{A^2=A}{\Leftrightarrow} AB = -ABA \\ (4.5.1) \Rightarrow ABA + BA^2 &= A \cdot 0_n = 0_n \Leftrightarrow BA = -ABA \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = BA.$$

Έτσι η σχέση (4.5.1) γίνεται $AB + AB = 0_n \Leftrightarrow \frac{1}{2}(2AB) = \frac{1}{2}0_n \Leftrightarrow AB = 0_n$.

Αντίστροφα, αν $AB = 0_n = BA$, τότε

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A + 0_n + 0_n + B = A+B$$

και ο $A+B$ είναι ταυτοδύναμος πίνακας. □

4.5.3 Να αποδείξετε ότι κάθε τετραγωνικός πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T), \tag{4.5.2}$$

όπου $X = \frac{1}{2}(A + A^T)$ συμμετρικός και $Y = \frac{1}{2}(A - A^T)$ αντισυμμετρικός πίνακας, αφού

$$Y^T = \frac{1}{2}(A - A^T)^T = \frac{1}{2}(A^T - (A^T)^T) = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -Y,$$

όμοια $X^T = X$. Περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο οδηγηθήκαμε στη γραφή (4.5.2):

Ψάχνουμε

$$X = (x_{ij}) \in M_n(K) \quad \text{συμμετρικό} \quad \Leftrightarrow \quad x_{ij} = x_{ji} \quad i, j = 1, \dots, n \quad \text{έτσι, ώστε}$$

$$Y = (y_{ij}) \in M_n(K) \quad \text{αντισυμμετρικό} \quad \Leftrightarrow \quad y_{ij} = -y_{ji}$$

$$A = X + Y \Leftrightarrow (a_{ij}) = (x_{ij} + y_{ij}) \Leftrightarrow a_{ij} = x_{ij} + y_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Τότε,

$$a_{ji} = x_{ji} + y_{ji} \Leftrightarrow a_{ji} = x_{ij} - y_{ij}.$$

Λύνοντας το σύστημα $\left\{ \begin{array}{l} x_{ij} + y_{ij} = a_{ij} \\ x_{ij} - y_{ij} = a_{ji} \end{array} \right\}$ βρίσκουμε

$$x_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}), \quad y_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}),$$

και συμπεραίνουμε ότι $X = \frac{1}{2}(A + A^T)$, $Y = \frac{1}{2}(A - A^T)$, γιατί αν $A = (a_{ij})$, τότε $A^T = (a'_{ij})$, με $a'_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$. \square

4.5.4 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{pmatrix}$. Να δείξετε ότι τα στοιχεία της κύριας διαγώνιου του πίνακα A^9 είναι ίσα με το 0.

Λύση. Παρατηρούμε ότι $A^T = -A$, δηλαδή ο A είναι αντισυμμετρικός πίνακας. Θα δείξουμε ότι ο πίνακας A^9 είναι αντισυμμετρικός, $(A^9)^T = -A^9$, επομένως τα στοιχεία της κύριας διαγώνιου του είναι ίσα με το 0. Πράγματι:

$$(A^9)^T = (A^T)^9 = (-A)^9 = [(-1)A]^9 = (-1)^9 A^9 = -A^9. \quad \square$$

4.5.5 Να δείξετε ότι για κάθε $A \in M_{n \times m}(K)$, οι πίνακες $A \cdot A^T$ και $A^T \cdot A$ είναι συμμετρικοί. Επιπλέον αν $A \in M_n(K)$, τότε ο $A + A^T$ είναι συμμετρικός, ενώ ο $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός.

Λύση. Αποδεικνύουμε ότι ο πίνακας $M = A \cdot A^T \in M_n(K)$ είναι συμμετρικός, δηλ. ότι $M^T = M$. Πράγματι

$$M^T = (A \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot A^T = A \cdot A^T = M.$$

Όμοια αποδεικνύονται και οι υπόλοιποι ισχυρισμοί. \square

Έστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Υπολογίζουμε τα στοιχεία της κύριας διαγώνιου του πίνακα AA^T .

$$AA^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & * \\ * & c^2 + d^2 \end{bmatrix}.$$

Έτσι το ίχνος του πίνακα AA^T ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων όλων των στοιχείων του A , $\text{Tr}(AA^T) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Στην επόμενη άσκηση γενικεύουμε το συμπέρασμα για κάθε πίνακα.

4.5.6 Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(K)$. Να δείξετε ότι το ίχνος του $n \times n$ -πίνακα AA^T ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων όλων των στοιχείων του A ,

$$\text{Tr}(AA^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2.$$

Λύση. Έστω $A^T = (a'_{ij})$, τότε $a'_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$. Έστω επίσης $AA^T = (c_{ij})$. Έχουμε

$$\text{Tr}(AA^T) = c_{11} + \dots + c_{nn} = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}a'_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2. \quad \square$$

Υπάρχουν μη μηδενικοί πίνακες $A \in M_n(K)$ για τους οποίους ισχύει $A^2 = 0_n$. Μάλιστα κάθε πίνακας όμοιος με τον A έχει την ίδια ιδιότητα. Πράγματι, αν $M = PAP^{-1}$, όπου $P \in GL_n(K)$, τότε

$$M^2 = (PAP^{-1})(PAP^{-1}) = PA^2P^{-1} = P0_nP^{-1} = 0_n.$$

Για παράδειγμα για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

ισχύει $A^2 = M^2 = 0_2$. Στην επόμενη άσκηση δείχνουμε ότι δεν υπάρχει συμμετρικός πίνακας που να έχει αυτήν την ιδιότητα.

4.5.7 Να αποδείξετε ότι αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι συμμετρικός πίνακας για τον οποίο ισχύει $A^2 = 0_n$, τότε $A = 0_n$.

Λύση. Έστω $A = (a_{ij})$. Ο A είναι συμμετρικός, επομένως $A = A^T$. Από τη Λυμένη Άσκηση 4.5.6 έχουμε

$$\begin{aligned} A^2 = 0_n &\Leftrightarrow AA = 0_n \Leftrightarrow AA^T = 0_n \implies \text{Tr}(AA^T) = \text{Tr}(0_n) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \Leftrightarrow A = 0_n. \quad \square \end{aligned}$$

Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ -3 & 5 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

ικανοποιεί τη σχέση $A^3 - 7A + 6I_n = 0_n$, για $n = 3$. Δείχνουμε ότι κάθε πίνακας όμοιος με τον A ικανοποιεί την ίδια σχέση.

4.5.8 Αν για τον πίνακα $A \in M_n(K)$ ισχύει

$$A^3 - 7A + 6I_n = 0_n,$$

να δείξετε ότι και για τον πίνακα $M = PAP^{-1}$ ισχύει $M^3 - 7M + 6I_n = 0_n$, όπου $P \in GL_n(K)$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$M^3 = (PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1}) = PAAAP^{-1} \Rightarrow M^3 = PA^3P^{-1}.$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} M^3 - 7M + 6I_n &= PA^3P^{-1} - 7PAP^{-1} + 6PI_nP^{-1} = P(A^3P^{-1} - 7AP^{-1} + 6I_nP^{-1}) = \\ &= P(A^3 - 7A + 6I_n)P^{-1} = P0_nP^{-1} = 0_n. \quad \square \end{aligned}$$

4.5.9 Δίνονται οι πίνακες $A, D \in M_n(K)$ και $P \in GL_n(K)$, τέτοιοι ώστε $A = PDP^{-1}$. Να δείξετε ότι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$A^m = PD^m P^{-1}. \quad (4.5.3)$$

Λύση. Αποδεικνύουμε τη ζητούμενη σχέση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

- Η Σχέση (4.5.3) ισχύει για $m = 1$: $A^1 = PD^1 P^{-1}$.
- Έστω ότι η Σχέση (4.5.3) ισχύει για $m = \kappa$: $A^\kappa = PD^\kappa P^{-1}$.
- Θα δείξουμε ότι η Σχέση (4.5.3) ισχύει για $m = \kappa + 1$: $A^{\kappa+1} = PD^{\kappa+1} P^{-1}$.

Πράγματι,

$$A^{\kappa+1} = A^\kappa A = (PD^\kappa P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^\kappa I_n DP^{-1} = PD^\kappa DP^{-1} = PD^{\kappa+1} P^{-1}. \quad \square$$

4.5.10 Δίνονται οι πίνακες $A, B \in M_n(K)$. Να δείξετε ότι αν ο A ή ο B είναι αντιστρέψιμος, τότε οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι.

Λύση. Έστω ότι $\exists A^{-1}$. Τότε $AB = ABI_n = ABAA^{-1}$, δηλαδή

$$AB = A(BA)A^{-1}$$

και οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι. Αν $\exists B^{-1}$, τότε $BA = B(AB)B^{-1}$ και οι πίνακες AB και BA είναι επίσης όμοιοι. \square

4.5.11 Να δείξετε ότι οι πίνακες του $M_3(K)$ που αντιμετατίθενται με κάθε πίνακα του $M_3(K)$, ως προς τον πολλαπλασιασμό πινάκων, είναι οι διαγώνιοι πίνακες που έχουν όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ίσα μεταξύ τους,

$$\{M \in M_3(K) : MA = AM, \forall A \in M_3(K)\} = \left\{ \begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} = dI_3 : d \in K \right\}.$$

Λύση. Θα δείξουμε ότι τα σύνολα $Z = \{M \in M_3(K) : MA = AM, \forall A \in M_3(K)\}$ και $C = \{dI_3 : d \in K\}$ είναι ίσα, αποδεικνύοντας ότι $C \subseteq Z$ και $Z \subseteq C$.

ο Αν $dI_3 \in C$, τότε $\forall A \in M_n(K)$ έχουμε $(dI_3)A = d(I_3A) = dA = d(AI_3) = A(dI_3)$ (βλ. Πρόταση 4.2.3.2.iv). Έτσι $dI_3 \in Z$, επομένως $C \subseteq Z$.

ο Έστω $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \in Z$. Θα δείξουμε ότι $M = a_1 I_3 \in C$. Τότε θα ισχύει $Z \subseteq C$, γεγονός που θα ολοκληρώσει την απόδειξη.

Αφού ο M αντιμετατίθεται με κάθε πίνακα του $M_3(K)$, θα αντιμετατίθεται και με τους 3×3 -πίνακες μονάδα $E_{11}, E_{22}, E_{12}, E_{13}$. Έτσι,

$$\bullet ME_{11} = E_{11}M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a_2 = a_3 = b_1 = c_1 = 0,$$

$$\text{άρα } M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
& \bullet ME_{22} = E_{22}M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b_3 = c_2 = 0, \text{ \u0391\u03c1\u0391 } M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}. \\
& \bullet ME_{12} = E_{12}M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b_2 = a_1, \text{ \u0391\u03c1\u0391 } M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}. \\
& \bullet ME_{12} = E_{12}M \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow c_3 = a_1, \text{ \u0391\u03c1\u0391 } M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} = a_1 I_3 \in C. \quad \square
\end{aligned}$$

Το \u03c3\u03bd\u03c9\u03bb\u03bf των \u03c0\u03bd\u03b1\u03ba\u03c9\u03bd \u039c\u208a(K) \u03c0\u03c5 \u03b1\u03bd\u03c4\u03b9\u03bc\u03b5\u03c4\u03b1\u03b8\u03b5\u03bd\u03b5\u03b9 \u03bc\u03b5 \u03ba\u03b1\u03b8\u03b5 \u03c0\u03bd\u03b1\u03ba\u03b1 \u03c4\u03bf\u03c5 \u039c\u208a(K), \u03c9\u03c3 \u03c0\u03c1\u03bf\u03c2 \u03c4\u03bf\u03bd \u03c0\u03c9\u03bb\u03b1\u03c0\u03bb\u03b1\u03c3\u03b9\u03b1\u03c3\u03bc\u03cc \u03c0\u03bd\u03b1\u03ba\u03c9\u03bd, \u03bb\u03b5\u03b3\u03b5\u03c4\u03b1\u03b9 \u03ba\u03b5\u03bd\u03c4\u03c1\u03bf \u03c4\u03bf\u03c5 \u039c\u208a(K) \u03ba\u03b9 \u03c3\u03b9\u03bc\u03b2\u03bf\u03bb\u03b9\u03b6\u03b5\u03c4\u03b1\u03b9 \u03bc\u03b5 $Z(M_n(K))$ \u03b7 $C(M_n(K))$. \u038c\u03c4\u03c9\u03b9\u03b1 \u03bc\u03b5 \u03c4\u03b7 \u039b\u03c5\u03bc\u03b5\u03bd\u03b7 \u0386\u03c3\u03ba\u03b7\u03c3\u03b7 4.5.11 \u03b1\u03c0\u03c9\u03b4\u03b5\u03b9\u03ba\u03bd\u03b5\u03b9\u03c4\u03b1\u03b9 \u03cc\u03c4\u03b9

$$Z(M_n(K)) = \{M \in M_n(K) : MA = AM, \forall A \in M_n(K)\} = \{dI_n : d \in K\}.$$

4.5.12 \u0386\u03c3\u03c4\u03c9 \u03c5 \u03c0\u03bd\u03b1\u03ba\u03b1\u03c3 \u0391 = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. \u0386\u03c6\u03c5 \u03b1\u03c0\u03c9\u03b4\u03b5\u03b9\u03be\u03c4\u03b5 \u03cc\u03c4\u03b9 \u03c5 \u0391 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03b1\u03bd\u03c4\u03b9\u03c3\u03c4\u03c1\u03b5\u03c6\u03c3\u03b9\u03bc\u03cc\u03c3 \u03ba\u03b9 \u03c5\u03c0\u03bf\u03bb\u03bf\u03b3\u03b9\u03c3\u03b5\u03c4\u03b5 \u03c4\u03bf\u03bd A^{-1} , \u03bd\u03b1 \u03b2\u03c1\u03b5\u03b9\u03c4\u03b5 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03c0\u03bd\u03b1\u03ba\u03b5\u03c3 \u0391, \u0393, \u0394, \u0395, \u03b1\u03bd

$$\alpha) AX = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta) YA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma) AZA = 4I_2, \quad \delta) AW = A^2 + 3A.$$

\u0391\u03c5\u03c3\u03b7. \u0386\u03c4\u03b1 \u03b5\u03c0\u03cc\u03bc\u03b5\u03bd\u03b1 \u03ba\u03b5\u03c6\u03ac\u03bb\u03b1\u03b9\u03b1 \u03b8\u03b1 \u03bc\u03ac\u03b8\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03b4\u03b9\u03ac\u03c6\u03bf\u03c1\u03bf\u03c5 \u03c4\u03c1\u03cc\u03c0\u03bf\u03c5\u03c3 \u03c5\u03c0\u03bf\u03bb\u03bf\u03b3\u03b9\u03c3\u03bc\u03cc\u03c5 \u03c4\u03bf\u03c5 \u03b1\u03bd\u03c4\u03b9\u03c3\u03c4\u03c1\u03bf\u03c6\u03bf\u03c5 \u03b5\u03bd\u03cc\u03c3 \u03b1\u03bd\u03c4\u03b9\u03c3\u03c4\u03c1\u03b5\u03c6\u03c3\u03b9\u03bc\u03cc\u03c3 \u03c0\u03bd\u03b1\u03ba\u03b1. \u0386\u03b4\u03c9 \u03c7\u03c1\u03b7\u03c3\u03b9\u03bc\u03c9\u03c0\u03bf\u03b9\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03c4\u03bf\u03bd \u03cc\u03c1\u03b9\u03c3\u03bc\u03cc. \u03a8\u03ac\u03c7\u03bd\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 $A' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ \u03c4\u03b5\u03c4\u03bf\u03b9\u03bf\u03bd, \u03c9\u03c3\u03c4\u03b5 $AA' = I_2$ \u03ba\u03b9 $A'A = I_2$. \u0386\u03bd \u03c5\u03c0\u03ac\u03c1\u03c7\u03b5\u03b9 \u03c4\u03b5\u03c4\u03bf\u03b9\u03bf\u03c3 \u03c0\u03bd\u03b1\u03ba\u03b1\u03c3, \u03c4\u03cc\u03c4\u03b5 \u03c5 \u0391 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1\u03b9 \u03b1\u03bd\u03c4\u03b9\u03c3\u03c4\u03c1\u03b5\u03c6\u03c3\u03b9\u03bc\u03cc\u03c3 \u03bc\u03b5 $A^{-1} = A'$. \u0386\u03c7\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5

$$\begin{aligned}
AA' = I_2 & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} a+2c=1 & b+2d=0 \\ c=0 & d=1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} a=1 & b=-2 \\ c=0 & d=1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

\u03a0\u03b1\u03c1\u03b1\u03c4\u03b7\u03c1\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 \u03cc\u03c4\u03b9 $A'A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, \u03cc\u03c0\u03cc\u03c4\u03b5

$$A^{-1} = A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\alpha) AX = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (A^{-1}A)X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow I_2 X = X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\beta) YA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (YA)A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\gamma) AZA = 4I_2 &\Leftrightarrow A^{-1}(AZA)A^{-1} = A^{-1}(4I_2)A^{-1} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (A^{-1}A)Z(AA^{-1}) = 4(A^{-1}I_2)A^{-1} \Leftrightarrow I_2ZI_2 = 4A^{-1}A^{-1} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow Z = 4 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -16 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \\
\delta) AW = A^3 + 3A &\Leftrightarrow A^{-1}(AW) = A^{-1}A^2 + A^{-1}(3A) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (A^{-1}A)W = (A^{-1}A)A + 3(A^{-1}A) \Leftrightarrow I_2W = I_2A + 3I_2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow W = A + 3I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}. \quad \square
\end{aligned}$$

4.5.13 Θεωρούμε το σύνολο $C = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R})$ και το σώμα των μιγαδικών, $\mathbb{C} = \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f : \mathbb{C} \rightarrow C, \quad f(a + ib) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

είναι 1-1 και επί και «διατηρεί τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού», δηλαδή $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2), \quad f(z_1 z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2).$$

Λύση. Έστω $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$, όπου $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

- Αν $f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2 \Rightarrow z_1 = z_2$, επομένως η f είναι 1-1.
- Για κάθε $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in C, \exists z = a + ib \in \mathbb{C}$ με $f(z) = A$, έτσι η f είναι επί.
- $f(z_1 + z_2) = f((a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = f(a_1 + ib_1) + f(a_2 + ib_2) = f(z_1) + f(z_2)$.
- $f(z_1) \cdot f(z_2) = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{bmatrix} = f((a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)) = f((a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)) = f(z_1 z_2)$.

Στη γλώσσα των μαθηματικών η συνάρτηση f ονομάζεται *ισομορφισμός* και οι αλγεβρικές δομές \mathbb{C} και C ονομάζονται *ισόμορφες*. Μέσω του ισομορφισμού μπορούμε να ταυτίζουμε τους μιγαδικούς με τους πίνακες του C και αντίστροφα. Για παράδειγμα,

για τον $z = a + ib \neq 0$, με $f(z) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, έχουμε

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}, \quad \text{έτσι} \quad \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = f(z^{-1}) = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}. \quad \square$$

Ασκήσεις για Εξάσκηση

4.5.1 Να γίνουν οι πράξεις

$$\alpha) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \right], \quad \beta) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} [5 \ 2 \ 3 \ 7],$$

$$\delta) \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon) \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.5.2 Να βρείτε μη μηδενικούς πίνακες $A, B \in M_n(K)$ τέτοιους, ώστε $AB = \mathbf{0}$, για $n = 4, 5, \dots$

4.5.3 Να υπολογίσετε τα γινόμενα AB και BA στις παρακάτω περιπτώσεις

$$\text{i)} A = [3 \ 2 \ 1], B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ii)} A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\text{iii)} A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{iv)} A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.5.4 Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, να υπολογίσετε τους πίνακες

$$\text{i)} AB, \quad \text{ii)} AB - C, \quad \text{iii)} ABC.$$

4.5.5 Να βρείτε τους πίνακες $X = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, οι οποίοι είναι αντιστρέψιμοι και είναι ίσοι με τον αντίστροφό τους.

4.5.6 Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

i) Να δείξετε ότι $A^2 = B^2 = I_3$ και να βρείτε τους A^{-1}, B^{-1} .

ii) Να δείξετε ότι $(A - B)^2 = 0_3$ και ότι ο πίνακας $A - B$ δεν αντιστρέφεται.

iii) Να δείξετε ότι $(A + B)^2 = 4I_3$ και να βρείτε τον $(A + B)^{-1}$.

iv) Να δείξετε ότι $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.

4.5.7 Έστω A, B συμμετρικοί πίνακες του $M_n(K)$, $\kappa, \lambda \in K$, $m > 1$. Να αποδείξετε ότι οι πίνακες $A + B$, $A - B$, κA , $\kappa A + \lambda B$, ABA , A^m είναι επίσης συμμετρικοί.

4.5.8 Αν A, B είναι συμμετρικοί πίνακες του $M_n(K)$, να δείξετε ότι και ο πίνακας AB είναι συμμετρικός, αν και μόνο αν $AB = BA$.

4.5.9 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Τι παρατηρείτε για τους πίνακες A^m ,

$$m = 1, 2, 3, 4;$$

4.5.10 Έστω A αντισυμμετρικός πίνακας του $M_n(K)$. Να δείξετε ότι ο $A^{2\kappa}$ είναι συμμετρικός, ενώ ο $A^{2\kappa+1}$ είναι αντισυμμετρικός πίνακας, $\kappa \in \mathbb{N}$.

4.5.11 i) Έστω $A \in M_n(K)$ αντιστρέψιμος συμμετρικός πίνακας. Να δείξετε ότι ο πίνακας A^{-1} είναι επίσης συμμετρικός.

ii) Έστω $A \in M_n(K)$ αντιστρέψιμος αντισυμμετρικός πίνακας, όπου $n = 2\kappa$ άρτιος. Να δείξετε ότι ο πίνακας A^{-1} είναι επίσης αντισυμμετρικός. (Οι αντισυμμετρικοί $n \times n$ -πίνακες, όπου $n = 2\kappa + 1$ περιττός, είναι μη αντιστρέψιμοι).

4.5.12 Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. Να δείξετε ότι $A^m = 0_3$, για κάθε $m \geq 3$.

4.5.13 Έστω $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Να δείξετε ότι $B^{-1} = B$ και να υπολογίσετε τους πίνακες B^{1000} και B^{1111} .

4.5.14 Έστω $A = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ 1-a & -a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $A^m = \begin{cases} I_2, & m \text{ άρτιος} \\ A, & m \text{ περιττός.} \end{cases}$

ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα $I_2 + A + A^2 + \dots + A^{10}$.

iii) Δίνεται ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τους πίνακες X, Y , αν

$$A^{23}X = B, \quad YA^{23} = B.$$

4.5.15 Να δείξετε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος και να βρείτε τους πίνακες X, Y, Z , αν

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad AYA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AZ = A^2 + 2A.$$

4.5.16 Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

i) Να δείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = A^3$.

ii) Να υπολογίσετε τον πίνακα A^m για τις διάφορες τιμές του $m \in \mathbb{Z}$.

iii) Να βρείτε τους πίνακες A^{2023} και A^{-2023} .

4.5.17 Αν $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, να δείξετε ότι $A^3 = -I_2$ και να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$, ώστε

$$x^2 A^{2022} + (x+2)A^{2019} = 0_2. \quad (4.5.4)$$

4.5.18 Να υπολογίσετε τους πίνακες A^m και B^m για τις διάφορες τιμές του $m \in \mathbb{N}$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.5.19 Αν $A, B \in M_n(K)$ είναι άνω τριγωνικοί πίνακες, να δείξετε ότι και οι πίνακες AB, A^m είναι άνω τριγωνικοί, $m \in \mathbb{N}$.

4.5.20 Αν για τους πίνακες $A, B \in M_n(K)$ ισχύει

$$A^2 + 2A - I_n = 0_n, \quad 2B^3 + 4B^2 - 2B + 3I_n = 0_n,$$

να αποδείξετε ότι οι A, B είναι αντιστρέψιμοι.

4.5.21 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει μη μηδενικός πίνακας $A \in M_n(K)$ για τον οποίο να ισχύει $A^T = 2A$. Γενικότερα, να αποδείξετε ότι αν για τον μη μηδενικό πίνακα $A \in M_n(K)$ ισχύει $A^T = xA$, $x \in K$, τότε $x = \pm 1$.

4.5.22 Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Να δείξετε ότι $\overline{(A \cdot B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ και αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο \overline{A} είναι αντιστρέψιμος, με $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$.

4.5.23 Έστω ο αντιστρέψιμος πίνακας $A \in M_n(K)$. Αν για τον πίνακα $X \in M_n(K)$ ισχύει

$$A^T X A = A + A^T + 3I_n,$$

να αποδείξετε ότι ο πίνακας X είναι συμμετρικός.

Βιβλιογραφία

- [1] Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Βαβατσούλας και Χ. Χαραλάμπους. *Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2017. ISBN: 978-960-418-727-0.
- [2] Mary Flagg. *Solving a System of Linear Equations Using Ancient Chinese Method*. Pennsylvania: Digital Commons @ Ursinus College, 2018.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΠΑΛΟΙΦΗΣ ΤΟΥ GAUSS

Σύνοψη

Στην αρχή του κεφαλαίου εξετάζονται οι στοιχειώδεις πράξεις και οι αντίστοιχοι στοιχειώδεις πίνακες που οδηγούν στη μέθοδο απαλοιφής του Gauss για την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών των πινάκων. Εισάγονται οι έννοιες της βαθμίδας πίνακα, της γραμμικής εξάρτησης-ανεξαρτησίας γραμμών, στηλών πίνακα και μελετάται η σύνδεση των εννοιών αυτών με την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του πίνακα. Επίσης, αναπτύσσεται η μέθοδος του Gauss για την εύρεση αντιστρόφου. Η ενότητα «Εργαστήριο με Mathematica» που ακολουθεί προσφέρει μία σειρά παραδειγμάτων που βοηθούν στην καλύτερη εμπέδωση των εννοιών αυτών. Το κεφάλαιο κλείνει με μια ενότητα ασκήσεων πάνω στη θεωρία που αναπτύχθηκε. Για βιβλιογραφία στα θέματα αυτά παραπέμπουμε στα βιβλία [1], [2], [3], [4]

Προαπαιτούμενη γνώση: Κεφάλαιο 4.

Εισαγωγή

Η μέθοδος που θα παρουσιάσουμε ονομάζεται **αλγόριθμος του Gauss**, καθώς πήρε το όνομά της από τον μεγάλο Γερμανό μαθηματικό Carl Friedrich Gauss (1777-1855) που έδειξε τη χρησιμότητά της και τη βελτίωσε σημαντικά, παρόλο που δεν ανακαλύφθηκε από αυτόν. Η μέθοδος εφαρμόζοταν ήδη στην Κίνα για την επίλυση γραμμικών συστημάτων σχεδόν δύο χιλιετίες πριν τη γέννησή του Gauss ενώ, όπως φαίνεται, ο Isaac Newton (1642-1726) είχε χρησιμοποιήσει μία ανάλογη μέθοδο στις σημειώσεις του. Η μέθοδος έγινε ακόμα πιο δημοφιλής με το έργο του Wilhelm Jordan (1842-1899), ο οποίος πρόσθεσε τα βήματα για τον υπολογισμό αντιστρόφου πίνακα. Ο σκοπός της μεθόδου είναι από έναν δοθέντα πίνακα $A \in M_{n \times m}(K)$

να μεταβούμε σε έναν «απλούστερο» πίνακα $R \in M_{n \times m}(K)$ με όσο το δυνατόν περισσότερα μηδενικά στοιχεία, μετά από μία σειρά πράξεων στις γραμμές του A και με τέτοιον τρόπο που ο πίνακας R να διατηρεί τις πληροφορίες του A . Για να φτάσουμε στον πίνακα R θα περάσουμε πρώτα σε άλλους πίνακες, κάθε τέτοια μετάβαση θα δηλώνεται με ένα βέλος. Έτσι, αναπαριστούμε τη συνολική μετάβαση από τον A στον R ως εξής:

$$A \xrightarrow{\text{αλγόριθμος του Gauss}} \cdots \longrightarrow R.$$

5.1 Στοιχειώδεις Πράξεις Γραμμών - Στοιχειώδεις Πίνακες

Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$, $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ οι γραμμές του A , $\kappa, \lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$. Ονομάζουμε τις επόμενες διαδικασίες **στοιχειώδεις πράξεις** στις γραμμές του A ή απλά **γραμμοπράξεις**:

- **τύπου 1:** $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \kappa\Gamma_j$ Αντικατάσταση της i -γραμμής Γ_i με τη γραμμή $\Gamma_i + \kappa\Gamma_j$.
- **τύπου 2:** $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$ Αντιμετάθεση της i -γραμμής Γ_i με την j -γραμμή Γ_j .
- **τύπου 3:** $\Gamma_i \rightarrow \lambda\Gamma_i$ Πολλαπλασιασμός όλων των στοιχείων της i -γραμμής Γ_i με ένα μη μηδενικό στοιχείο λ του K .

Παραδείγματα 5.1.0.1

i. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Έχουμε ότι οι γραμμές του A είναι οι $\Gamma_1 = [1 \ 2]$, $\Gamma_2 = [4 \ 5]$ και άρα $\Gamma_2 + 3\Gamma_1 = [4 \ 5] + [3 \ 6] = [7 \ 11]$. Έτσι

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}, \\ & \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow 6\Gamma_1} \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ii. Εφαρμόζουμε τη γραμμοπράξη $\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \kappa \cdot \Gamma_1$ σε έναν τυχαίο 2×3 -πίνακα A :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \kappa \cdot \Gamma_1} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + \kappa a_1 & b_2 + \kappa a_2 & b_3 + \kappa a_3 \end{pmatrix} = A'.$$

iii. Εφαρμόζουμε τη γραμμοπράξη $\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \kappa \cdot \Gamma_1$ στον μοναδιαίο πίνακα I_2 και συμβολίζουμε με $E_{2+\kappa \cdot 1}$ τον πίνακα που προκύπτει:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \kappa \cdot \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa & 1 \end{pmatrix} = E_{2+\kappa \cdot 1}.$$

iv. Εφαρμόζουμε τη γραμμοπράξη $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$ σε έναν τυχαίο 2×3 -πίνακα A :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = A'.$$

v. Εφαρμόζουμε τη γραμμοπράξη $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$ στον μοναδιαίο πίνακα I_2 και συμβολίζουμε με $E_{1 \leftrightarrow 2}$ τον πίνακα που προκύπτει:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1 \leftrightarrow 2}.$$

vi. Εφαρμόζουμε τη γραμμοπράξη $\Gamma_1 \rightarrow \lambda \cdot \Gamma_1$ σε έναν τυχαίο 2×3 -πίνακα A :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \lambda \cdot \Gamma_1} \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = A'.$$

vii. Εφαρμόζουμε τη γραμμοπράξη $\Gamma_1 \rightarrow \lambda \cdot \Gamma_1$ στον μοναδιαίο πίνακα I_2 και συμβολίζουμε με $E_{\lambda \cdot 1}$ τον διαγώνιο πίνακα που προκύπτει:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \lambda \cdot \Gamma_1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{\lambda \cdot 1}.$$

Έστω $\kappa \in K$. Ο **στοιχειώδης** $n \times n$ -πίνακας **τύπου 1** είναι ο πίνακας του $M_n(K)$ που προκύπτει αν εφαρμόσουμε τη γραμμοπράξη $\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \kappa \cdot \Gamma_j$ στον μοναδιαίο πίνακα I_n . Ονομάζεται και συμβολίζεται με $E_{i+\kappa \cdot j}$, $\kappa \in K, i \neq j$. Αντίστοιχα, ο πίνακας του $M_n(K)$ που προκύπτει αν εφαρμόσουμε τη γραμμοπράξη $\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$ στον μοναδιαίο πίνακα I_n ονομάζεται **στοιχειώδης** $n \times n$ -πίνακας **τύπου 2** και συμβολίζεται με $E_{i \leftrightarrow j}$, $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$, ενώ αν $\kappa \neq 0$, τότε ο διαγώνιος πίνακας του $M_n(K)$ που προκύπτει αν εφαρμόσουμε τη γραμμοπράξη $\Gamma_i \rightarrow \kappa \cdot \Gamma_i$, στον μοναδιαίο πίνακα I_n ονομάζεται **στοιχειώδης** $n \times n$ -πίνακας **τύπου 3** και συμβολίζεται με $E_{\kappa \cdot i}$.

Με άλλα λόγια:

- $I_n \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \kappa \cdot \Gamma_j} E_{i+\kappa \cdot j}$ (στοιχειώδης πίνακας τύπου 1),
- $I_n \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} E_{i \leftrightarrow j}$ (στοιχειώδης πίνακας τύπου 2),
- $I_n \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \kappa \cdot \Gamma_i} E_{\kappa \cdot i}$ (στοιχειώδης πίνακας τύπου 3).

Παραδείγματα 5.1.0.2

i. Οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι στοιχειώδεις 2×2 και 3×3 -πίνακες τύπου 1 και συμβολίζονται με $E_{1+5 \cdot 2}$.

ii. Οι πίνακες $E_{1 \leftrightarrow 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $E_{2 \leftrightarrow 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ είναι στοιχειώδεις 3×3 -πίνακες τύπου 2.

iii. Οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι στοιχειώδεις 2×2 και 3×3 -πίνακες τύπου 3, αντίστοιχα και συμβολίζονται με $E_{5 \cdot 2}$.

iv. Έστω $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι

$$E_{2+\kappa \cdot 1} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + \kappa a_1 & b_2 + \kappa a_2 & b_3 + \kappa a_3 \end{pmatrix},$$

δηλαδή το γινόμενο του στοιχειώδους πίνακα $E_{2+\kappa \cdot 1}$ τύπου 1 με τον A είναι ακριβώς το αποτέλεσμα της γραμμοπράξης $\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \kappa \cdot \Gamma_1$ τύπου 1 στον A . Επιπλέον

$$E_{1 \leftrightarrow 2} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix},$$

και άρα το γινόμενο του στοιχειώδους πίνακα τύπου 2 με τον A είναι ίσο με το αποτέλεσμα της γραμμοπράξης $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$ τύπου 2 στον A ,

$$A \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} E_{1 \leftrightarrow 2} A.$$

Δείτε, επίσης, ότι το αποτέλεσμα της γραμμοπράξης $\Gamma_1 \rightarrow \lambda \cdot \Gamma_1$ τύπου 3 είναι ίσο με το γινόμενο του αντίστοιχου στοιχειώδους πίνακα τύπου 3 με τον A :

$$A \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \lambda \cdot \Gamma_1} A' = E_{\lambda \cdot 1} A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Όσα είδαμε στο τελευταίο παράδειγμα γενικεύονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.1.0.3 Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$. Οι στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον A παράγουν πίνακες που ισούνται με τα γινόμενα των αντίστοιχων $n \times n$ στοιχειωδών πινάκων επί A . Συγκεκριμένα, αν Γ_i, Γ_j είναι δύο διαφορετικές γραμμές του A , $\kappa, \lambda \in K$ με $\lambda \neq 0$, τότε

- $A \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \kappa \cdot \Gamma_j} E_{i + \kappa \cdot j} A,$
- $A \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} E_{i \leftrightarrow j} A,$
- $A \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \kappa \cdot \Gamma_i} E_{\lambda \cdot i} A.$

Απόδειξη. Η απόδειξη προκύπτει με εφαρμογή του ορισμού του πολλαπλασιασμού πινάκων. Ας δούμε αναλυτικά την απόδειξη για τη γραμμοπράξη τύπου 2. Έστω ότι A' είναι ο πίνακας που προκύπτει από την εφαρμογή της στον A , έστω δηλαδή ότι

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} A'$$

και έστω επίσης $\Gamma'_1, \dots, \Gamma'_n$ οι γραμμές του A' . Παρατηρούμε ότι αν $t \neq i, j$, τότε $\Gamma'_t = \Gamma_t$, ενώ $\Gamma'_i = \Gamma_j$ και $\Gamma'_j = \Gamma_i$. Ας εξετάσουμε τώρα το γινόμενο $E_{i \leftrightarrow j} A$. Η t -γραμμή του $E_{i \leftrightarrow j} A$ έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό στοιχείο, το 1 στη θέση (t, t) . Κατά συνέπεια, η t -γραμμή του $E_{i \leftrightarrow j} A$ που προκύπτει από το γινόμενο της t -γραμμής του $E_{i \leftrightarrow j}$ με τον A είναι ακριβώς ίση με τη Γ_t . Αντίστοιχα η i -γραμμή του $E_{i \leftrightarrow j}$ έχει ακριβώς ένα μη μηδενικό στοιχείο, το 1 στη θέση (j, j) . Κατά συνέπεια, η i -γραμμή του $E_{i \leftrightarrow j} A$ που προκύπτει από το γινόμενο της i -γραμμής του $E_{i \leftrightarrow j}$ με τον A είναι ακριβώς ίση με τη $\Gamma_j = \Gamma'_i$. Όμοια η j -γραμμή του $E_{i \leftrightarrow j} A$, είναι ίση με τη Γ'_j . Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι $A' = E_{i \leftrightarrow j} A$. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτουν και οι υπόλοιποι ισχυρισμοί της πρότασης. ■

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι όλοι οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι. Πρώτα, ας δούμε συγκεκριμένα παραδείγματα με 2×2 στοιχειώδεις πίνακες.

Παραδείγματα 5.1.0.4

- i. Ο πίνακας $E_{2+\kappa \cdot 1}$ προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα I_2 με τη γραμμοπράξη $\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \kappa \cdot \Gamma_1$. Παρατηρούμε ότι:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \kappa \cdot \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \kappa & 1 \end{pmatrix} = E_{2+\kappa \cdot 1} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \kappa \cdot \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{2-\kappa \cdot 1} E_{2+\kappa \cdot 1}.$$

Επαναλαμβάνουμε αλλάζοντας τη σειρά των γραμμοπράξεων:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \kappa \cdot \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa & 1 \end{pmatrix} = E_{2-\kappa \cdot 1} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \kappa \cdot \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{2+\kappa \cdot 1} E_{2-\kappa \cdot 1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $E_{2-\kappa \cdot 1} E_{2+\kappa \cdot 1} = I_2 = E_{2+\kappa \cdot 1} E_{2-\kappa \cdot 1}$, δηλαδή ο $E_{2+\kappa \cdot 1}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας, με $(E_{2+\kappa \cdot 1})^{-1} = E_{2-\kappa \cdot 1}$.

ii. Εφαρμόζοντας δύο φορές τη γραμμοπράξη $\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$ στον μοναδιαίο πίνακα I_2 επιστρέφουμε στον I_2 :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1 \leftrightarrow 2} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{1 \leftrightarrow 2} E_{1 \leftrightarrow 2}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $E_{1 \leftrightarrow 2} E_{1 \leftrightarrow 2} = I_2$, δηλαδή ο $E_{1 \leftrightarrow 2}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας και ισούται με τον αντίστροφό του, $(E_{1 \leftrightarrow 2})^{-1} = E_{1 \leftrightarrow 2}$.

iii. Αν $\lambda \neq 0$, τότε τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του διαγώνιου πίνακα $E_{\lambda \cdot 1}$ είναι μη μηδενικά, άρα (όπως έχουμε δει) ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος, με

$$(E_{\lambda \cdot 1})^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{\frac{1}{\lambda} \cdot 1}.$$

Η επόμενη πρόταση περιγράφει τους αντίστροφους των στοιχειωδών $n \times n$ πινάκων.

Πρόταση 5.1.0.5 Κάθε στοιχειώδης $n \times n$ -πίνακας τύπου είναι αντιστρέψιμος. Συγκεκριμένα, για $i \neq j$, $\kappa, \lambda \in K$, $\lambda \neq 0$:

- $(E_{i+\kappa \cdot j})^{-1} = E_{i-\kappa \cdot j}$
- $(E_{i \leftrightarrow j})^{-1} = E_{i \leftrightarrow j}$
- $(E_{\lambda \cdot i})^{-1} = E_{\frac{1}{\lambda} \cdot i}$

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με εφαρμογή της Πρότασης 5.1.0.3. Ενδεικτικά δείχνουμε για τον αντίστροφο του στοιχειώδους πίνακα τύπου 1.

$$I_n \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \kappa \cdot \Gamma_j} E_{i+\kappa \cdot j} \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i - \kappa \cdot \Gamma_j} I_n = E_{i-\kappa \cdot j} E_{i+\kappa \cdot j}$$

και ομοίως

$$I_n \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i - \kappa \cdot \Gamma_j} E_{i-\kappa \cdot j} \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \kappa \cdot \Gamma_j} I_n = E_{i+\kappa \cdot j} E_{i-\kappa \cdot j}.$$

Επομένως $E_{i-\kappa \cdot j} E_{i+\kappa \cdot j} = E_{i+\kappa \cdot j} E_{i-\kappa \cdot j} = I_n$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε. ■

Έστω, τώρα, ότι $A \in M_{n \times m}(K)$ και έστω ότι B είναι πίνακας στον οποίο μεταβαίνουμε εφαρμόζοντας γραμμοπράξεις στον πίνακα A . Για να επιστρέψουμε από τον B πίσω στον A αρκεί να εφαρμόσουμε (από το τέλος προς την αρχή) τις αντίστροφες γραμμοπράξεις στον B . Πράγματι, για κάθε γραμμοπράξη πολλαπλασιάζουμε από τα αριστερά (τον πίνακα που έχει ήδη προκύψει) με τον στοιχειώδη πίνακα που αντιστοιχεί στη γραμμοπράξη. Έτσι, αν ο B προκύπτει από την εφαρμογή s γραμμοπράξεων στον A , έχουμε ότι

$$B = E_s(\dots E_2((E_1 A))) = (E_s \dots E_1)A,$$

όπου E_1, \dots, E_s είναι οι αντίστοιχοι $n \times n$ στοιχειώδεις πίνακες. Έστω τώρα $E = E_s \dots E_1$. Αφού $E = EI_n$, μετά από διαδοχική εφαρμογή της Πρότασης 5.1.0.3, έχουμε ότι E είναι ο πίνακας που προκύπτει μετά από εφαρμογή αυτών των s γραμμοπράξεων στον I_n . Ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων, ο πίνακας E είναι αντιστρέψιμος και

$$E^{-1} = E_1^{-1} \dots E_s^{-1}.$$

Αφού $B = EA$, έχουμε ότι

$$E^{-1}B = E^{-1}(EA) = (E^{-1}E)A = I_n A = A.$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 5.1.0.6 Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$. Αν μετά από διαδοχική εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του A μεταβούμε στον πίνακα B , τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $E \in M_n(K)$, τέτοιος ώστε $B = EA$ και ισοδύναμα $A = E^{-1}B$. Συγκεκριμένα, ο πίνακας E είναι ο πίνακας στον οποίο μεταβαίνουμε από τον I_n , αν εφαρμόσουμε τις ίδιες ακριβώς (με την ίδια διαδοχή) γραμμοπράξεις και είναι ίσος με το γινόμενο των αντίστοιχων στοιχειωδών πινάκων.

Παράδειγμα 5.1.0.7

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 4\Gamma_1} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow 6\Gamma_3} B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι αν εφαρμόσουμε τις γραμμοπράξεις

$$\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{6}\Gamma_3, \quad \Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_1, \quad \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 4\Gamma_1$$

στον B , μεταβαίνουμε στον πίνακα A :

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{6}\Gamma_3} B_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_1} B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 4\Gamma_1} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Επομένως:

- $A_1 = E_{2+4 \cdot 1} A$,
- $A_2 = E_{1 \leftrightarrow 3} A_1$,
- $B = E_{6 \cdot 3} A_2$ και αντικαθιστώντας
- $B = E_{6 \cdot 3} E_{1 \leftrightarrow 3} A_1$,
- $B = E_{6 \cdot 3} E_{1 \leftrightarrow 3} E_{2+4 \cdot 1} A$.

Σημειώνουμε ότι και ο A μπορεί να γραφεί ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων επί τον B ,

$$A = (E_{6 \cdot 3} E_{1 \leftrightarrow 3} E_{2+4 \cdot 1})^{-1} B \Rightarrow A = (E_{2+4 \cdot 1})^{-1} (E_{1 \leftrightarrow 3})^{-1} (E_{6 \cdot 3})^{-1} B \Rightarrow \\ A = E_{2-4 \cdot 1} E_{3 \leftrightarrow 1} E_{\frac{1}{6} \cdot 3} B.$$

Το επόμενο πόρισμα είναι μία ειδική περίπτωση της Πρότασης 5.1.0.6.

Πόρισμα 5.1.0.8 Έστω $A \in M_n(K)$. Αν μετά από διαδοχική εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του A μεταβούμε στον μοναδιαίο πίνακα I_n , τότε ισχύουν τα εξής:

- ο A αναλύεται σε γινόμενο στοιχειωδών πινάκων,
- ο A είναι αντιστρέψιμος,
- ο A^{-1} είναι ο πίνακας στον οποίο μεταβαίνουμε αν εφαρμόσουμε διαδοχικά τις ίδιες γραμμοπράξεις στον I_n .

Απόδειξη. Έστω ότι μετά από s γραμμοπράξεις προκύπτει ο μοναδιαίος πίνακας. Από την Πρόταση 5.1.0.6 γνωρίζουμε ότι

$$I_n = (E_s \cdots E_1)A$$

όπου E_1, \dots, E_s είναι οι αντίστοιχοι στοιχειώδεις πίνακες και μάλιστα

$$A = (E_1^{-1} \cdots E_s^{-1})I_n = E_1^{-1} \cdots E_s^{-1}.$$

Αφού οι αντίστροφοι στοιχειωδών πινάκων είναι στοιχειώδεις πίνακες, βλέπουμε ότι ο A αναλύεται σε γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. Επιπλέον,

$$A^{-1} = (E_1^{-1} \cdots E_s^{-1})^{-1} = (E_s^{-1})^{-1} \cdots (E_1^{-1})^{-1} = E_s \cdots E_1.$$

Τελικά, αποδείξαμε ότι ο A^{-1} είναι ο πίνακας στον οποίο μεταβαίνουμε αν εφαρμόσουμε διαδοχικά τις ίδιες γραμμοπράξεις στον I_n . ■

Παράδειγμα 5.1.0.9

$$\begin{aligned}
 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{E_{1 \leftrightarrow 3} A} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{E_{2-3 \cdot 1}(E_{1 \leftrightarrow 3} A)} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{E_{1+3}(E_{2-3 \cdot 1} E_{1 \leftrightarrow 3} A)} \\
 &\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{\frac{1}{2} \cdot 3}(E_{1+3} E_{2-3 \cdot 1} E_{1 \leftrightarrow 3} A)} = I_3 \Rightarrow \underbrace{E_{\frac{1}{2} \cdot 3} E_{1+3} E_{2-3 \cdot 1} E_{1 \leftrightarrow 3}}_E A = I_3 \Rightarrow EA = I_3,
 \end{aligned}$$

όπου

$$E = E_{\frac{1}{2} \cdot 3} E_{1+3} E_{2-3 \cdot 1} E_{1 \leftrightarrow 3}.$$

Επομένως

$$A = E^{-1} = (E_{\frac{1}{2} \cdot 3} E_{1+3} E_{2-3 \cdot 1} E_{1 \leftrightarrow 3})^{-1} \Rightarrow A = (E_{1 \leftrightarrow 3})^{-1} (E_{2-3 \cdot 1})^{-1} (E_{1+3})^{-1} (E_{\frac{1}{2} \cdot 3})^{-1}.$$

και άρα

$$A = E_{1 \leftrightarrow 3} E_{2+3 \cdot 1} E_{1-3} E_{2 \cdot 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Γράψαμε, λοιπόν, τον A ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων. Για τον A^{-1} έχουμε:

$$A = E^{-1} \Rightarrow A^{-1} = (E^{-1})^{-1} \Rightarrow A^{-1} = E = E_{\frac{1}{2} \cdot 3} E_{1+3} E_{2-3 \cdot 1} E_{1 \leftrightarrow 3}.$$

Παρατηρούμε τέλος ότι, αν εφαρμόσουμε διαδοχικά στον I_3 τις ίδιες γραμμοπράξεις που πραγματοποιήσαμε στον A , μεταβαίνουμε στον πίνακα

$$E_{\frac{1}{2} \cdot 3} E_{1+3} E_{2-3 \cdot 1} E_{1 \leftrightarrow 3},$$

δηλαδή στον A^{-1} . Πώς, λοιπόν, μπορούμε να υπολογίσουμε τον A^{-1} , ξεκινώντας από τον I_3 ; Αρκεί να εφαρμόσουμε διαδοχικά, με την ίδια ακριβώς σειρά, τις γραμμοπράξεις που μας οδήγησαν από τον A στον I_3 :

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{1 \leftrightarrow 3}} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 3 \cdot \Gamma_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{2-3 \cdot 1} E_{1 \leftrightarrow 3}} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_3} \\
 &\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{1+3} (E_{2-3 \cdot 1} E_{1 \leftrightarrow 3})} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \Gamma_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{\frac{1}{2} \cdot 3} (E_{1+3} E_{2-3 \cdot 1} E_{1 \leftrightarrow 3})} = A^{-1}.
 \end{aligned}$$

Παρατήρηση 5.1.0.10 Αντίστοιχα με τις γραμμοπράξεις, ορίζονται οι **στοιχειώδεις πράξεις στις στήλες** ή στηλοπράξεις ενός πίνακα. Ο πίνακας A' στον οποίο μεταβαίνουμε αν εφαρμόσουμε μία στηλοπράξη στον πίνακα $A \in M_{n \times m}(K)$ ισούται με το γινόμενο του A επί τον στοιχειώδη πίνακα E που προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα I_m , αν εφαρμόσουμε την ίδια στηλοπράξη στον I_m , $A' = AE$. Παρατηρήστε ότι ο E είναι πράγματι στοιχειώδης πίνακας! Προσέξτε, επίσης, ότι στην περίπτωση γραμμοπράξης πολλαπλασιάζουμε με E από αριστερά, ενώ στην περίπτωση στηλοπράξης πολλαπλασιάζουμε με E από δεξιά.

Παράδειγμα 5.1.0.11

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 + 5 \cdot \Sigma_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 16 \\ 3 & 5 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.2 Ελαττωμένη Κλιμακωτή Μορφή Γραμμών (ε.κ.μ.γ.)

Χρησιμοποιούμε τις στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές ενός $n \times m$ -πίνακα για να μεταβούμε σε έναν νέο απλούστερο πίνακα που θα έχει κατά το δυνατόν περισσότερα μηδενικά στοιχεία. Χαρακτηριστικά, επιθυμούμε ο νέος πίνακας να είναι όσο το δυνατόν κοντύτερα σε έναν μοναδιαίο πίνακα. Λέμε ότι ένας $n \times m$ -πίνακας είναι σε **κλιμακωτή μορφή γραμμών**, αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- σε κάθε γραμμή το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο, ξεκινώντας από τα αριστερά, είναι ίσο με 1, και ονομάζεται **καθοδηγητική μονάδα**,
- κάθε καθοδηγητική μονάδα είναι δεξιότερα των καθοδηγητικών μονάδων των γραμμών που βρίσκονται πάνω από τη γραμμή στην οποία ανήκει, έτσι
- τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια στήλη με μία καθοδηγητική μονάδα και **κάτω** από αυτήν είναι ίσα με μηδέν,
- οι μηδενικές γραμμές, αν υπάρχουν, είναι οι τελευταίες γραμμές του πίνακα.

Αν επιπλέον ισχύει η ιδιότητα:

- τα στοιχεία που βρίσκονται στην ίδια στήλη και **πάνω** από κάθε καθοδηγητική μονάδα είναι και αυτά ίσα με μηδέν,

τότε λέμε ότι ο πίνακας είναι σε **ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών**. Σε ό,τι ακολουθεί, θα γράφουμε για συντομία **κ.μ.γ.** ή **ε.κ.μ.γ.** για την κλιμακωτή ή την ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών ενός πίνακα, αντίστοιχα. Επίσης, θα κυκλώνουμε για έμφαση τις καθοδηγητικές μονάδες ενός τέτοιου πίνακα. Τα επόμενα παραδείγματα αποσαφηνίζουν τις έννοιες αυτές.

Παραδείγματα 5.2.0.1

- i. Ο μηδενικός $n \times m$ -πίνακας $0_{n \times m}$ και ο μοναδιαίος $n \times n$ -πίνακας I_n είναι σε ε.κ.μ.γ.
 ii. Οι επόμενοι πίνακες είναι σε κ.μ.γ. Από τους τέσσερις πίνακες, οι R, Q είναι σε ε.κ.μ.γ. :

$$R' = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 5 & 3 & 4 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & -7 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix},$$

κ.μ.γ. **ε.κ.μ.γ.**

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

κ.μ.γ. **ε.κ.μ.γ.**

- iii. Οι πίνακες του $M_2(K)$ σε κ.μ.γ. είναι οι επόμενοι:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \textcircled{1} & * \\ 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix},$$

όπου στη θέση $*$ μπορεί να είναι οποιοδήποτε στοιχείο του K .

- iv. Οι πίνακες του $M_{2 \times 3}(K)$ σε ε.κ.μ.γ. είναι οι επόμενοι:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & * \\ 0 & \textcircled{1} & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \textcircled{1} & * & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}.$$

Είμαστε έτοιμοι να περιγράψουμε τον αλγόριθμο του Gauss για να φέρουμε έναν πίνακα $A \in M_{n \times m}(K)$ σε κ.μ.γ. με τη βοήθεια στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του A . Είναι απαραίτητο να είναι το σύνολο K ένα σώμα για να υπάρχουν οι αντίστροφοι των μη μηδενικών στοιχείων και να μπορέσουμε να πολλαπλασιάσουμε με αυτούς όταν το ζητήσει ο αλγόριθμος.

Αλγόριθμος του Gauss

Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$. Για να φέρουμε τον A σε κ.μ.γ. ακολουθούμε τα επόμενα βήματα:

Βήμα 1 Αν ο A είναι σε κ.μ.γ., τότε ο αλγόριθμος τερματίζει.

Βήμα 2 Βρίσκουμε την αριστερότερη μη μηδενική στήλη του A .

Βήμα 3 Αντιμεταθέτουμε την πρώτη γραμμή με άλλη γραμμή, αν χρειαστεί, έτσι ώστε στην πρώτη γραμμή της στήλης που εντοπίσαμε στο βήμα 2 να υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο $a \neq 0$.

Βήμα 4 Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή του πίνακα που προέκυψε από το βήμα 3 με $1/a$, έτσι κατασκευάζουμε την καθοδηγητική μονάδα της πρώτης γραμμής.

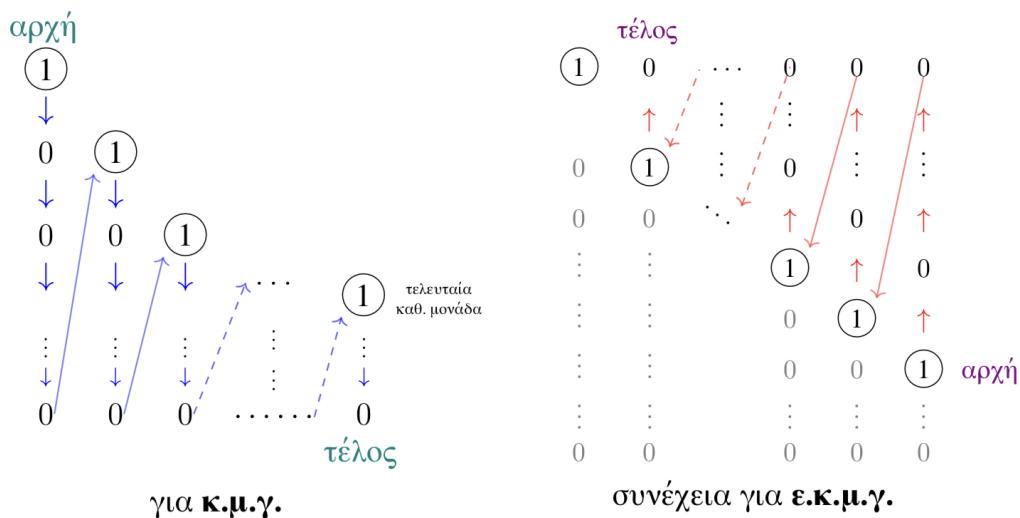
Βήμα 5 Αφαιρούμε κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής από τις επόμενες γραμμές ώστε να μηδενίσουμε τα στοιχεία της στήλης που βρίσκονται κάτω από την καθοδηγητική μονάδα της πρώτης γραμμής.

Βήμα 6 Επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα βήματα του αλγορίθμου, ξεκινώντας όμως από τη δεύτερη γραμμή του πίνακα που έχει προκύψει. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο, έως ότου καταλήξουμε σε πίνακα που είναι σε κ.μ.γ.

Για να φέρουμε τον A σε ε.κ.μ.γ. εφαρμόζουμε ένα επιπλέον βήμα:

Βήμα 7 Ξεκινώντας από την τελευταία μη μηδενική γραμμή του πίνακα του βήματος 6, όπου βρίσκεται η δεξιότερη καθοδηγητική μονάδα και δουλεύοντας προς τα επάνω, αφαιρούμε κατάλληλα πολλαπλάσια της γραμμής αυτής από τις προηγούμενες γραμμές, ώστε να μηδενίσουμε τα στοιχεία πάνω από την καθοδηγητική μονάδα. Συνεχίζουμε μέχρι να μηδενίσουμε τα στοιχεία πάνω από κάθε καθοδηγητική μονάδα κινούμενοι από δεξιά προς τα αριστερά, όπως οι καθοδηγητικές μονάδες διαδέχονται η μία την άλλη.

Στα γραφήματα που βλέπουμε στο Σχήμα 5.1 αποτυπώνεται η σειρά με την οποία δημιουργούμε τις καθοδηγητικές μονάδες και τα μηδενικά κάτω από αυτές, για να φέρουμε τον πίνακα σε κ.μ.γ. και η μετέπειτα πορεία με την οποία δημιουργούμε τα μηδενικά πάνω από τις καθοδηγητικές μονάδες, για να φέρουμε τον πίνακα σε ε.κ.μ.γ. Σημειώστε την αρχή και το τέλος για την κάθε διαδικασία.



Σχήμα 5.1: Αλγόριθμος του Gauss.

Παραδείγματα 5.2.0.2

- i. Εφαρμόζοντας τα βήματα του αλγόριθμου του Gauss θα φέρουμε, αρχικά σε κ.μ.γ. και έπειτα σε ε.κ.μ.γ. τον πίνακα M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Η πρώτη μη μηδενική στήλη του M είναι η Σ_2 . Έτσι δημιουργούμε καθοδηγητική μονάδα στην (1, 2)-θέση του πίνακα, ακολουθώντας τα βήματα 3 και 4 του αλγορίθμου:

$$M \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = M_1 \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = M_2.$$

Κατασκευάστηκε η καθοδηγητική μονάδα της πρώτης γραμμής. Ακολουθώντας το βήμα 5 του αλγορίθμου, μηδενίζουμε τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την καθοδηγητική μονάδα (το στοιχείο στην (3, 2)-θέση του πίνακα M_2):

$$M_2 \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 3\Gamma_1} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 & 7 & -\frac{21}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = M_3.$$

Μηδενίστηκαν τα στοιχεία κάτω από την καθοδηγητική μονάδα της πρώτης γραμμής. Συνεχίζουμε δημιουργώντας καθοδηγητική μονάδα στη δεύτερη γραμμή, στην (2, 3)-θέση του πίνακα M_3 . Έχει σχηματιστεί καθοδηγητική μονάδα από τις γραμμοπράξεις, έτσι μηδενίζουμε τα στοιχεία κάτω από αυτήν:

$$M_3 \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \frac{7}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = M_4.$$

Δημιουργούμε καθοδηγητική μονάδα στην τρίτη γραμμή του πίνακα. Αφού τα στοιχεία της τέταρτης και πέμπτης στήλης, που βρίσκονται κάτω από τη δεύτερη γραμμή, είναι μηδενικά, η καθοδηγητική μονάδα θα προέλθει από το μη μηδενικό στοιχείο της έκτης στήλης, που βρίσκεται κάτω από τη δεύτερη γραμμή (το στοιχείο της (4, 6)-θέσης του πίνακα M_4):

$$M_4 \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_5 \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{5}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & \frac{3}{2} & 0 & -2 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M'.$$

κ.μ.γ.

Ο πίνακας M' είναι σε κ.μ.γ. Ακολουθούμε το βήμα 7 του αλγορίθμου ώστε να καταλήξουμε σε πίνακα σε ε.κ.μ.γ. Μηδενίζουμε τα στοιχεία πάνω από την καθοδηγητική μονάδα της τρίτης γραμμής και έπειτα το στοιχείο πάνω από την καθοδηγητική μονάδα της δεύτερης γραμμής. Παρακάτω κάνουμε ταυτόχρονα δύο γραμμοπράξεις, αφού το αποτέλεσμα καθεμιάς από αυτές δεν επηρεάζει την άλλη:

$$M' \xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \frac{7}{2}\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 3\Gamma_3} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & \frac{3}{2} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \frac{3}{2}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

ε.κ.μ.γ.

Ο πίνακας M μπορεί να έρθει σε κ.μ.γ. και έπειτα σε ε.κ.μ.γ. με πολλούς ακόμα τρόπους, χωρίς απαραίτητα να ακολουθήσουμε τη σειρά των βημάτων του αλγορίθμου. Παρακάτω παρουσιάζουμε έναν εναλλακτικό τρόπο, με τον οποίο αποφεύγουμε την εμφάνιση κλασμάτων.

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -14 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -14 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 7\Gamma_2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \frac{1}{5}\Gamma_4} \dots \xrightarrow{\Gamma_4 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R',$$

κ.μ.γ.

$$R' \xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 7\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 3\Gamma_3} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

ε.κ.μ.γ.

Παρατηρήστε ότι οι κ.μ.γ. M' και R' στις οποίες καταλήξαμε εφαρμόζοντας τους δύο τρόπους είναι διαφορετικές μεταξύ τους, σε αντίθεση με την ε.κ.μ.γ. R που είναι μοναδική.

- ii. Θα δούμε δύο διαφορετικές κ.μ.γ. για τον πίνακα A . Ξεκινάμε, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Gauss (α' τρόπος). Μπορούμε, όμως, να κάνουμε μία παραλλαγή του αλγορίθμου (β' τρόπος) κρατώντας πάντα τη φιλοσοφία του.

$$\begin{aligned} \alpha' \text{ τρόπος: } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 14 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 7 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

κ.μ.γ. **ε.κ.μ.γ.**

$$\begin{aligned} \beta' \text{ τρόπος: } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 14 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 5 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

κ.μ.γ. **ε.κ.μ.γ.**

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, παρατηρούμε ότι μεταβήκαμε σε δύο διαφορετικές κ.μ.γ., αλλά στην ίδια ε.κ.μ.γ.

- iii. Ο πίνακας

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ήδη σε ε.κ.μ.γ. Ο αλγόριθμος του Gauss επιστρέφει στον A .

- iv. Θα φέρουμε σε ε.κ.μ.γ. τον παρακάτω πίνακα B :

$$\begin{aligned} B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 10 & 6 & 18 \end{bmatrix} &\xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 10\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 3 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -24 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow -\frac{1}{8}\Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 3 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & -24 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 3\Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 24\Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα φέρουμε σε ε.κ.μ.γ. πίνακα B^T :

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 3 & -2 & 6 \\ 3 & 2 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 10 \\ 0 & -8 & -24 \\ 0 & -4 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow -\frac{1}{8}\Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 10 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 \\ 0 & -4 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 4\Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 4 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q.$$

Οι πίνακες R, Q είναι σε ε.κ.μ.γ. Όπως είναι αναμενόμενο, έχουμε $R^T \neq Q$. Παρατηρούμε όμως ότι οι πίνακες R, Q έχουν το ίδιο πλήθος καθοδηγητικών μονάδων. Σημειώνουμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε ταυτόχρονα δύο ή περισσότερες γραμμοπράξεις όταν οι γραμμοπράξεις αφορούν γραμμές του πίνακα που δεν επηρεάζονται από τις πράξεις που εκτελούνται ταυτόχρονα.

v. Ας εξετάσουμε ένα ακόμη παράδειγμα με έναν 3×4 -πίνακα C .

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 3\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_3} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix} = S.$$

Θα φέρουμε, στη συνέχεια, τον C^T σε ε.κ.μ.γ.

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 3\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 2\Gamma_3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow \Gamma_4} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Παρατηρούμε, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, ότι οι ε.κ.μ.γ. πίνακες S και U έχουν το ίδιο πλήθος καθοδηγητικών μονάδων.

5.3 Βαθμίδα Πίνακα

Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$. Έχουμε δει ότι με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών μεταβαίνουμε από τον A σε πίνακες σε κ.μ.γ. και σε ε.κ.μ.γ. Ο αλγόριθμος του Gauss προτείνει συγκεκριμένο τρόπο που πάντα οδηγεί σε τέτοιους πίνακες. Ωστόσο, υπάρχουν και άλλες ακολουθίες στοιχειωδών γραμμοπράξεων που μπορούν να μας οδηγήσουν σε πίνακες σε κ.μ.γ. ή σε ε.κ.μ.γ. Επιπλέον, αφού από έναν πίνακα σε κ.μ.γ. μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών και άλλους πίνακες σε κ.μ.γ. είναι φανερό ότι ο πίνακας σε κ.μ.γ. δεν είναι μοναδικά καθορισμένος! Ωστόσο, χωρίς να δώσουμε εδώ απόδειξη, υπάρχει μία πολύ ισχυρή πρόταση που εγγυάται ότι όποιον δρόμο και αν ακολουθήσουμε, η κατάληξη (δηλαδή ο πίνακας σε ε.κ.μ.γ.) είναι πάντα η ίδια.

Πρόταση 5.3.0.1 Έστω ότι οι πίνακες $R, U \in M_{n \times m}(K)$ είναι σε ε.κ.μ.γ. και ότι οι R και U προέρχονται από τον πίνακα $A \in M_{n \times m}(K)$, μετά από εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του. Τότε $R = U$.

Για μία απόδειξη παραπέμπουμε στο [2, Πρόταση 1.2.6.]. Ο μοναδικός πίνακας σε ε.κ.μ.γ. που προκύπτει από τον $A \in M_{n \times m}(K)$ με εφαρμογή στοιχειωδών γραμμοπράξεων ονομάζεται **η** ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών του πίνακα A . Το πλήθος των καθοδηγητικών μονάδων της ελαττωμένης κλιμακωτής μορφής γραμμών του πίνακα $A \in M_{n \times m}(K)$ ονομάζεται **βαθμίδα** του A και συμβολίζεται με $\text{rank}(A)$.

Παραδείγματα 5.3.0.2

- i. $\text{rank}(0_{n \times m}) = 0$, $\text{rank}(I_n) = n$.
- ii. Για τους πίνακες των Παραδειγμάτων 5.2.0.2 ισχύει

$$\begin{aligned} \text{rank}(M) = 3, \quad \text{rank}(A) = 2, \quad \text{rank}(N) = 2, \\ \text{rank}(B) = \text{rank}(B^T) = 2, \quad \text{rank}(C) = \text{rank}(C^T) = 3. \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις 5.3.0.3

- (α) Ο μηδενικός πίνακας $0_{n \times m}$ είναι ο μόνος $n \times m$ -πίνακας με βαθμίδα ίση με το 0. Έτσι $\forall A \in M_{n \times m}(K)$, με $A \neq 0_{n \times m}$, ισχύει $\text{rank}(A) \geq 1$.
- (β) Σε κάθε γραμμή ή στήλη της ε.κ.μ.γ. του πίνακα A δεν μπορεί να βρίσκονται περισσότερες από μία καθοδηγητικές μονάδες. Επομένως $\text{rank}(A) \leq \text{πλήθος γραμμών του } A$, $\text{rank}(A) \leq \text{πλήθος στηλών του } A$,

$$\forall A \in M_{n \times m}(K), \quad \text{rank}(A) \leq \min\{n, m\}.$$

Για παράδειγμα,

$$M \in M_{3 \times 5}(K) \Rightarrow \text{rank}(M) \leq 3,$$

για κάθε μη μηδενικό πίνακα γραμμή $\Gamma = [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m] \in M_{1 \times m}(K)$, ισχύει $\text{rank}(\Gamma) = 1$.

- (γ) Έστω $A \in M_n(K)$. Αν $\text{rank}(A) = n$, τότε σε κάθε γραμμή της ε.κ.μ.γ. του A υπάρχει καθοδηγητική μονάδα, έτσι η ε.κ.μ.γ. του A είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_n . Συμπεραίνουμε ότι για έναν τετραγωνικό πίνακα A θα ισχύει ένα από τα επόμενα:
- $\text{rank}(A) = n \Leftrightarrow$ η ε.κ.μ.γ. του $A \in M_n(K)$ είναι ο I_n ,
 - $\text{rank}(A) < n \Leftrightarrow$ η τελευταία γραμμή της ε.κ.μ.γ. του $A \in M_n(K)$ είναι μηδενική.
- (δ) Έστω ότι εφαρμόζοντας μία σειρά γραμμοπράξεων στον πίνακα $A \in M_{n \times m}(K)$ μεταβαίνουμε στον πίνακα $B \in M_{n \times m}(K)$. Γνωρίζουμε ότι αντιστρέφοντας τις γραμμοπράξεις μπορούμε να μεταβούμε στον A από τον B , πάλι με στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Εφαρμόζοντας στη συνέχεια τις γραμμοπράξεις που οδηγούν τον A στην ε.κ.μ.γ., έστω R , παρατηρούμε ότι τελικά ο A και ο B έχουν την ίδια ε.κ.μ.γ. Έτσι, αποδείξαμε ότι αν ο B προκύπτει από τον A μετά από στοιχειώδεις γραμμοπράξεις, τότε $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$.

Η τελευταία παρατήρηση μας επιτρέπει έναν γρηγορότερο τρόπο υπολογισμού της βαθμίδας $\text{rank}(A)$ ενός πίνακα $A \in M_{n \times m}(K)$. Έστω ότι εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Gauss στον A μεταβαίνουμε διαδοχικά στους πίνακες $A_1, A_2, \dots, A_s = R$, όπου R η ε.κ.μ.γ. του A ,

$$A \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow A_s = R \Rightarrow$$

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A_1) = \text{rank}(A_2) = \dots = \text{rank}(A_s) = \text{rank}(R).$$

Επομένως, αν μπορέσουμε να αναγνωρίσουμε τη βαθμίδα κάποιου από τους ενδιάμεσους πίνακες A_1, A_2, \dots, A_{s-1} στους οποίους μεταβαίνουμε κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου, όπως για παράδειγμα πίνακα που είναι σε κ.μ.γ., έχουμε βρει και τη βαθμίδα του A , βλ. επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.3.0.4 Αν θέλουμε να βρούμε τη βαθμίδα $\text{rank}(A)$ ενός πίνακα $A \in M_{n \times m}(K)$, εφαρμόζουμε γραμμοπράξεις στον A μέχρι να δημιουργήσουμε «εν δυνάμει» καθοδηγητικές μονάδες, το πλήθος τους ισούται με $\text{rank}(A)$. Για παράδειγμα, βρίσκουμε τη βαθμίδα του παρακάτω πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 4 & 2 & 0 \\ 0 & \textcircled{-3} & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \\ \longrightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 4 & 2 & 0 \\ 0 & \textcircled{-3} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \frac{8}{3}\Gamma_3} \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 4 & 2 & 0 \\ 0 & \textcircled{-3} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R_1.$$

Στις θέσεις $(1, 1), (2, 2), (3, 4)$ του πίνακα R_1 δημιουργήθηκαν «εν δυνάμει» καθοδηγητικές μονάδες (τα στοιχεία που έχουμε κυκλώσει), έτσι $\text{rank}(A) = \text{rank}(R_1) = 3$.

Συνεχίζουμε τις γραμμοπράξεις εφόσον θέλουμε να βρούμε την ε.κ.μ.γ. R του A , για παράδειγμα όταν θέλουμε να βρούμε τις σχέσεις γραμμικής εξάρτησης των στηλών του A ή να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα $AX = B$, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Έχουμε

$$R_1 \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{6}\Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 5\Gamma_3} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{3}\Gamma_2} \\ \longrightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

Θα αναφέρουμε, μία σημαντική ακόμα πρόταση, που αφορά τη βαθμίδα πίνακα και αναστρόφου του. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο [1, Θεώρημα 4.2.1, Πρόρισμα 4.2.2]. Μπορούμε να τη χρησιμοποιούμε εφεξής κατά το δοκούν.

Θεώρημα 5.3.0.5 Έστω πίνακας $A \in M_{n \times m}(K)$. Τότε $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$.

Τέλος, αποδεικνύουμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα που αφορά τη βαθμίδα αντιστρέψιμων πινάκων.

Πρόταση 5.3.0.6 Έστω $A \in M_n(K)$. Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = n$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\text{rank}(A) = n$. Αυτό σημαίνει ότι η ε.κ.μ.γ. του A είναι ο I_n και από το Πρόρισμα 5.1.0.8 συμπεραίνουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. Για την αντίστροφη κατεύθυνση

της πρότασης, ας υποθέσουμε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος, ενώ $\text{rank}(A) < n$. Αυτό σημαίνει ότι αν R είναι η ε.κ.μ.γ. του A , τότε R έχει μία τουλάχιστον μηδενική γραμμή, την n -στή. Επομένως ο R δεν είναι αντιστρέψιμος πίνακας (αφού $\forall B \in M_n(K)$, το γινόμενο RB θα έχει πάντα τη n -στή γραμμή μηδενική). Ωστόσο, από την Πρόταση 5.1.0.6, γνωρίζουμε ότι $R = EA$, όπου E είναι αντιστρέψιμος πίνακας, με άλλα λόγια R πρέπει να είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο δύο αντιστρέψιμων πινάκων. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $\text{rank}(A) < n$. Κατά συνέπεια, αν A είναι αντιστρέψιμος, τότε $\text{rank}(A) = n$. ■

5.4 Μέθοδος Gauss για την εύρεση Αντιστρόφου

Από την Πρόταση 5.1.0.6, γνωρίζουμε ότι αν R είναι η ε.κ.μ.γ. του A , τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας E τέτοιος ώστε $R = EA$. Αφού ο E προκύπτει από τον μοναδιαίο πίνακα, εφαρμόζοντας τις ίδιες γραμμοπράξεις που φέρουν τον A σε ε.κ.μ.γ. R , οδηγούμαστε σε έναν εύκολο τρόπο υπολογισμού του πίνακα E με χρήση του αλγόριθμου του Gauss. Σχηματίζουμε τον επαυξημένο $n \times (m + n)$ -πίνακα $[A \mid I_n]$ και εφαρμόζουμε στις γραμμές του τις στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ώστε να φέρουμε τον A στην ε.κ.μ.γ. R . Τότε και οι γραμμές του I_n δέχονται ταυτόχρονα τις ίδιες γραμμοπράξεις, έτσι ο πίνακας στον οποίο μεταβαίνουμε στο τέλος θα είναι ο πίνακας $[R \mid E]$. Συνοπτικά περιγράφουμε τη διαδικασία ως εξής:

$$\boxed{ [A \mid I_n] \xrightarrow[\text{γραμμοπράξεις}]{\text{στοιχειώδεις}} \cdots \rightarrow [R \mid E], \quad EA = R. }$$

Παράδειγμα 5.4.0.1 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Θα βρούμε τη βαθμίδα του A , την ε.κ.μ.γ. R και έναν αντιστρέψιμο πίνακα E , με $EA = R$. Εφαρμόζουμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα $[A \mid I_3]$:

$$\begin{aligned} [A \mid I_3] &= \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccccc|ccc} \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 3\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccccc|ccc} \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{-6} & -8 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right] = R_1. \end{aligned}$$

Από τη μορφή του πίνακα R_1 συμπεραίνουμε ότι $\text{rank}(A) = 3$. Συνεχίζουμε τις γραμμοπράξεις για να φέρουμε τον A σε ε.κ.μ.γ.

$$\begin{aligned} R_1 &\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow -\frac{1}{6}\Gamma_3} \left[\begin{array}{ccccc|ccc} \textcircled{1} & 1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_3} \left[\begin{array}{ccccc|ccc} \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 3 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & \frac{4}{3} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{array} \right] = [R \mid E], \end{aligned}$$

με

$$EA = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = R.$$

Η διαδικασία αυτή για τους τετραγωνικούς πίνακες δίνει έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό του αντίστροφού τους, όταν είναι αντιστρέψιμοι.

Μέθοδος Gauss για την εύρεση αντίστροφου

Έστω $A \in M_n(K)$. Για να βρούμε τον αντίστροφο του A , αν υπάρχει, ακολουθούμε τα επόμενα βήματα:

- **Βήμα 1** Σχηματίζουμε τον επαυξημένο $n \times 2n$ -πίνακα $[A \mid I_n]$.
- **Βήμα 2** Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο του Gauss, φέρνουμε τον $[A \mid I_n]$ σε ε.κ.μ.γ. $[R \mid E]$
- **Βήμα 3** Αν $R = I_n$, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος, με $A^{-1} = E$. Αν $R \neq I_n$, τότε ο A είναι μη αντιστρέψιμος.

Σχηματικά, λοιπόν, όταν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, έχουμε το εξής:

$$\boxed{[A \mid I_n] \xrightarrow[\text{του Gauss}]{\text{αλγόριθμος}} \cdots \rightarrow [I_n \mid A^{-1}].}$$

Παράδειγμα 5.4.0.2 Έστω $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Θα βρούμε τον αντίστροφο του A με τη μέθοδο του Gauss.

$$\begin{aligned} [A \mid I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 4\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 4\Gamma_1} \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{3}\Gamma_3} \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array} \right] = [I_3 \mid A^{-1}]. \end{aligned}$$

Επομένως, $\text{rank}(A) = 3$ και

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

5.5 Γραμμική Εξάρτηση Στηλών

Έστω το σύμπαν που προσδιορίζεται από κάποιους (s στον αριθμό) $n \times 1$ -πίνακες στήλη $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s \in M_{n \times 1}(K)$, τα πολλαπλάσιά τους (δηλαδή τα γινόμενα αριθμού με τους Σ_i)

και τα αθροίσματα όλων των συνδυασμών. Ποια είναι τα *πραγματικά* δομικά στοιχεία αυτού του σύμπαντος; Είναι όλοι οι $n \times 1$ -πίνακες στήλη απαραίτητοι για να κατανοήσουμε το σύμπαν αυτό; Ας δώσουμε τους ορισμούς που θα χρειαστούμε.

- Ο πίνακας

$$\Sigma = \mu_1 \Sigma_1 + \mu_2 \Sigma_2 + \cdots + \mu_s \Sigma_s, \text{ για } \mu_1, \dots, \mu_s \in K$$

ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s$. Το στοιχείο μ_i ονομάζεται **συντελεστής** του Σ_i , για $i = 1, \dots, s$.

- Όταν ο συντελεστής όλων των στηλών είναι 0, ο γραμμικός συνδυασμός ονομάζεται **τετριμμένος**. Έτσι, $0 \cdot \Sigma_1 + 0 \cdot \Sigma_2 + \cdots + 0 \cdot \Sigma_s = \mathbf{0}$, είναι ο τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των πινάκων $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s$.
- Το σύνολο $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s\}$ ονομάζεται **γραμμικά εξαρτημένο** ή **ισοδύναμα** οι πίνακες $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s$ ονομάζονται **γραμμικά εξαρτημένοι**, αν υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in K$, με τουλάχιστον ένα $\lambda_i \neq 0$, τέτοια ώστε

$$\lambda_1 \Sigma_1 + \lambda_2 \Sigma_2 + \cdots + \lambda_s \Sigma_s = \mathbf{0}.$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται **σχέση γραμμικής εξάρτησης** των $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s$.

- Οι πίνακες $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s$ ονομάζονται **γραμμικά ανεξάρτητοι** αν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένοι.

Σημειώνουμε ότι οι στήλες $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αν και μόνο αν κάθε γραμμικός συνδυασμός των στηλών αυτών που δίνει τον μηδενικό πίνακα είναι αναγκαστικά ο τετριμμένος:

$$\kappa_1 \Sigma_1 + \kappa_2 \Sigma_2 + \cdots + \kappa_s \Sigma_s = \mathbf{0} \Rightarrow \kappa_1 = \kappa_2 = \cdots = \kappa_s = 0.$$

Σημειώνουμε ότι το κενό σύνολο είναι (αυτόματα) γραμμικά ανεξάρτητο.

Παραδείγματα 5.5.0.1 Τα παραδείγματα αφορούν τους 3×1 -πίνακες στήλη

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \Sigma_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}, \Sigma_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- i. Ο πίνακας στήλη Σ που προκύπτει από τις πράξεις $3 \cdot \Sigma_2 - 2 \cdot \Sigma_3 + \Sigma_5$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών $\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_5$. Συγκεκριμένα

$$\Sigma = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών $\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_5$. Παρατηρούμε ότι

$$\Sigma = 0 \cdot \Sigma_1 + 3 \cdot \Sigma_2 - 2 \cdot \Sigma_3 + 0 \cdot \Sigma_4 + \Sigma_5,$$

άρα Σ είναι γραμμικός συνδυασμός όλων των $\Sigma_1, \dots, \Sigma_5$.

- ii. Η μηδενική στήλη $\mathbf{0}$ γράφεται ως μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των στηλών $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_5$:

$$\Sigma_1 + 4 \cdot \Sigma_2 - \Sigma_3 - 5 \cdot \Sigma_5 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Έτσι η

$$\Sigma_1 + 4 \cdot \Sigma_2 - \Sigma_3 - 5 \cdot \Sigma_5 = \mathbf{0}$$

είναι μία σχέση γραμμικής εξάρτησης και το σύνολο $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_5\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Οποιοδήποτε μη μηδενικό πολλαπλάσιο της σχέσης αυτής είναι επίσης σχέση γραμμικής εξάρτησης για το σύνολο $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_5\}$. Έτσι, η

$$2\Sigma_1 + 8 \cdot \Sigma_2 - 2\Sigma_3 - 10 \cdot \Sigma_5 = \mathbf{0}$$

είναι σχέση γραμμικής εξάρτησης.

- iii. Εξετάζουμε αν οι στήλες $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έστω $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}$, με

$$\begin{aligned} \kappa_1 \Sigma_1 + \kappa_2 \Sigma_2 + \kappa_3 \Sigma_3 = \mathbf{0} &\Rightarrow \begin{bmatrix} -3\kappa_1 + 2\kappa_2 \\ \kappa_1 + \kappa_2 \\ 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + 5\kappa_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} -3\kappa_1 + 2\kappa_2 = 0 \\ \kappa_1 + \kappa_2 = 0 \\ 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + 5\kappa_3 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -5\kappa_1 = 0 \\ \kappa_1 + \kappa_2 = 0 \\ 5\kappa_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 0 \\ \kappa_2 = 0 \\ \kappa_3 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Επομένως οι $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

- iv. Είδαμε ότι σύνολο $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι, έστω $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, με $a_1 \Sigma_1 + a_2 \Sigma_2 = \mathbf{0}$. Τότε ισχύει ότι

$$a_1 \Sigma_1 + a_2 \Sigma_2 + 0 \cdot \Sigma_3 = \mathbf{0}.$$

Αν $a_1 \neq 0$ ή $a_2 \neq 0$, τότε η προηγούμενη σχέση θα ήταν μία σχέση γραμμικής εξάρτησης των $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, το οποίο είναι άτοπο, αφού το $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έτσι $a_1 = a_2 = 0$ και το σύνολο $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι οποιοδήποτε υποσύνολο του $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Γενικότερα, αν $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_s\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε οποιοδήποτε υποσύνολό του είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο.

- v. Παρατηρούμε ότι

$$2 \cdot \Sigma_1 + 3 \cdot \Sigma_2 = 2 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \Sigma_4 \Rightarrow 2 \cdot \Sigma_1 + 3 \cdot \Sigma_2 = \Sigma_4.$$

Αφού η στήλη Σ_4 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών Σ_1, Σ_2 , προκύπτει η σχέση

$$2 \cdot \Sigma_1 + 3 \cdot \Sigma_2 - \Sigma_4 = \mathbf{0}$$

η οποία είναι μία σχέση γραμμικής εξάρτησης και το σύνολο $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_4\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Γενικότερα, αν $\Sigma = \mu_1 \Sigma_1 + \dots + \mu_s \Sigma_s$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\Sigma_1, \dots, \Sigma_s \in M_{n \times 1}(K)$, $\mu_1, \dots, \mu_s \in K$, τότε το σύνολο $\{\Sigma, \Sigma_1, \dots, \Sigma_s\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

vi. Είδαμε ότι το σύνολο $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_4\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Τότε και οποιοδήποτε σύνολο στηλών του $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ περιέχει το $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_4\}$ είναι επίσης γραμμικά εξαρτημένο. Για παράδειγμα, το σύνολο $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο γιατί η

$$2 \cdot \Sigma_1 + 3 \cdot \Sigma_2 + 0 \cdot \Sigma_3 - \Sigma_4 + 0 \cdot \Sigma_5 = \mathbf{0} \quad (5.5.1)$$

είναι μία σχέση γραμμικής εξάρτησης των $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$.

vii. Αν σε μία σχέση γραμμικής εξάρτησης, ο συντελεστής ενός πίνακα στήλη είναι μη μηδενικός, τότε η στήλη γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων στηλών. Θεωρούμε για παράδειγμα τη σχέση (5.5.1), όπου οι συντελεστές των $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_4$ είναι μη μηδενικοί. Είδαμε ότι $\Sigma_4 = 2 \cdot \Sigma_1 + 3 \cdot \Sigma_2$, αλλά έχουμε επίσης

$$\Sigma_1 = -\frac{3}{2} \cdot \Sigma_2 + \frac{1}{2} \cdot \Sigma_4, \quad \Sigma_2 = -\frac{2}{3} \cdot \Sigma_1 + \frac{1}{3} \cdot \Sigma_4.$$

viii. Οι πίνακες μονάδα

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητοι. Πράγματι, αν θεωρήσουμε $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}$, με

$$\kappa_1 E_1 + \kappa_2 E_2 + \kappa_3 E_3 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \kappa_1 = 0 \\ \kappa_2 = 0 \\ \kappa_3 = 0. \end{cases}$$

Έχουμε δει ότι κάθε πίνακας στήλη $\Sigma = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των E_1, E_2, E_3 :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3.$$

Έτσι, το σύνολο $\{E_1, E_2, E_3, \Sigma\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

ix. Έστω Σ ένας πίνακας στήλη. Αν

$$\kappa \cdot \Sigma = \mathbf{0} \quad \text{τότε} \quad \kappa = 0 \quad \text{ή} \quad \Sigma = \mathbf{0}.$$

Αν λοιπόν $\Sigma \neq \mathbf{0}$, τότε $\kappa = 0$ και το μονοσύνολο $\{\Sigma\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Έτσι, ο μοναδικός πίνακας στήλη που είναι γραμμικά εξαρτημένος είναι ο μηδενικός $\mathbf{0}$. Για παράδειγμα μίας σχέσης γραμμικής εξάρτησης του $\mathbf{0}$, ας θεωρήσουμε τη σχέση

$$5 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Στην επόμενη πρόταση συγκεντρώνουμε τις ιδιότητες της γραμμικής εξάρτησης και ανεξαρτησίας πινάκων στήλη.

Πρόταση 5.5.0.2 Έστω οι $n \times 1$ -πίνακες στήλη $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s$.

- (i) Το σύνολο $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_s\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, αν και μόνο αν κάποια από τις στήλες $\Sigma_1, \dots, \Sigma_s$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων στηλών.
- (ii) Αν το σύνολο $S = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_s\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε οποιοδήποτε σύνολο στηλών του $M_{n \times 1}(K)$ που περιέχει το S είναι επίσης γραμμικά εξαρτημένο.
- (iii) Αν το σύνολο $S = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_s\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε και οποιοδήποτε υποσύνολό του είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο.
- (iv) Το σύνολο των $n \times 1$ -πινάκων μονάδα

$$\left\{ E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, E_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

- (v) Κάθε πίνακας στήλη Σ του $M_{n \times 1}(K)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $n \times 1$ -πινάκων μονάδα E_1, \dots, E_n . Ειδικότερα:

$$\text{Αν } \Sigma = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \text{ τότε } \Sigma = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + a_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ και άρα } \Sigma = a_1 E_1 + \dots + a_n E_n.$$

- (vi) Η μηδενική $n \times 1$ στήλη $\mathbf{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένη, έτσι και κάθε σύνολο στηλών του $M_{n \times 1}(K)$ που περιέχει τη στήλη $\mathbf{0}$ θα είναι επίσης γραμμικά εξαρτημένο. Για οποιονδήποτε άλλο πίνακα στήλη $\Sigma \in M_{n \times 1}(K)$ ισχύει

$$\Sigma \neq \mathbf{0} \Rightarrow \{\Sigma\} \text{ γραμμικά ανεξάρτητο.}$$

- (vii) Δύο μη μηδενικές στήλες Σ_1, Σ_2 του $M_{n \times 1}(K)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αν και μόνο αν δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο η μία της άλλης. Έτσι,

$$\{\Sigma_1, \Sigma_2\} \text{ γραμμικά ανεξάρτητο} \Leftrightarrow \Sigma_1, \Sigma_2 \neq \mathbf{0} \text{ και δεν υπάρχει } \lambda \in K \text{ τέτοιο ώστε } \Sigma_1 = \lambda \cdot \Sigma_2.$$

Καλείστε να αποδείξετε τις ιδιότητες (i) έως (vi) ακολουθώντας τους συλλογισμούς του προηγούμενου παραδείγματος. Εδώ, θα αποδείξουμε προσεκτικά την ιδιότητα (vii).

Απόδειξη Πρότασης 5.5.0.4. (vii).

Έστω ότι οι στήλες Σ_1, Σ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Τότε από την ιδιότητα (vi) ισχύει $\Sigma_1, \Sigma_2 \neq \mathbf{0}$. Αν υπάρχει $\lambda \in K$ με $\Sigma_1 = \lambda \cdot \Sigma_2$, τότε η

$$1 \cdot \Sigma_1 - \lambda \cdot \Sigma_2 = \mathbf{0}$$

είναι μία σχέση γραμμικής εξάρτησης των Σ_1, Σ_2 , αφού ο συντελεστής της Σ_1 είναι διάφορος του 0, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\Sigma_1 \neq \lambda \cdot \Sigma_2, \forall \lambda \in K$.

Αντίστροφα, έστω $\Sigma_1, \Sigma_2 \neq \mathbf{0}$ και $\Sigma_1 \neq \lambda \cdot \Sigma_2, \forall \lambda \in K$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θεωρούμε $\kappa_1, \kappa_2 \in K$, με

$$\kappa_1 \Sigma_1 + \kappa_2 \Sigma_2 = \mathbf{0}. \tag{5.5.2}$$

Αν $\kappa_1 \neq 0$, τότε η σχέση (5.5.2) $\Rightarrow \Sigma_1 = -\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \Sigma_2$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεσή μας. Έτσι $\kappa_1 = 0$ και η σχέση (5.5.2) γίνεται

$$\kappa_2 \Sigma_2 = \mathbf{0}_{n \times 1} \Rightarrow \kappa_2 = 0, \text{ αφού } \Sigma_2 \neq \mathbf{0}.$$

Επομένως, $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$ και οι Σ_1, Σ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. ■

Συγκεντρώνουμε τα συμπεράσματα των ιδιοτήτων (ii) και (iii).

$$S \subseteq C \subseteq M_{n \times 1}(K) \text{ και } S \text{ γραμμικά εξαρτημένο} \Rightarrow C \text{ γραμμικά εξαρτημένο}$$

και

$$S' \subseteq S \subseteq M_{n \times 1}(K) \text{ και } S \text{ γραμμικά ανεξάρτητο} \Rightarrow S' \text{ γραμμικά ανεξάρτητο.}$$

Για λόγους που θα εξηγήσουμε αργότερα, μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε πότε οι στήλες ενός $n \times m$ πίνακα A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Παρατηρούμε ότι αν ο A είναι σε ε.κ.μ.γ., τότε μπορούμε πολύ εύκολα να αναγνωρίσουμε τις σχέσεις γραμμικής εξάρτησης των στηλών του. Συγκεκριμένα, οι στήλες που έχουν τις καθοδηγητικές μονάδες αποτελούν ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, ενώ οι υπόλοιπες στήλες γράφονται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών με μικρότερο δείκτη.

Παράδειγμα 5.5.0.3 Έστω ο πίνακας

$$R = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [S_1 \mid S_2 \mid S_3 \mid S_4 \mid S_5 \mid S_6].$$

Ο πίνακας R είναι σε ε.κ.μ.γ. Παρατηρούμε ότι οι στήλες S_1, S_3, S_5 με τις καθοδηγητικές μονάδες είναι 4×1 -πίνακες μονάδα: $S_1 = E_1, S_3 = E_2, S_5 = E_3$. Επομένως, το σύνολο $\{S_1, S_3, S_5\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επιπλέον, όλες, οι υπόλοιπες στήλες γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί των S_1, S_3, S_5 . Συγκεκριμένα:

- $S_2 = \mathbf{0} = 0 \cdot S_1 + 0 \cdot S_3 + 0 \cdot S_5,$
- $S_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot S_1 + 3 \cdot S_3 + 0 \cdot S_5,$
- $S_6 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot S_1 + S_3 + 4 \cdot S_5.$

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι για να βρούμε τις σχέσεις γραμμικής εξάρτησης των στηλών ενός πίνακα αρκεί να τον φέρουμε σε ε.κ.μ.γ.

Πρόταση 5.5.0.4 Έστω $A = [\Sigma_1 \mid \cdots \mid \Sigma_m] \in M_{n \times m}(K)$ και $R = [S_1 \mid \cdots \mid S_m]$ η ε.κ.μ.γ. του A . Τότε

$$a_1 S_1 + \cdots + a_s S_m = \mathbf{0} \iff a_1 \Sigma_1 + \cdots + a_s \Sigma_m = \mathbf{0}.$$

Επομένως:

- Αν S_{i_1}, \dots, S_{i_s} ($s \leq m$) είναι οι στήλες του R με τις καθοδηγητικές μονάδες, τότε οι στήλες $\Sigma_{i_1}, \dots, \Sigma_{i_s}$ του A είναι γραμμικές ανεξάρτητες.
- Αν $\text{rank}(A) < m$, τότε οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες.

- $\text{rank}(A)$ ισούται με το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A .

Απόδειξη. Από την Πρόταση 5.1.0.6 γνωρίζουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $E \in M_n(K)$, τέτοιος ώστε $E \cdot A = R$. Έτσι:

$$E \cdot [\Sigma_1 \mid \cdots \mid \Sigma_m] = [S_1 \mid \cdots \mid S_m] \Leftrightarrow [E \cdot \Sigma_1 \mid \cdots \mid E \cdot \Sigma_m] = [S_1 \mid \cdots \mid S_m]$$

και άρα

$$E \cdot \Sigma_1 = S_1, \quad E \cdot \Sigma_2 = S_2, \quad \dots, \quad E \cdot \Sigma_m = S_m. \tag{5.5.3}$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις και το γεγονός ότι ο πίνακας E είναι αντιστρέψιμος, προκύπτουν οι επόμενες ισοδυναμίες:

$$\begin{aligned} a_1 S_1 + \cdots + a_m S_m = \mathbf{0} &\Leftrightarrow E \cdot (a_1 S_1 + \cdots + a_m S_m) = E \cdot \mathbf{0} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a_1 E \cdot S_1 + \cdots + a_m E \cdot S_m = \mathbf{0} \xLeftrightarrow{(5.5.3)} a_1 \Sigma_1 + \cdots + a_m \Sigma_m = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι ένα υποσύνολο στηλών του R είναι γραμμικά εξαρτημένο ή ανεξάρτητο, αν και μόνο αν το αντίστοιχο υποσύνολο στηλών του A είναι γραμμικά εξαρτημένο ή ανεξάρτητο. Οι στήλες S_{i_1}, \dots, S_{i_s} του R που έχουν τις καθοδηγητικές μονάδες, είναι πίνακες μονάδες. Επομένως, αποτελούν ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο. Έστω S_t μία στήλη του R χωρίς καθοδηγητική μονάδα. Τότε η S_t είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών S_{i_j} με δείκτη i_j μικρότερο ή ίσο του t (δείτε το!). Επομένως, αν ο αριθμός των στηλών του A είναι μεγαλύτερος της βαθμίδας, τότε υπάρχει τουλάχιστον μία στήλη του A που γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των προηγούμενων και οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Το τελευταίο συμπέρασμα είναι άμεσο αποτέλεσμα των παραπάνω. ■

Παράδειγμα 5.5.0.5 Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 & \Sigma_4 & \Sigma_5 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{του Gauss}]{\text{αλγόριθμος}} \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ \textcircled{1} & 0 & 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = R.$$

Παρατηρούμε ότι:

- οι καθοδηγητικές μονάδες βρίσκονται στις στήλες S_1, S_2, S_4 του R , επομένως οι στήλες $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_4$ του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

$$\bullet S_3 = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot S_1 - 2 \cdot S_2 \Rightarrow \Sigma_3 = 3 \cdot \Sigma_1 - 2 \cdot \Sigma_2.$$

$$\bullet S_5 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot S_1 + S_2 + \frac{4}{3} \cdot S_4 \Rightarrow \Sigma_5 = \frac{1}{3} \cdot \Sigma_1 + \Sigma_2 + \frac{4}{3} \cdot \Sigma_4.$$

Πόρισμα 5.5.0.6 Το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων του $M_{n \times 1}(K)$ είναι n .

Απόδειξη. Υπάρχει ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του $M_{n \times 1}(K)$ με n στοιχεία, το σύνολο των πινάκων μονάδα. Έστω τώρα $\{A_1, \dots, A_m\} \subset M_{n \times 1}(K)$, με $m > n$. Θεωρούμε τον $n \times m$ πίνακα

$$A = [A_1 \mid \cdots \mid A_m].$$

Αφού το πλήθος των καθοδηγητικών μονάδων του A είναι το πολύ ο αριθμός των γραμμών του A , δηλαδή n , συμπεραίνουμε ότι

$$\text{rank}(A) \leq n < m.$$

Επομένως, οι στήλες A_1, \dots, A_m του A είναι γραμμικά εξαρτημένες (Πρόταση 5.5.0.4). ■

Είναι εξαιρετικά σημαντικό να τονίσουμε εδώ ότι οι ορισμοί που δώσαμε και που αφορούν τη γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία στοιχείων του $M_{n \times 1}(K)$ γενικεύονται για στοιχεία του $M_{n \times m}(K)$. Συγκεκριμένα, λέμε ότι οι πίνακες A_1, \dots, A_s είναι **γραμμικά εξαρτημένοι**, αν υπάρχει κάποιος μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των πινάκων A_1, \dots, A_s ίσος με $\mathbf{0}$, αν δηλαδή

$$\lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_s A_s = \mathbf{0}, \text{ και } \lambda_i \neq 0, \text{ για κάποιο } i = 1, \dots, s.$$

Αντίστοιχα, οι πίνακες A_1, \dots, A_s είναι γραμμικά ανεξάρτητοι, αν κάθε φορά που

$$\kappa_1 A_1 + \kappa_2 A_2 + \dots + \kappa_s A_s = \mathbf{0}$$

τότε $\kappa_1 = 0, \dots, \kappa_s = 0$. Ας δούμε τι μπορούμε να πούμε για τις γραμμές ενός πίνακα $A \in M_{n \times m}(K)$. Αφού οι γραμμές του A είναι οι στήλες του $m \times n$ πίνακα A^T , μπορούμε εύκολα να μεταφράσουμε το πρόβλημα σε ερώτημα για τις στήλες του A^T και στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τις τεχνικές που ήδη έχουμε δει.

Παραδείγματα 5.5.0.7

i. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} \overset{\Sigma_1}{2} & \overset{\Sigma_2}{4} & \overset{\Sigma_3}{1} & \overset{\Sigma_4}{4} & \overset{\Sigma_5}{-1} \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & 10 & 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{matrix}$$

Θα εξετάσουμε τις σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών $\Sigma_1, \dots, \Sigma_5$ και των γραμμών $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ του A . Πρώτα, φέρνουμε τον A σε ε.κ.μ.γ. R :

$$A \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 & 4 & -1 \\ 5 & 10 & 4 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 5\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 4\Gamma_2}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \overset{S_1}{\textcircled{1}} & \overset{S_2}{2} & \overset{S_3}{0} & \overset{S_4}{3} & \overset{S_5}{-2} \\ \hline 0 & 0 & \textcircled{1} & -2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = R.$$

- Οι καθοδηγητικές μονάδες βρίσκονται στην 1η και 3η στήλη του R , επομένως οι Σ_1, Σ_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επιπλέον, αφού $\text{rank}(A) = 2$, το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A ισούται με 2. Ωστόσο, οι Σ_1, Σ_3 δεν είναι το μόνο ζεύγος γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του A , για παράδειγμα οι Σ_1, Σ_4 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Μπορείτε να δείτε το γιατί;
- $S_2 = 2 \cdot S_1 \Rightarrow \Sigma_2 = 2 \cdot \Sigma_1.$
- $S_4 = 3 \cdot S_1 - 2 \cdot S_3 \Rightarrow \Sigma_4 = 3 \cdot \Sigma_1 - 2 \cdot \Sigma_3 :$
- $S_5 = -2 \cdot S_1 + 3 \cdot S_3 \Rightarrow \Sigma_5 = -2 \cdot \Sigma_1 + 3 \cdot \Sigma_3 :$

Για να βρούμε, στη συνέχεια, τις σχέσεις εξάρτησης και ανεξαρτησίας των γραμμών του A , παίρνουμε τον A^T και τον φέρνουμε σε ε.κ.μ.γ.:

$$\begin{aligned}
 A^T &= \left[\begin{array}{c|c|c} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \\ \hline 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 10 \\ 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 7 \\ -1 & -2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 4\Gamma_2 \\ \Gamma_5 \rightarrow \Gamma_5 + \Gamma_3}]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc} \textcircled{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_1} \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc} \textcircled{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc} \textcircled{1} & 0 & 4 \\ 0 & \textcircled{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{\Gamma_5 \rightarrow \Gamma_5 + 2\Gamma_2 \\ \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 3\Gamma_2}]{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3} \left[\begin{array}{c|c|c} G_1 & G_2 & G_3 \\ \hline \textcircled{1} & 0 & 4 \\ 0 & \textcircled{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = Q.
 \end{aligned}$$

Ονομάζουμε G_1, G_2, G_3 τις στήλες της ε.κ.μ.γ. του Q . Οι καθοδηγητικές μονάδες βρίσκονται στις G_1, G_2 , έτσι οι δύο πρώτες στήλες του A^T (δηλαδή οι δύο πρώτες γραμμές Γ_1, Γ_2 του A) είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επίσης:

- $G_3 = 4 \cdot G_1 - 3 \cdot G_2 \Rightarrow \Gamma_3 = 4 \cdot \Gamma_1 - 3 \cdot \Gamma_2$,
- Οι γραμμές του A είναι γραμμικά εξαρτημένες και $\Gamma_1 - 3 \cdot \Gamma_2 - \Gamma_3 = \mathbf{0}$.

ii. Έστω B ο πίνακας του Παραδείγματος 5.2.0.2.iv. Η ε.κ.μ.γ. του B είναι ο πίνακας R και η ε.κ.μ.γ. του B^T είναι ο πίνακας Q .

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 10 & 6 & 18 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 4 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Έστω $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ και $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ οι γραμμές του B . Τότε

- Σ_1, Σ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες,
- $\Sigma_3 = \frac{3}{2} \cdot \Sigma_1 + \frac{1}{2} \cdot \Sigma_2$.
- Γ_1, Γ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες
- $\Gamma_3 = 4 \cdot \Gamma_1 + 3 \cdot \Gamma_2$.

iii. Έστω C ο πίνακας του Παραδείγματος 5.2.0.2.v. Είδαμε ότι:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{του Gauss} \\ \dots}]{\text{αλγόριθμος}} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}.$$

Συμπεραίνουμε ότι η βαθμίδα του C είναι 3, η 1η, 3η και 4η στήλη του C είναι γραμμικά ανεξάρτητες και $\Sigma_2 = 2 \cdot \Sigma_1$. Αφού $\text{rank}(C^T) = \text{rank}(C) = 3$, συμπεραίνουμε ότι οι τρεις γραμμές του C είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Για τους τετραγωνικούς πίνακες παρατηρούμε κάτι ιδιαίτερα χρήσιμο. Έστω $A \in M_n(K)$. Αν $\text{rank}(A) = n$, τότε από την Πρόταση 5.5.0.4 προκύπτει ότι οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες και αντιστρόφως, αν οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε $\text{rank}(A) = n$. Αφού $\text{rank}(A^T) = \text{rank}(A) = n$, συμπεραίνουμε ότι οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = n$. Έτσι, σε συνδυασμό με την Πρόταση 5.3.0.6 καταλήγουμε στα εξής:

Πρόταση 5.5.0.8 Έστω $A \in M_n(K)$. Οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες.

- Ο A είναι αντιστρέψιμος.
- Οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
- Οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

5.6 Εργαστήριο με Mathematica

Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -11 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4 \times 5}(\mathbb{R}).$$

Χρησιμοποιώντας κατάλληλες εντολές στο Mathematica, θα βρούμε τη βαθμίδα $\text{rank}(A)$ και την ε.κ.μ.γ. R του πίνακα A , την ε.κ.μ.γ. Q του ανάστροφου πίνακα A^T , σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών και των γραμμών του A , ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο αποτελούμενο από το μέγιστο δυνατό πλήθος στηλών του A και αντίστοιχα ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο γραμμών του A , καθώς και έναν αντιστρέψιμο πίνακα $E \in M_4(\mathbb{R})$ τέτοιο, ώστε $E \cdot A = R$.

Εισάγουμε στο σύστημα τον A και τον ανάστροφο A^T τον οποίο ονομάζουμε **At**:

$$A = \{\{2, 1, 1, 0, 0\}, \{1, 0, 2, 1, -4\}, \{0, -1, 3, 1, -5\}, \{-1, 3, -11, 2, 1\}\};$$

$$\mathbf{At} = \text{Transpose}[A]; \{\text{MatrixForm}[A], \text{MatrixForm}[\mathbf{At}]\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -11 & 2 & 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & 1 \end{array} \right) \right\}$$

Ορίζουμε τις γραμμές $G[\mathbf{i}] = A[[\mathbf{i}]]$, $i = 1, 2, 3, 4$, και τις στήλες $S[\mathbf{j}] = A[[\mathbf{All}, \mathbf{j}]]$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$, του A , όπως είδαμε στην ενότητα 4.4. Για συντομία κάνουμε χρήση μεταβλητής $\mathbf{x}_$ (βλ. ενότητα 1.1).

$$G[\mathbf{x}_] := A[[\mathbf{x}]]; G[3]$$

$$\{0, -1, 3, 1, -5\}$$

$$S[\mathbf{x}_] := A[[\mathbf{All}, \mathbf{x}]]; S[1]$$

$$\{2, 1, 0, -1\}$$

Με την εντολή **MatrixRank[A]** βρίσκουμε τη βαθμίδα $\text{rank}(A)$ ενός πίνακα A :

$$\{\text{MatrixRank}[A], \text{MatrixRank}[\mathbf{At}]\}$$

$$\{3, 3\}$$

Ο A και ο ανάστροφος πίνακας A^T έχουν την ίδια βαθμίδα, όπως γνωρίζουμε (Θεώρημα 5.3.0.5). Οι ε.κ.μ.γ. R και Q αναμένουμε να έχουν τρεις καθοδηγητικές μονάδες.

Με την εντολή **RowReduce[A]** βρίσκουμε την ε.κ.μ.γ. ενός πίνακα A :

$R = \text{RowReduce}[A]; \text{MatrixForm}[R]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι καθοδηγητικές μονάδες βρίσκονται στην 1η, 2η και 4η στήλη του R , επομένως οι στήλες $S[1]$, $S[2]$, $S[4]$ του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή αν για $k_1, k_2, k_4 \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$k_1 \cdot S[1] + k_2 \cdot S[2] + k_4 \cdot S[4] = 0_{4 \times 1} \Rightarrow k_1 = k_2 = k_4 = 0.$$

Πράγματι,

$\text{Solve}[k1 * S[1] + k2 * S[2] + k4 * S[4] == 0, \{k1, k2, k4\}]$

$\{\{k1 \rightarrow 0, k2 \rightarrow 0, k4 \rightarrow 0\}\}$

Η εντολή **Solve[expr, vars]**, που συναντήσαμε και στην ενότητα 2.3, επιχειρεί να λύσει ένα σύστημα **expr** εξισώσεων ως προς τις μεταβλητές **vars**. Δώστε έμφαση στο διπλό ίσον «**==**» που χρησιμοποιείται στη σύνταξη της εντολής.

Η τρίτη στήλη της ε.κ.μ.γ. R γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των δύο πρώτων στηλών του,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Αντίστοιχη σχέση ισχύει και για την τρίτη στήλη του A :

$$S[3] = 2 \cdot S[1] - 3 \cdot S[2]. \quad (5.6.1)$$

Επιβεβαιώνουμε την παραπάνω σχέση (5.6.1) με δύο τρόπους:

$\{S[3], 2S[1] - 3S[2]\}$

$\{\{1, 2, 3, -11\}, \{1, 2, 3, -11\}\}$

$S[3] == 2S[1] - 3S[2]$

True

Οι στήλες $S[1]$, $S[2]$, $S[3]$ του A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Χρησιμοποιούμε την εντολή **Solve** για να βρούμε μία σχέση γραμμικής εξάρτησής τους, δηλαδή να γράψουμε τη μηδενική στήλη ως γραμμικό συνδυασμό των $S[1]$, $S[2]$, $S[3]$,

$$m_1 \cdot S[1] + m_2 \cdot S[2] + m_3 \cdot S[3] = 0_{4 \times 1},$$

όπου τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{R}$ είναι διάφορος του 0:

$\text{Solve}[m1 * S[1] + m2 * S[2] + m3 * S[3] == 0, \{m1, m2, m3\}]$

Solve::svars: Equations may not give solutions for all "solve" variables »

$\left\{ \left\{ m2 \rightarrow -\frac{3m1}{2}, m3 \rightarrow -\frac{m1}{2} \right\} \right\}$

(Το Mathematica προειδοποιεί ότι απαιτείται και θεωρητικός έλεγχος). Οι σχέσεις γραμμικής εξάρτησης δίνονται ως προς $m1$ και είναι της μορφής

$$m_1 \cdot S[1] - \frac{3m_1}{2} \cdot S[2] - \frac{m_1}{2} \cdot S[3] = 0_{4 \times 1}, \quad \forall m_1 \in \mathbb{R}, \quad m_1 \neq 0.$$

Οι παραπάνω σχέσεις είναι ισοδύναμες με τη σχέση (5.6.1), αφού πολλαπλασιάζοντας με το $\frac{2}{m_1} \neq 0$, έπεται ότι

$$2 \cdot S[1] - 3 \cdot S[2] - S[3] = 0_{4 \times 1} \Leftrightarrow 2 \cdot S[1] - 3 \cdot S[2] = S[3].$$

Παρατηρούμε επίσης ότι η πέμπτη στήλη της ε.κ.μ.γ. R γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός της 1ης, 2ης και 4ης στήλης του R :

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Αντίστοιχη σχέση ισχύει και για την πέμπτη στήλη του A :

$$S[5] = -S[1] + 2 \cdot S[2] - 3 \cdot S[4].$$

Εξακριβώνουμε με το Mathematica την ορθότητα της παραπάνω σχέσης:

$$\{S[5], -S[1] + 2S[2] - 3S[4]\}$$

$$\{\{0, -4, -5, 1\}, \{0, -4, -5, 1\}\}$$

Φέρνουμε και τον πίνακα A^T σε ε.κ.μ.γ. Q :

$$Q = \text{RowReduce}[A^T]; \text{MatrixForm}[Q]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οι τρεις πρώτες στήλες του Q έχουν καθοδηγητική μονάδα και είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το ίδιο συμβαίνει για τις τρεις πρώτες στήλες του A^T , δηλαδή τις τρεις πρώτες γραμμές $G[1]$, $G[2]$, $G[3]$ του A , όπως επιβεβαιώνουμε παρακάτω:

$$\text{Solve}[\mathbf{k1} * G[1] + \mathbf{k2} * G[2] + \mathbf{k3} * G[3] == 0, \{\mathbf{k1}, \mathbf{k2}, \mathbf{k3}\}]$$

$$\{\{k_1 \rightarrow 0, k_2 \rightarrow 0, k_3 \rightarrow 0\}\}$$

Η τέταρτη στήλη του Q γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των τριών πρώτων στηλών του. Έτσι, και για την τέταρτη στήλη του A^T , δηλαδή την τέταρτη γραμμή του A έχουμε

$$G[4] = -6 \cdot G[1] + 11 \cdot G[2] - 9 \cdot G[3].$$

Επαληθεύουμε την παραπάνω σχέση:

$$\{G[4], -6G[1] + 11G[2] - 9G[3]\}$$

$$\{\{-1, 3, -11, 2, 1\}, \{-1, 3, -11, 2, 1\}\}$$

Για να βρούμε αντιστρέψιμο 4×4 -πίνακα E τέτοιον, ώστε $E \cdot A = R$, φέρνουμε τον επαυξημένο 9×4 -πίνακα $[A \mid I_4]$ σε ε.κ.μ.γ. $[R \mid E]$ και ο υποπίνακας E που σχηματίζεται έπειτα από την εφαρμογή του αλγόριθμου του Gauss είναι ο ζητούμενος πίνακας.

Με την εντολή **ArrayFlatten** δημιουργούμε πίνακες με στοιχεία πίνακες. Παρακάτω κατασκευάζουμε τον 1×2 -πίνακα γραμμή $[A \mid I_4]$ με στοιχεία τους πίνακες A και I_4 . Συμβολίζουμε με I_4 τον πίνακα I_4 και με A_I τον πίνακα $[A \mid I_4]$. Όπως για να εισάγουμε στο

πρόγραμμα τον πίνακα γραμμή $[\kappa \ \lambda]$ χρησιμοποιούμε διπλά άγκιστρα, $\{\{\kappa, \lambda\}\}$, έτσι κι εδώ εισάγουμε τον $[A \ ; \ I_4]$ με διπλά άγκιστρα, $\{\{A, I4\}\}$:

I4 = IdentityMatrix[4]; AI = ArrayFlatten[{{A, I4}}]; MatrixForm[AI]

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -11 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ονομάζουμε RE1 την ε.κ.μ.γ. $[R \ ; \ E]$ του $[A \ ; \ I_4]$. Οι πέντε πρώτες στήλες του 9×4 -πίνακα RE1 είναι η ε.κ.μ.γ. R του πίνακα A , ενώ οι τελευταίες τέσσερις στήλες είναι ο ζητούμενος 4×4 -πίνακας E . Επειδή, όπως είδαμε στην ενότητα 1.1, το σύμβολο E είναι κλειδωμένο από το Mathematica, θα συμβολίσουμε με E1 τον πίνακα αυτόν.

RE1 = RowReduce[AI]; MatrixForm[RE1]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{6} & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Ο υποπίνακας E1 αποτελείται από τα κοινά στοιχεία όλων των γραμμών και της 6ης, 7ης, 8ης και 9ης στήλης του RE1. Έτσι, όπως είδαμε στην ενότητα 4.4, παίρνουμε τον πίνακα E1 με την παρακάτω εντολή:

E1 = RE1[{{1, 2, 3, 4}, {6, 7, 8, 9}}]; MatrixForm[E1]

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{11}{6} & \frac{3}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Επιβεβαιώνουμε ότι ισχύει η σχέση $E \cdot A = R$:

{MatrixForm[E1.A], MatrixForm[R]}

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

MatrixRank[E1]

4

Ο πίνακας E είναι αντιστρέψιμος, αφού η βαθμίδα του ισούται με το πλήθος στηλών του, $\text{rank}(E) = 4$. Έτσι από τη σχέση $E \cdot A = R$ έπεται ότι $A = E^{-1} \cdot R$ και ο πίνακας A αναλύεται σε γινόμενο ενός αντιστρέψιμου πίνακα E^{-1} επί την ε.κ.μ.γ. του R :

{MatrixForm[A], MatrixForm[Inverse[E1].R]}

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -11 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -11 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για τον 4×4 -πίνακα $B = AA^T + I_4$. Αρχικά θα διαπιστώσουμε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος πίνακας, γιατί $\text{rank}(B) = 4$, επομένως η ε.κ.μ.γ. του είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_4 . Στην περίπτωση αυτή για τον πίνακα E ισχύει $E \cdot B = I_4 \Rightarrow E = B^{-1}$:

$$\left[B \ ; \ I_4 \right] \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{αλγόριθμος του Gauss}} \dots \longrightarrow \left[I_4 \ ; \ B^{-1} \right]$$

(αλγόριθμος του Gauss για την εύρεση αντίστροφου πίνακα). Παρακάτω ονομάζουμε BI τον επαυξημένο πίνακα $\left[B \ ; \ I_4 \right]$, IE2 την ε.κ.μ.γ. του BI, E2 τον υποπίνακα που αποτελείται από τις τελευταίες τέσσερις στήλες της ε.κ.μ.γ. IE2 και επαληθεύουμε ότι ο πίνακας E2 είναι ο αντίστροφος του B :

$B = A \cdot A^T + I_4$; MatrixForm[B]

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & -10 \\ 4 & 23 & 27 & -25 \\ 2 & 27 & 37 & -39 \\ -10 & -25 & -39 & 137 \end{pmatrix}$$

MatrixRank[B]

4

BI = ArrayFlatten[{{B, I4}}]; MatrixForm[BI]

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 23 & 27 & -25 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 27 & 37 & -39 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & -25 & -39 & 137 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

RE2 = RowReduce[BI]; MatrixForm[RE2]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{201}{749} & -\frac{179}{749} & \frac{144}{749} & \frac{23}{749} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{179}{749} & \frac{113}{619} & -\frac{749}{619} & -\frac{749}{29} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{144}{749} & -\frac{214}{619} & -\frac{1498}{155} & -\frac{749}{125} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{749}{23} & -\frac{1498}{29} & \frac{428}{125} & \frac{2996}{43} \end{pmatrix}$$

E2 = RE2[[All, {5, 6, 7, 8}]]; MatrixForm[E2]

$$\begin{pmatrix} \frac{201}{749} & -\frac{179}{749} & \frac{144}{749} & \frac{23}{749} \\ -\frac{179}{749} & \frac{113}{619} & -\frac{749}{619} & -\frac{749}{29} \\ \frac{144}{749} & -\frac{214}{619} & -\frac{1498}{155} & -\frac{749}{125} \\ \frac{749}{23} & -\frac{1498}{29} & \frac{428}{125} & \frac{2996}{43} \end{pmatrix}$$

E2 == Inverse[B]

True

Εξάσκηση με το Mathematica

1. Να βρείτε

α) την βαθμίδα και τις ε.κ.μ.γ. R και Q του A και του ανάστροφου πίνακα A^T ,

- β) σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών και των γραμμών του A ,
 γ) αντιστρέψιμους πίνακες E_1 και E_2 τέτοιους, ώστε $E_1 \cdot A = R$ και $E_2 \cdot A^T = Q$,

όταν

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & -14 & 20 & 9 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & -6 \\ -18 & -10 & 23 & -33 & -28 \\ -18 & -2 & 16 & -20 & -26 \end{pmatrix}.$$

2. Να βρείτε τη βαθμίδα των πινάκων A , A^2 , A^3 , \dots , όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Τι παρατηρείτε; Να κατασκευάσετε τετραγωνικούς πίνακες με περισσότερες γραμμές που η βαθμίδα των δυνάμεών τους να παρουσιάζει ανάλογες ιδιότητες.

3. Βαθμίδα γινομένου πινάκων

Με την εντολή $A = \text{Table}[\text{Random}[\text{Integer}, \{0, 9\}], \{4\}, \{5\}]$ κατασκευάστε έναν 4×5 -πίνακα A .

- α) Να βρείτε τη βαθμίδα των πινάκων A , A^T , AA^T , $A^T A$. Τι παρατηρείτε;

- β) Να κατασκευάσετε και τον 5×7 -πίνακα

$$B = \text{Table}[\text{Random}[\text{Integer}, \{0, 9\}], \{5\}, \{7\}]$$

και να συγκρίνετε τη βαθμίδα του γινομένου AB με τις βαθμίδες των πινάκων A και B . Τι παρατηρείτε;

- γ) Να επαναλάβετε το ίδιο για τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Θα διαπιστώσετε ότι για τη βαθμίδα του γινομένου πινάκων ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{rank}(AB) &\leq \text{rank}(A) \\ \text{rank}(AB) &\leq \text{rank}(B) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}.$$

4. Έστω δύο πίνακες $A \in M_{n \times m}(K)$, $B \in M_{m \times n}(K)$. Να εξετάσετε αν οι βαθμίδες των πινάκων AB και BA είναι ίσες, θέτωντας αρχικά όπου A και B τυχαίους πίνακες που θα κατασκευάσετε με την εντολή $\text{Table}[\text{Random}[\text{Integer}, \{0, 9\}], \dots]$ και έπειτα τους πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 2 \\ 6 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Με τις παρακάτω εντολές ορίζουμε τους στοιχειώδεις $n \times n$ -πίνακες $E_{i+k,j}$, $E_{i \leftrightarrow j}$ και $E_{m,i}$, τους οποίους ονομάζουμε αντίστοιχα E_{ikj} , E_{ij} και E_{mi} , όπου $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$:

- $\mathbf{In} = \text{IdentityMatrix}[n]$
- $\mathbf{Eikj} = \mathbf{In}$; $\mathbf{Eikj}[[i]] = \mathbf{In}[[i]] + k * \mathbf{In}[[j]]$; $\text{MatrixForm}[\mathbf{Eikj}2]$ (για τον $E_{i+k,j}$)
- $\mathbf{Eij} = \mathbf{In}$; $\mathbf{Eij}[[i]] = \mathbf{In}[[j]]$; $\mathbf{Eij}[[j]] = \mathbf{In}[[i]]$; $\text{MatrixForm}[\mathbf{Eij}]$ (για τον $E_{i \leftrightarrow j}$)
- $\mathbf{Emi} = \mathbf{In}$; $\mathbf{Emi}[[i]] = m * \mathbf{In}[[i]]$; $\text{MatrixForm}[\mathbf{Emi}]$ (για τον $E_{m \cdot i}$).

α) Ορίστε τους στοιχειώδεις 3×3 -πίνακες θέτωντας στις παραπάνω εντολές όπου n το 3 και $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$.

β) Επαληθεύστε την Πρόταση 5.1.0.5 υπολογίζοντας τους αντίστροφους πίνακες.

γ) Πολλαπλασιάστε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{pmatrix}$$

από αριστερά με τους στοιχειώδεις πίνακες που δημιουργήσατε για να επιβεβαιώσετε την ορθότητα της Πρότασης 5.1.0.3.

δ) Πολλαπλασιάστε τον πίνακα A από δεξιά με τους στοιχειώδεις πίνακες που δημιουργήσατε, ώστε να διατυπώσετε αντίστοιχες προτάσεις για το πώς συμπεριφέρονται οι στήλες του A σε ένα τέτοιο γινόμενο.

5.7 Ασκήσεις

Λυμένες Ασκήσεις

5.7.1 Δίνεται ο πίνακας

$$M = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 & \Sigma_4 & \Sigma_5 \\ 0 & -2 & -6 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_{3 \times 5}(\mathbb{R}).$$

α) Να βρεθεί η ε.κ.μ.γ. R του M , η βαθμίδα $\text{rank}(M)$, σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών $\Sigma_1, \dots, \Sigma_5$ του M και αντιστρέψιμος πίνακας $E \in M_3(\mathbb{R})$ τέτοιος, ώστε $E \cdot M = R$.

β) Να βρεθούν η ε.κ.μ.γ. Q του ανάστροφου πίνακα M^T και σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των γραμμών του M .

Λύση. α) Μπορούμε να απαντήσουμε σε όλα τα παραπάνω ερωτήματα αν φέρουμε τον επαυξημένο πίνακα $[M \mid I_3]$ σε ε.κ.μ.γ. :

$$\begin{aligned}
 [M \mid I_3] &= \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & -2 & -6 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_3} \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & -2 & -6 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \\
 &\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -6 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_2} \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 6 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3} \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & 0 & -5 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 6 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right] = [R \mid E]. \end{aligned}$$

Αν ονομάσουμε S_1, \dots, S_5 τις στήλες της ε.κ.μ.γ. R , συμπεραίνουμε ότι:

- $\text{rank}(M) = 3$,
- οι καθοδηγητικές μονάδες βρίσκονται στις στήλες S_1, S_2, S_4 του R , επομένως οι στήλες $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_4$ του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες,
- $S_3 = -2 \cdot S_1 + 3 \cdot S_2 \Rightarrow \Sigma_3 = -2 \cdot \Sigma_1 + 3 \cdot \Sigma_2$,
- $S_5 = S_1 - 5 \cdot S_2 + 6 \cdot S_4 \Rightarrow \Sigma_5 = \Sigma_1 - 5 \cdot \Sigma_2 + 6 \cdot \Sigma_4$,
- ο πίνακας $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ επαληθεύει τη σχέση $E \cdot M = R$.

β) Επειδή $\text{rank}(M^T) = \text{rank}(M) = 3$, η ε.κ.μ.γ. Q του $M^T \in M_{5 \times 3}(\mathbb{R})$ έχει τρεις καθοδηγητικές μονάδες. Όμως, υπάρχει μόνο ένας 5×3 -πίνακας σε ε.κ.μ.γ. με τρεις καθοδηγητικές μονάδες, ο

$$Q = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αφού σε κάθε στήλη του M^T αντιστοιχεί καθοδηγητική μονάδα, οι τρεις στήλες του M^T , δηλαδή οι τρεις γραμμές του M , είναι γραμμικά ανεξάρτητες. \square

Στην επόμενη άσκηση σχηματίζουμε τον πίνακα $A = [\Sigma_1 \mid \Sigma_2 \mid \Sigma_4]$ που αποτελείται από τις γραμμικά ανεξάρτητες στήλες $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_4$ του προηγούμενου πίνακα M . Όπως αναμένεται, θα διαπιστώσουμε ότι $\text{rank}(A) = 3$, οπότε ο A θα είναι αντιστρέψιμος, με $A^{-1} = E$.

5.7.2 α) Να αποδείξετε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και να βρείτε τον αντίστροφο του, A^{-1} .

β) Να βρείτε τον αντίστροφο του ανάστροφου πίνακα A^T .

γ) Να βρείτε τα $x, y, z \in \mathbb{R}$, αν

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

δ) Να αναλύσετε τον A σε γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Λύση. α) Φέρνουμε σε ε.κ.μ.γ. τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid I_3]$:

$$\begin{aligned} [A \mid I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\leftarrow 2\Gamma_3 \leftarrow \Gamma_3]{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right] \xrightarrow[\leftarrow \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3]{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\leftarrow \Gamma_2 + 2\Gamma_1 \leftarrow \Gamma_2]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\leftarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_2 \leftarrow \Gamma_3]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_2} \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 2 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow[\leftarrow \Gamma_2 + \Gamma_3 \leftarrow \Gamma_2]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 2 & -2 \end{array} \right] = [I_3 \mid A^{-1}]. \end{aligned}$$

Η ε.κ.μ.γ. του A είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_3 , $\text{rank}(A) = 3$ και ο A είναι αντιστρέψιμος, με

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

β) Από την Πρόταση 4.3.0.1.ν γνωρίζουμε ότι ο πίνακας A^T είναι αντιστρέψιμος, με

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

γ) Ο A είναι αντιστρέψιμος, επομένως ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1}A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow I_3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

δ) Αντιστρέφουμε τις γραμμοπράξεις που κάναμε για να φέρουμε τον A στην ε.κ.μ.γ. I_3 . Ξεκινώντας έτσι από τον πίνακα I_3 μεταβαίνουμε στον πίνακα A . Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.1.0.3, γράφουμε με αυτόν τον τρόπο τον A ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων:

$$\begin{aligned} I_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{2+1,3} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_2]{} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} = E_{3-2,2} E_{2+1,3} \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 2\Gamma_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} = E_{2+2,1} (E_{3-2,2} E_{2+1,3}) \rightarrow \\ &\xrightarrow[\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3]{} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{1 \leftrightarrow 3} (E_{2+2,1} E_{3-2,2} E_{2+1,3}) \rightarrow \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \leftrightarrow 2\Gamma_3} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{2,3}(E_{1 \leftrightarrow 3} E_{2+2,1} E_{3-2,2} E_{2+1,3}) = A \Rightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι η ζητούμενη ανάλυση του A σε γινόμενο στοιχειωδών πινάκων, □

5.7.3 Εφαρμόζοντας στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του παρακάτω πίνακα A , μεταβαίνουμε στον πίνακα B :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & a & 1 \\ 2 & 1 & b & 0 \\ 1 & 0 & c & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{γραμμοπράξεις}} \dots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = B.$$

Να βρεθούν τα στοιχεία a, b, c του A .

Λύση. Φέρνουμε σε ε.κ.μ.γ. R τον πίνακα B :

$$B \xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 5\Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix} = R.$$

Από την Παρατήρηση 5.3.0.3.δ συμπεραίνουμε ότι η ε.κ.μ.γ. του A είναι ο πίνακας R . Από τη σχέση γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών του R προκύπτει η παρακάτω σχέση για τις στήλες του A :

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$a = 8, \quad b = 1, \quad c = -1. \quad \square$$

5.7.4 Δίνονται οι παρακάτω πίνακες στήλη του $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

- α) Να εξετάσετε αν το σύνολο $S = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
- β) Να βρείτε όλα τα γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του συνόλου S .

Λύση. α) Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $S \subseteq M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ είναι μεγαλύτερο του 3, επομένως από το Πόρισμα 5.5.0.6, συμπεραίνουμε ότι το S είναι γραμμικά εξαρτημένο.

β) Για τα υποσύνολα του S έχουμε:

- Το κενό σύνολο θεωρείται εξ ορισμού γραμμικά ανεξάρτητο.
- Όλες οι στήλες του S είναι μη μηδενικές, άρα τα μονοσύνολα $\{\Sigma_1\}, \{\Sigma_2\}, \{\Sigma_3\}, \{\Sigma_4\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

- Παρατηρούμε ότι $\Sigma_1 \neq \lambda \cdot \Sigma_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, επομένως το σύνολο $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Όμοια, επειδή καμία από τις δοθείσες στήλες δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο κάποιας άλλης, όλα τα υποσύνολα του S με δύο στοιχεία είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
- Εξετάζουμε αν οι στήλες $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες βρίσκοντας τη βαθμίδα του πίνακα $[\Sigma_1 \mid \Sigma_2 \mid \Sigma_3]$:

$$[\Sigma_1 \mid \Sigma_2 \mid \Sigma_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{4} \end{bmatrix}.$$

Στην (3, 3)-θέση του πίνακα στον οποίο μεταβήκαμε βρίσκεται « εν δυνάμει » καθοδηγητική μονάδα. Έτσι η βαθμίδα του πίνακα $[\Sigma_1 \mid \Sigma_2 \mid \Sigma_3]$ ισούται με 3 και το σύνολο των στηλών του $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

- Εργαζόμαστε όμοια για το σύνολο στηλών $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_4\}$:

$$[\Sigma_1 \mid \Sigma_2 \mid \Sigma_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Διαπιστώνουμε ότι η βαθμίδα του πίνακα $[\Sigma_1 \mid \Sigma_2 \mid \Sigma_4]$ ισούται με 2, επομένως το σύνολο των στηλών του $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_4\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Μάλιστα ισχύει

$$\Sigma_4 = 3 \cdot \Sigma_1 - 2 \cdot \Sigma_2.$$

- Μπορείτε εύκολα να εξακριβώσετε ότι η βαθμίδα των πινάκων $[\Sigma_1 \mid \Sigma_3 \mid \Sigma_4]$ και $[\Sigma_2 \mid \Sigma_3 \mid \Sigma_4]$ ισούται με 3, οπότε τα σύνολα $\{\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_4\}$ και $\{\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τελικά, το μόνο γνήσιο υποσύνολο του S που είναι γραμμικά εξαρτημένο είναι το $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_4\}$. \square

5.7.5 Δίνονται οι παρακάτω πίνακες στήλη του $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$:

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Να αποδείξετε ότι το σύνολο $\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και να γράψετε τη στήλη Σ ως γραμμικό συνδυασμό των στηλών $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$.

Λύση. Φέρνουμε σε ε.κ.μ.γ. R τον 3×4 -πίνακα που έχει στήλες τις $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma$:

$$[\Sigma_1 \mid \Sigma_2 \mid \Sigma_3 \mid \Sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 1 & a \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & b-a \\ 0 & 1 & 1 & c \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 1 & a \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & c-b+a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 1 & a \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & b-a \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & \frac{a-b+c}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & \frac{a+b-c}{2} \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & \frac{-a+b+c}{2} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & \frac{a-b+c}{2} \end{bmatrix} = R.$$

Οι καθοδηγητικές μονάδες βρίσκονται στις τρεις πρώτες στήλες του R , επομένως οι $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ενώ για τη στήλη Σ έχουμε:

$$\Sigma = \frac{a+b-c}{2} \cdot \Sigma_1 + \frac{-a+b+c}{2} \cdot \Sigma_2 + \frac{a-b+c}{2} \cdot \Sigma_3 :$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{a+b-c}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-a+b+c}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{a-b+c}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} . \quad \square$$

Ασκήσεις για Εξάσκηση

5.7.1 Να βρείτε τη βαθμίδα των παρακάτω πινάκων:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 9 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ποιοι από τους πίνακες είναι αντιστρέψιμοι;

5.7.2 Να βρείτε την ε.κ.μ.γ. R του πίνακα A , την ε.κ.μ.γ. Q του ανάστροφου πίνακα A^T , σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών και των γραμμών του A , ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο αποτελούμενο από το μέγιστο δυνατό πλήθος στηλών του A και αντίστοιχα ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο γραμμών του A , αν

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{iii) } A = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 6 & -5 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & 9 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

5.7.3 Να φέρετε τον πίνακα A σε ε.κ.μ.γ. R , να βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα E τέτοιον, ώστε $E \cdot A = R$, να γράψετε τις σχέσεις γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των στηλών του A και να βρείτε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο αποτελούμενο από το μέγιστο δυνατό πλήθος στηλών του A , αν

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ii) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.7.4 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$a, b, c \in K, c \neq 0$. Να αποδείξετε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος και να γράψετε τον A^{-1} ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

5.7.5 Να υπολογίσετε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.7.6 Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

καθώς και οι πίνακες X_1, X_2, X_3, X_4 , αν

$$\begin{array}{ll} \text{i)} AX_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, & \text{ii)} X_2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ \text{iii)} A^T X_3 = A, & \text{iv)} X_4A + 5I_3 = AA^T. \end{array}$$

Βιβλιογραφία

- [1] Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Βαβατσούλας και Χ. Χαραλάμπους. *Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2017. ISBN: 978-960-418-727-0.
- [2] Α. Φωτιάδης και Χ. Χαραλάμπους. *Μία Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις, 2015. ISBN: 978-960-603-273-8. URL: <http://hdl.handle.net/11419/2329>.
- [3] S. Gilbert. *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*. Κρήτη: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1993. ISBN: 978-960-730-970-9.
- [4] Αθ. Πάπιστας. *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2019. ISBN: 978-960-418-841-3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΟΡΙΖΟΥΣΑ

Σύνοψη

Το κεφάλαιο αυτό πραγματεύεται τη θεωρία των οριζουσών. Μελετώνται οι βασικές ιδιότητες των οριζουσών, η σχέση της ορίζουσας με τη βαθμίδα τετραγωνικού πίνακα, εισάγεται η έννοια του προσαρτημένου πίνακα και η σχέση του με τον αντίστροφο. Το κεφάλαιο περιλαμβάνει μία ενότητα «Εργαστήριο με Mathematica» όπου διερευνώνται τα θέματα που αναπτύχθηκαν. Το κεφάλαιο κλείνει με μια ενότητα ασκήσεων πάνω στη θεωρία που αναπτύχθηκε. Για βιβλιογραφία στα θέματα αυτά παραπέμπουμε στα βιβλία [1], [2], [3], [4].

Προαπαιτούμενη γνώση: Κεφάλαιο 4, Κεφάλαιο 5, βασικές Λυκειακές γνώσεις.

6.1 Ορίζουσα Τετραγωνικών Πινάκων

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε την έννοια της ορίζουσας. Αν $A \in M_n(K)$, τότε η ορίζουσα του A είναι ένα στοιχείο του K και συμβολίζεται με $\det(A)$ (συχνά και $\det A$ ή $|A|$). Ο ορισμός της ορίζουσας φαίνεται αρχικά πολύπλοκος. Θα δούμε ωστόσο αργότερα ότι η ορίζουσα αντιστοιχεί στην έννοια του εμβαδού και του όγκου γενικότερα. Προς το παρόν, ας μείνουμε στο ότι η ορίζουσα είναι μία συνάρτηση

$$\det : M_n(K) \rightarrow K, \quad A \mapsto \det(A)$$

η οποία, όπως θα δούμε στην πορεία της μελέτης μας, έχει σημαντικές ιδιότητες. Μένει να δώσουμε τον τύπο της συνάρτησης, να εξηγήσουμε πώς υπολογίζεται η ορίζουσα ενός πίνακα $A \in M_n(K)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όταν το $n = 1$, δεν έχουμε πολλές επιλογές. Ορίζουμε $\det([a]) = a$, δηλ.

$$\det : M_1(K) \rightarrow K, \quad [a] \mapsto a .$$

Για $n > 1$, ο τύπος της ορίζουσας είναι αναδρομικός και στηρίζεται στην ορίζουσα υποπινάκων του A της αμέσως μικρότερης διάστασης. Για παράδειγμα, για την ορίζουσα ενός πίνακα του $M_5(K)$, χρειάζεται να γνωρίζουμε το πώς υπολογίζουμε ορίζουσες πινάκων του $M_4(K)$. Για τις ορίζουσες πινάκων του $M_4(K)$ χρειάζεται να υπολογίζουμε ορίζουσες πινάκων του $M_3(K)$ κ.ο.κ. Στην πραγματικότητα, δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε την ορίζουσα όλων των υποπινάκων του $A \in M_n(K)$. Αρκεί να γνωρίζουμε την ορίζουσα κάποιων πολύ συγκεκριμένων υποπινάκων του A , n στο πλήθος, που προκύπτουν από τον A , εάν παραλείψουμε μία ολόκληρη γραμμή και μία ολόκληρη στήλη. Ονομάζουμε, γενικά, τέτοιους υποπίνακες *ελάσσονες πίνακες* του A . Έτσι, αν $1 \leq i, j \leq n$, ο (i, j) -**ελάσσων πίνακας** του A είναι ο υποπίνακας του A που προκύπτει από τον A , αν *παραλείψουμε* την i -γραμμή και την j -στήλη και συμβολίζεται με $M_{ij}(A)$ ή απλά M_{ij} . Στα επόμενα παραδείγματα σκιαάζουμε τη γραμμή και τη στήλη που παραλείπουμε.

Παραδείγματα 6.1.0.1

i. Έστω $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Τότε $M_{11} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [d]$ και όμοια $M_{12} = [c]$, $M_{21} = [b]$, $M_{22} = [a]$.

ii. Έστω $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$. Τότε $M_{23} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix}$.

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Ο επόμενος τύπος ονομάζεται **ανάπτυξη της ορίζουσας του πίνακα A κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης**:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(M_{11}) - a_{21} \cdot \det(M_{21}) + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \cdot \det(M_{n1}). \quad (6.1.1)$$

Σημειώνουμε ότι αντίστοιχοι τύποι υπάρχουν για την *ανάπτυξη της ορίζουσας* κατά τα στοιχεία οποιασδήποτε στήλης ή γραμμής του A . Ας εφαρμόσουμε τον τύπο (6.1.1) στην περίπτωση 2×2 πινάκων. Έχουμε άλλωστε ήδη υπολογίσει τους ελάσσονες πίνακες της πρώτης στήλης για τους πίνακες αυτούς (βλ. Παράδειγμα 6.1.0.1.i). Έχουμε λοιπόν

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot \det(M_{11}) - c \cdot \det(M_{21}) = a d - c b.$$

Εφεξής, θα χρησιμοποιούμε κατευθείαν τον παραπάνω τύπο για την ορίζουσα 2×2 πινάκων. Στη συνέχεια, ας υπολογίσουμε την ορίζουσα του $A = (a_{ij}) \in M_3(K)$ σύμφωνα με τον τύπο (6.1.1). Πρώτα γράφουμε τους ελάσσονες πίνακες της πρώτης στήλης.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, M_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, M_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, M_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Επομένως:

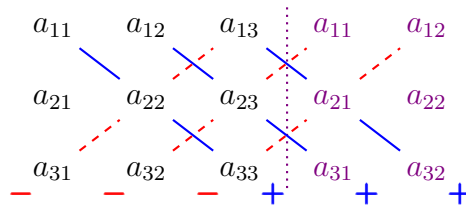
$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \det(M_{11}) - a_{21} \cdot \det(M_{21}) + a_{31} \cdot \det(M_{31}) = \\ &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a_{11}(a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{21}(a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}) + a_{31}(a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) = \\
 &= a_{11}a_{22} a_{33} - a_{11}a_{23} a_{32} + a_{21}a_{13} a_{32} - a_{21}a_{12} a_{33} + a_{31}a_{12} a_{23} - a_{31}a_{13} a_{22} = \\
 &= a_{11}a_{22} a_{33} - a_{11}a_{23} a_{32} + a_{12} a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21} a_{33} + a_{13}a_{21} a_{32} - a_{13}a_{31} a_{22} .
 \end{aligned}$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η ορίζουσα του γενικού 3×3 πίνακα είναι ένα εναλλασσόμενο άθροισμα με 6 προσθετέους. Ας μελετήσουμε λίγο πιο προσεκτικά τη μορφή των προσθετέων. Τι παρατηρούμε; Κάθε προσθετέος είναι γινόμενο με τρεις παράγοντες με ένα ακριβώς στοιχείο από κάθε γραμμή και κάθε στήλη. Έτσι, κάθε στοιχείο του πίνακα A εμφανίζεται ακριβώς σε δύο προσθετέους στην ορίζουσα¹. Προφανώς και δεν επιθυμούμε να αποστηθίσουμε τον τύπο για την ορίζουσα των 3×3 πινάκων: το δύσκολο εδώ είναι το πρόσημο των προσθετέων. Ωστόσο, παρόλο που τοποθετούμαστε αρνητικά στην ξερή απομνημόνευση τύπων, δεν αντιστεκόμαστε στον πειρασμό της περιγραφής του εύκολου σχηματικού κανόνα που έδωσε ο Γάλλος μαθηματικός Sarrus για τα πρόσημα και κατά συνέπεια τον υπολογισμό της ορίζουσας του 3×3 -πίνακα.

Κανόνας του Sarrus για τον υπολογισμό ορίζουσας 3×3 :

Γράφουμε τον πίνακα $A = (a_{ij})$ και μετά επαναλαμβάνουμε τις δύο πρώτες στήλες:



Η ορίζουσα $\det(A)$ ισούται με το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων που βρίσκονται στις διαγώνιους από αριστερά προς τα δεξιά μείον το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων που βρίσκονται στις διαγώνιους από δεξιά προς τα αριστερά.

Τονίζουμε ότι ο κανόνας του Sarrus ισχύει μόνο για τους πίνακες του $M_3(K)$. Δεν υπάρχει αντίστοιχος σχηματικός κανόνας για τα πρόσημα των προσθετέων της ορίζουσας για τετραγωνικούς πίνακες μεγαλύτερων διαστάσεων.

¹Ο αριθμός των προσθετέων, το 6, είναι αναμενόμενος, καθώς αντιστοιχεί στον παραγοντικό $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$, που περιγράφει με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να κατασκευάσουμε γινόμενα στοιχείων με αυτήν την ιδιότητα (η επιλογή που θα κάνουμε για την πρώτη γραμμή περιορίζει σε δύο τις επιλογές από τη δεύτερη γραμμή και τέλος δίνει μοναδική επιλογή για την τελευταία εναπομείνουσα γραμμή). Τώρα που αναγνωρίζουμε ότι οι προσθετέοι είναι της μορφής $(-1)^\sigma a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3}$ (για κάποιον εκθέτη σ) όπου οι δείκτες i_1, i_2, i_3 είναι διαφορετικοί και καλύπτουν και τις τρεις στήλες του A , τι μπορούμε να πούμε για το σ ; Ποιος είναι ο κανόνας που το σ ακολουθεί; Αυτό θέλει περισσότερο σκέψη και είναι δυσκολότερο να περιγραφεί, αναφέρουμε όμως ότι έχει να κάνει με τον αριθμό των αντιμεταθέσεων που χρειάζεται για να ταξινομηθεί η ακολουθία i_1, i_2, i_3 . Για παράδειγμα, χρειαζόμαστε 2 αντιμεταθέσεις για να ταξινομήσουμε την ακολουθία 2, 3, 1: πρώτα ανταλλάσσουμε τη σειρά των 3, 1 και παίρνουμε την ακολουθία 2, 1, 3 και στη συνέχεια ανταλλάσσουμε τη σειρά των 2, 1 για να πάρουμε την τακτοποιημένη ακολουθία 1, 2, 3. Το σ , λοιπόν, για το γινόμενο $a_{12}a_{23}a_{31}$ σύμφωνα με τα παραπάνω πρέπει να είναι 2 και το πρόσημο του $a_{12}a_{23}a_{31}$ θα είναι θετικό. Δείτε το και επιβεβαιώστε αν θέλετε και για τους υπόλοιπους προσθετέους. Ένα λεπτό σημείο στα παραπάνω, που ίσως έχετε ήδη αντιληφθεί, είναι ότι δεν υπάρχει μοναδικός τρόπος για να ταξινομήσουμε τις ακολουθίες μας. Όποιον, όμως, τρόπο και αν ακολουθήσουμε, προκύπτει ότι ο αριθμός των αντιμεταθέσεων θα είναι πάντα άρτιος ή περιττός αριθμός. Αυτά, θα τα δείτε σε επόμενο μάθημα συνδυαστικής.

Παράδειγμα 6.1.0.2 Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης, ενώ στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την ορίζουσα χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Sarrus.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 8 + 1 \cdot 3 = -17.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του Sarrus έχουμε:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & \vdots & 1 & 2 \\ & \diagdown & \diagup & \times & \diagdown & \diagup \\ 3 & 1 & 2 & \vdots & 3 & 1 \\ & \diagup & \diagdown & \times & \diagup & \diagdown \\ 1 & 0 & 4 & \vdots & 1 & 0 \end{array}$$

$$1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4 + 4 - 1 - 24 = -17 = \det(A).$$

Αν $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ και M_{ij} είναι ελλάσων πίνακας του A , ονομάζουμε **συμπαράγοντα** του a_{ij} και συμβολίζουμε με A_{ij} , το στοιχείο

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ij}).$$

Έτσι ο τύπος για την ανάπτυξη της ορίζουσας $\det(A)$ κατά τα στοιχεία της 1ης στήλης γράφεται ως εξής:

$$\det(A) = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + \dots + a_{n1} \cdot A_{n1}. \quad (6.1.2)$$

Σημειώνουμε ότι μπορούμε να παρακολουθήσουμε τα πρόσημα στους συμπαράγοντες από τον πίνακα των προσήμων, που φτιάχνουμε ξεκινώντας με $+$ στην $(1, 1)$ ή την (n, n) -θέση του A και εναλλάσσοντας τα πρόσημα $+$, $-$ καθώς κινούμαστε οριζόντια ή κάθετα:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \dots & + & - \\ & & & & \dots & - & + \end{vmatrix}$$

Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα με τον υπολογισμό της ορίζουσας ενός 4×4 πίνακα.

Παράδειγμα 6.1.0.3 Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$\det(A) = 0 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 2 \cdot A_{41}.$$

Είναι φανερό ότι δεν υπάρχει λόγος να υπολογίσουμε τους συμπαράγοντες A_{11} και A_{31} αφού θα τους πολλαπλασιάσουμε με 0. Ας υπολογίσουμε τώρα τον συμπαράγοντα A_{21} . Έχουμε:

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M_{21}) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 8 = 0.$$

Επομένως, $A_{21} = (-1)^{2+1}0 = 0$. Τέλος, παρατηρούμε ότι M_{41} είναι ο πίνακας του προηγούμενου παραδείγματος και έχουμε ήδη βρει ότι η ορίζουσά του είναι ίση με -17 . Επομένως, $A_{41} = (-1)^{4+1} \det(M_{41}) = (-1)(-17) = 17$. Βρήκαμε, λοιπόν, ότι $\det(A) = 2 \cdot 17 = 34$.

6.2 Βασικές Ιδιότητες Οριζουσών

Σε ό,τι ακολουθεί, περιοριζόμαστε σε τετραγωνικούς πίνακες και εξετάζουμε βασικές ιδιότητες της ορίζουσάς τους.

(i) Αν $A \in M_n(K)$, τότε $\det(A^T) = \det(A)$

Για να δούμε ότι ισχύει η ισότητα όταν $n = 2$ ή $n = 3$, αρκεί να πάρουμε αναλυτικά την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης και να ελέγξουμε ότι οι προσθετέοι είναι ακριβώς οι ίδιοι. Αν και μηχανική και όχι ιδιαίτερα διαφωτιστική, η απόδειξη αυτή είναι πλήρης για αυτές τις μικρές διαστάσεις. Είναι όμως φανερό ότι για τη γενική περίπτωση, η σύγκριση των όρων δεν θα μπορέσει να γίνει τόσο απλά. Αναφέρουμε ότι η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι σε κάθε όρο εμφανίζεται ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε γραμμή και κάθε στήλη και στις ιδιότητες των μεταθέσεων. Σημειώνουμε, επίσης, ότι ως απόρροια αυτής της ιδιότητας, οι στήλες θα ικανοποιούν (ως προς την ορίζουσα) όσες ιδιότητες ικανοποιούν οι γραμμές. Θα δούμε, όμως, στη συνέχεια, αναλυτικά τι εννοούμε με αυτήν την παρατήρηση.

(ii) $\det(A)$ μπορεί να αναπτυχθεί κατά τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής ή στήλης του A

Έστω $A \in M_n(K)$. Η ορίζουσα του A με ανάπτυξη των στοιχείων της j -στήλης δίνεται από τη σχέση:

$$\det(A) = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} \quad (6.2.1)$$

ενώ η ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της i -γραμμής δίνεται από τη σχέση:

$$\det(A) = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}. \quad (6.2.2)$$

Για $n = 2$ ή $n = 3$ μπορούμε εύκολα να επιβεβαιώσουμε τα παραπάνω συγκρίνοντας τους όρους που προκύπτουν από συγκεκριμένες αναπτύξεις. Για παράδειγμα, θα γράψουμε το άθροισμα που προκύπτει από την ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της 2ης στήλης του πίνακα A

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

και θα επιβεβαιώνουμε ότι προκύπτει η ανάπτυξη της ορίζουσας κατά την πρώτη στήλη του A :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= a_2 A_{12} + b_2 A_{22} + c_2 A_{32} = -a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \\
&= -a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + b_2(a_1c_3 - a_3c_1) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1) = \\
&= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι η ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής προκύπτει εύκολα από τη σχέση $\det(A) = \det(A^T)$. Μπορείτε να δείτε το γιατί; Είναι φανερό ότι αναπτύσσοντας την ορίζουσα ενός πίνακα A ως προς τα στοιχεία της γραμμής ή της στήλης του A με τα περισσότερα 0, θα έχουμε να κάνουμε λιγότερους υπολογισμούς.

Παραδείγματα 6.2.0.1

$$\begin{aligned}
\bullet \begin{vmatrix} 3 & 2 & -8 \\ -1 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} &= -8 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -8 \cdot (-11) + 2 \cdot (-11) = 66. \\
\bullet \begin{vmatrix} 1 & 27 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 88 & 4 \end{vmatrix} &= 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) = -10.
\end{aligned}$$

(iii) Αν A είναι τριγωνικός πίνακας, τότε $\det(A)$ ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του A

Αν $A = (a_{ij})$ είναι κάτω τριγωνικός πίνακας, τότε M_{11} είναι κάτω τριγωνικός πίνακας. Επιπλέον, τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του M_{11} είναι ακριβώς τα στοιχεία a_{22}, \dots, a_{nn} . Παίρνοντας την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά την πρώτη γραμμή, προκύπτει ότι

$$\det(A) = a_{11} \cdot \det(M_{11}) - 0 \cdot \det(M_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} \cdot 0 \cdot \det(M_{1n}) = a_{11} \cdot \det(M_{11}).$$

Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός κάτω τριγωνικού πίνακα μικρότερης διάστασης. Για παράδειγμα, δείχνουμε αναλυτικά την περίπτωση ενός κάτω τριγωνικού 4×4 πίνακα. Παίρνουμε, όπως αναφέραμε, την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής. Συνεχίζουμε αναπτύσσοντας την υποορίζουσα που προκύπτει ξανά κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής του 3×3 πίνακα. Παραλείπουμε κάθε φορά τους όρους που μηδενίζονται:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44},$$

δηλαδή η ορίζουσα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου. Στη γενική περίπτωση ενός κάτω τριγωνικού πίνακα (για μεγαλύτερα n), για να δείξουμε ότι η ορίζουσα είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής (κάντε το!). Ομοίως, το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για άνω τριγωνικούς

πίνακες. Στην περίπτωση αυτή, ο M_{11} είναι επίσης άνω τριγωνικός πίνακας και η ορίζουσα υπολογίζεται κατά τα στοιχεία της πρώτης στήλης. Σημειώνουμε, επίσης, ότι οι διαγώνιοι πίνακες είναι ειδική περίπτωση τριγωνικών πινάκων. Έχουμε λοιπόν:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

όπου με $*$ συμβολίζουμε αυθαίρετα στοιχεία του K .

Παραδείγματα 6.2.0.2

- $\det(I_n) = 1$.
- $\det(\text{diag}(d_1, \dots, d_n)) = d_1 \cdots d_n$.
- Αν $\lambda \neq 0$, τότε $\det(E_{\lambda,i}) = \lambda \neq 0$.

(iv) Πίνακας με μηδενική γραμμή ή στήλη έχει μηδενική ορίζουσα

Αν μία γραμμή ενός πίνακα A είναι μηδενική, αναπτύσσοντας την ορίζουσά του ως προς τα στοιχεία της γραμμής αυτής βρίσκουμε $\det(A) = 0$. Το ίδιο συμβαίνει στην περίπτωση που μία στήλη ενός πίνακα είναι μηδενική.

(v) Πίνακας με δύο ίσες γραμμές ή δύο ίσες στήλες έχει μηδενική ορίζουσα

Αρχικά επιβεβαιώνουμε ότι αν ένας 2×2 -πίνακας έχει ίσες τις γραμμές ή τις στήλες, τότε η ορίζουσά του είναι ίση με 0. Πράγματι

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = ab - ab = 0, \quad \begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = ac - ac = 0.$$

Έστω τώρα ένας $n \times n$ πίνακας, με γραμμές $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$, τέτοιος ώστε $\Gamma_i = \Gamma_j$, για $i \neq j$. Παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε τον υποπίνακα M_{ts} όταν $t \neq i, j$, τότε ο M_{ts} έχει και αυτός δύο γραμμές ίσες. Δείτε για παράδειγμα έναν 3×3 -πίνακα A με $\Gamma_1 = \Gamma_3$: οι 2×2 πίνακες M_{21}, M_{22} και M_{23} έχουν, ο καθένας τους, δύο ίσες γραμμές και επομένως μηδενική ορίζουσα. Έτσι, για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του A αναπτύσσουμε την ορίζουσά του ως προς τα στοιχεία της Γ_2 και προκύπτει αμέσως ότι $\det(A) = 0$. Το κάνουμε αναλυτικά:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = -b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 - b_3 \cdot 0 = 0.$$

Στη γενική περίπτωση (για $n \geq 3$), αν ο πίνακας έχει ίσες τις γραμμές Γ_i, Γ_j , χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής και την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής διαφορετικής των i και j . Αντίστοιχα, αν ο πίνακας έχει ίσες τις στήλες Σ_i, Σ_j , για $i \neq j$, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής και την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία οποιασδήποτε στήλης διαφορετικής της i και j .

(vi) Αν $A \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \lambda \cdot \Gamma_i} A'$ ή $A \xrightarrow{\Sigma_i \rightarrow \lambda \cdot \Sigma_i} A'$, τότε $\det(A') = \lambda \det(A)$

Έστω ότι ο $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$ πίνακας και έστω ότι $A \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \lambda \cdot \Gamma_i} A'$. Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία της i -γραμμής του A' είναι: $\lambda a_{i1}, \dots, \lambda a_{in}$. Παίρνοντας την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της i γραμμής, βλέπουμε ότι το λ βγαίνει κοινός παράγοντας από κάθε όρο του αθροίσματος. Στο επόμενο παράδειγμα, το λ εμφανίζεται σε όλα τα στοιχεία της πρώτης γραμμής. Έτσι, θα πάρουμε την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \lambda a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \lambda a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \\ &= \lambda \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Η γενική απόδειξη γίνεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο. Αντίστοιχα, αν η i -στήλη του A' είναι λ φορές η i -στήλη του A , τότε παίρνοντας την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά την i -στήλη βλέπουμε ότι $\det(A') = \lambda \det(A)$.

Παραδείγματα 6.2.0.3

i. $\begin{vmatrix} x & y & 3 \cdot z \\ a & a & 6 \cdot a \\ b & c & 9 \cdot d \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} x & y & 3 \cdot z \\ 1 & 1 & 6 \\ b & c & 9 \cdot d \end{vmatrix} = 3 \cdot a \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 2 \\ b & c & 3 \cdot d \end{vmatrix}.$

ii. Θα δείξουμε ότι

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 \\ -b_1 & b_2 & -b_3 \\ c_1 & -c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & a_3 \\ -b_1 & b_2 & -b_3 \\ c_1 & -c_2 & c_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_1 & -1 \cdot a_2 & a_3 \\ -b_1 & -1 \cdot (-b_2) & -b_3 \\ c_1 & -1 \cdot c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -1 \cdot (-b_1) & -1 \cdot (-b_2) & -1 \cdot (-b_3) \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

iii. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ \lambda c_1 & \lambda c_2 & \lambda c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \stackrel{(vi)}{=} \lambda \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \stackrel{(v)}{=} \lambda \cdot 0 = 0.$

Το τελευταίο παράδειγμα γενικεύεται εύκολα για να δώσει το συμπέρασμα της επόμενης ιδιότητας.

(vii) Αν μία γραμμή ή στήλη του $A \in M_n(K)$ είναι πολλαπλάσιο μίας άλλης γραμμής ή στήλης του A , τότε $\det(A) = 0$

Έστω $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ οι γραμμές του A και έστω ότι $\Gamma_j = \lambda \Gamma_i$. Αν Γ_j (ή Γ_i) είναι η μηδενική γραμμή, τότε το συμπέρασμα προκύπτει από την ιδιότητα (iv). Διαφορετικά $\lambda \neq 0$ και επομένως το $1/\lambda$ υπάρχει. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A' που προκύπτει από τη γραμμοπράξη

$$A \xrightarrow{\Gamma_j \rightarrow (1/\lambda)\Gamma_j} A'$$

έχει τις γραμμές i και j ίσες. Επομένως από την ιδιότητα (v), έχουμε ότι $\det(A') = 0$. Όμως, από την ιδιότητα (vi) έχουμε ότι $\det(A') = 1/\lambda \det(A)$. Άρα $\det(A) = 0$. Καταλήγουμε με αντίστοιχο τρόπο στο ίδιο συμπέρασμα αν κάποια στήλη του A είναι πολλαπλάσιο άλλης.

(viii) Αν $A \in M_n(K)$, τότε $\det(\kappa A) = \kappa^n \det(A)$

Έστω $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ οι γραμμές ενός πίνακα $A \in M_n(K)$ και $\kappa \in K$. Τότε, βγάζουμε διαδοχικά τον κ κοινό παράγοντα στον υπολογισμό της ορίζουσας του κA :

$$\kappa A = \begin{bmatrix} \kappa \Gamma_1 \\ \kappa \Gamma_2 \\ \vdots \\ \kappa \Gamma_n \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\kappa A) = \kappa \begin{vmatrix} \Gamma_1 \\ \kappa \Gamma_2 \\ \vdots \\ \kappa \Gamma_n \end{vmatrix} = \dots = \underbrace{\kappa \cdot \kappa \cdot \dots \cdot \kappa}_{n \text{ φορές}} \begin{vmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{vmatrix} = \kappa^n \cdot \det(A).$$

Παραδείγματα 6.2.0.4

i. Θεωρούμε τον πίνακα $A \in M_3(\mathbb{R})$, με $\det(A) = 2$. Τότε

$$\det(5A) = 5^3 \cdot \det(A) = 125 \cdot 2 = 250.$$

ii. Θα δείξουμε ότι η ορίζουσα ενός αντισυμμετρικού 5×5 -πίνακα A ισούται με 0.

Αφού $A^T = -A$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(A^T) = \det(-A) = \det(-1 \cdot A) = (-1)^5 \det(A) = -\det(A) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0. \end{aligned}$$

iii. Αν n είναι περιττός θετικός αριθμός και $A \in M_n(K)$ είναι αντισυμμετρικός, τότε $\det(A) = 0$.

(ix) Αν $A \in M_n(K)$ και $A \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} A'$ ή $\xrightarrow{\Sigma_i \leftrightarrow \Sigma_j} A'$, τότε $\det(A) = -\det(A')$

Η απόδειξη θα γίνει πάλι με μαθηματική επαγωγή και στις δύο περιπτώσεις. Επιβεβαιώνουμε αρχικά ότι το συμπέρασμα είναι αληθές όταν $n = 2$. Πρώτα, για την αντιμετάθεση γραμμών:

$$\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - da = -(ad - bc) = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

και στη συνέχεια για την αντιμετάθεση στηλών:

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Στη γενική περίπτωση ($n \geq 3$) το συμπέρασμα προκύπτει από την υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής, αφού πάρουμε την ανάπτυξη της ορίζουσας κατά τα στοιχεία οποιασδήποτε γραμμής που παραμένει σταθερή (στην περίπτωση της αντιμετάθεσης γραμμών) ή οποιασδήποτε στήλης που παραμένει σταθερή (στην περίπτωση της αντιμετάθεσης στηλών). Ας δούμε για παράδειγμα την περίπτωση ενός 3×3 πίνακα στον οποίον αντιμεταθέτουμε τις γραμμές 1 και 3. Θα δείξουμε ότι

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} - \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Αναπτύσσουμε την ορίζουσα του δεύτερου μέλους κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} &= -b_1 \begin{vmatrix} c_2 & c_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = \\ &= -b_1 \left(- \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right) + b_2 \left(- \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \right) - b_3 \left(- \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) = \\ &= - \left(-b_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \right) = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Παραδείγματα 6.2.0.5

i. $I_n \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} E_{i \leftrightarrow j} \implies \det(E_{i \leftrightarrow j}) = -\det(I_n) = -1.$

ii. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \leftrightarrow \Sigma_3} - \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ f & e & d \end{vmatrix} \stackrel{(iii)}{=} -a \cdot b \cdot d,$

iii. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & d & e & f \\ g & h & k & m \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \leftrightarrow \Sigma_4} - \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & b & 0 \\ f & d & e & 0 \\ m & h & k & g \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3} + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ c & b & 0 & 0 \\ f & e & d & 0 \\ m & k & h & g \end{vmatrix} \stackrel{(iii)}{=} a \cdot b \cdot d \cdot g.$

(x) Αν $A \in M_n(K)$ και $A \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \kappa \cdot \Gamma_j} A'$ ή $A \xrightarrow{\Sigma_i \rightarrow \Sigma_i + \kappa \cdot \Sigma_j} A'$, τότε $\det(A) = \det(A')$

Ας δούμε τα κύρια βήματα της απόδειξης στην περίπτωση της στοιχειώδους πράξης γραμμών (η απόδειξη στην περίπτωση στοιχειώδους πράξης στηλών τύπου 1 είναι αντίστοιχη). Έστω

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \kappa \cdot \Gamma_j} A'.$$

Αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της i -γραμμής του A' . Αναγνωρίζουμε στο άθροισμα που προκύπτει, α) την ανάπτυξη της ορίζουσας του A κατά τα στοιχεία της i -γραμμής και β) την ανάπτυξη της ορίζουσας του πίνακα με γραμμές $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{i-1}, \kappa \cdot \Gamma_j, \Gamma_{i+1}, \dots, \Gamma_n$, κατά τα στοιχεία της i -γραμμής. Η ορίζουσα όμως του β) είναι μηδέν όπως προκύπτει χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (vii) και έτσι $\det(A) = \det(A')$.

Ας δούμε αναλυτικά την περίπτωση ενός πίνακα $A \in M_3(K)$ με γραμμές $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ στον οποίον εφαρμόζουμε τη γραμμοπράξη $\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \kappa \cdot \Gamma_1$:

$$A \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \kappa \cdot \Gamma_1} A'$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα A' κατά τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής (βλ. λυμένη άσκηση 6.7.1) και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (vii), διαπιστώνουμε ότι η ορίζουσα του A' είναι ίση με την ορίζουσα του A :

$$\det(A') = \begin{vmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 + \kappa \cdot \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma_1 \\ \kappa \cdot \Gamma_1 \\ \Gamma_3 \end{vmatrix} \stackrel{(vii)}{=} \begin{vmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{vmatrix} + 0 = \det(A).$$

Συμπεραίνουμε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα δεν μεταβάλλεται αν προσθέσουμε σε μία γραμμή του το βαθμωτό πολλαπλάσιο μίας άλλης ή περισσότερων γραμμών του. Το ίδιο συμβαίνει και για τις στήλες του πίνακα.

Παραδείγματα 6.2.0.6

i. $\det(E_{i+\kappa j}) = 1.$

ii. Έστω $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 2a_1 + \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 & 2a_2 + \lambda b_2 \\ a_3 & b_3 & 2a_3 + \lambda b_3 \end{bmatrix}.$

Η τρίτη στήλη του πίνακα A γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός της πρώτης και δεύτερης στήλης. Θα δούμε ότι η ορίζουσα του A ισούται με 0 :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 2a_1 + \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 & 2a_2 + \lambda b_2 \\ a_3 & b_3 & 2a_3 + \lambda b_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - 2\Sigma_1} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \lambda b_1 \\ a_2 & b_2 & \lambda b_2 \\ a_3 & b_3 & \lambda b_3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - \lambda \Sigma_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

iii. Αν μία γραμμή (αντίστοιχα στήλη) ενός πίνακα $A \in M_n(K)$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων γραμμών (αντίστοιχα στηλών) του, τότε $\det(A) = 0.$

Πράγματι, η διαδοχική εφαρμογή στοιχειωδών πράξεων γραμμών (ή στηλών) τύπου 1 οδηγεί σε έναν πίνακα με μηδενική γραμμή (ή στήλη) και το συμπέρασμα προκύπτει από την ιδιότητα (iv). Σημειώνουμε ότι το αποτέλεσμα αυτό γενικεύει τις ιδιότητες (iv), (v) και (vii) της ορίζουσας.

iv. Εφαρμόζουμε στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ή στηλών σε έναν πίνακα A για να μηδενίσουμε στοιχεία κάποιας γραμμής (ή στήλης) και για να αναπτύξουμε στη συνέχεια την ορίζουσα ως προς αυτήν τη γραμμή (ή στήλη). Αν συνεχίσουμε με στοιχειώδεις πράξεις και φτάσουμε σε έναν άνω ή κάτω τριγωνικό πίνακα, τότε η ορίζουσα είναι το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου.

v. Στον πίνακα που εξετάζουμε σε αυτό το παράδειγμα αναγνωρίζουμε στη δεύτερη γραμμή και τρίτη στήλη μία μονάδα. Θα χρησιμοποιήσουμε τη δεύτερη γραμμή για να κάνουμε μηδενικά στην τρίτη στήλη σε όλες τις άλλες γραμμές.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -3 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - 4\Gamma_2]{\begin{matrix} \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 3\Gamma_2 \end{matrix}} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & -3 \\ 8 & 6 & 0 & -5 \\ -2 & -7 & 0 & 17 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 8 & 6 & -5 \\ -2 & -7 & 17 \end{vmatrix} =$$

$$\xrightarrow[\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 + 8\Sigma_1]{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 - \Sigma_1} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & -2 & 59 \\ -2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} -2 & 59 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 295 = 293.$$

vi. Έστω $A = \begin{pmatrix} k+ax & k+ay & k+az \\ k+bx & k+by & k+bz \\ k+cx & k+cy & k+cz \end{pmatrix}$.

Αφαιρούμε από την πρώτη και τη δεύτερη στήλη την τρίτη στήλη και βγάζουμε τα a, b, c ως κοινό παράγοντα. Αυτό θα μας επιτρέψει να φτάσουμε σε έναν πίνακα που η πρώτη στήλη θα είναι πολλαπλάσιο του $x-z$, ενώ η δεύτερη στήλη πολλαπλάσιο του $y-z$. Αναλυτικά:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a(x-z) & a(y-z) & k+az \\ b(x-z) & b(y-z) & k+bz \\ c(x-z) & c(y-z) & k+cz \end{vmatrix} = (x-z)(y-z) \begin{vmatrix} a & a & k+az \\ b & b & k+bz \\ c & c & k+cz \end{vmatrix} = 0.$$

vii. Θα υπολογίσουμε με δύο τρόπους την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

α' τρόπος: $\det(A) \xrightarrow[\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - \Sigma_4]{\substack{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 - \Sigma_4 \\ \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 - \Sigma_4}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ a-b & 0 & 0 & b \\ a-c & b-c & 0 & c \\ a-d & b-d & c-d & d \end{vmatrix} \Rightarrow$

(αναπτύσσουμε την ορίζουσα κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής)

$$\det(A) = (-1)^{1+4} a \cdot \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 \\ a-c & b-c & 0 \\ a-d & b-d & c-d \end{vmatrix} = -a \cdot (a-b) \cdot (b-c) \cdot (c-d).$$

β' τρόπος: $\det(A) \xrightarrow{\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_4 - \Sigma_3} \begin{vmatrix} a & a & a & 0 \\ a & b & b & 0 \\ a & b & c & 0 \\ a & b & c & d-c \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - \Sigma_2} \begin{vmatrix} a & a & 0 & 0 \\ a & b & 0 & 0 \\ a & b & c-b & 0 \\ a & b & c-b & d-c \end{vmatrix} =$

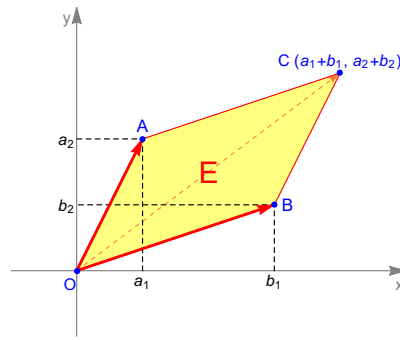
$$\xrightarrow{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 - \Sigma_1} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & 0 & 0 \\ a & b-a & c-b & 0 \\ a & b-a & c-b & d-c \end{vmatrix} = a \cdot (b-a) \cdot (c-b) \cdot (d-c).$$

Ορίζουσα 2×2 πίνακα και γεωμετρία

Στο σημείο $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ του πραγματικού επιπέδου μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τον πίνακα γραμμή $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ του $M_{1 \times 2}(K)$ και αντίστροφα, κάθε πίνακας γραμμή του $M_{1 \times 2}(K)$ ορίζει μοναδικό σημείο του \mathbb{R}^2 . Εάν το κάνουμε αυτό για κάθε μία από τις δύο γραμμές ενός 2×2 πίνακα M , παίρνουμε δύο σημεία του \mathbb{R}^2 . Έτσι, με την αρχή των αξόνων, τα τρία σημεία καθορίζουν ένα παραλληλόγραμμο στο επίπεδο. Ας δούμε το παραλληλόγραμμο που αντιστοιχεί στον πίνακα

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Οι τρεις κορυφές είναι τα σημεία $(0, 0)$, (a_1, a_2) και (b_1, b_2) . Η τέταρτη κορυφή του παραλληλόγραμμου έχει συντεταγμένες $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, βλ. Σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1: Πίνακας και παραλληλόγραμμο.

Θεωρήσαμε, για ευκολία στο σχήμα μας, ότι τα (a_1, a_2) και (b_1, b_2) βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο του \mathbb{R}^2 , αυτό όμως δεν είναι απαραίτητο. Σημειώνουμε, επίσης, ότι στην περίπτωση που τα $(0, 0)$, (a_1, a_2) και (b_1, b_2) είναι συννευθιακά, δηλ. αν $(b_1, b_2) = \lambda(a_1, a_2)$, τότε και η τέταρτη κορυφή είναι στην ίδια ευθεία, το παραλληλόγραμμο καταρρέει και είναι απλά ένα ευθύγραμμο τμήμα, το εμβαδόν του είναι μηδέν, όπως άλλωστε και η ορίζουσα του M , σύμφωνα με την ιδιότητα (vii). Στην περίπτωση που οι κορυφές του παραλληλόγραμμου δεν είναι όλες στην ίδια ευθεία, όπως στο σχήμα μας, το παραλληλόγραμμο έχει μη μηδενικό εμβαδόν και θα δούμε ότι και σε αυτήν την περίπτωση, το εμβαδόν του είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα M . Θα υποθέσουμε εφεξής ότι οι γραμμές του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες, ισοδύναμα δηλαδή ότι τα σημεία O, A, B δεν είναι συννευθιακά.

Θα περιγράψουμε τη στρατηγική μας: έστω E το εμβαδόν του $OACB$. Στοιχειώδεις γραμμοπράξεις τύπου 1 ή τύπου 2 (άθροισμα σε μία γραμμή πολλαπλάσιο μίας άλλης, ανταλλαγή γραμμών) δίνουν έναν νέο πίνακα και ένα νέο παραλληλόγραμμο. Οι ορίζουσες των δύο πινάκων διαφέρουν το πολύ στο πρόσημο (στη δεύτερη περίπτωση) και έτσι γίνονται ίσες όταν πάρουμε την απόλυτη τιμή τους. Θα δούμε, γεωμετρικά, ότι το εμβαδόν του νέου παραλληλόγραμμου είναι ίδιο με το παλιό, δηλ. είναι ίσο με το E . Τέλος, θα δούμε ότι σε μία ειδική περίπτωση, όταν η μία κορυφή είναι στον άξονα $y'y$, το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, θα δούμε ότι το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της ορίζουσας του πίνακα σε κάθε περίπτωση. Πρώτα, όμως, ας επιβεβαιώσουμε την ισχύ του ισχυρισμού μας όταν η μία κορυφή είναι στον άξονα $y'y$. Έστω ο πίνακας

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & k \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

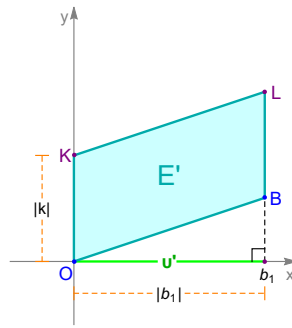
Σημειώνουμε ότι αφού έχουμε υποθέσει ότι οι γραμμές του M' είναι γραμμικά ανεξάρτητες, το k , όπως και το b_1 δεν είναι μηδέν. Το σημείο $(0, k)$ βρίσκεται στον άξονα $y'y$ και το παραλληλόγραμμο έχει τη μορφή του Σχήματος 6.2.

Παρατηρούμε ότι $|\det(M')| = |kb_1|$. Επιπλέον, αφού το παραλληλόγραμμο $OKLB$ έχει βάση την OK και ύψος $|b_1|$, το εμβαδόν E' του $OKLB$ είναι $|kb_1|$, αφού $(OK) = |k|$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι σε αυτήν την ειδική περίπτωση

$$|\det(M')| = E'.$$

Επιπλέον, αφού η ανταλλαγή γραμμών δεν επηρεάζει καθόλου το παραλληλόγραμμο, είναι φανερό ότι το ίδιο συμπέρασμα ισχύει κάθε φορά που η πρώτη στήλη έχει κάποιο μηδενικό. Έτσι:

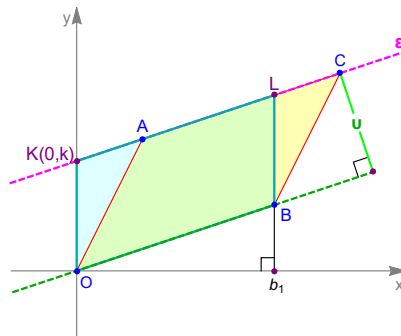
$$\text{αν } M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix} \text{ τότε } |\det(M)| = E.$$



Σχήμα 6.2: Ορίζουσα και εμβαδόν παραλληλογράμιου I.

Μένει λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση ενός πίνακα M με μη μηδενικά στοιχεία στην πρώτη στήλη. Μπορούμε από τον πίνακα M να φτάσουμε σε έναν πίνακα M' για κατάλληλο k με κάποια γραμμοπράξη τύπου 1; Πόσο διαφέρει το νέο παραλληλόγραμμο από το αρχικό; Ας δούμε, πρώτα, τι θα πρέπει να είναι το k . Ας προεκτείνουμε την ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία A, C (βλ. Σχήμα 6.3) και ας πάρουμε το σημείο τομής του y'/y με την ε . Θυμίζουμε ότι E είναι το εμβαδόν του $OACB$. Έστω E' το εμβαδόν του $OKLB$. Το ίδιο σχήμα μας δείχνει ότι τα παραλληλόγραμμο $OACB$ και $OKLB$ έχουν το ίδιο εμβαδόν, αφού και στις δύο περιπτώσεις

$$E = (OB)v = E'.$$



Σχήμα 6.3: Ορίζουσα και εμβαδόν παραλληλογράμιου II.

Βρίσκουμε λοιπόν την εξίσωση της ε και το σημείο σημείο τομής της με τον άξονα y'/y . Η ε είναι παράλληλη προς το $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$, επομένως ο συντελεστής διεύθυνσής της ισούται με b_2/b_1 . Επιπλέον, διέρχεται από το σημείο $A(a_1, a_2)$. Έτσι η εξίσωσή της είναι

$$\varepsilon : y - a_2 = \frac{b_2}{b_1}(x - a_1).$$

Η y -συντεταγμένη για $x = 0$ μας δίνει το $K(0, k)$ που αναζητούμε:

$$k - a_2 = \frac{b_2}{b_1}(0 - a_1) \Rightarrow k = a_2 - \frac{a_1}{b_1} b_2.$$

Παρατηρούμε ότι

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \frac{a_1}{b_1} \cdot \Gamma_2} M' = \begin{bmatrix} 0 & k \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Αφού, λοιπόν, $\det(M) = \det(M')$, $|\det(M')| = E'$ και $E' = E$, βλέπουμε ότι

$$|\det(M)| = E.$$

Αποδείξαμε λοιπόν την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 6.2.0.7 Το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου με κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία που αντιστοιχούν στις γραμμές ενός 2×2 πίνακα M είναι ίσο με την απόλυτη τιμή της $\det(M)$.

Ανάλογη πρόταση ισχύει και για την ορίζουσα 3×3 -πίνακα, που αντιστοιχεί σε όγκο του κατάλληλου παραλληλεπίπεδου.

6.3 Ορίζουσα και Βαθμίδα

Έστω ότι $A \in M_n(K)$ και έστω ότι οι πίνακες A_1, A_2, A_3 προκύπτουν από τον A ως εξής:

$$A \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \kappa \cdot \Gamma_j} A_1, \quad A \xrightarrow{\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j} A_2, \quad A \xrightarrow{\Gamma_i \rightarrow \lambda \cdot \Gamma_i} A_3.$$

Σημειώνουμε ότι

$$A_1 = E_{i+\kappa \cdot j} A, \quad A_2 = E_{i \leftrightarrow j} A, \quad A_3 = E_{\lambda \cdot i} A.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\det(A_1) = \det(A), \quad \det(A_2) = -\det(A), \quad \det(A_3) = \lambda \cdot \det(A).$$

ενώ

$$\det(E_{i+\kappa \cdot j}) = 1, \quad \det(E_{i \leftrightarrow j}) = -1, \quad \det(E_{\lambda \cdot i}) = \lambda.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι

- $\det(E_{i+\kappa \cdot j} A) = \det(E_{i+\kappa \cdot j}) \det(A)$,
- $\det(E_{i \leftrightarrow j} A) = \det(E_{i \leftrightarrow j}) \det(A)$,
- $\det(E_{\lambda \cdot i} A) = \det(E_{\lambda \cdot i}) \det(A)$,

και άρα ισχύει ότι

$$\det(EA) = \det(E) \det(A), \tag{6.3.1}$$

για κάθε στοιχειώδη πίνακα $E \in M_n(K)$. Παρατηρούμε ότι

$$\det(E_2 E_1 A) = \det(E_2 (E_1 A)) \stackrel{(6.3.1)}{=} \det(E_2) \det(E_1 A) \stackrel{(6.3.1)}{=} \det(E_2) \det(E_1) \det(A).$$

Μπορούμε εύκολα χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή να αποδείξουμε ότι

$$\det(E_s \cdots E_1 A) = \det(E_s) \cdots \det(E_1) \det(A), \tag{6.3.2}$$

για οποιουδήποτε στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \dots, E_s \in M_n(K)$ (κάντε το!).

Για $A = I_n$, η σχέση αυτή γίνεται

$$\det(E_s \cdots E_1) = \det(E_s) \cdots \det(E_1). \tag{6.3.3}$$

Προκύπτει, λοιπόν, η επόμενη πρόταση που συνδέει τη βαθμίδα $\text{rank}(A)$ και την ορίζουσα $\det(A)$, για πίνακες $A \in M_n(K)$.

Πρόταση 6.3.0.1 Έστω ο πίνακας $A \in M_n(K)$. Τότε

$$\text{rank}(A) = n, \text{ αν και μόνο αν } \det(A) \neq 0.$$

Ισοδύναμα

$$\text{rank}(A) < n, \text{ αν και μόνο αν } \det(A) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω R η ε.κ.μ.γ. του πίνακα A . Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, \dots, E_s \in M_n(K)$, $s \geq 1$, τέτοιοι, ώστε

$$E_s \cdots E_1 A = R.$$

Αφού

$$\det(E_s) \cdots \det(E_1) \det(A) = \det(R),$$

και οι ορίζουσες στοιχειωδών πινάκων είναι μη μηδενικές, βλέπουμε ότι

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \det(R) \neq 0.$$

Αν $\text{rank}(A) = n$, τότε $R = I_n$ (βλ. Παρατήρηση 5.3.0.3.γ) και επομένως $\det(A) \neq 0$.

Αντίστροφα, αν $\det(A) \neq 0$ και $\text{rank}(A) < n$, τότε η τελευταία γραμμή της ε.κ.μ.γ. R είναι μηδενική, άρα $\det(R) = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Επομένως $\text{rank}(A) = n$. ■

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με τη Πρόταση 5.5.0.8 προκύπτουν οι επόμενες ισοδύναμες συνθήκες:

Ισοδύναμες συνθήκες για αντιστρέψιμο πίνακα

Έστω πίνακας $A \in M_n(K)$. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

- ο A είναι αντιστρέψιμος
- $\det(A) \neq 0$
- $\text{rank}(A) = n$
- οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες
- οι γραμμές του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Είναι, άμεσο, ότι η άρνηση κάποιας από τις παραπάνω συνθήκες οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο A είναι μη αντιστρέψιμος.

Ισοδύναμες συνθήκες για μη αντιστρέψιμο πίνακα

Έστω πίνακας $A \in M_n(K)$. Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

- ο A είναι μη αντιστρέψιμος
- $\det(A) = 0$
- $\text{rank}(A) < n$
- οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες
- οι γραμμές του A είναι γραμμικά εξαρτημένες

Παράδειγμα 6.3.0.2 Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $\det(A) = -48 \neq 0$, επομένως οι στήλες του πίνακα

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Το ίδιο ισχύει και για τις γραμμές του πίνακα

$$\Gamma_1 = [1 \ 2 \ 3], \quad \Gamma_2 = [8 \ 9 \ 4], \quad \Gamma_3 = [7 \ 6 \ 5].$$

Θα δούμε ότι η βαθμίδα ενός πίνακα $A \in M_{n \times m}(K)$, προσδιορίζεται από τις ορίζουσες των τετραγωνικών υποπινάκων του A . Λέμε ότι η ορίζουσα ενός $s \times s$ -υποπίνακα του A ($s \leq \min\{n, m\}$), ονομάζεται **υποορίζουσα** του A **τάξης s** .

Πρόταση 6.3.0.3 Έστω ο $n \times m$ -πίνακας $A \in M_{n \times m}(K)$. Τότε

$$\begin{aligned} \text{rank}(A) = r &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{1) υπάρχει τουλάχιστον μία μη μηδενική υποορίζουσα του } A \text{ τάξης } r, \\ \text{2) δεν υπάρχει μη μηδενική υποορίζουσα του } A \text{ τάξης μεγαλύτερης του } r. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Έστω $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ οι στήλες του A , $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ οι γραμμές του A και έστω $\text{rank}(A) = r$ ($r \leq \min\{n, m\}$). Γνωρίζουμε ότι r από τις στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες (βλ. Πρόσχημα 5.5.0.4), έστω ότι είναι οι $\Sigma_{i_1}, \dots, \Sigma_{i_r}$.

Αρχικά δείχνουμε ότι υπάρχει $r \times r$ -υποπίνακας του A με ορίζουσα διάφορη του 0. Έστω

$$A' = [\Sigma_{i_1} \ \cdots \ \Sigma_{i_r}].$$

Ο A' είναι $n \times r$ -υποπίνακας του A . Οι στήλες του A' είναι γραμμικά ανεξάρτητες, επομένως $\text{rank}(A') = r$. Επομένως, υπάρχουν r γραμμές του A' , έστω οι G_{j_1}, \dots, G_{j_r} , $j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, n\}$, που είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητες. Είναι φανερό ότι

$$A'' = \begin{bmatrix} G_{j_1} \\ \vdots \\ G_{j_r} \end{bmatrix},$$

είναι $r \times r$ υποπίνακας του A . Επιπλέον, αφού οι γραμμές του A'' είναι γραμμικά ανεξάρτητες, προκύπτει ότι $\det(A'') \neq 0$.

Έστω, τώρα, $M = [S_1 | \cdots | S_r]$ ένας $s \times s$ -υποπίνακας του A , με $s > r$. Έστω ότι οι στήλες του M προκύπτουν από τις στήλες $\Sigma_{q_1}, \dots, \Sigma_{q_s}$ του A και τις $\Gamma_{p_1}, \dots, \Gamma_{p_s}$ γραμμές του A . Όμως, οι στήλες $\Sigma_{q_1}, \dots, \Sigma_{q_s}$ του A είναι γραμμικά εξαρτημένες (βλ. Πρόσχημα 5.5.0.4) και άρα υπάρχει κάποια σχέση γραμμικής εξάρτησης

$$\lambda_1 \Sigma_{q_1} + \cdots + \lambda_s \Sigma_{q_s} = \mathbf{0}_{n \times 1}.$$

Αυτό όμως σημαίνει αναγκαστικά ότι

$$\lambda_1 S_1 + \cdots + \lambda_s S_s = \mathbf{0}_{s \times 1},$$

άρα S_1, \dots, S_s είναι γραμμικά εξαρτημένες και $\det(M) = 0$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση της πρότασης, αρκεί να σημειώσουμε ότι αν οι στήλες κάποιου $r \times r$ υποπίνακα του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, τότε οι αντίστοιχες στήλες του A είναι και αυτές γραμμικά ανεξάρτητες (δείτε παραπάνω) και άρα $\text{rank}(A) \geq r$. Σας αφήνουμε όμως να συμπληρώσετε όλες τις απαραίτητες λεπτομέρειες της απόδειξης. ■

Παραδείγματα 6.3.0.4

i. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -5 & 8 & 10 \\ 4 & 3 & -8 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η τρίτη στήλη του A είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο της πρώτης,

$$\Sigma_3 = -2\Sigma_1 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow \text{rank}(A) < 3.$$

Υπάρχει μη μηδενική 2×2 -υποορίζουσα του A , για παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = 31 \neq 0,$$

επομένως $\text{rank}(A) = 2$.

ii. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 8 & 2 & 5 \\ 5 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε την 3×3 -υποορίζουσα του A

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -5 \cdot 16 = -80 \neq 0,$$

άρα $\text{rank}(A) = 3$.

iii. Εξετάζουμε αν οι πίνακες στήλη

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

είναι ή όχι γραμμικά εξαρτημένοι. Αρκεί να βρούμε τη βαθμίδα του πίνακα

$$A = [\Sigma_1 \mid \Sigma_2 \mid \Sigma_3] = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 2 \\ 7 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε για παράδειγμα την 3×3 -υποορίζουσα του A

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 \leftrightarrow \Sigma_3} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot 3 \cdot 5 = -45 \neq 0,$$

επομένως $\text{rank}(A) = 3$ και οι $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

6.4 Ορίζουσα Γινομένου Πινάκων

Το επόμενο συμπέρασμα δείχνει ότι η συνάρτηση $\det : M_n(K) \rightarrow K, A \mapsto \det(A)$, ικανοποιεί την πολλαπλασιαστική ιδιότητα.

Θεώρημα 6.4.0.1 Αν $A, B \in M_n(K)$, τότε

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Απόδειξη. Έστω R η ε.κ.μ.γ. του πίνακα A . Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, \dots, E_s \in M_n(K)$, $s \geq 1$, τέτοιοι, ώστε $E_s \cdots E_1 A = R$. Επομένως,

$$A = E_1^{-1} \cdots E_s^{-1} R \Rightarrow AB = (E_1^{-1} \cdots E_s^{-1} R)B = E_1^{-1} \cdots E_s^{-1} (RB).$$

Σημειώνουμε ότι οι πίνακες $E_1^{-1}, \dots, E_s^{-1}$ είναι στοιχειώδεις. Από τη σχέση (6.3.2) και τη σχέση (6.3.3) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1^{-1} \cdots E_s^{-1} RB) = \det(E_1^{-1}) \cdots \det(E_s^{-1}) \cdot \det(RB) \Rightarrow \\ \det(AB) &= \det(E_1^{-1} \cdots E_s^{-1}) \cdot \det(RB). \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $\text{rank}(A) = n$. Τότε η ε.κ.μ.γ. του A είναι ο $R = I_n$. Έτσι $A = E_1^{-1} \cdots E_s^{-1}$ και η σχέση (6.4.1) γίνεται

$$\det(AB) = \det(E_1^{-1} \cdots E_s^{-1}) \cdot \det(I_n B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

- $\text{rank}(A) < n \Leftrightarrow \det(A) = 0$. Τότε η τελευταία γραμμή της ε.κ.μ.γ. R είναι μηδενική. Εκτελώντας το γινόμενο RB παρατηρούμε ότι και η τελευταία γραμμή του πίνακα RB είναι μηδενική. Επομένως, $\det(RB) = 0$ και άρα

$$\det(AB) = 0 = \det(A) \cdot \det(B) = 0.$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν δείξαμε ότι ισχύει η ζητούμενη σχέση. ■

Σημειώνουμε ότι η ορίζουσα \det εν ικανοποιεί την αθροιστική ιδιότητα και ότι εν γένει $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$. Μπορείτε να δώσετε κάποιο παράδειγμα με 2×2 πίνακες που να δείχνουν τον ισχυρισμό μας;

Πόρισμα 6.4.0.2 Έστω $A, A_1, \dots, A_m \in M_n(K)$. Ισχύουν τα επόμενα.

- (i) $\det(A_1 \cdots A_m) = \det(A_1) \cdots \det(A_m)$.
- (ii) $\det(A^m) = (\det(A))^m$.
- (iii) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
- (iv) Όμοιοι πίνακες έχουν ίσες ορίζουσες.

Απόδειξη. Η σχέση (i) προκύπτει επαγωγικά από το Θεώρημα 6.4.0.1 και η (ii) προκύπτει από την (i), αν θέσουμε $A_1 = \cdots = A_m = A$. Αποδεικνύουμε τις υπόλοιπες ιδιότητες.

(iii) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$AA^{-1} = I_n \Rightarrow \det(AA^{-1}) = \det(I_n) \Leftrightarrow \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1 \Leftrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

(iv) Έστω οι όμοιοι πίνακες A και $M = PAP^{-1}$, όπου P ένας αντιστρέψιμος πίνακας του $M_n(K)$. Τότε

$$\begin{aligned} \det(M) &= \det(PAP^{-1}) = \det(P) \cdot \det(A) \cdot \det(P^{-1}) = \\ &= \det(P) \cdot \det(A) \cdot \frac{1}{\det(P)} = \det(A). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Σύμφωνα με τον ορισμό, για να είναι ο πίνακας $A \in M_n(K)$ αντιστρέψιμος και A' να είναι ο αντίστροφός του, θα πρέπει να ελέγξουμε ότι

$$AA' = I_n \quad \text{και} \quad A'A = I_n.$$

Θα δούμε ότι αρκεί να επιβεβαιώνουμε μόνο το ένα από τα δύο γινόμενα.

Πρόταση 6.4.0.3 Αν για τους πίνακες $A, B \in M_n(K)$ ισχύει

$$AB = I_n,$$

τότε οι πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και ισχύουν τα εξής:

$$BA = I_n, \quad A^{-1} = B, \quad B^{-1} = A.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$AB = I_n \Rightarrow \det(AB) = \det(I_n) \Leftrightarrow \det(A) \cdot \det(B) = 1 \Rightarrow \det(A) \neq 0, \det(B) \neq 0.$$

Επομένως, οι πίνακες A, B είναι αντιστρέψιμοι και κατά συνέπεια:

$$AB = I_n \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}I_n \Rightarrow B = A^{-1}. \quad \text{Όμοια } A = B^{-1}. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 6.4.0.4 Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, με $AB = 6I_n$. Θα δείξουμε ότι $AB = BA$. Πράγματι, αφού $1/6(AB) = I_n$, συμπεραίνουμε ότι

$$\left(\frac{1}{6}A\right)B = I_n \xrightarrow{6.4.0.3} B^{-1} = \frac{1}{6}A \Rightarrow A = 6B^{-1}.$$

Επομένως,

$$BA = B(6B^{-1}) = 6(BB^{-1}) = 6I_n = AB.$$

Σημειώνουμε ότι $\det(AB) = 6^n$ (γιατί;).

6.5 Προσαρτημένος Τετραγωνικού Πίνακα - Αντίστροφος Πίνακα II

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$, $1 \leq i, j \leq n$. Για τον επόμενο ορισμό θα χρειαστούμε την έννοια του συμπαραγόντα που είδαμε στην ενότητα 6.1. Ο πίνακας

$$\text{adj}(A) = (A_{ij})^T = \left((-1)^{i+j} \det(M_{ij}) \right)^T \in M_n(K)$$

ονομάζεται **προσαρτημένος** του πίνακα A . Ο προσαρτημένος πίνακας αποτελεί σημαντικό θεωρητικό εργαλείο, καθώς ικανοποιεί την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.5.0.1 Έστω $A \in M_n(K)$. Τότε

(i) $A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n.$

(ii) Αν $\det(A) \neq 0$, τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A).$$

Ας δούμε την απόδειξη της πρότασης στην περίπτωση ενός 3×3 -πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Η απόδειξη στη γενική περίπτωση γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Στην περίπτωση του 3×3 πίνακα A , ο προσαρτημένος του A είναι ο πίνακας

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα το γινόμενο

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 A_{11} + a_2 A_{12} + a_3 A_{13} = [a_1 \ a_2 \ a_3] \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{bmatrix} \\ 0 &\stackrel{(\Gamma_1=\Gamma_2)}{=} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = b_1 A_{11} + b_2 A_{12} + b_3 A_{13} = [b_1 \ b_2 \ b_3] \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{bmatrix} \\ 0 &\stackrel{(\Gamma_1=\Gamma_3)}{=} \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 A_{11} + c_2 A_{12} + c_3 A_{13} = [c_1 \ c_2 \ c_3] \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Όμοια

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ |A| \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ |A| \end{bmatrix}.$$

Τελικά

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$

και

$$A \operatorname{adj}(A) = \det(A) \cdot I_3.$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow A^T (\operatorname{adj}(A))^T = \det(A) \cdot I_3,$$

άρα

$$\operatorname{adj}(A)A = \det(A) \cdot I_3 = A \operatorname{adj}(A). \quad (6.5.1)$$

Αν $\det(A) \neq 0$, δηλαδή A είναι αντιστρέψιμος, πολλαπλασιάζουμε όλα τα σκέλη της σχέσης (6.5.1) με $1/\det(A)$ και βρίσκουμε ότι

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A).$$

Παραδείγματα 6.5.0.2

i. Θα αποδείξουμε ότι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμος και θα υπολογίσουμε τον A^{-1} .

1ο Βήμα Υπολογίζουμε την ορίζουσα του A :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) = 3 \neq 0$$

και ο A είναι αντιστρέψιμος.

2ο Βήμα Υπολογίζουμε τον προσαρτημένο του A ,

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 1 & -13 & 5 \\ 0 & 15 & -6 \end{pmatrix}^T.$$

3ο Βήμα Βρίσκουμε τον A^{-1} από τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 7 & -13 & 15 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

ii. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Θα δείξουμε ότι ο A δεν αντιστρέφεται και θα βρούμε μη μηδενικό πίνακα $M \in M_3(\mathbb{R})$ τέτοιον, ώστε

$$A \cdot M = M \cdot A = 0_3, \quad M \neq 0_3.$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του A ,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 = -\Gamma_1} 0.$$

Από την Πρόταση 6.5.0.1.i έχουμε

$$A \cdot \text{adj}(A) = \text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_3 = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Έτσι

$$M = \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Σημειώνουμε ότι οι πίνακες $\kappa \cdot \text{adj}(A)$, $\forall \kappa \in K$, $\kappa \neq 0$, ικανοποιούν τη ζητούμενη σχέση.

iii. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Θα βρούμε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο A αντιστρέφεται και θα υπολογίσουμε για τις τιμές αυτές τον A^{-1} . Έχουμε

$$\bullet \quad |A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3} \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$|A| = (a+2)(a-1)^2.$$

$$\bullet \quad \exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -2 \text{ και } a \neq 1.$$

$$\bullet \quad \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a^2 - 1 & -(a-1) & -(a-1) \\ -(a-1) & a^2 - 1 & -(a-1) \\ -(a-1) & -(a-1) & a^2 - 1 \end{pmatrix}^T.$$

$$\bullet \quad \text{Για } a \neq 1, -2, \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A) = \frac{1}{(a+2)(a-1)} \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

iv. Έστω ο 2×2 -πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K).$$

Υπολογίζουμε τον προσαρτημένο πίνακα του A :

$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Επομένως:

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ είναι αντιστρέψιμος, τότε } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

$$\text{v. } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

6.5.1 Ορίζουσα του Vandermonde

Συμβολίζουμε με $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ τον πίνακα

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Η ορίζουσα του $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ονομάζεται **ορίζουσα του Vandermode**. Ο υπολογισμός της ορίζουσας του Vandermode έπαιξε σπουδαίο ρόλο στην ανάδειξη της χρησιμότητας της γραμμικής άλγεβρας και στην ανάπτυξη των σχετικών τεχνικών. Προέκυψε από την προσπάθεια των μαθηματικών του 18ου αιώνα να αποδείξουν τον επόμενο ισχυρισμό:

Έστω n σημεία $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ με διακριτές τετμημένες ($x_i \neq x_j$, για $i \neq j$). Τότε υπάρχει ακριβώς μία πολυωνυμική καμπύλη, που να αντιστοιχεί σε πολυώνυμο βαθμού μικρότερου του n , που να διέρχεται από τα σημεία αυτά.

Θα δείξουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα $V(x, y, z)$, εφαρμόζοντας στοιχειώδεις γραμμοπράξεις, που δηλώνουμε με παρένθεση, πάνω από το σήμα της ισοότητας ανάμεσα στις ορίζουσες των αντίστοιχων πινάκων

$$\begin{aligned} |V(x, y, z)| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - x \cdot \Gamma_2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & y^2 - xy & z^2 - zx \end{vmatrix} \xrightarrow{(\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - x \cdot \Gamma_1)} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y-x & z-x \\ 0 & y(y-x) & z(z-x) \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} y-x & z-x \\ y(y-x) & z(z-x) \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & z \end{vmatrix}}_{|V(y,z)|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |V(x, y, z)| = (z-y)(z-x)(y-x). \end{aligned}$$

Δεν θα κάνουμε την αναλυτική απόδειξη της επόμενης πρότασης, ωστόσο σας καλούμε να επιχειρήσετε να την αποδείξετε, γενικεύοντας την παραπάνω τεχνική σε συνδυασμό με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής.

Πρόταση 6.5.1.1 Η ορίζουσα του Vandermode ισούται με

$$|V(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Κάναμε χρήση του συμβόλου \prod στην προηγούμενη πρόταση για να συντομεύσουμε τη γραφή του γινομένου. Αναλυτικά:

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) = (x_n - x_{n-1}) \cdots (x_n - x_1)(x_{n-1} - x_{n-2}) \cdots (x_2 - x_1).$$

Παράδειγμα 6.5.1.2 Θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \end{vmatrix}$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a & b \\ 4 & 9 & a^2 & b^2 \\ 8 & 27 & a^3 & b^3 \end{vmatrix} = |V(2, 3, a, b)| = \\ = (b-a)(b-3)(b-2)(a-3)(a-2)(3-2).$$

6.6 Εργαστήριο με Mathematica

Η εντολή **Det[A]** υπολογίζει την ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα A :

$A = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 5, 4\}, \{-1, 3, 2\}\};$ **MatrixForm[A]**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Det[A]

15

Για τον πίνακα $A \in M_3(\mathbb{R})$ ισχύει $\det(A) \neq 0$. Επομένως, η βαθμίδα του A θα ισούται με 3 και οι γραμμές και οι στήλες του A θα είναι γραμμικά ανεξάρτητες (βλ. Ενότητα 6.3):

MatrixRank[A]

3

Χρησιμοποιώντας τον πίνακα A που ορίσαμε προηγουμένως θα επιβεβαιώσουμε κάποιες από τις ιδιότητες της ορίζουσας. Αρχικά ορίζουμε έναν 3×3 -πίνακα B με στοιχεία επιλεγμένα τυχαία από το σύνολο $\{0, 1, 2\}$,

$B = \text{RandomChoice}\{\{0, 1, 2\}, \{3, 3\}\};$ **MatrixForm[B]**

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

{Det[A], Det[B], Det[A + B], Det[A.B]}

{15, -4, -24, -60}

Παρατηρούμε ότι

$$\det(A + B) = -24 \neq 15 - 4 = \det(A) + \det(B),$$

όμως

$$\det(AB) = -60 = 15 \cdot (-4) = \det(A) \cdot \det(B)$$

(Θεώρημα 6.4.0.1).

{MatrixForm[A], Det[A], MatrixForm[Transpose[A]], Det[Transpose[A]]}

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, 15, \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, 15 \right\}$$

Επιβεβαιώνουμε, λοιπόν, ότι $\det(A) = \det(A^T) = 15$.

Έστω $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ οι γραμμές του πίνακα A . Κατασκευάζουμε τον πίνακα $A1$ με γραμμές τις $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_1$. Αφού η τρίτη γραμμή του $A1$ ισούται με την πρώτη, $\det(A1) = 0$:

A1 = A; A1[[3]] = A[[1]]; {MatrixForm[A1], Det[A1]}

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, 0 \right\}$$

Κατασκευάζουμε στη συνέχεια τον πίνακα $A2$ με γραμμές τις $\Gamma_1, \Gamma_2, k \cdot \Gamma_1 + l \cdot \Gamma_2$. Η τρίτη γραμμή του $A2$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο γραμμών, έτσι $\det(A2) = 0$ (Παράδειγμα 6.2.0.6.iii):

$$\mathbf{A2} = \mathbf{A}; \mathbf{A2}[[3]] = k * \mathbf{A}[[1]] + l * \mathbf{A}[[2]]; \{\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{A2}], \mathbf{Det}[\mathbf{A2}]\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ k+2l & 2k+5l & 3k+4l \end{array} \right), 0 \right\}$$

Ο πίνακας $A3$ που ακολουθεί έχει ως γραμμές τις $\Gamma_1, k \cdot \Gamma_2, \Gamma_3$, επομένως για την ορίζουσα του θα ισχύει $\det(A3) = k \cdot \det(A)$:

$$\mathbf{A3} = \mathbf{A}; \mathbf{A3}[[2]] = k * \mathbf{A}[[2]]; \{\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{A}], \mathbf{Det}[\mathbf{A}], \mathbf{MatrixForm}[\mathbf{A3}], \mathbf{Det}[\mathbf{A3}]\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{array} \right), 15, \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2k & 5k & 4k \\ -1 & 3 & 2 \end{array} \right), 15k \right\}$$

Ο A είναι 3×3 -πίνακας, άρα $\det(kA) = k^3 \cdot \det(A), \forall k \in \mathbb{R}$:

$$\{\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{A}], \mathbf{Det}[\mathbf{A}], \mathbf{MatrixForm}[k * \mathbf{A}], \mathbf{Det}[k * \mathbf{A}]\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{array} \right), 15, \left(\begin{array}{ccc} k & 2k & 3k \\ 2k & 5k & 4k \\ -k & 3k & 2k \end{array} \right), 15k^3 \right\}$$

Αντιμεταθέτουμε την πρώτη με τη δεύτερη γραμμή του A ,

$$A \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} A4.$$

Η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο:

$$\mathbf{A4} = \mathbf{A}; \mathbf{A4}[[1]] = \mathbf{A}[[2]]; \mathbf{A4}[[2]] = \mathbf{A}[[1]]; \mathbf{A4}[[3]] = \mathbf{A}[[3]];$$

$$\{\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{A}], \mathbf{Det}[\mathbf{A}], \mathbf{MatrixForm}[\mathbf{A4}], \mathbf{Det}[\mathbf{A4}]\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{array} \right), 15, \left(\begin{array}{ccc} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{array} \right), -15 \right\}$$

Εφαρμόζουμε στον A τη γραμμοπράξη

$$A \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + k \cdot \Gamma_2} A5.$$

Η ορίζουσα δεν μεταβάλλεται:

$$\mathbf{A5} = \mathbf{A}; \mathbf{A5}[[1]] = \mathbf{A}[[1]] + k * \mathbf{A}[[2]]; \mathbf{A5}[[2]] = \mathbf{A}[[2]]; \mathbf{A5}[[3]] = \mathbf{A}[[3]];$$

$$\{\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{A}], \mathbf{Det}[\mathbf{A}], \mathbf{MatrixForm}[\mathbf{A5}], \mathbf{Det}[\mathbf{A5}]\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{array} \right), 15, \left(\begin{array}{ccc} 1+2k & 2+5k & 3+4k \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{array} \right), 15 \right\}$$

Δημιουργούμε τον πίνακα M με γραμμές τις

$$\Gamma_1, \Gamma_2, -3 \cdot \Gamma_1 + 4 \cdot \Gamma_2.$$

Οι τρεις γραμμές του M είναι γραμμικά εξαρτημένες, άρα $\det(M) = 0$, ενώ $\text{rank}(A) = 2$,

γιατί $\Gamma_1 \neq \lambda \cdot \Gamma_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ και οι Γ_1, Γ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες (βλ. Πρόταση 5.5.0.2.vii):

$M = A; M[[3]] = -3 * A[[1]] + 4 * A[[2]]; \{\text{MatrixForm}[M], \text{Det}[M], \text{MatrixRank}[M]\}$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 14 & 7 \end{array} \right), 0, 2 \right\}$$

Πρέπει και οι στήλες $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ του M να είναι γραμμικά εξαρτημένες. Βρίσκουμε μία σχέση γραμμικής εξάρτησής τους φέρνοντας τον M σε ε.κ.μ.γ.,

MatrixForm[RowReduce[M]]

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Διαπιστώνουμε ότι για τις στήλες του M ισχύει

$$\Sigma_3 = 7 \cdot \Sigma_1 - 2 \cdot \Sigma_2$$

και επαληθεύουμε τη σχέση αυτή (βλ. Ενότητα 5.6):

{M[[All, 3]], 7 M[[All, 1]] - 2 M[[All, 2]]}

$$\{\{3, 4, 7\}, \{3, 4, 7\}\}$$

Μπορούμε να ορίσουμε στο Mathematica τη συνάρτηση που απεικονίζει έναν πίνακα $A \in M_n(K)$ στον προσαρτημένο του πίνακα **adj[A]** ως εξής:

adj[m_] := Map[Reverse, Minors[Transpose[m], Length[m] - 1], {0, 1}]*

Table[(-1)^(i + j), {i, Length[m]}, {j, Length[m]}];

Βρίσκουμε τον προσαρτημένο ενός 2×2 -πίνακα K :

K = {{a, b}, {c, d}}; {MatrixForm[K], MatrixForm[adj[K]]}

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} d & -b \\ -c & a \end{array} \right) \right\}$$

Επαληθεύουμε παρακάτω τις σχέσεις της Πρότασης 6.5.0.1

$$A \text{adj}(A) = \text{adj}(A) A = \det(A) \cdot I_3, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A),$$

για τον αντιστρέψιμο πίνακα A :

{MatrixForm[A], MatrixForm[adj[A]], Det[A],

MatrixForm[A.adj[A]], MatrixForm[adj[A].A]}

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} -2 & 5 & -7 \\ -8 & 5 & 2 \\ 11 & -5 & 1 \end{array} \right), 15, \left(\begin{array}{ccc} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{array} \right) \right\}$$

{MatrixForm[Inverse[A]], MatrixForm[adj[A]]}

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} -\frac{2}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{7}{15} \\ -\frac{8}{15} & \frac{1}{3} & \frac{2}{15} \\ \frac{11}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{15} \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} -2 & 5 & -7 \\ -8 & 5 & 2 \\ 11 & -5 & 1 \end{array} \right) \right\}$$

Αφού $\det(M) = 0$, για τον πίνακα M θα έχουμε

$$M \operatorname{adj}(M) = \operatorname{adj}(M) M = 0_3 :$$

{MatrixForm[M], MatrixForm[adj[M]], Det[M],

MatrixForm[M.adj[M]], MatrixForm[adj[M].M]}

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 14 & 7 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} -21 & 28 & -7 \\ 6 & -8 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{array} \right), 0, \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}$$

Θα εφαρμόσουμε στον παρακάτω 4×5 -πίνακα P την Πρόταση 6.3.0.3.

$P = \{\{1, 2, 3, 0, 1\}, \{2, 5, 4, 2, 2\}, \{5, 14, 7, 8, 5\}, \{1, 3, 1, 2, 0\}\};$ **MatrixForm[P]**

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 14 & 7 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

MatrixRank[P]

3

Αφού η βαθμίδα του P ισούται με 3, πρέπει όλες οι υποορίζουσες του P τάξης 4 να είναι ίσες με το 0 και να υπάρχει τουλάχιστον μία υποορίζουσα τάξης 3 διάφορη του 0. Θεωρούμε αρχικά τους 4×4 -υποπίνακες P_j που προκύπτουν από τον P αν διαγράψουμε την j στήλη του, $j = 1, \dots, 5$, για παράδειγμα

$$P = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 14 & 7 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \longrightarrow P_1 = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \\ 14 & 7 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

Δείχνουμε ότι $\det(P_j) = 0$:

P1 = P[[All, 2;;5]]; {MatrixForm[P1], Det[P1]}

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 2 \\ 14 & 7 & 8 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right), 0 \right\}$$

P2 = P[[All, {1, 3, 4, 5}]]; P3 = P[[All, {1, 2, 4, 5}]]; P4 = P[[All, {1, 2, 3, 5}]];

P5 = P[[All, 1;;4]]; {MatrixForm[P2], MatrixForm[P3], MatrixForm[P4], MatrixForm[P5]}

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 5 & 14 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 14 & 7 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 14 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array} \right) \right\}$$

{Det[P2], Det[P3], Det[P4], Det[P5]}

$\{0, 0, 0, 0\}$

Ο P έχει 40 υποορίζες τάξης 3. Θα διαπιστώσουμε ότι οι περισσότερες από αυτές είναι ίσες με το 0. Συμβολίζουμε με P_{ijs} τον 3×3 -υποπίνακα που προκύπτει από τον P αν διαγράψουμε την i γραμμή του και τις στήλες j και s , $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j < s \leq 5$. Για παράδειγμα

$$\mathbf{P445} = P[\{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}]; \{\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{P445}], \mathbf{Det}[\mathbf{P445}]\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 14 & 7 \end{array} \right), 0 \right\}$$

$$\mathbf{P345} = P[\{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3\}\}]; \{\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{P445}], \mathbf{Det}[\mathbf{P445}]\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 14 & 7 \end{array} \right), 0 \right\}$$

$$\mathbf{P412} = P[\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}\}]; \{\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{P445}], \mathbf{Det}[\mathbf{P445}]\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & 14 & 7 \end{array} \right), 0 \right\}$$

Μπορούμε να εντοπίσουμε έναν 3×3 -υποπίνακα P_{ijs} με $\det(P_{ijs}) \neq 0$ ως εξής: Αφού $\det(P_{ijs}) \neq 0$, οι γραμμές και οι στήλες του P_{ijs} πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Φέρνουμε τον πίνακα P και τον ανάστροφο P^T σε ε.κ.μ.γ. R και Q αντίστοιχα. Οι θέσεις των καθοδηγητικών μονάδων του R και του Q θα μας υποδείξουν 3 γραμμικά ανεξάρτητες στήλες και 3 γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές του P αντίστοιχα ($3 = \text{rank}(P) = \text{rank}(P^T)$). Τα κοινά στοιχεία αυτών των στηλών και γραμμών θα σχηματίσουν τον ζητούμενο υποπίνακα P_{ijs} .

$$R = \mathbf{RowReduce}[P]; Q = \mathbf{RowReduce}[\mathbf{Transpose}[P]]; \{\mathbf{MatrixForm}[R], \mathbf{MatrixForm}[Q]\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}$$

Οι καθοδηγητικές μονάδες βρίσκονται στις στήλες 1, 2, 5 του R και 1, 2, 4 του Q , δηλαδή η 1η, 2η και 5η στήλη και η 1η, 2η και 4η γραμμή του P είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Ο υποπίνακας με μη μηδενική ορίζουσα που ψάχνουμε προκύπτει αν διαγράψουμε την 3η και 4η στήλη καθώς και την 3η γραμμή του P :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 2 & 2 \\ 5 & 14 & 7 & 8 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow P_{334} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Πράγματι, $\det(P_{334}) = -1 \neq 0$:

$$\mathbf{P324} = P[\{\{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}\}]; \{\mathbf{MatrixForm}[\mathbf{P324}], \mathbf{Det}[\mathbf{P324}]\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right), -1 \right\}$$

Κατασκευάζουμε τέλος έναν 4×4 -πίνακα S με βαθμίδα $\text{rank}(S) = 2$. Οι δύο πρώτες γραμμές g_1, g_2 του S είναι γραμμικά ανεξάρτητες, $g_1 \neq \lambda \cdot g_2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ και οι άλλες δύο γραμμές είναι γραμμικοί συνδυασμοί των g_1, g_2 :

$$S = \{g_1 = \{1, 2, 3, 0\}, g_2 = \{2, 1, 0, 2\}, g_1 + g_2, 3g_1 - g_2\};$$

$$\{\text{MatrixForm}[S], \text{MatrixRank}[S], \text{Det}[S]\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \end{array} \right), 2, 0 \right\}$$

Παρατηρούμε ότι ο προσαρτημένος πίνακας $\text{adj}(S)$ είναι ο μηδενικός 4×4 -πίνακας:

$$\text{MatrixForm}[\text{adj}[S]]$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Άσκηση 6.6.0.1 Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(K), n \geq 2$. Να αποδείξετε ότι

$$\text{rank}(A) \leq n - 2 \Rightarrow \text{adj}(A) = 0_n.$$

Λύση. Αφού $\text{rank}(A) \leq n - 2$, από την Πρόταση 6.3.0.3 έπεται ότι κάθε υποορίζουσα τάξης $n - 1$ του A ισούται με 0. Έτσι κάθε συμπαράγοντας στοιχείων του A ισούται με 0,

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij}) = 0,$$

$1 \leq i, j \leq n$, αφού ο M_{ij} είναι $(n - 1) \times (n - 1)$ -υποπίνακας του A . Επομένως,

$$\text{adj}(A) = (A_{ij})^T = 0_n.$$

Εξάσκηση με το Mathematica

1. Να κατασκευάσετε $n \times n$ -πίνακες A_n με βαθμίδα $\text{rank}(A_n) = n - 1, n = 3, 4, 5$ και να υπολογίσετε τη βαθμίδα του προσαρτημένου πίνακα $\text{adj}(A_n)$. Τι παρατηρείτε;
2. Με την εντολή $a = \text{Table}[\text{Random}[\text{Integer}, \{-5, 5\}], \{2\}, \{3\}]$ να κατασκευάσετε έναν 2×3 -πίνακα a με γραμμές $a[[1]], a[[2]]$ και στοιχεία επιλεγμένα τυχαία από το σύνολο $\{-5, \dots, 5\}$.

α) Να βρείτε την ορίζουσα των πινάκων $a^T \cdot a$ και $a \cdot a^T$. Τι παρατηρείτε;

β) Να κατασκευάσετε έναν 3×3 -πίνακα A που οι δύο πρώτες γραμμές του είναι οι $a[[1]]$ και $a[[2]]$ και η τρίτη του γραμμή είναι ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών, για παράδειγμα

$$A = \{a[[1]], a[[2]], 3a[[1]] - 2a[[2]]\}.$$

Να υπολογίσετε την ορίζουσα του A και να βρείτε μη μηδενικό πίνακα M με

$$A \cdot M = M \cdot A = 0_3.$$

3. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (iii) και (x) της ορίζουσας, να κατασκευάσετε 3×3 , 4×4 και 5×5 -πίνακες τέτοιους, ώστε η ορίζουσά τους να είναι ίση με 12 και όλα τα στοιχεία τους να είναι μη μηδενικά. Να επαληθεύσετε τα αποτελέσματά σας χρησιμοποιώντας το Mathematica.
4. Με την εντολή $An = \text{Table}[\text{Random}[\text{Integer}, \{-9, 9\}], \{n\}, \{n\}]$ να κατασκευάσετε $n \times n$ -πίνακες An , όπου $n = 3, 5, 7$, με στοιχεία επιλεγμένα τυχαία από το σύνολο $\{-9, \dots, 9\}$. Να υπολογίσετε τους αντισυμμετρικούς πίνακες $Mn = An - An^T$ και να διαπιστώσετε ότι $\det(Mn) = 0$.
5. Να αποδείξετε ότι η βαθμίδα των παρακάτω πινάκων είναι ίση με 3.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1-5 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1-5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Να αποδείξετε ότι όλες οι υποορίζουσες τάξης 4 των δύο πινάκων είναι ίσες με 0. Για καθέναν από τους δύο πίνακες, να βρείτε μία υποορίζουσα τάξης 3 που να είναι διάφορη του 0.

6.7 Ασκήσεις

Στα παρακάτω λυμένα παραδείγματα σημειώνουμε με (iii), (vi), (viii) τις ιδιότητες της ορίζουσας που χρησιμοποιούμε και χρωματίζουμε τη γραμμή ή τη στήλη ως προς τα στοιχεία της οποίας αναπτύσσουμε κάποια ορίζουσα.

Λυμένες Ασκήσεις

6.7.1 Να αποδείξετε ότι

$$\alpha) \begin{vmatrix} a_1 & a'_2 + a''_2 & a_3 \\ b_1 & b'_2 + b''_2 & b_3 \\ c_1 & c'_2 + c''_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a'_2 & a_3 \\ b_1 & b'_2 & b_3 \\ c_1 & c'_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a''_2 & a_3 \\ b_1 & b''_2 & b_3 \\ c_1 & c''_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\beta) \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} + a''_{i1} & \cdots & a'_{in} + a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

όπου τα στοιχεία των παραπάνω οριζουσών ανήκουν στο σώμα K .

Λύση. α) Αναπτύσσοντας τις ορίζουσες κατά τα στοιχεία της δεύτερης στήλης έχουμε

$$\begin{vmatrix} a_1 & a'_2 + a''_2 & a_3 \\ b_1 & b'_2 + b''_2 & b_3 \\ c_1 & c'_2 + c''_2 & c_3 \end{vmatrix} = -(a'_2 + a''_2) \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + (b'_2 + b''_2) \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - (c'_2 + c''_2) \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= -a'_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b'_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - c'_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} - a''_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b''_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} - c''_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} a_1 & a'_2 & a_3 \\ b_1 & b'_2 & b_3 \\ c_1 & c'_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a''_2 & a_3 \\ b_1 & b''_2 & b_3 \\ c_1 & c''_2 & c_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

β) Δουλεύουμε όμοια, αναπτύσσοντας τις ορίζουσες κατά τα στοιχεία της i -γραμμής. □

6.7.2 Av

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1,$$

να υπολογίσετε τις ορίζουσες των παρακάτω πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 4b_1 & 4b_2 & 4b_3 \\ a_1 - 5b_1 & a_2 - 5b_2 & a_3 - 5b_3 \\ 2c_1 + 3a_1 & 2c_2 + 3a_2 & 2c_3 + 3a_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4b_1 + c_1 & 4b_2 + c_2 & 4b_3 + c_3 \\ a_1 - 5b_1 & a_2 - 5b_2 & a_3 - 5b_3 \\ 2c_1 + 3a_1 & 2c_2 + 3a_2 & 2c_3 + 3a_3 \end{bmatrix}.$$

Λύση.

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 4b_1 & 4b_2 & 4b_3 \\ a_1 - 5b_1 & a_2 - 5b_2 & a_3 - 5b_3 \\ 2c_1 + 3a_1 & 2c_2 + 3a_2 & 2c_3 + 3a_3 \end{vmatrix} \stackrel{(vi)}{=} 4 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 - 5b_1 & a_2 - 5b_2 & a_3 - 5b_3 \\ 2c_1 + 3a_1 & 2c_2 + 3a_2 & 2c_3 + 3a_3 \end{vmatrix} = \\
&\stackrel{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 5\Gamma_1}{=} 4 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 2c_1 + 3a_1 & 2c_2 + 3a_2 & 2c_3 + 3a_3 \end{vmatrix} \stackrel{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 3\Gamma_2}{=} 4 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3 \end{vmatrix} \stackrel{(vi)}{=} \\
&= 4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \stackrel{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2}{=} -8 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -8 \cdot 1 = -8.
\end{aligned}$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $|B|$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του πίνακα B (βλ. Λυμένη Άσκηση 6.7.1) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
|B| &= \begin{vmatrix} 4b_1 + c_1 & 4b_2 + c_2 & 4b_3 + c_3 \\ a_1 - 5b_1 & a_2 - 5b_2 & a_3 - 5b_3 \\ 2c_1 + 3a_1 & 2c_2 + 3a_2 & 2c_3 + 3a_3 \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} 4b_1 & 4b_2 & 4b_3 \\ a_1 - 5b_1 & a_2 - 5b_2 & a_3 - 5b_3 \\ 2c_1 + 3a_1 & 2c_2 + 3a_2 & 2c_3 + 3a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 - 5b_1 & a_2 - 5b_2 & a_3 - 5b_3 \\ 2c_1 + 3a_1 & 2c_2 + 3a_2 & 2c_3 + 3a_3 \end{vmatrix} \stackrel{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_1}{=} \\
&= |A| + \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 - 5b_1 & a_2 - 5b_2 & a_3 - 5b_3 \\ 3a_1 & 3a_2 & 3a_3 \end{vmatrix} \stackrel{(vi)}{=} -8 + 3 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 - 5b_1 & a_2 - 5b_2 & a_3 - 5b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \stackrel{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3}{=} \\
&= -8 + 3 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ -5b_1 & -5b_2 & -5b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \stackrel{(vi)}{=} -8 - 5 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} \stackrel{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3}{=} \\
&= -8 + 15 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 7. \quad \square
\end{aligned}$$

6.7.3 Να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & y \\ 1 & x & y & 1 \\ 1 & y & x & 1 \\ y & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x + y + 2)(x + y - 2)(x - y)^2.$$

Λύση.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & y \\ 1 & x & y & 1 \\ 1 & y & x & 1 \\ y & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4} \begin{vmatrix} x + y + 2 & 1 & 1 & y \\ x + y + 2 & x & y & 1 \\ x + y + 2 & y & x & 1 \\ x + y + 2 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} \xrightarrow{(vi)} (x + y + 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & y \\ 1 & x & y & 1 \\ 1 & y & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \\ & \xrightarrow[\substack{\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i - \Gamma_1 \\ i=2,3,4}]{(x + y + 2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & y \\ 0 & x - 1 & y - 1 & 1 - y \\ 0 & y - 1 & x - 1 & 1 - y \\ 0 & 0 & 0 & x - y \end{vmatrix} = (x + y + 2) \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & 1 - y \\ y - 1 & x - 1 & 1 - y \\ 0 & 0 & x - y \end{vmatrix} = \\ & = (x + y + 2)(x - y) \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 \\ y - 1 & x - 1 \end{vmatrix} = \\ & = (x + y + 2)(x - y)[(x - 1)^2 - (y - 1)^2] = (x + y + 2)(x - y)(x + y - 2)(x - y). \quad \square \end{aligned}$$

6.7.4 Να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} (a - x)^2 & (a - y)^2 & a^2 \\ (b - x)^2 & (b - y)^2 & b^2 \\ x^2 & y^2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot x \cdot y \cdot a \cdot b \cdot (x - y) \cdot (a - b).$$

$$\begin{aligned} & \text{Λύση.} \quad \begin{vmatrix} (a - x)^2 & (a - y)^2 & a^2 \\ (b - x)^2 & (b - y)^2 & b^2 \\ x^2 & y^2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 - \Sigma_3]{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 - \Sigma_3} \begin{vmatrix} (a - x)^2 - a^2 & (a - y)^2 - a^2 & a^2 \\ (b - x)^2 - b^2 & (b - y)^2 - b^2 & b^2 \\ x^2 & y^2 & 0 \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} -x(2a - x) & -y(2a - y) & a^2 \\ -x(2b - x) & -y(2b - y) & b^2 \\ x^2 & y^2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{(vi)} x \cdot y \cdot \begin{vmatrix} x - 2a & y - 2a & a^2 \\ x - 2b & y - 2b & b^2 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 - \Sigma_2} \\ & = x \cdot y \cdot \begin{vmatrix} x - y & y - 2a & a^2 \\ x - y & y - 2b & b^2 \\ x - y & y & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{(vi)} x \cdot y \cdot (x - y) \cdot \begin{vmatrix} 1 & y - 2a & a^2 \\ 1 & y - 2b & b^2 \\ 1 & y & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \\ & = x \cdot y \cdot (x - y) \cdot \begin{vmatrix} 1 & y - 2a & a^2 \\ 0 & 2a - 2b & b^2 - a^2 \\ 0 & 2a & -a^2 \end{vmatrix} = x \cdot y \cdot (x - y) \cdot \begin{vmatrix} -2(b - a) & (b + a)(b - a) \\ 2a & -a^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(vi)} \\ & = x \cdot y \cdot (x - y) \cdot (b - a) \cdot a \cdot \begin{vmatrix} -2 & b + a \\ 2 & -a \end{vmatrix} = x \cdot y \cdot (x - y) \cdot (b - a) \cdot a \cdot (-2b) = \\ & = 2 \cdot x \cdot y \cdot a \cdot b \cdot (x - y) \cdot (a - b). \quad \square \end{aligned}$$

6.7.5 Να αποδείξετε ότι η τιμή της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} a & y & x & x \\ b^2 & b & y & x \\ bc^2 & c^2 & c & y \\ bcz^2 & cz^2 & z^2 & z \end{vmatrix}$$

είναι ανεξάρτητη του x .

Λύση.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} a & y & x & x \\ b^2 & b & y & x \\ bc^2 & c^2 & c & y \\ bcz^2 & cz^2 & z^2 & z \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 - b \cdot \Sigma_2} \begin{vmatrix} a-by & y & x & x \\ 0 & b & y & x \\ 0 & c^2 & c & y \\ 0 & cz^2 & z^2 & z \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 - c \cdot \Sigma_3} \begin{vmatrix} a-by & y-cx & x & x \\ 0 & b-cy & y & x \\ 0 & 0 & c & y \\ 0 & 0 & z^2 & z \end{vmatrix} = \\ & \xrightarrow{\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - z \cdot \Sigma_4} \begin{vmatrix} a-by & y-cx & x-zx & x \\ 0 & b-cy & y-zx & x \\ 0 & 0 & c-zy & y \\ 0 & 0 & 0 & z \end{vmatrix} \xrightarrow{(iii)} (a-by) \cdot (b-cy) \cdot (c-zy) \cdot z. \quad \square \end{aligned}$$

6.7.6 Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες είναι αντιστρέψιμος ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a & -a & 1 \\ a & a+1 & a \\ 1 & -a & 1 \end{pmatrix},$$

όταν $A \in M_3(\mathbb{R})$ και όταν $A \in M_3(\mathbb{C})$.

Λύση. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του A ,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a & -a & 1 \\ a & a+1 & a \\ 1 & -a & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 - \Sigma_3} \begin{vmatrix} a-1 & -a & 1 \\ 0 & a+1 & a \\ 0 & -a & 1 \end{vmatrix} = (a-1) \begin{vmatrix} a+1 & a \\ -a & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \det(A) = (a-1)(a^2 + a + 1). \end{aligned}$$

Ο A είναι αντιστρέψιμος, αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $A \in M_3(\mathbb{R})$. Γνωρίζουμε ότι $a^2 + a + 1 \neq 0, \forall a \in \mathbb{R}$ ($\Delta = -3 < 0$). Έτσι $\exists A^{-1} \Leftrightarrow a \neq 1$.
- $A \in M_3(\mathbb{C})$. Τότε

$$\exists A^{-1} \Leftrightarrow a \neq 1, \quad a \neq \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad a \neq \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}. \quad \square$$

6.7.7 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Να βρείτε τις ρίζες του πολωνύμου $P(x) = \det(A - xI_3)$.

Λύση. Υπολογίζουμε τον πίνακα $A - xI_3$,

$$A - xI_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x & 5 & 0 \\ 6 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 8-x \end{pmatrix}.$$

Έτσι

$$\begin{aligned} \det(A - xI_3) &= \begin{vmatrix} 2-x & 5 & 0 \\ 6 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 8-x \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{vmatrix} 2-x & 5 & 0 \\ 6 & 3-x & 1 \\ 9-x & 9-x & 9-x \end{vmatrix} \xrightarrow{(vi)} \\ &= (9-x) \cdot \begin{vmatrix} 2-x & 5 & 0 \\ 6 & 3-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3} (9-x) \cdot \begin{vmatrix} 2-x & 5 & 0 \\ 5 & 2-x & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$= (9-x) \cdot \begin{vmatrix} 2-x & 5 \\ 5 & 2-x \end{vmatrix} = (9-x) \cdot [(2-x)^2 - 5^2] = (9-x) \cdot (7-x)(-3-x),$$

$$\det(A - xI_3) = 0 \Leftrightarrow x = 9 \text{ ή } x = 7 \text{ ή } x = -3. \quad \square$$

6.7.8 Να βρείτε έναν 3×3 -πίνακα $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ με

$$\det(A) = 11 \quad \text{και} \quad a_{ij} \neq 0, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Λύση. Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} \stackrel{\text{(iii)}}{=} 1 \cdot 1 \cdot 11 = 11.$$

Ένας από τους άπειρους πίνακες A του $M_3(\mathbb{R})$ που να ικανοποιεί τις ζητούμενες σχέσεις μπορεί να προκύψει ως εξής:

$$11 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 11 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 + \Sigma_3} \\ \xrightarrow{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 + \Sigma_3} \end{array} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 11 & 11 & 11 \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix}. \quad \square$$

6.7.9 Έστω $A \in M_n(K)$. Να βρείτε την ορίζουσα του προσαρτημένου πίνακα $\text{adj}(A)$, αν γνωρίζετε την ορίζουσα του A .

Λύση. Από την Πρόταση 6.5.0.1.i γνωρίζουμε ότι

$$A \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n. \tag{6.7.1}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- $A = 0_n$. Τότε και $\text{adj}(A) = 0_n$, επομένως $\det(\text{adj}(A)) = \det(A) = 0$.
- $\det(A) = 0$ και $A \neq 0_n$. Θα δείξουμε ότι και στην περίπτωση αυτή $\det(\text{adj}(A)) = 0$. Πράγματι, αν $\det(\text{adj}(A)) \neq 0$, τότε ο πίνακας $\text{adj}(A)$ θα ήταν αντιστρέψιμος και

$$(6.7.1) \Rightarrow A \text{adj}(A) (\text{adj}(A))^{-1} = 0 \cdot I_n (\text{adj}(A))^{-1} \Rightarrow A = 0_n,$$

το οποίο είναι άτοπο, έτσι $\det(\text{adj}(A)) = 0$.

- $\det(A) \neq 0$. Τότε

$$(6.7.1) \Rightarrow \det(A \text{adj}(A)) = \det(\det(A) \cdot I_n) \stackrel{\text{(viii)}}{\Rightarrow} \Rightarrow \det(A) \cdot \det(\text{adj}(A)) = (\det(A))^n \cdot \det(I_n) \Rightarrow \det(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1} \cdot 1.$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν βρήκαμε ότι $\det(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$. □

6.7.10 Δίνονται οι πίνακες στήλη

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \Sigma'_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Να αποδείξετε ότι οι $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένες, ενώ οι $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma'_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Λύση. Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = [\Sigma_1 \mid \Sigma_2 \mid \Sigma_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad A' = [\Sigma_1 \mid \Sigma_2 \mid \Sigma'_3] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 9 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 5\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & -16 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 = 2\Gamma_2} 0,$$

επομένως οι στήλες $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ του A είναι γραμμικά εξαρτημένες, βλ. Ενότητα 6.3.

Αντίστοιχα, έχουμε $\det(A') = 4 \neq 0$ και οι στήλες $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma'_3$ του A' είναι γραμμικά ανεξάρτητες. \square

6.7.11 Ένας αντιστρέψιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ ονομάζεται **ορθογώνιος**, αν ο αντίστροφός του ισούται με τον ανάστροφό του, $A^{-1} = A^T$. Να αποδείξετε ότι

α) Η ορίζουσα ενός ορθογώνιου πίνακα ισούται με 1 ή -1 .

β) Το γινόμενο δύο ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας.

Λύση. α) Αφού $A^{-1} = A^T$, έχουμε

$$|A^{-1}| = |A^T| = |A|$$

και

$$AA^{-1} = I_n \Rightarrow |AA^{-1}| = |I_n| \Rightarrow |A| |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1.$$

β) Έστω ορθογώνιοι πίνακες $A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{R})$, έτσι $A_1^{-1} = A_1^T, A_2^{-1} = A_2^T$. Τότε

$$(A_1 A_2)^{-1} = A_2^{-1} A_1^{-1} = A_2^T A_1^T = (A_1 A_2)^T$$

και το γινόμενο $A_1 A_2$ είναι ορθογώνιος πίνακας. \square

Ασκήσεις για Εξάσκηση

6.7.1 Να υπολογίσετε την ορίζουσα των παρακάτω πινάκων:

$$A = \begin{bmatrix} 3 + 2i & 1 + i \\ 1 - i & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & i & 2 \\ -3 + i & 3 & i \\ 7 & 2i & 5 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ -4 & 7 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

6.7.2 Έστω $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$. Να δείξετε ότι

$$\text{i)} \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 - a_3 & 2a_2 + 3a_3 \\ 2b_1 & b_2 - b_3 & 2b_2 + 3b_3 \\ 2c_1 & c_2 - c_3 & 2c_2 + 3c_3 \end{vmatrix} = 10 \cdot |A|, \quad \text{ii)} \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ c_1 + a_1 & c_2 + a_2 & c_3 + a_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot |A|,$$

$$\text{iii)} \begin{vmatrix} \kappa a_1 + b_1 & \kappa a_2 + b_2 & \kappa a_3 + b_3 \\ \kappa b_1 + c_1 & \kappa b_2 + c_2 & \kappa b_3 + c_3 \\ \kappa c_1 + a_1 & \kappa c_2 + a_2 & \kappa c_3 + a_3 \end{vmatrix} = (\kappa^3 + 1) \cdot |A|.$$

6.7.3 Να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} a+x & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a+x \end{vmatrix} = x^2 \cdot (x+3a).$$

6.7.4 Να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x \cdot (x - y)^2 \cdot (x + y)^2.$$

6.7.5 Να δείξετε ότι

$$\begin{vmatrix} (a-x)^2 & (a-y)^2 & a^2 \\ (b-x)^2 & (b-y)^2 & b^2 \\ x & y & 0 \end{vmatrix} = x \cdot y \cdot (x-y) \cdot (a-b) \cdot (a+b).$$

6.7.6 Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & 0 & 5 & -6 & 7 \\ 2 & -5 & 0 & 8 & -9 \\ -3 & 6 & -8 & 0 & 10 \\ 4 & -7 & 9 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.7.7 Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει αντιστρέψιμος αντισυμμετρικός $n \times n$ -πίνακας $A \in M_n(K)$, όταν $n = 2\kappa + 1$ είναι περιττός αριθμός.

6.7.8 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 8 \\ -1 & 0 & 0 \\ -11 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Να υπολογίσετε το πολυώνυμο $P(x) = \det(A - xI_3)$ και να βρείτε τις ρίζες του.

6.7.9 Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες αντιστρέφεται ο πίνακας

$$M = \begin{pmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 10 & -9 & 4 - x \end{pmatrix},$$

όταν $M \in M_3(\mathbb{R})$ και όταν $M \in M_3(\mathbb{C})$.

6.7.10 Να υπολογίσετε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων με τη μέθοδο του προσαρτημένου πίνακα:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -9 \\ 1 & -2 & 7 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.7.11 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο A αντιστρέφεται και να υπολογιστεί για τις τιμές αυτές ο A^{-1} .

6.7.12 Αφού αποδείξετε ότι αν ένας πίνακας $A \in M_n(K)$ είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο προσαρτημένος πίνακας $\text{adj}(A)$ του A είναι επίσης αντιστρέψιμος, να βρείτε την ορίζουσα $\det(\text{adj}(A))$ και τον αντίστροφο $(\text{adj}(A))^{-1}$ του προσαρτημένου του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Βιβλιογραφία

- [1] Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Βαβατσούλας και Χ. Χαραλάμπους. *Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2017. ISBN: 978-960-418-727-0.
- [2] Α. Φωτιάδης και Χ. Χαραλάμπους. *Μία Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις, 2015. ISBN: 978-960-603-273-8. URL: <http://hdl.handle.net/11419/2329>.
- [3] S. Gilbert. *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*. Κρήτη: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1993. ISBN: 978-960-730-970-9.
- [4] Αθ. Πάπιστας. *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2019. ISBN: 978-960-418-841-3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάμε την επιλυσιμότητα των γραμμικών συστημάτων. Σε κάθε γραμμικό σύστημα αντιστοιχούμε δύο βασικούς πίνακες: τον πίνακα των συντελεστών και τον επαυξημένο πίνακα. Διερευνούμε πότε ένα σύστημα έχει λύσεις εξετάζοντας τις βαθμίδες των δύο πινάκων και αναπτύσσουμε μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Εισάγουμε την έννοια του μηδενοχώρου ενός πίνακα και τη συνδέουμε με τις λύσεις ομογενών γραμμικών συστημάτων. Ως εφαρμογή της θεωρίας που αναπτύσσεται στο κεφάλαιο, εξετάζουμε την ύπαρξη πολυωνυμικών καμπύλων που διέρχονται από δοθέντα σημεία. Η ενότητα «Εργαστήριο με Mathematica» συντελεί στην καλύτερη εμπέδωση των θεμάτων αυτών. Το κεφάλαιο κλείνει με μια ενότητα ασκήσεων πάνω στη θεωρία που αναπτύχθηκε. Για βιβλιογραφία στα θέματα αυτά παραπέμπουμε στα βιβλία [1], [2], [3], [4].

Προαπαιτούμενη γνώση: Κεφάλαια 4, 5, 6, βασικές Λυκειακές γνώσεις.

7.1 Βασικοί Ορισμοί

Έστω K ένα σώμα. Μία γραμμική εξίσωση με m αγνώστους είναι μία εξίσωση της μορφής

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m = b,$$

όπου $a_1, \dots, a_m, b \in K$. Οι a_1, \dots, a_m λέγονται συντελεστές, το b λέγεται σταθερά. Τα σύμ-

βολα x_1, x_2, \dots, x_m είναι οι άγνωστοι. Το σύστημα

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

με n γραμμικές εξισώσεις και m αγνώστους, όπου οι συντελεστές a_{ij} και οι σταθερές b_i ανήκουν στο K (για $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$), ονομάζεται **$n \times m$ -γραμμικό σύστημα** με συντελεστές από το K .

Για το $n \times m$ -γραμμικό σύστημα (7.1.1) ορίζουμε τους παρακάτω πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

$n \times m$
 $m \times 1$
 $n \times 1$

Έτσι το σύστημα (7.1.1) γράφεται στη γλώσσα των πινάκων ως

$$AX = B.$$

Η πληροφορία του συστήματος $AX = B$ συγκεντρώνεται στον $n \times (m + 1)$ -πίνακα

$$[A \mid B] = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array} \right),$$

ο οποίος ονομάζεται **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος.

Για το γραμμικό σύστημα $AX = B$ ισχύει

- πλήθος γραμμών του πίνακα A = πλήθος εξισώσεων του $AX = B$
- πλήθος στηλών του πίνακα A = πλήθος αγνώστων του $AX = B$.

Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$. Το γραμμικό σύστημα

$$AX = 0_{n \times 1},$$

όπου όλοι οι σταθεροί όροι είναι ίσοι με το 0, ονομάζεται **ομογενές**. Επίσης, αν $B \in M_{n \times 1}(K)$, το γραμμικό σύστημα $AX = 0_{n \times 1}$ ονομάζεται **αντίστοιχο ομογενές σύστημα** του γραμμικού συστήματος $AX = B$.

Παράδειγμα 7.1.0.1 Γράφουμε το παρακάτω 3×4 -γραμμικό σύστημα σε μορφή πινάκων

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}}_B.$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$[A \mid B] \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 8 & 0 & 2 \end{array} \right],$$

και το αντίστοιχο ομογενές είναι το σύστημα

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow AX = 0_{3 \times 1}.$$

Η διατεταγμένη m -άδα $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m) \in K^m$ ονομάζεται **λύση** του συστήματος (7.1.1) $AX = B$, αν ικανοποιεί όλες τις εξισώσεις του συστήματος,

$$a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + \dots + a_{im}\xi_m = b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Έτσι,

$$(\xi_1, \dots, \xi_m) \text{ λύση του } AX = B \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = B.$$

Το γραμμικό σύστημα $AX = B$ ονομάζεται **συμβατό**, αν έχει τουλάχιστον μία λύση. Αν το γραμμικό σύστημα $AX = B$ δεν έχει λύση, τότε ονομάζεται **ασύμβατο** ή **αδύνατο**.

Παραδείγματα 7.1.0.2

i. Η τετράδα $(7, 6, -1, 8) \in \mathbb{R}^4$ είναι λύση του συστήματος του Παραδείγματος 7.1.0.1,

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 &= 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= 2 \end{aligned}$$

γιατί

$$\begin{aligned} 3 \cdot 7 - 3 \cdot 6 + 9 \cdot (-1) + 8 &= 2 \\ 2 \cdot 7 - 2 \cdot 6 + 6 \cdot (-1) + 8 &= 4 \\ -2 \cdot 7 + 4 \cdot 6 + 8 \cdot (-1) &= 2. \end{aligned} \quad \text{Ισοδύναμα} \quad A \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} = B.$$

Θα δούμε στη συνέχεια ότι το σύστημα αυτό έχει άπειρες λύσεις και θα δούμε πώς συνδέονται μεταξύ τους αυτές οι λύσεις. Για παράδειγμα

$$(-3, -1, 0, 8)$$

είναι μία διαφορετική λύση του συστήματος.

ii. Το γραμμικό σύστημα που αντιστοιχεί στον επαυξημένο πίνακα

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ -5 & 6 & 8 & -600 \end{array} \right)$$

είναι το

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 13z &= 1000 \\ 3x - 9y + 3z &= 0 \\ -5x + 6y + 8z &= -600 \end{aligned}$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση, την τριάδα

$$(1200, 500, 300).$$

- iii. Θεωρούμε το 3×4 -γραμμικό σύστημα $RX = B$, όπου ο πίνακας R βρίσκεται σε ε.κ.μ.γ., όπου

$$R = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 7 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Οι καθοδηγητικές μονάδες βρίσκονται στην 1η, 2η και 4η στήλη του R , ενώ η 3η στήλη δεν έχει καθοδηγητική μονάδα. Λύνουμε τις εξισώσεις του συστήματος ως προς τους αγνώστους x_1, x_2, x_4 , μεταφέροντας τον άγνωστο x_3 στο άλλο σκέλος των εξισώσεων.

$$RX = B \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 7x_3 = 1 \\ x_2 - 5x_3 = 2 \\ x_4 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 7x_3 \\ x_2 = 2 + 5x_3 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

Ο άγνωστος x_3 που αντιστοιχεί στη στήλη που δεν έχει καθοδηγητική μονάδα είναι παράμετρος και μπορεί να πάρει ελεύθερα όποια τιμή θέλει από το \mathbb{R} . Έτσι, αν $x_3 = t$, τότε $x_1 = 1 - 7t$, $x_2 = 2 + 5t$, $x_4 = 3$. Γράφουμε τις λύσεις του συστήματος συναρτήσει της παραμέτρου ως τετράδες. Έτσι οι λύσεις του συστήματος είναι οι διατεταγμένες 4-άδες

$$(1 - 7t, 2 + 5t, t, 3) \in \mathbb{R}^4, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Θέτοντας για παράδειγμα $t = 0, 2, -1$, βλέπουμε ότι κάθε μία από τις διατεταγμένες 4-άδες $(1, 2, 0, 3)$, $(-13, 12, 2, 3)$ και $(8, -3, -1, 3)$ αντίστοιχα, αποτελεί λύση του συστήματος.

- iv. Έστω ότι ο επαυξημένος πίνακας ενός 4×5 -γραμμικού συστήματος είναι ο

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Η τελευταία γραμμή του πίνακα αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = 1 \Leftrightarrow 0 = 1,$$

η οποία είναι αδύνατη. Έτσι το σύστημα είναι ασύμβατο.

- v. Θεωρούμε το ομογενές $AX = 0_{3 \times 1}$, όπου A είναι ο πίνακας συντελεστών του 3×4 -γραμμικού συστήματος του Παραδείγματος 7.1.0.1,

$$\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Το ομογενές σύστημα είναι συμβατό, αφού η 4-άδα $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$ ικανοποιεί και τις τρεις εξισώσεις του συστήματος. Παρατηρούμε ότι το $(10, 7, -1, 0) \in \mathbb{R}^4$ είναι μία άλλη λύση του συστήματος $AX = 0_{3 \times 1}$, αφού

$$A \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και κάθε στοιχείο του \mathbb{R}^4 της μορφής

$$\kappa \cdot (10, 7, -1, 0) = (10\kappa, 7\kappa, -\kappa, 0), \quad \kappa \in \mathbb{R},$$

αποτελεί επίσης λύση του συστήματος, δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Πράγματι:

$$A \begin{bmatrix} 10\kappa \\ 7\kappa \\ -\kappa \\ 0 \end{bmatrix} = A \left(\kappa \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \kappa \left(A \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \kappa \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Τέλος το στοιχείο $(-2, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$, παρότι ικανοποιεί τις δύο πρώτες εξισώσεις δεν είναι λύση του συστήματος, γιατί δεν ικανοποιεί την τρίτη εξίσωση:

$$-2 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \neq 0.$$

Παρατηρήσεις 7.1.0.3

- (α) Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$, $B \in M_{n \times 1}(K)$. Αν ο επαυξημένος πίνακας $[A \mid B]$ του γραμμικού συστήματος $AX = B$ έχει μία γραμμή της μορφής $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c]$, με $c \neq 0$, τότε το σύστημα είναι ασύμβατο.
- (β) Αν $A \in M_{n \times m}(K)$ και $B \in M_{n \times 1}(K)$, είδαμε ότι το σύνολο των λύσεων του $AX = B$ είναι υποσύνολο του K^m . Ας δούμε τη δομή του K^m λίγο πιο προσεκτικά. Είναι φανερό ότι η συνάρτηση

$$\phi : M_{m \times 1}(K) \longrightarrow K^m, \quad \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} \mapsto (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)$$

είναι αμφιμονότιμη και επί. Η δομή, λοιπόν, του $M_{m \times 1}(K)$ μεταφέρεται στο K^m . Συγκεκριμένα, στο K^m ορίζεται η πρόσθεση και ο βαθμωτός (σκαλινός) πολλαπλασιασμός στοιχείου του K επί στοιχείου του K^m , κατ' αντιστοιχία των πράξεων στο $M_{m \times 1}(K)$,

- $(a_1, a_2, \dots, a_m) + (b_1, b_2, \dots, b_m) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m)$,
- $\kappa \cdot (a_1, a_2, \dots, a_m) = (\kappa a_1, \kappa a_2, \dots, \kappa a_m)$.

Για τα στοιχεία του K^m ορίζονται οι έννοιες της γραμμικής εξάρτησης ή ανεξαρτησίας, όπως ακριβώς ορίζονται οι αντίστοιχες έννοιες για τα στοιχεία του $M_{m \times 1}(K)$ (βλ. Ενότητα 5.5).

- (γ) Αν $A \in M_{n \times m}(K)$, τότε το ομογενές σύστημα $AX = 0_{n \times 1}$ έχει πάντα την m -άδα $(0, 0, \dots, 0) \in K^m$ ως λύση. Η λύση $(0, 0, \dots, 0)$ ονομάζεται **μηδενική λύση** του ομογενούς συστήματος $AX = 0_{n \times 1}$. Το ερώτημα, λοιπόν, που τίθεται για τα ομογενή συστήματα δεν αφορά τη συμβατότητά τους ή μη (γνωρίζουμε ότι τα συστήματα αυτά είναι πάντα συμβατά), αλλά αν έχουν μία μόνο ή περισσότερες λύσεις. Το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $AX = 0_{n \times 1}$ ονομάζεται **μηδενοχώρος του πίνακα A** , και συμβολίζεται με $\text{null}(A)$:

$$\text{null}(A) = \left\{ (\nu_1, \dots, \nu_m) \in K^m : A \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subseteq K^m.$$

Σημειώνουμε ότι

$$(0, 0, \dots, 0) \in \text{null}(A) \text{ και άρα } \text{null}(A) \neq \emptyset.$$

Πρόταση 7.1.0.4 Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$. Αν $(p_1, \dots, p_m), (q_1, \dots, q_m) \in \text{null}(A)$, τότε $\kappa \cdot (p_1, \dots, p_m) + \lambda \cdot (q_1, \dots, q_m) \in \text{null}(A)$, για $\kappa, \lambda \in K$.

Απόδειξη. Έστω $(p_1, \dots, p_m), (q_1, \dots, q_m) \in \text{null}(A)$. Επομένως

$$A \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.1.2)$$

Θα δείξουμε ότι $\kappa \cdot (p_1, \dots, p_m) + \lambda \cdot (q_1, \dots, q_m) = (\kappa \cdot p_1 + \lambda \cdot q_1, \dots, \kappa \cdot p_m + \lambda \cdot q_m) \in \text{null}(A)$, ή ισοδύναμα ότι

$$A \begin{bmatrix} \kappa \cdot p_1 + \lambda \cdot q_1 \\ \vdots \\ \kappa \cdot p_m + \lambda \cdot q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} \kappa \cdot p_1 + \lambda \cdot q_1 \\ \vdots \\ \kappa \cdot p_m + \lambda \cdot q_m \end{bmatrix} &= A \left(\begin{bmatrix} \kappa \cdot p_1 \\ \vdots \\ \kappa \cdot p_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda \cdot q_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot q_m \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} \kappa \cdot p_1 \\ \vdots \\ \kappa \cdot p_m \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} \lambda \cdot q_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot q_m \end{bmatrix} = \\ &= A \left(\kappa \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} \right) + A \left(\lambda \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} \right) = \kappa \cdot A \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_m \end{bmatrix} + \lambda \cdot A \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} \stackrel{(7.1.2)}{=} \\ &= \kappa \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Επομένως $\kappa \cdot (p_1, \dots, p_m) + \lambda \cdot (q_1, \dots, q_m)$ είναι λύση του $AX = 0_{n \times 1}$. ■

Είναι εύκολο να δούμε ότι η Πρόταση 7.1.0.4 δεν γενικεύεται σε μη ομογενή συστήματα. Προσπαθήστε να γράψετε ένα μη ομογενές σύστημα $AX = B$, με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους και να δείξετε ότι αν (ξ_1, ξ_2) είναι μία λύση του $AX = B$, τότε $3(\xi_1, \xi_2)$ δεν είναι λύση του ίδιου συστήματος. Θα κλείσουμε αυτήν την ενότητα με μία παρατήρηση.

Παρατήρηση 7.1.0.5 Έστω το ομογενές σύστημα $AX = 0_{n \times 1}$, όπου $A \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$. Αν $(\nu_1, \dots, \nu_m) \in \text{null}(A)$, τότε $\kappa \cdot (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \text{null}(A)$, $\forall \kappa \in \mathbb{K}$. Αν, λοιπόν, το K είναι άπειρο, όπως το \mathbb{R} ή το \mathbb{C} και $(\nu_1, \dots, \nu_m) \neq (0, \dots, 0)$ είναι λύση του $AX = 0_{n \times 1}$, τότε όλα τα βαθμωτά πολλαπλάσια του (ν_1, \dots, ν_m) είναι λύσεις και το $AX = 0_{n \times 1}$ έχει άπειρες λύσεις.

7.2 Γραμμικό σύστημα και ο χώρος των στηλών του πίνακα συντελεστών

Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$ και $B \in M_{n \times 1}(K)$. Θα μεταφράσουμε το πρόβλημα εύρεσης λύσεων των γραμμικών συστημάτων $AX = B$ και $AX = 0$ σε ερωτήματα αναφορικά με τον χώρο που παράγεται από τις στήλες του A και τον μηδενοχώρο του. Έστω $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ οι στήλες του πίνακα A . Αν

$$(\xi_1, \dots, \xi_m) \in K^m \text{ τότε } A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \xi_1 \cdot \Sigma_1 + \dots + \xi_m \cdot \Sigma_m.$$

Έτσι, αν (ξ_1, \dots, ξ_m) είναι λύση του $AX = B$, αυτό σημαίνει ότι B γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A . Επιπλέον, αν $(\nu_1, \dots, \nu_m) \in \text{null}(A)$ αυτό σημαίνει ότι

$$A \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και άρα } \nu_1 \cdot \Sigma_1 + \dots + \nu_m \cdot \Sigma_m = 0_{n \times 1}.$$

Αυτό σημαίνει όμως ότι οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Η αντίστροφη κατεύθυνση αυτών των ισχυρισμών είναι άμεση. Προκύπτει λοιπόν η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 7.2.0.1 Έστω $A = [\Sigma_1 \mid \dots \mid \Sigma_m] \in M_{n \times m}(K)$ και $B \in M_{n \times 1}(K)$.

(i) Το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό, αν και μόνο αν ο B γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A . Έτσι αν

$$(\xi_1, \dots, \xi_m) \text{ λύση του } AX = B, \text{ τότε } B = \xi_1 \cdot \Sigma_1 + \dots + \xi_m \cdot \Sigma_m.$$

(ii) Οι στήλες $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ του πίνακα A είναι γραμμικά εξαρτημένες, αν και μόνο αν $\text{null}(A) \neq \{(0, \dots, 0)\}$. Επιπλέον, αν

$$(\nu_1, \dots, \nu_m) \in \text{null}(A), \text{ τότε } \nu_1 \cdot \Sigma_1 + \dots + \nu_m \cdot \Sigma_m = 0_{n \times 1}.$$

Παράδειγμα 7.2.0.2 Έστω $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ οι στήλες του πίνακα συντελεστών A του 3×4 -γραμμικού συστήματος $AX = B$ του Παραδείγματος 7.1.0.1,

$$A = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 & \Sigma_4 \\ 3 & -3 & 9 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Στο Παράδειγμα 7.1.0.2.i είδαμε ότι το στοιχείο $(7, 6, -1, 8) \in \mathbb{R}^4$ αποτελεί λύση του συστήματος $AX = B$, έτσι

$$B = 7 \cdot \Sigma_1 + 6 \cdot \Sigma_2 - \Sigma_3 + 8 \cdot \Sigma_4.$$

Πράγματι,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Στο Παράδειγμα 7.1.0.2.v είδαμε ότι το στοιχείο $(10, 7, -1, 0) \in \text{null}(A)$ και άρα είναι λύση του ομογενούς συστήματος $AX = 0_{3 \times 1}$. Επομένως, οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες και

$$10 \cdot \Sigma_1 + 7 \cdot \Sigma_2 - \Sigma_3 + 0 \cdot \Sigma_4 = 0_{3 \times 1} \text{ είναι σχέση γραμμικής εξάρτησης.}$$

Πράγματι,

$$10 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

7.3 Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$, $B \in M_{n \times 1}(K)$ και έστω $E \in M_n(K)$ ένας αντιστρέψιμος πίνακας. Ας θεωρήσουμε τους πίνακες $A' = EA$ και $B' = EB$. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι τα

γραμμικά συστήματα $AX = B$ και $A'X = B'$ έχουν ακριβώς τις ίδιες λύσεις. Πράγματι, αν (ξ_1, \dots, ξ_m) είναι λύση του $AX = B$, τότε

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = B \Rightarrow EA \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = EB \Rightarrow A' \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = B',$$

άρα (ξ_1, \dots, ξ_m) είναι λύση του $A'X = B'$. Αντίστροφα, αν (ξ_1, \dots, ξ_m) είναι λύση του $A'X = B'$ τότε

$$A' \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = B' \Rightarrow E^{-1}A' \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = E^{-1}B' \Rightarrow A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = B$$

και (ξ_1, \dots, ξ_m) είναι λύση του $AX = B$. Ας εξετάσουμε τώρα τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid B]$ και την ε.κ.μ.γ. του $[R \mid B']$. Παρατηρούμε αρχικά ότι $R = EA$ και ότι $B' = EB$ για κάποιον αντιστρέψιμο πίνακα $E \in M_n(K)$ (βλ. Πρόταση 5.1.0.6). Επιπλέον, σημειώνουμε ότι R είναι η ε.κ.μ.γ. του A . Επομένως, το σύστημα $RX = B'$ έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις όπως το σύστημα $AX = B$. Αποδείξαμε λοιπόν το εξής:

Πρόταση 7.3.0.1 Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $AX = B$, όπου $A \in M_{n \times m}(K)$, $B \in M_{n \times 1}(K)$ και έστω $[R \mid B']$ η ε.κ.μ.γ. του επαυξημένου πίνακα $[A \mid B]$. Τότε το σύστημα $AX = B$ έχει ακριβώς τις ίδιες λύσεις με το σύστημα $RX = B'$. Ειδικότερα, το σύστημα $AX = B$ είναι ασύμβατο, αν και μόνο αν το σύστημα $RX = B'$ είναι ασύμβατο.

Ο αλγόριθμος για την επίλυση του γραμμικού συστήματος $AX = B$ βασίζεται σε αυτήν την πρόταση.

Αλγόριθμος επίλυσης γραμμικών συστημάτων

Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$, $B \in M_{n \times 1}(K)$. Για τη λύση του συστήματος $AX = B$, όπου $A \in M_{n \times m}(K)$, $B \in M_{n \times 1}(K)$, ακολουθούμε τα εξής βήματα:

- Εφαρμόζουμε στοιχειώδεις πράξεις γραμμών στον επαυξημένο πίνακα $[A \mid B]$, ώστε να μεταβούμε στον πίνακα $[R \mid B']$, όπου R είναι η ε.κ.μ.γ. του πίνακα A ,

$$[A \mid B] \longrightarrow \dots \longrightarrow [R \mid B'].$$

- Αν κατά τη διαδικασία των γραμμοπράξεων προκύψει γραμμή της μορφής

$$[0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c], \quad c \neq 0,$$

το σύστημα $AX = B$ είναι ασύμβατο, σταματάμε την επίλυση.

- Διαφορετικά, αν δεν έχει προκύψει γραμμή της παραπάνω μορφής, τότε βρίσκουμε τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στις μη μηδενικές γραμμές του $[R \mid B']$ και τις λύνουμε ως προς τους αγνώστους που στις αντίστοιχες στήλες του R υπάρχουν καθοδηγητικές μονάδες. Οι υπόλοιποι αγνώστοι γίνονται παράμετροι και μπορούν να λάβουν ελεύθερα οποιαδήποτε τιμή από το K . Γράφουμε τις λύσεις του συστήματος ως m -άδα.

Σημειώνουμε ότι όταν το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό και $[R \mid B']$ είναι η ε.κ.μ.γ. του $[A \mid B]$, τότε οι αγνώστοι που αντιστοιχούν στις στήλες του R που δεν έχουν καθοδηγητική μονάδα γίνονται παράμετροι και είναι ελεύθερες μεταβλητές.

Πρόταση 7.3.0.2

- (i) Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$, $B \in M_{n \times 1}(K)$. Το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό, αν και μόνο αν $\text{rank}([A \mid B]) = \text{rank}(A)$.
- (ii) Αν $A \in M_{n \times m}(K)$ και $\text{rank}(A) = n$, τότε το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό για όλους τους πίνακες $B \in M_{n \times 1}(K)$.
- (iii) Αν $A \in M_{n \times m}(K)$, $\text{rank}(A) = m$ και το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό, τότε το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση.
- (iv) Αν $\text{rank}(A) < m$ και το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό, τότε

$$m - \text{rank}(A) = \text{αριθμός παραμέτρων.}$$

Επομένως, σε αυτήν την περίπτωση, όταν $K = \mathbb{R}$ ή $K = \mathbb{C}$, τότε το σύστημα $AX = B$ έχει άπειρες λύσεις.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τον πρώτο ισχυρισμό, όλοι οι υπόλοιποι είναι άμεσες συνέπειες της θεωρίας που έχουμε αναπτύξει. Έστω $[R \mid B']$ η ε.κ.μ.γ. του $[A \mid B]$. Παρατηρούμε ότι $\text{rank}([A \mid B]) = \text{rank}([R \mid B'])$, ενώ $\text{rank}(A) = \text{rank}(R)$. Επιπλέον, είδαμε ότι το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό, αν και μόνο αν το σύστημα $RX = B'$ είναι συμβατό. Μένει λοιπόν να επιβεβαιώσουμε ότι το σύστημα $RX = B'$ είναι συμβατό, αν και μόνο αν

$$\text{rank}([R \mid B']) = \text{rank}(R).$$

Όμως

$$\text{rank}(R) \leq \text{rank}([R \mid B']) \leq \text{rank}(R) + 1$$

και ο μόνος τρόπος για να ισχύει

$$\text{rank}(R) < \text{rank}([R \mid B'])$$

είναι να υπάρχει μία γραμμή της μορφής

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & \textcircled{1} \end{array} \right]$$

δηλ. αν και μόνο αν το σύστημα $RX = B'$ είναι ασύμβατο. ■

Στα επόμενα παραδείγματα παίρνουμε το σώμα K να είναι το \mathbb{R} .

Παραδείγματα 7.3.0.3

- i. Λύνουμε το 3×3 -γραμμικό σύστημα του Παραδείγματος 7.1.0.2.ii,

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y - 13z = 1000 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \\ -5x + 6y + 8z = -600 \end{array} \right\}$$

Έστω A ο πίνακας συντελεστών και B ο πίνακας των σταθερών όρων του συστήματος. Εφαρμόζουμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα $[A \mid B]$ ώστε να φέρουμε τον A σε ε.κ.μ.γ.

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 3 & -9 & 3 & 0 \\ -5 & 6 & 8 & -600 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -13 & 1000 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & 8 & -600 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -13 & 1000 \\ -5 & 6 & 8 & -600 \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 5\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & -15 & 1000 \\ 0 & -9 & 13 & -600 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_3} \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 400 \\ 0 & -9 & 13 & -600 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -3 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 200 \\ 0 & -9 & 13 & -600 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 9\Gamma_2} \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -3 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 200 \\ 0 & 0 & 4 & 1200 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{4}\Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -3 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 200 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 300 \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_3} \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -3 & 0 & -300 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 500 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 300 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 3\Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & 1200 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 500 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 300 \end{array} \right], \text{ επομένως} \\
&AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 1200 \\ y & = 500 \\ z & = 300 \end{cases}
\end{aligned}$$

και το σύστημα έχει μοναδική λύση, την τριάδα $(x, y, z) = (1200, 500, 300)$. Παρατηρούμε ότι

- $\text{rank}([A \mid B]) = \text{rank}(A) = 3$ (συνθήκη για να είναι ένα σύστημα $AX = B$ συμβατό),
- $\text{rank}(A) = 3 = \text{πλήθος αγνώστων}$ (συνθήκη για να έχει ένα συμβατό σύστημα $AX = B$ μοναδική λύση).

ii. Έστω το 3×4 -γραμμικό σύστημα του Παραδείγματος 7.1.0.1,

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 6x_3 + x_4 = 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow AX = B, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 1 \\ -2 & 4 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Αρχικά θα λύσουμε το αντίστοιχο ομογενές $AX = 0_{3 \times 1}$ του συστήματος $AX = B$. Θα εφαρμόσουμε στοιχειώδεις πράξεις στις γραμμές του επαυξημένου πίνακα $[A \mid 0_{3 \times 1}]$ ώστε να φέρουμε τον A σε ε.κ.μ.γ. Επειδή οι γραμμοπράξεις δεν επηρεάζουν τα στοιχεία της μηδενικής στήλης $0_{3 \times 1}$, μπορούμε να δουλέψουμε μόνο με τον πίνακα A :

$$\begin{aligned}
A &\xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_3} \left[\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & 1 & 17 & 1 \\ 0 & 2 & 14 & 1 \\ -2 & 4 & 8 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & 1 & 17 & 1 \\ 0 & 2 & 14 & 1 \\ 0 & 6 & 42 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 3\Gamma_2} \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & 1 & 17 & 1 \\ 0 & 2 & 14 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow -\Gamma_3} \left[\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & 1 & 17 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \frac{1}{2}\Gamma_3} \\
&\rightarrow \left[\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & 1 & 17 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{cccc} \textcircled{1} & 0 & 10 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \end{array} \right] = R, \text{ η ε.κ.μ.γ. του πίνακα } A.
\end{aligned}$$

Λύνουμε τις εξισώσεις του συστήματος $RX = 0_{3 \times 1}$ ως προς τους αγνώστους x_1, x_2, x_4 , που στις αντίστοιχες στήλες του πίνακα R υπάρχουν καθοδηγητικές μονάδες. Η 3η στήλη του R δεν έχει καθοδηγητική μονάδα, έτσι ο αντίστοιχος άγνωστος x_3 θα γίνει παράμετρος, $x_3 \in \mathbb{R}$:

$$AX = 0_{3 \times 1} \Leftrightarrow RX = 0_{3 \times 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 10x_3 = 0 \\ x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -10x_3 \\ x_2 = -7x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Η ελεύθερη μεταβλητή x_3 θα είναι παράμετρος: έστω $x_3 = t$. Το σύστημα $AX = 0_{3 \times 1}$ έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$(-10t, -7t, t, 0) \in \mathbb{R}^4, \quad t \in \mathbb{R},$$

και το σύνολο λύσεων του $AX = 0_{3 \times 1}$ είναι ο μηδενοχώρος του πίνακα A ,

$$\text{null}(A) = \{(-10t, -7t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \{t \cdot (-10, -7, 1, 0) : t \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Παρατηρούμε ότι ο $\text{null}(A)$ αποτελείται από τα βαθμωτά πολλαπλάσια (τους γραμμικούς συνδυασμούς) του $(-10, -7, 1, 0) \in \mathbb{R}^4$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το στοιχείο $(-10, -7, 1, 0)$ παράγει τον $\text{null}(A)$.

Λύνουμε το σύστημα $AX = B$ εφαρμόζοντας στον επανξιημένο πίνακα $[A \mid B]$ τις ίδιες ακριβώς γραμμοπράξεις που κάναμε προηγουμένως στον A . Θα μεταβούμε στον παρακάτω πίνακα $[R \mid B']$:

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 9 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 6 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 8 & 0 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 0 & 10 & 0 & -3 \\ 0 & \textcircled{1} & 7 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 8 \end{array} \right] = [R \mid B'],$$

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 10x_3 = -3 \\ x_2 + 7x_3 = -1 \\ x_4 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 - 10x_3 \\ x_2 = -1 - 7x_3 \\ x_4 = 8 \end{cases}$$

Η ελεύθερη μεταβλητή x_3 θα είναι παράμετρος: έστω $x_3 = t$. Έτσι το σύνολο των άπειρων λύσεων του συστήματος $AX = B$ είναι το παρακάτω υποσύνολο του \mathbb{R}^4 :

$$\begin{aligned} & \{(-3 - 10t, -1 - 7t, t, 8) : t \in \mathbb{R}\} = \\ & = \{(-3, -1, 0, 8) + (-10t, -7t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\} = \\ & = \{(-3, -1, 0, 8) + u : u \in \text{null}(A)\}. \end{aligned}$$

Όταν $t = 0$, παίρνουμε τη λύση $(-3, -1, 0, 8)$ του συστήματος $AX = B$, ενώ όταν $t = -1$ παίρνουμε τη λύση $(7, 6, -1, 8)$ αντίστοιχα (βλ. Παράδειγμα 7.1.0.2.i). Παρατηρήστε ότι

- $\text{rank}([A \mid B]) = \text{rank}(A) = 3 < \text{πλήθος } 4 \text{ αγνώστων (συνθήκη για να έχει ένα σύστημα } AX = B \text{ άπειρες λύσεις),}$
- $\text{πλήθος παραμέτρων} = \text{πλήθος αγνώστων} - \text{rank}(A) = 4 - 3 = 1,$
- το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = B$ προκύπτει αν προσθέσουμε τη λύση $(-3, -1, 0, 8)$ του $AX = B$ σε κάθε λύση $(-10t, -7t, t, 0) \in \text{null}(A)$ του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος $AX = 0_{3 \times 1}$.

iii. Στο παράδειγμα αυτό θα επιλύσουμε ταυτόχρονα γραμμικά συστήματα που έχουν τον ίδιο πίνακα συντελεστών. Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -8 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Θα λύσουμε ταυτόχρονα τα 4×5 -γραμμικά συστήματα

$$\alpha) AX = 0_{4 \times 1}, \quad \beta) AX = B, \quad \gamma) AX = C.$$

Αρκεί να εφαρμόσουμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα $[A \mid 0_{4 \times 1} \mid B \mid C]$ ώστε να φέρουμε τον A σε ε.κ.μ.γ. Όπως είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε να αφαιρέσουμε τη στήλη $0_{4 \times 1}$, αφού οι γραμμοπράξεις δεν επηρεάζουν τα στοιχεία της.

$$\begin{aligned}
 [A \mid B \mid C] &= \left[\begin{array}{cccc|cc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & -5 & -8 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -4 & -4 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 - \Gamma_1]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \left[\begin{array}{cccc|cc|c} \textcircled{1} & 0 & 2 & 1 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_2} \left[\begin{array}{cccc|cc|c} \textcircled{1} & 0 & 2 & 1 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3} \left[\begin{array}{cccc|cc|c} \textcircled{1} & 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{2} \end{array} \right] \\
 \alpha) AX = 0_{4 \times 1} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_4 - 2x_5 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2x_3 + x_5 \\ x_2 = x_3 - x_5 \\ x_4 = 2x_5 \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Οι άγνωστοι x_3, x_5 είναι ελεύθερες μεταβλητές. Θέτουμε $x_3 = t, x_5 = s$. Το σύνολο των λύσεων του ομογενούς συστήματος $AX = 0_{4 \times 1}$ είναι το σύνολο

$$\begin{aligned}
 \text{null}(A) &= \{(-2t + s, t - s, t, 2s, s) : t, s \in \mathbb{R}\} = \\
 &= \{(-2t, t, t, 0, 0) + (s, -s, 0, 2s, s) : t, s \in \mathbb{R}\} = \\
 &= \{t \cdot (-2, 1, 1, 0, 0) + s \cdot (1, -1, 0, 2, 1) : t, s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5.
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

- $\text{rank}(A) <$ πλήθος αγνώστων (συνθήκη για να έχει ένα ομογενές σύστημα $AX = 0_{n \times 1}$ άπειρες λύσεις),
- πλήθος παραμέτρων = πλήθος αγνώστων $- \text{rank}(A) = 5 - 3 = 2$,
- $\text{null}(A) =$ σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων $(-2, 1, 1, 0, 0)$, $(1, -1, 0, 2, 1)$ του \mathbb{R}^5 , λέμε ότι τα δύο αυτά στοιχεία παράγουν τον $\text{null}(A)$.
- πλήθος στοιχείων που παράγουν τον $\text{null}(A) =$ πλήθος παραμέτρων.

$$\beta) AX = B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 - x_5 = 2 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 1 \\ x_4 - 2x_5 = -5 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2 - 2x_3 + x_5 \\ x_2 = 1 + x_3 - x_5 \\ x_4 = -5 + 2x_5 \end{array} \right\}$$

Θέτουμε $x_3 = t, x_5 = s$. Το σύνολο των λύσεων του συστήματος $AX = B$ είναι το

$$\begin{aligned}
 &\{(2 - 2t + s, 1 + t - s, t, -5 + 2s, s) : t, s \in \mathbb{R}\} = \\
 &= \{(2, 1, 0, -5, 0) + (-2t + s, t - s, t, 2s, s) : t, s \in \mathbb{R}\} = \\
 &= \{(2, 1, 0, -5, 0) + u : u \in \text{null}(A)\} \subseteq \mathbb{R}^5.
 \end{aligned}$$

$$\gamma) AX = C \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 - x_5 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_5 = -1 \\ x_4 - 2x_5 = -1 \\ 0 = 2 \end{array} \right\}, \text{ άρα το } AX = C \text{ είναι ασύμβατο.}$$

Παρατηρούμε ότι $4 = \text{rank}([A \mid C]) > \text{rank}(A) = 3$.

Στην τελευταία πρόταση αυτής της ενότητας μελετάμε τη σχέση ανάμεσα στις πολλαπλές τυχόν λύσεις ενός συμβατού συστήματος και αποδεικνύουμε ότι διαφέρουν κατά ένα στοιχείο του μηδενοχώρου του πίνακα των συντελεστών του συστήματος.

Πρόταση 7.3.0.4 Έστω S το σύνολο των λύσεων του συμβατού γραμμικού συστήματος $AX = B$, όπου $A \in M_{n \times m}(K)$. Αν $(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in S$, τότε

$$S = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_m) + (\nu_1, \dots, \nu_m) : (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \text{null}(A)\}.$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_m) + (\nu_1, \dots, \nu_m) : (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \text{null}(A)\}$. Θα δείξουμε ότι $P \subseteq S$ και $S \subseteq P$, έτσι θα προκύψει το ζητούμενο $S = P$.

Έστω $(\nu_1, \dots, \nu_m) \in \text{null}(A)$ και $(\zeta_1, \dots, \zeta_m) + (\nu_1, \dots, \nu_m) = (\zeta_1 + \nu_1, \dots, \zeta_m + \nu_m)$ ένα τυχαίο στοιχείο του P . Τότε

$$\begin{aligned} A \begin{bmatrix} \zeta_1 + \nu_1 \\ \vdots \\ \zeta_m + \nu_m \end{bmatrix} &= A \left(\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_m \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_m \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_m \end{bmatrix} = B + 0_{n \times 1} = B \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\zeta_1 + \nu_1, \dots, \zeta_m + \nu_m) \in S. \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι $P \subseteq S$. Έστω τώρα ότι (ξ_1, \dots, ξ_m) είναι τυχαία λύση του συστήματος $AX = B$, δηλ. $(\xi_1, \dots, \xi_m) \in S$. Θα δείξουμε ότι η διαφορά

$$(\xi_1, \dots, \xi_m) - (\zeta_1, \dots, \zeta_m) = (\xi_1 - \zeta_1, \dots, \xi_m - \zeta_m) \in \text{null}(A).$$

Τότε όμως θα έχουμε ότι

$$(\xi_1, \dots, \xi_m) = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) + ((\xi_1, \dots, \xi_m) - (\zeta_1, \dots, \zeta_m)) \in P,$$

και επομένως θα έχουμε δείξει ότι $S \subseteq P$. Πράγματι:

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 - \zeta_1 \\ \vdots \\ \xi_m - \zeta_m \end{bmatrix} = A \left(\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_m \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_m \end{bmatrix} = B - B = 0_{n \times 1}.$$

Επομένως $S = P$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ■

Αξίζει να τονίσουμε ότι παίρνουμε το ίδιο σύνολο S , όποια συγκεκριμένη λύση $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ και να επιλέξουμε, αρκεί να προσθέσουμε σε αυτήν όλα τα στοιχεία του $\text{null}(A)$. Συγκεντρώνουμε τα συμπεράσματά μας στο επόμενο πόρισμα.

Πόρισμα 7.3.0.5 Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$, $B \in M_{n \times 1}(K)$.

(i) Οι επόμενες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

- Το ομογενές $n \times m$ -γραμμικό σύστημα $AX = 0_{n \times 1}$ έχει μοναδική λύση (τη μηδενική).
- $\text{null}(A) = \{(0, \dots, 0)\}$.
- $\text{rank}(A) = m$.

(ii) $AX = B$ έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\text{rank} \left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \right) = \text{rank}(A) = m$.

7.4 Τετραγωνικά Γραμμικά Συστήματα

Θα επικεντρωθούμε σε αυτήν την ενότητα στην περίπτωση των συστημάτων με n εξισώσεις και n αγνώστους. Έστω $AX = B$ ένα γραμμικό σύστημα, όπου $A \in M_n(K)$ και $B \in M_{n \times 1}(K)$.

Είναι φανερό ότι αν A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε $AX = B$ είναι συμβατό, όποιο και να είναι το B και μάλιστα η λύση δίνεται ως το γινόμενο

$$\Xi = A^{-1}B.$$

Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση αυτή $\det(A) \neq 0$ και $\text{rank}(A) = n$. Επιπλέον,

$$\text{null}(A) = \{(0, \dots, 0)\}.$$

Αν όμως ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det(A) = 0$, ισοδύναμα $\text{rank}(A) < n$ και προκύπτουν οι υποπεριπτώσεις:

- $\text{rank}([A \mid B]) = \text{rank}(A) + 1$ και επομένως το σύστημα $AX = B$ είναι ασύμβατο (Πρόταση 7.3.0.2.i),
- $\text{rank}([A \mid B]) = \text{rank}(A)$. Στην περίπτωση αυτή, το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό και το σύνολο των λύσεων καθορίζεται από $n - \text{rank}(A)$ παραμέτρους (Πρόταση 7.3.0.2.iv).

Η μέθοδος του Cramer μας επιτρέπει να υπολογίσουμε μεμονωμένες συντεταγμένες της μοναδικής λύσης του συστήματος $AX = B$, όταν ο πίνακας των συντελεστών A είναι αντιστρέψιμος. Η μέθοδος είναι κυρίως χρήσιμη για θεωρητικούς λόγους, καθώς συνήθως προκύπτουν πολλές πράξεις κατά τη χρήση της. Πριν δώσουμε την περιγραφή της μεθόδου, δίνουμε τον απαραίτητο συμβολισμό. Με $A(i, B)$ συμβολίζουμε τον $n \times n$ -πίνακα που προκύπτει από τον A αν αντικαταστήσουμε την i -στήλη του A με τη στήλη B , $i = 1, \dots, n$.

Παράδειγμα 7.4.0.1 Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Τότε

$$A(1, B) = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A(2, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A(3, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Η μέθοδος του Cramer εκφράζει τις συντεταγμένες των λύσεων του $AX = B$ ως κλάσματα με αριθμητές τις ορίζουσες των πινάκων $A(i, B)$.

Πρόταση 7.4.0.2 (Μέθοδος του Cramer) Αν ο $A \in M_n(K)$ είναι αντιστρέψιμος και ο $B \in M_{n \times 1}(K)$, τότε το γραμμικό σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in K^n$, όπου

$$\xi_1 = \frac{\det(A(1, B))}{\det(A)}, \quad \xi_2 = \frac{\det(A(2, B))}{\det(A)}, \quad \dots, \quad \xi_n = \frac{\det(A(n, B))}{\det(A)}.$$

Απόδειξη. Θα δούμε την απόδειξη στην περίπτωση που $A = (a_{ij}) \in M_3(K)$, καθώς η γενική περίπτωση γίνεται αντίστοιχα. Έστω, λοιπόν, το σύστημα $AX = B$. Αφού $\det(A) \neq 0$ και ο A είναι αντιστρέψιμος, η μοναδική λύση του $AX = B$ δίνεται από το γινόμενο

$$\Xi = A^{-1}B.$$

Θυμίζουμε ότι ο αντίστροφος του A προκύπτει από τη σχέση

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Επομένως

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32} \\ b_1 A_{13} + b_2 A_{23} + b_3 A_{33} \end{bmatrix}$$

Όμως

$$\det[A(1, B)] = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + b_3 A_{31}$$

$$\det[A(2, B)] = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + b_3 A_{32}$$

$$\det[A(3, B)] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} = b_1 A_{13} + b_2 A_{23} + b_3 A_{33}.$$

Άρα

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} \det[A(1, B)] \\ \det[A(2, B)] \\ \det[A(3, B)] \end{bmatrix}.$$

και η μοναδική λύση του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις

$$\xi_1 = \frac{\det[A(1, B)]}{\det(A)}, \quad \xi_2 = \frac{\det[A(2, B)]}{\det(A)}, \quad \xi_3 = \frac{\det[A(3, B)]}{\det(A)}.$$

Η γενική περίπτωση γίνεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. ■

Παραδείγματα 7.4.0.3

i. Έστω το 3×3 -γραμμικό σύστημα που λύσαμε στο Παράδειγμα 7.3.0.3.i,

$$\begin{cases} 2x + 5y - 13z = 1000 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \\ -5x + 6y + 8z = -600 \end{cases} \Leftrightarrow AX = B, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -13 \\ 3 & -9 & 3 \\ -5 & 6 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ -600 \end{bmatrix}.$$

Θα λύσουμε το σύστημα $AX = B$ με τη μέθοδο του Cramer. Έχουμε:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -13 \\ 3 & -9 & 3 \\ -5 & 6 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - \Sigma_1]{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 + 3 \cdot \Sigma_1} \begin{vmatrix} 2 & 11 & -15 \\ 3 & 0 & 0 \\ -5 & -9 & 13 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 11 & -15 \\ -9 & 13 \end{vmatrix} = -3 \cdot 8 \neq 0.$$

Συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση. Υπολογίζουμε τις παρακάτω ορί-
ζουσες:

$$\begin{aligned} \det[A(1, B)] &= \begin{vmatrix} 1000 & 5 & -13 \\ 0 & -9 & 3 \\ -600 & 6 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 + 3 \cdot \Sigma_3} \begin{vmatrix} 1000 & -34 & -13 \\ 0 & 0 & 3 \\ -600 & 30 & 8 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1000 & -34 \\ -600 & 30 \end{vmatrix} = \\ &= -3 \cdot 9600, \end{aligned}$$

$$\det[A(2, B)] = \begin{vmatrix} 2 & 1000 & -13 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & -600 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - \Sigma_1}} \begin{vmatrix} 2 & 1000 & -15 \\ 3 & 0 & 0 \\ -5 & -600 & 13 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1000 & -15 \\ -600 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot 4000,$$

$$\det[A(3, B)] = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1000 \\ 3 & -9 & 0 \\ -5 & 6 & -600 \end{vmatrix} \xrightarrow{\underline{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 + 3 \cdot \Sigma_1}} \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1000 \\ 3 & 0 & 0 \\ -5 & -9 & -600 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 11 & 1000 \\ -9 & -600 \end{vmatrix} =$$

$$= -3 \cdot 2400.$$

Η μοναδική λύση του συστήματος δίνεται από τις σχέσεις

$$x = \frac{\det[A(1, B)]}{\det(A)} = 1200, \quad y = \frac{\det[A(2, B)]}{\det(A)} = 500, \quad z = \frac{\det[A(3, B)]}{\det(A)} = 300.$$

ii. Θα λύσουμε το 2×2 -γραμμικό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ \lambda^2 x - 2y = \lambda \end{array} \right\} \Leftrightarrow A_\lambda X = B_\lambda, \quad A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda - 1 \\ \lambda \end{bmatrix},$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. Υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$|A_\lambda| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda^2 = -\lambda(\lambda - 2),$$

$$|A_\lambda(1, B_\lambda)| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda + 2 + \lambda = -(\lambda - 2),$$

$$|A_\lambda(2, B_\lambda)| = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^3 + \lambda^2 = -\lambda^2(\lambda - 2).$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

α. $|A_\lambda| \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 0, \lambda \neq 2$. Το σύστημα $A_\lambda X = B_\lambda$ έχει μοναδική λύση,

$$(x, y) = \left(\frac{|A_\lambda(1, B_\lambda)|}{|A_\lambda|}, \frac{|A_\lambda(2, B_\lambda)|}{|A_\lambda|} \right) = \left(-\frac{1}{\lambda}, -\lambda \right) \in \mathbb{R}^2.$$

β. $|A_\lambda| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 2$, τότε $\text{rank}(A_\lambda) < 2$ και το σύστημα μπορεί να είναι ασύμβατο ή να έχει άπειρες λύσεις. Η ορίζουσα $|A_\lambda|$ μηδενίζεται για δύο τιμές του λ , έτσι προκύπτουν δύο υποπεριπτώσεις:

- $\lambda = 0$. Λύνουμε το σύστημα $A_0 X = B_0$ εφαρμόζοντας γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος,

$$[A_0 \mid B_0] = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \end{array} \right].$$

Παρατηρούμε ότι $2 = \text{rank}([A_0 \mid B_0]) \neq \text{rank}(A) = 1$ και το σύστημα $A_0 X = B_0$ είναι ασύμβατο.

- $\lambda = 2$. Λύνουμε όμοια το σύστημα $A_2 X = B_2$. Θα διαπιστώσουμε ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις:

$$[A_2 \mid B_2] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} \textcircled{1} & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

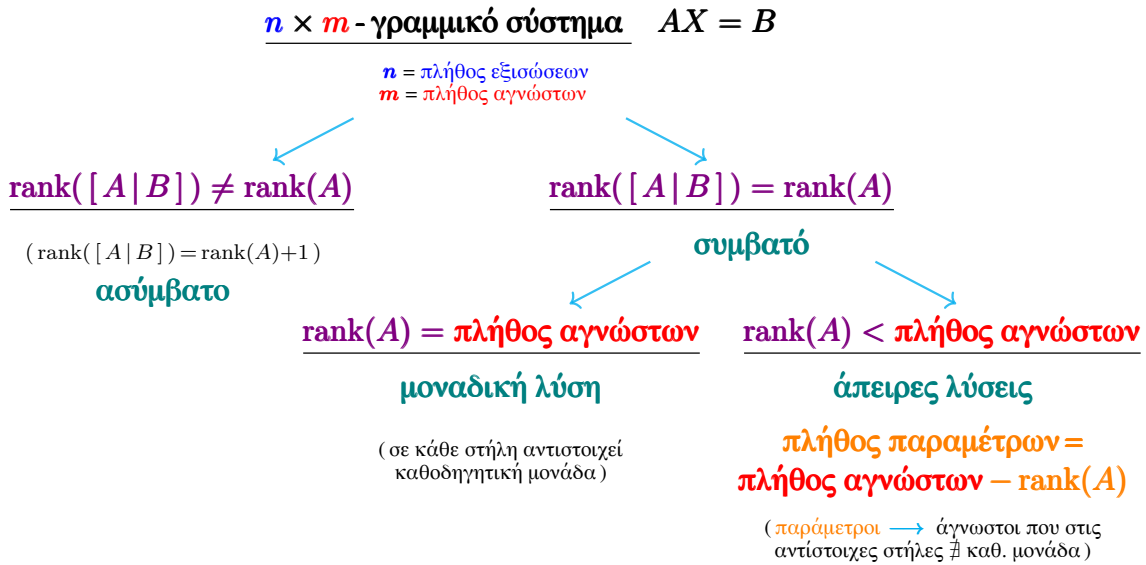
$$A_2 X = B_2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y/2 = 1/2 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = y/2 + 1/2, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Το σύνολο των άπειρων λύσεων του συστήματος $A_2 X = B_2$ είναι το

$$\{(y/2 + 1/2, y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

7.5 Διερεύνηση Γραμμικών Συστημάτων

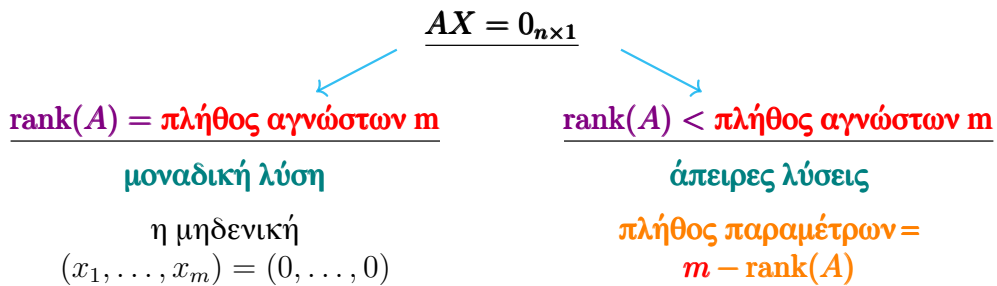
Για τα επόμενα διαγράμματα θεωρούμε ότι $K = \mathbb{R}$ ή $K = \mathbb{C}$. Έστω $A \in M_{n \times m}(K)$, $B \in M_{n \times 1}(K)$. Στα διαγράμματα αποτυπώνουμε τα συμπεράσματά μας για το πότε ένα γραμμικό σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό ή ασύμβατο, καθώς και για το πλήθος των λύσεων που έχει στην περίπτωση που είναι συμβατό.



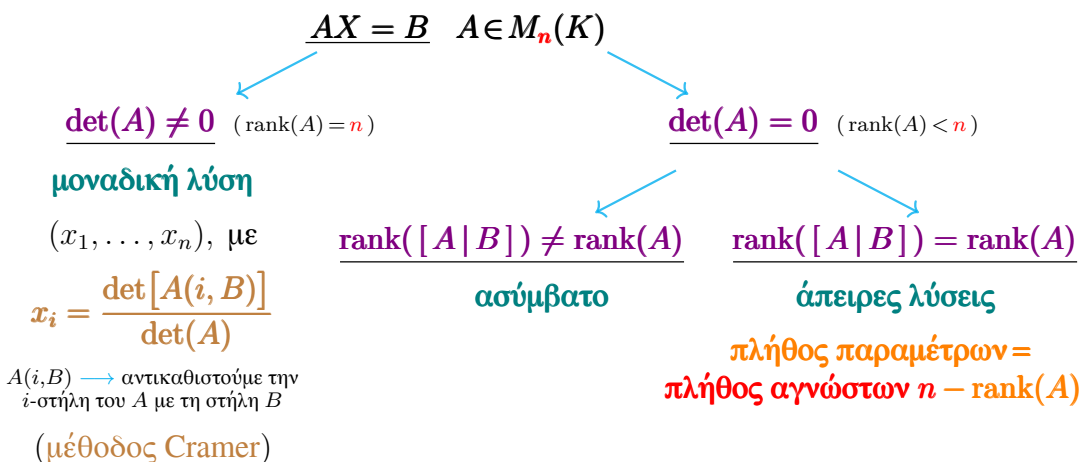
ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

A Ομογενές $n \times m$ -γραμμικό σύστημα $AX = 0_{n \times 1}$ ($B = 0_{n \times 1}$)

Ισχύει $\text{rank}([A|0_{n \times 1}]) = \text{rank}(A)$ και είναι πάντα **συμβατό**.

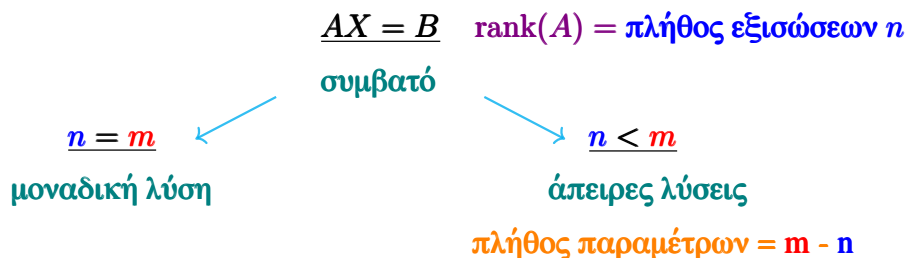


B Τετραγωνικό $n \times n$ -γραμμικό σύστημα $AX = B$ ($m = n$)



Ⓘ $n \times m$ -γρ. σύστημα $AX = B$ με $\text{rank}(A) = \text{πλήθος εξισώσεων } n$ (τότε $n \leq m$)

$\text{rank}([A | B]) = \text{rank}(A) = \text{πλήθος γραμμών των δύο πινάκων και είναι συμβατό.}$



Παραδείγματα 7.5.0.1

- i. Ένα ομογενές 3×4 -γραμμικό σύστημα $AX = 0_{3 \times 1}$, όπου $A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$, έχει πάντα άπειρες λύσεις, αφού

$$A \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{rank}(A) \leq 3 < \text{πλήθος αγνώστων} = 4.$$

- ii. Ένα 3×2 -γραμμικό σύστημα $AX = B$, $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$, $B \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$, με

$$\det([A | B]) \neq 0$$

είναι πάντα ασύμβατο γιατί $\text{rank}([A | B]) \neq \text{rank}(A)$. Πράγματι:

- $\det([A | B]) \neq 0 \Rightarrow \text{rank}([A | B]) = 3$,
- ενώ $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ μας δίνει ότι $\text{rank}(A) \leq 2$.

Κατά συνέπεια $\text{rank}([A | B]) \neq \text{rank}(A)$. Σημειώνουμε, επιπλέον, ότι από τη σχέση

$$\text{rank}([A | B]) = 3$$

μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η βαθμίδα $\text{rank}(A)$ είναι ακριβώς ίση με 2. Μπορείτε να δείτε το γιατί;

- iii. Ένα 4×4 -γραμμικό σύστημα $AX = B$, $A \in M_4(\mathbb{R})$, $B \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$, με

$$\text{rank}([A | B]) = 4$$

δεν έχει ποτέ άπειρες λύσεις. Πράγματι, παρατηρούμε ότι η βαθμίδα του A μπορεί να πάρει ακριβώς μία από τις δύο τιμές: 4, 3 (μπορείτε να δείτε το γιατί:). Στην πρώτη περίπτωση το σύστημα έχει μοναδική λύση, στη δεύτερη περίπτωση το σύστημα είναι ασύμβατο. Αναλυτικά:

- το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν $\text{rank}(A) = 4$, όταν δηλαδή η βαθμίδα του A έχει τη μέγιστη δυνατή τιμή (το πλήθος των αγνώστων του συστήματος),
- το σύστημα είναι ασύμβατο όταν $\text{rank}(A) < 4$, αφού $\text{rank}([A | B]) \neq \text{rank}(A)$.

- iv. Ένα 4×5 -γραμμικό σύστημα $AX = B$, $A \in M_{4 \times 5}(\mathbb{R})$, $B \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R})$, δεν έχει ποτέ μοναδική λύση, γιατί

$$A \in M_{4 \times 5}(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{rank}(A) \leq 4 < \text{πλήθος αγνώστων} = 5.$$

Έτσι το σύστημα είναι ασύμβατο, όταν $\text{rank}([A | B]) \neq \text{rank}(A)$, ενώ το σύστημα έχει άπειρες λύσεις όταν $\text{rank}([A | B]) = \text{rank}(A)$.

Πράγματι, αν $\text{rank}(A) = 4$, τότε $\text{rank}([A | B]) = 4$ (γιατί:). Έτσι, το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό και έχει άπειρες λύσεις που περιγράφονται από μία παράμετρο, αφού $5 - \text{rank}(A) = 1$.

v. Θα βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει μοναδική, άπειρες ή καμία λύση.

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 3x - y + \lambda z = 2 \\ x + 7y - 6z = \mu \end{cases} \Leftrightarrow A_\lambda X = B_\mu, \quad A_\lambda = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & \lambda \\ 1 & 7 & -6 \end{bmatrix}, \quad B_\mu = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ \mu \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα συντελεστών του συστήματος,

$$\det(A_\lambda) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & \lambda \\ 1 & 7 & -6 \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 3\Gamma_3]{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_3} \begin{vmatrix} 0 & -11 & 13 \\ 0 & -22 & \lambda + 18 \\ 1 & 7 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & 13 \\ -22 & \lambda + 18 \end{vmatrix} = -11 \cdot (\lambda - 8).$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

α. $\det(A_\lambda) \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 8$. Τότε το σύστημα $A_\lambda X = B_\mu$ έχει μοναδική λύση,

β. $\det(A_\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 8$. Τότε $\text{rank}(A_8) < 3$ και το σύστημα $A_8 X = B_\mu$ μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή να είναι ασύμβατο, ανάλογα με το αν είναι ίσες ή όχι οι βαθμίδες των πινάκων A_8 και $[A_8 \mid B_\mu]$, τις οποίες και υπολογίζουμε.

$$\begin{aligned} [A_8 \mid B_\mu] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & -6 & \mu \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 7 & -6 & \mu \\ 3 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 7 & -6 & \mu \\ 0 & -22 & 26 & 2 - 3\mu \\ 0 & -11 & 13 & 5 - 2\mu \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow -2\Gamma_3} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 7 & -6 & \mu \\ 0 & -22 & 26 & 2 - 3\mu \\ 0 & 22 & -26 & 4\mu - 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 7 & -6 & \mu \\ 0 & -22 & 26 & 2 - 3\mu \\ 0 & 0 & 0 & \mu - 8 \end{array} \right] \Rightarrow \text{rank}(A_8) = 2 \text{ και} \end{aligned}$$

- $\mu \neq 8 \Leftrightarrow \text{rank}(A_8) \neq \text{rank}([A_8 \mid B_\mu]) = 3$ και το σύστημα $A_8 X = B_\mu$ είναι ασύμβατο,
- $\mu = 8 \Leftrightarrow \text{rank}(A_8) = \text{rank}([A_8 \mid B_8]) = 2$ και το σύστημα $A_8 X = B_8$ έχει άπειρες λύσεις.

vi. Θα λύσουμε για τις διάφορες τιμές των $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$ το παρακάτω γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + \kappa y + \mu z = 3 \\ x + \kappa^2 y + \mu^2 z = 9 \end{cases} \Leftrightarrow A_{\kappa, \mu} X = B, \quad A_{\kappa, \mu} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \kappa & \mu \\ 1 & \kappa^2 & \mu^2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι οι ορίζουσες $|A_{\kappa, \mu}|$ και $|A_{\kappa, \mu}(i, B)|$, $i = 1, 2, 3$, είναι ορίζουσες του Vandermode και υπολογίζονται άμεσα από την Πρόταση 6.5.1.1,

$$|A_{\kappa, \mu}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \kappa & \mu \\ (-1)^2 & \kappa^2 & \mu^2 \end{vmatrix} = |V(-1, \kappa, \mu)| = (\mu - \kappa)(\mu + 1)(\kappa + 1),$$

$$|A_{\kappa, \mu}(1, B)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & \kappa & \mu \\ 9 & \kappa^2 & \mu^2 \end{vmatrix} = |V(3, \kappa, \mu)| = (\mu - \kappa)(\mu - 3)(\kappa - 3),$$

$$|A_{\kappa,\mu}(2, B)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & \mu \\ 1 & 3^2 & \mu^2 \end{vmatrix} = |V(-1, 3, \mu)| = (\mu - 3)(\mu + 1)(3 + 1),$$

$$|A_{\kappa,\mu}(3, B)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \kappa & 3 \\ 1 & \kappa^2 & 3^2 \end{vmatrix} = |V(-1, \kappa, 3)| = (3 - \kappa)(3 + 1)(\kappa + 1).$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

α. $|A_{\kappa,\mu}| \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq \kappa, \mu \neq -1, \kappa \neq -1$. Το σύστημα $A_{\kappa,\mu}X = B$ έχει μοναδική λύση,

$$(x, y, z) = \left(\frac{|A_{\kappa,\mu}(1, B)|}{|A_{\kappa,\mu}|}, \frac{|A_{\kappa,\mu}(2, B)|}{|A_{\kappa,\mu}|}, \frac{|A_{\kappa,\mu}(3, B)|}{|A_{\kappa,\mu}|} \right) = \\ = \left(\frac{(\mu - 3)(\kappa - 3)}{(\mu + 1)(\kappa + 1)}, \frac{4(\mu - 3)}{(\mu - \kappa)(\kappa + 1)}, \frac{4(3 - \kappa)}{(\mu - \kappa)(\mu + 1)} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

β. $|A_{\kappa,\mu}| = 0 \Leftrightarrow \mu = \kappa$ ή $\mu = -1$ ή $\kappa = -1$, τότε $\text{rank}(A_{\kappa,\mu}) < 3$ και το σύστημα μπορεί να είναι ασύμβατο ή να έχει άπειρες λύσεις. Για κάθε μία από τις τρεις υποπεριπτώσεις που προκύπτουν, θα λύσουμε το αντίστοιχο σύστημα εφαρμόζοντας γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα $[A_{\kappa,\mu} \mid B]$. Εκτελούμε αρχικά κάποιες γραμμοπράξεις που είναι κοινές και για τις τρεις υποπεριπτώσεις:

$$[A_{\kappa,\mu} \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \kappa & \mu & 3 \\ 1 & \kappa^2 & \mu^2 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \kappa + 1 & \mu + 1 & 4 \\ 0 & \kappa^2 - 1 & \mu^2 - 1 & 8 \end{array} \right] \longrightarrow \\ \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - (\kappa - 1) \cdot \Gamma_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \kappa + 1 & \mu + 1 & 4 \\ 0 & 0 & (\mu + 1)(\mu - \kappa) & 12 - 4\kappa \end{array} \right] = Q_{\kappa,\mu}.$$

Εξετάζουμε κάθε μια από τις τρεις περιπτώσεις στις οποίες μηδενίζεται η $|A_{\kappa,\mu}|$:

β₁) $\kappa = -1$. Τότε

$$[A_{-1,\mu} \mid B] \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q_{-1,\mu} = \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu + 1 & 4 \\ 0 & 0 & (\mu + 1)^2 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - (\mu + 1) \cdot \Gamma_2} \\ \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu + 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 - 4\mu \end{array} \right] = P_\mu, \text{ και}$$

- $\kappa = -1, \mu \neq 3$. Τότε, λόγω της τελευταίας γραμμής του πίνακα P_μ , το σύστημα $A_{-1,\mu}X = B$ είναι ασύμβατο.
- $\kappa = -1, \mu = 3$. Τότε

$$[A_{-1,3} \mid B] \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$A_{-1,3}X = B \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 1 \end{cases} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Το σύστημα $A_{-1,3}X = B$ έχει άπειρες λύσεις, $\{(-y, y, 1) : y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

β₂) $\mu = -1$. Διαπιστώνουμε όπως προηγουμένως ότι:

- $\mu = -1, \kappa \neq 3$. Το σύστημα $A_{\kappa,-1}X = B$ είναι ασύμβατο.
- $\mu = -1, \kappa = 3$.
Το σύστημα $A_{3,-1}X = B$ έχει άπειρες λύσεις, $\{(-z, 1, z) : z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

β₃) $\mu = \kappa$. Τότε

- $\mu = \kappa \neq 3$. Το σύστημα $A_{\kappa,\kappa}X = B$ είναι ασύμβατο.
- $\mu = \kappa = 3$.
Το σύστημα $A_{3,3}X = B$ έχει άπειρες λύσεις, $\{(0, 1 - z, z) : z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

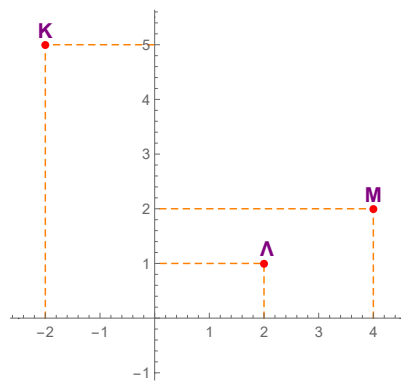
7.6 Πολυωνυμικές Καμπύλες

Σε κάθε πολυώνυμο $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ αντιστοιχεί μία πολυωνυμική συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b \mapsto a_0 + a_1b + \dots + a_nb^n.$$

Η γραφική παράσταση $C_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ της συνάρτησης f ονομάζεται **πολυωνυμική καμπύλη**. Αν το πολυώνυμο $f(x)$ έχει βαθμό n , δηλ. αν $a_n \neq 0$, τότε λέμε ότι έχουμε μία πολυωνυμική καμπύλη **βαθμού n** . Ως ειδική περίπτωση, αναφέρουμε ότι μία πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 1 είναι μία ευθεία και αντιστοιχεί σε πολυώνυμο βαθμού 1, δηλ. της μορφής $a_0 + a_1x$, για κάποιο $a_1 \neq 0$. Το πρόβλημα που εξετάζουμε σε αυτήν την ενότητα αφορά την ύπαρξη πολυωνυμικών καμπύλων που περνούν από δεδομένα σημεία και την εκτίμηση του βαθμού των πολυωνύμων που αντιστοιχούν σε αυτές τις καμπύλες.

Παράδειγμα 7.6.0.1 Έστω τα σημεία $K(-2, 5)$, $\Lambda(2, 1)$, $M(4, 2)$ του επιπέδου, βλ. Σχήμα 7.1.



Σχήμα 7.1: Σημεία του επιπέδου.

Τα K, Λ, M δεν είναι συνευθειακά και δεν υπάρχει πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 1 που να διέρχεται από αυτά. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδική πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 2 που διέρχεται από τα K, Λ, M , καθώς και ότι υπάρχουν άπειρες πολυωνυμικές καμπύλες βαθμού 3 που διέρχονται από τα K, Λ, M .

Έστω $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Η πολυωνυμική καμπύλη C_f διέρχεται από τα K, Λ, M , αν και μόνο αν

- $K(-2, 5) \in C_f : \quad a_0 - 2a_1 + (-2)^2 a_2 = 5$
- $\Lambda(2, 1) \in C_f : \quad a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 = 1$
- $M(4, 2) \in C_f : \quad a_0 + 4a_1 + 4^2 a_2 = 2$

Προκύπτει, λοιπόν, ένα γραμμικό σύστημα με αγνώστους τα a_0, a_1, a_2 . Έστω A ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος. Παρατηρούμε ότι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & (-2)^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{pmatrix} \text{ και άρα } |A| = |V(-2, 2, 4)| \text{ είναι η ορίζουσα του Vandermonde.}$$

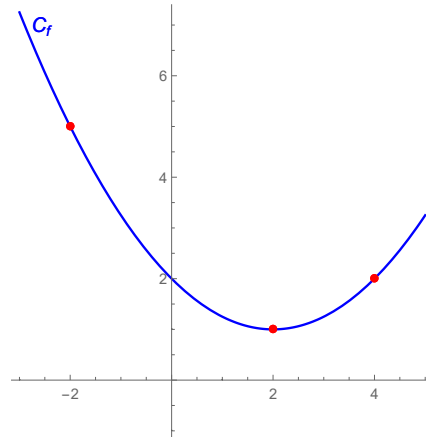
Αφού $|V(-2, 2, 4)| = (4 - 2)(4 + 2)(2 + 2) = 48 \neq 0$, το σύστημα έχει μοναδική λύση. Αν B είναι ο πίνακας των σταθερών, υπολογίζουμε τις ορίζουσες

$$|A(1, B)| = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 96, \quad |A(2, B)| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 16 \end{vmatrix} = -48, \quad |A(3, B)| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Συμπεραίνουμε ότι το $AX = B$ έχει ως μοναδική λύση την τριάδα

$$(a_0 = \frac{96}{48} = 2, \quad a_1 = -\frac{48}{48} = -1, \quad a_2 = \frac{12}{48} = \frac{1}{4})$$

που δίνει το πολυώνυμο $f(x) = 2 - x + \frac{1}{4}x^2$. Επομένως, η μοναδική πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 2 που διέρχεται από τα K, Λ, M είναι η C_f , βλ. Σχήμα 7.2.



Σχήμα 7.2: Πολυωνυμική καμπύλη β' βαθμού που διέρχεται από τρία σημεία.

Στη συνέχεια διερευνούμε αν υπάρχει πολυώνυμο $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ βαθμού 3 ($a_3 \neq 0$), τέτοιο ώστε η πολυωνυμική καμπύλη C_g να διέρχεται από τα K, Λ, M :

- $K(-2, 5) \in C_g$: $a_0 - 2a_1 + (-2)^2 a_2 + (-2)^3 a_3 = 5$
- $\Lambda(2, 1) \in C_g$: $a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + 2^3 a_3 = 1$
- $M(4, 2) \in C_g$: $a_0 + 4a_1 + 4^2 a_2 + 4^3 a_3 = 2$

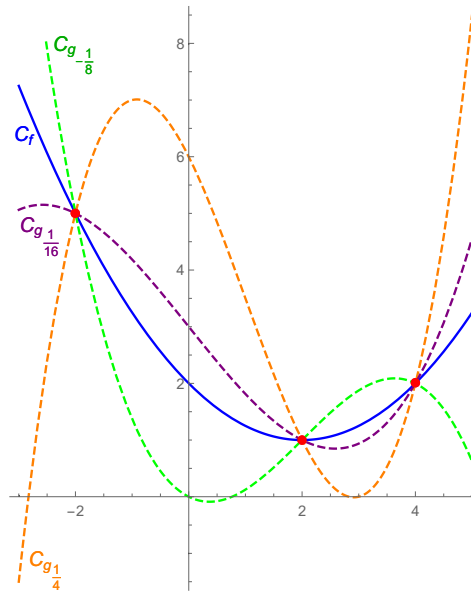
Το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση του γραμμικού συστήματος με επαυξημένο πίνακα

$$[A' \vdots B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & -8 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 2 \end{array} \right] \text{ Η ε.κ.μ.γ. του } [A' \vdots B] \text{ είναι } \left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 0 & 0 & -16 & 2 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 4 & 1/4 \end{array} \right].$$

Παρατηρούμε ότι $\text{rank}([A' \vdots B]) = \text{rank}(A') = 3$, ενώ το πλήθος των αγνώστων είναι 4. Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις και ο άγνωστος a_3 γίνεται παράμετρος. Θέτουμε $a_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ και έχουμε

$$A'X = B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 - 16a_3 = 2 \\ a_1 + 4a_3 = -1 \\ a_2 + 4a_3 = 1/4 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 2 + 16\lambda \\ a_1 = -1 - 4\lambda \\ a_2 = 1/4 - 4\lambda \end{array} \right\}.$$

Επομένως, υπάρχουν άπειρες πολυωνυμικές καμπύλες C_{g_λ} βαθμού 3 που διέρχονται από τα



Σχήμα 7.3: Πολυωνυμικές καμπύλες γ' βαθμού που διέρχονται από τρία σημεία.

K, Λ, M , που αντιστοιχούν σε πολυώνυμα με τύπο:

$$g_\lambda(x) = (2 + 16\lambda) - (1 + 4\lambda)x + \left(\frac{1}{4} - 4\lambda\right)x^2 + \lambda x^3, \text{ όπου } 0 \neq \lambda \in \mathbb{R}.$$

Στο Σχήμα 7.3 δίνουμε τρεις από αυτές τις πολυωνυμικές καμπύλες που προκύπτουν για τρεις διαφορετικές τιμές του λ , συγκεκριμένα για $\lambda = 1/4, -1/8, 1/16$. Σημειώνουμε ότι όταν $\lambda = 0$, τότε παίρνουμε την πολυωνυμική καμπύλη βαθμού 2 που βρήκαμε προηγουμένως.

Δεν είναι δύσκολο να γενικεύσουμε τα συμπεράσματα του παραδείγματος για n σημεία $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Σημειώνουμε, ότι καθώς αναφερόμαστε σε γραφήματα πολυωνυμικών συναρτήσεων, θέλουμε τα n αυτά σημεία να έχουν διαφορετικές τετμημένες. Έστω ότι $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$, με $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ και έστω ότι C_f διέρχεται από τα σημεία αυτά. Προκύπτει το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + \dots + a_{n-1}x_1^{n-1} &= y_1 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_{n-1}x_n^{n-1} &= y_n \end{aligned}$$

με αγνώστους a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . Η ορίζουσα του πίνακα συντελεστών του συστήματος είναι η ορίζουσα Vandermode, η οποία είναι μη μηδενική:

$$|V(x_1, \dots, x_n)| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \neq 0.$$

Προκύπτει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση και επομένως υπάρχει μοναδική πολυωνυμική καμπύλη που διέρχεται από τα n σημεία. Σημειώνουμε ότι το πολυώνυμο $f(x)$ έχει βαθμό το πολύ n , καθώς είναι πιθανόν στη λύση η n -στή συντεταγμένη a_{n-1} να είναι μηδέν. Έστω τώρα $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$, με $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ ένα πολυώνυμο βαθμού $m > n - 1$ και έστω ότι C_f διέρχεται από τα σημεία αυτά. Προκύπτει το γραμμικό σύστημα με n εξισώσεις και $m + 1$ αγνώστους a_0, a_1, \dots, a_m :

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_mx_1^m &= y_1 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1x_n + \cdots + a_mx_n^m &= y_n \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών έχει βαθμίδα n , αφού οι πρώτες n στήλες δίνουν μία μη μηδενική υποορίζουσα του Vandermode. Αφού το σύστημα έχει n γραμμές, συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι συμβατό. Αφού οι άγνωστοι είναι $m + 1$ και $m + 1 > n$, συμπεραίνουμε ότι έχουμε $m + 1 - n$ ελεύθερες μεταβλητές και συγκεκριμένα a_m θα είναι παράμετρος (εάν ακολουθήσουμε τον αλγόριθμο του Gauss). Επομένως, το σύστημα είναι συμβατό και έχει άπειρες λύσεις που αντιστοιχούν σε πολωνυμικές καμπύλες βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του n . Αποδείξαμε, λοιπόν, το εξής:

Πρόταση 7.6.0.2 Από πλήθος n σημεία $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ ενός καρτεσιανού επιπέδου, με $x_i \neq x_j$, για $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$, διέρχεται μοναδική πολωνυμική καμπύλη C_f βαθμού μικρότερου ή ίσου του $n - 1$ και άπειρες πολωνυμικές καμπύλες βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του n .

7.7 Εργαστήριο με Mathematica

Ομογενή Γραμμικά Συστήματα - Μηδενοχώρος

Θεωρούμε το ομογενές $n \times m$ -γραμμικό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow AX = 0_{n \times 1}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{n \times m}(\mathbb{R}).$$

Η εντολή **NullSpace[A]** μας δίνει ένα σύνολο s στοιχείων $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s\}$ του \mathbb{R}^m που παράγουν τον μηδενοχώρο $\text{null}(A)$ του πίνακα A , όπου

$$s = \text{πλήθος παραμέτρων} = \text{πλήθος αγνώστων } m - \text{rank}(A).$$

Έτσι το σύνολο λύσεων του $AX = 0_{n \times 1}$, δηλαδή ο $\text{null}(A)$, είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_s$,

$$\text{null}(A) = \{\lambda_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + \lambda_s \cdot \mathbf{u}_s : \lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Για παράδειγμα, για το σύστημα $AX = 0_{n \times 1}$ μπορεί να έχουμε

- In: **NullSpace[A]** \rightarrow Out: $\{\}$ \Rightarrow $\text{null}(A) = \{(0, 0, \dots, 0)\}$
(μοναδική λύση, η μηδενική),
- In: **NullSpace[A]** \rightarrow Out: $\{\{\tau_1, \dots, \tau_m\}\}$ \Rightarrow $\text{null}(A) = \{\kappa \cdot (\tau_1, \dots, \tau_m) : \kappa \in \mathbb{R}\}$
(άπειρες λύσεις, πλήθος παραμέτρων $s = 1$),
- In: **NullSpace[A]** \rightarrow Out: $\{\{\tau_1, \dots, \tau_m\}, \{v_1, \dots, v_m\}\}$ \Rightarrow
 \Rightarrow $\text{null}(A) = \{\kappa \cdot (\tau_1, \dots, \tau_m) + \lambda \cdot (v_1, \dots, v_m) : \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\}$
(άπειρες λύσεις, πλήθος παραμέτρων $s = 2$),

κ.ο.κ.

Λύνουμε τα παρακάτω ομογενή συστήματα.

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{array} \quad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{A_1X = 0_{3 \times 1}} \qquad \underbrace{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0 \end{array}}_{A_2X = 0_{2 \times 1}}$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{A_3 X = 0_{3 \times 1}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{A_4 X = 0_{3 \times 1}}$$

$$A1 = \{\{2, 1, 5, 1\}, \{3, 2, 8, 2\}, \{1, 1, 3, 4\}\};$$

$$A2 = A1[[\{1, 2\}, All]]; A3 = A1[[All, \{1, 2, 3\}]]; A4 = A1[[All, \{1, 2, 4\}]];$$

$$\{\text{MatrixForm}[A1], \text{MatrixForm}[A2], \text{MatrixForm}[A3], \text{MatrixForm}[A4]\}$$

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \right\}$$

$$\{\text{MatrixRank}[A1], \text{MatrixRank}[A2], \text{MatrixRank}[A3], \text{MatrixRank}[A4]\}$$

$$\{3, 2, 2, 3\}$$

$$\text{NullSpace}[A1]$$

$$\{\{-2, -1, 1, 0\}\}$$

Σύνολο λύσεων του $A_1 X = 0_{3 \times 1}$: $\text{null}(A_1) = \{\kappa \cdot (-2, -1, 1, 0) : \kappa \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$
(πλήθος παραμέτρων = πλήθος αγνώστων - $\text{rank}(A_1) = 4 - 3 = 1$).

$$\text{NullSpace}[A2]$$

$$\{\{0, -1, 0, 1\}, \{-2, -1, 1, 0\}\}$$

Σύνολο λύσεων του $A_2 X = 0_{2 \times 1}$:

$$\text{null}(A_2) = \{\kappa \cdot (0, -1, 0, 1) + \lambda \cdot (-2, -1, 1, 0) : \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

(πλήθος παραμέτρων = πλήθος αγνώστων - $\text{rank}(A_2) = 4 - 2 = 2$).

$$\text{NullSpace}[A3]$$

$$\{\{-2, -1, 1\}\}$$

Σύνολο λύσεων του $A_3 X = 0_{3 \times 1}$: $\text{null}(A_3) = \{\kappa \cdot (-2, -1, 1) : \kappa \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(πλήθος παραμέτρων = πλήθος αγνώστων - $\text{rank}(A_3) = 3 - 2 = 1$).

$$\text{NullSpace}[A4]$$

$$\{\}$$

Το σύστημα $A_4 X = 0_{3 \times 1}$ έχει μοναδική λύση, τη μηδενική, $\text{null}(A_4) = \{(0, 0, 0)\}$

(πλήθος παραμέτρων = πλήθος αγνώστων - $\text{rank}(A_4) = 3 - 3 = 0$).

Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων με το Mathematica

Θεωρούμε το $n \times m$ -γραμμικό σύστημα με συντελεστές από το \mathbb{R}

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{array} \right\} \Leftrightarrow AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Αν το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό, η εντολή **LinearSolve**[A, {b₁, ..., b_n}] μας δίνει μία συγκεκριμένη λύση $(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{R}^m$ του συστήματος. Από την Πρόταση 7.3.0.4 γνωρίζουμε ότι οι λύσεις του $AX = B$ προκύπτουν αν στη λύση $(\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ προσθέσουμε τα στοιχεία του

$\text{null}(A)$. Έτσι συνοδεύουμε με την εντολή **NullSpace[A]**, ώστε να βρούμε το σύνολο όλων των λύσεων του συστήματος.

Λύνουμε τα παρακάτω γραμμικά συστήματα.

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 10 & & 2a + 4b + 2c = -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -5 & & 3a + 2b + 7c = 6 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 10 & & -a + b - 4c = -7 \end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{M_1 X = C} \qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{M_2 X = L}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1 & & 2x + 4y + z = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 2 & & 3x + 2y + 2z = 3 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 = 3 & & -x + y + 4z = -9 \end{array}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{M_2 X = P} \qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{M_3 X = S}$$

M1 = {{2, 4, 2, 1}, {3, 2, 7, 2}, {-1, 1, -4, 4}};

M2 = **M1**[[All, {1, 2, 3}]]; **M3** = **M1**[[All, {1, 2, 4}]];

{**MatrixForm**[**M1**], **MatrixForm**[**M2**], **MatrixForm**[**M3**]}

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccc} 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & 4 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \\ -1 & 1 & -4 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{array} \right) \right\}$$

{**LinearSolve**[**M1**, {10, -5, 10}], **NullSpace**[**M1**]}

{{-5, 5, 0, 0}, {{-3, 1, 1, 0}}}

- Η $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-5, 5, 0, 0)$ είναι μία λύση, $\text{null}(M_1) = \{\kappa \cdot (-3, 1, 1, 0) : \kappa \in \mathbb{R}\}$, σύνολο λύσεων του $M_1 X = C : \{(-5, 5, 0, 0) + \kappa \cdot (-3, 1, 1, 0) : \kappa \in \mathbb{R}\}$.

{**LinearSolve**[**M2**, {-4, 6, -7}], **NullSpace**[**M2**]}

{{4, -3, 0}, {{-3, 1, 1}}}

- Η $(a, b, c) = (4, -3, 0)$ είναι μία λύση, $\text{null}(M_2) = \{\kappa \cdot (-3, 1, 1) : \kappa \in \mathbb{R}\}$, σύνολο λύσεων του $M_2 X = L : \{(4, -3, 0) + \kappa \cdot (-3, 1, 1) : \kappa \in \mathbb{R}\}$.

{**LinearSolve**[**M2**, {1, 2, 3}], **NullSpace**[**M2**]}

... **LinearSolve** : Linear equation encountered that has no solution.

{**LinearSolve**[[{2, 4, 2}, {3, 2, 7}, {-1, 1, -4}], {1, 2, 3}], {{-3, 1, 1}}}

- Το σύστημα $M_2 X = P$ είναι ασύμβατο.

{**LinearSolve**[**M3**, {-3, 3, -9}], **NullSpace**[**M3**]}

{{3, -2, -1}, {}}

- Το σύστημα $M_3 X = S$ έχει μοναδική λύση, $(x, y, z) = (3, -2, -1)$ ($\text{null}(M_3) = \{(0, 0, 0)\}$).

Θεωρητικός έλεγχος και επίλυση γραμμικών συστημάτων με το Mathematica

Για να λύσουμε το $n \times m$ -γραμμικό σύστημα $AX = B$, όπου $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$,

$B = [b_1 \ \dots \ b_n]^T \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ και να κάνουμε ταυτόχρονα θεωρητικό έλεγχο ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1) ορίζουμε

- τον πίνακα συντελεστών: $A = \{\{a_{11}, \dots, a_{1m}\}, \dots, \{a_{n1}, \dots, a_{nm}\}\}$,
- τη «**λίστα**» των σταθερών όρων: $b = \{b_1, \dots, b_n\}$,
- τον πίνακα των σταθερών όρων: $B = \text{Transpose}[\{b\}]$,
- τον επαυξημένο πίνακα $[A \ ; B]$ του συστήματος: $\mathbf{AB} = \text{ArrayFlatten}[\{\{A, B\}\}]$.

2) Βρίσκουμε τις βαθμίδες των πινάκων $[A \ ; B]$, A : $\{\text{MatrixRank}[AB], \text{MatrixRank}[A]\}$.

- Αν $\text{rank}([A \ ; B]) \neq \text{rank}(A)$, σταματάμε την επίλυση, το σύστημα είναι ασύμβατο.

3) Βρίσκουμε τον μηδενικό χώρο $\text{null}(A)$ του πίνακα A : $\text{NullSpace}[A]$.

4) Με την εντολή $\text{LinearSolve}[A, b]$ βρίσκουμε μία λύση $(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{R}^m$ του συστήματος. (ΠΡΟΣΟΧΗ, το δεύτερο όρισμα της εντολής είναι η λίστα b και όχι ο πίνακας B).

5) Σύνολο λύσεων του $AX = B$: $\{(\zeta_1, \dots, \zeta_m) + u : u \in \text{null}(A)\}$.

- Αν $\text{rank}([A \ ; B]) = \text{rank}(A) = m = \text{πλήθος αγνώστων}$, το $AX = B$ έχει μοναδική λύση, την $(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in \mathbb{R}^m$.
(Τότε $\text{null}(A) = \{(0, \dots, 0)\}$, η εντολή $\text{NullSpace}[A]$ δίνει αποτέλεσμα $\{\}$, μπορούμε να προσπεράσουμε το βήμα 3).

Κάνουμε διερεύνηση και λύνουμε το 4×5 -γραμμικό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 = -1 \\ -2x_1 + 3x_2 \quad - 3x_4 - x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow AX = B.$$

$A = \{\{1, -1, 1, 2, -1\}, \{-1, 2, 1, -2, -1\}, \{-2, 3, 0, -3, -1\}, \{1, -1, 1, 1, 0\}\}$;

$b = \{3, -1, -3, 2\}$; $B = \text{Transpose}[\{b\}]$; $\mathbf{AB} = \text{ArrayFlatten}[\{\{A, B\}\}]$;

$\text{MatrixForm}[AB]$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\{\text{MatrixRank}[A], \text{MatrixRank}[AB]\}$

$\{3, 3\}$

$\text{rank}([A \ ; B]) = \text{rank}(A) = 3 < \text{πλήθος αγνώστων} = 5 \Rightarrow$

το $AX = B$ έχει άπειρες λύσεις που περιγράφονται από πλήθος $5 - \text{rank}(A) = 2$ παραμέτρους (η εντολή $\text{NullSpace}[A]$ αναμένεται να μας δώσει δύο στοιχεία του \mathbb{R}^5).

$\text{NullSpace}[A]$

$\{\{1, 2, 0, 1, 1\}, \{-3, -2, 1, 0, 0\}\}$

$\text{null}(A) = \{\kappa \cdot (1, 2, 0, 1, 1) + \lambda \cdot (-3, -2, 1, 0, 0) : \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5$.

$\text{LinearSolve}[A, b]$

$\{3, 2, 0, 1, 0\}$

Το $(3, 2, 0, 1, 0) \in \mathbb{R}^5$ είναι μία λύση του συστήματος και το σύνολο όλων των λύσεων του $AX = B$ είναι το

$$\{(3, 2, 0, 1, 0) + \kappa \cdot (1, 2, 0, 1, 1) + \lambda \cdot (-3, -2, 1, 0, 0) : \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Συμβατότητα Γραμμικών Συστημάτων

Θα βρούμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να πληρούν τα $p, q, r \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συμβατό το σύστημα

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z = p \\ 2x + y + 3z = 2q \\ 5x + 4y + 6z = 4q \\ 7x + 4y + 10z = 8r \end{cases} \Leftrightarrow AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} p \\ 2q \\ 4q \\ 8r \end{pmatrix}.$$

Clear[A, b, B, AB]

A = {{3, 2, 4}, {2, 1, 3}, {5, 4, 6}, {7, 4, 10}};

b = {p, 2q, 4q, 8r}; B = Transpose[{b}]; AB = ArrayFlatten[{{A, B}}];

{MatrixForm[A], MatrixForm[B], MatrixForm[AB]}

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 2q \\ 4q \\ 8r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & p \\ 2 & 1 & 3 & 2q \\ 5 & 4 & 6 & 4q \\ 7 & 4 & 10 & 8r \end{pmatrix} \right\}$$

MatrixRank[A]

2

Γνωρίζουμε ότι

$$AX = B \text{ συμβατό} \Leftrightarrow \text{rank}([A \mid B]) = \text{rank}(A) = 2.$$

Θα φέρουμε λοιπόν τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid B]$ σε ε.κ.μ.γ. R1 :

R = RowReduce[A]; **R1 = RowReduce**[AB]; {MatrixForm[R], MatrixForm[R1]}

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Το Mathematica υπολόγισε την ε.κ.μ.γ. του $[A \mid B]$ αγνοώντας τιμές των p, q, r για τις οποίες μηδενίζονται στοιχεία του πίνακα. Έτσι εμφανίστηκε μία τρίτη καθοδηγητική μονάδα στη θέση (3, 4) του πίνακα R1 και δεν πήραμε απάντηση στο ερώτημά μας.

Για να λύσουμε το πρόβλημα, θα βρούμε αντιστρέψιμο πίνακα $E1 \in M_4(\mathbb{R})$ για τον οποίο ισχύει $E1 \cdot A = R$, όπου R η ε.κ.μ.γ. του A (βλ. Ενότητα 5.6). Τότε ο

$$E1 \cdot [A \mid B] = [E1 \cdot A \mid E1 \cdot B] = [R \mid E1 \cdot B]$$

είναι ο πίνακας στον οποίο μεταβαίνει ο $[A \mid B]$ μετά την εφαρμογή των γραμμοπράξεων που οδήγησαν στον σχηματισμό της ε.κ.μ.γ. R. Έτσι θα βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να πληρούν τα p, q, r , ώστε $\text{rank}([A \mid B]) = 2$. Θυμίζουμε ότι

$$A \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{αλγόριθμος του}} \dots \rightarrow R \Rightarrow [A \mid I_4] \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{αλγόριθμος του}} [R \mid E1], \text{ με } E1 \cdot A = R.$$

I4 = IdentityMatrix[4]; AI = ArrayFlatten[{{A, I4}}]; RE1 = RowReduce[AI];
{MatrixForm[AI], MatrixForm[RE1]}

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccccccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{5}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 \end{array} \right) \right\}$$

E1 = RE1[[All, {4, 5, 6, 7}]];

{MatrixForm[E1], MatrixForm[E1.A], MatrixForm[E1.AB]}

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & -2q + 4r \\ 0 & 1 & -1 & \frac{7q}{2} - 5r \\ 0 & 0 & 0 & p - q - 2r \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5q}{2} - 3r \end{array} \right) \right\}$$

Ο πρώτος πίνακας είναι ο $E1$, ο δεύτερος είναι ο $E1 \cdot A = R$, ενώ από τη μορφή του τρίτου πίνακα $E1 \cdot [A \mid B]$ συμπεραίνουμε ότι

$$\text{rank}([A \mid B]) = 2 \Leftrightarrow p - q - 2r = 0, \frac{5q}{2} - 3r = 0 \Leftrightarrow p - q - 2r = 0, 5q - 6r = 0,$$

που είναι και οι ζητούμενες συνθήκες ώστε να είναι συμβατό το σύστημα $AX = B$.

Στο ίδιο αποτέλεσμα φτάνουμε γρηγορότερα αν φέρουμε σε ε.κ.μ.γ. Q τον επαυξημένο πίνακα $[A \mid I_4 \mid B]$, ο οποίος έχει βαθμίδα 4, λόγω των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του I_4 . Δύο καθοδηγητικές μονάδες θα βρίσκονται στις δύο από τις τρεις πρώτες στήλες του Q , που αντιστοιχούν στον πίνακα A , αφού $\text{rank}(A) = 2$ και οι υπόλοιπες δύο καθοδηγητικές μονάδες θα βρίσκονται σε κάποιες από τις στήλες που αντιστοιχούν στον I_4 . Έτσι η τελευταία στήλη του Q , που αντιστοιχεί στον B , θα μας δώσει τις ζητούμενες συνθήκες:

AIB = ArrayFlatten[{{A, I4, B}}]; Q = RowReduce[AIB]

{MatrixForm[AIB], MatrixForm[Q]}

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccccccc} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & p \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2q \\ 5 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4q \\ 7 & 4 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8r \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2(q-2r) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{5}{8} & \frac{1}{2}(7q-10r) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & p-q-2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{2}(5q-6r) \end{array} \right) \right\}$$

Αγνοούμε τις στήλες 4, 5, 6, 7 του Q , που αντιστοιχούν στον μοναδιαίο πίνακα I_4 που παρεμβάλλαμε,

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & -2(q-2r) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 7/8 & -5/8 & (7q-10r)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & -1/4 & p-q-2r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1/8 & -3/8 & (5q-6r)/2 \end{array} \right)$$

και παρατηρούμε ότι

$$\text{rank}([A \mid B]) = 2 \Leftrightarrow p - q - 2r = 0 \text{ και } 5q - 6r = 0.$$

Εξάσκηση με το Mathematica

1. Να λύσετε το γραμμικό σύστημα
$$\left\{ \begin{array}{l} a - 2b + c + 3d - e = 0 \\ 2a + b + d + e = 3 \\ a - 7b + 3c + 8d - 4e = -3 \\ -3a - 4b + c + d + 3e = 0 \end{array} \right\}.$$

2. Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

i) Να λυθούν τα παρακάτω ομογενή γραμμικά συστήματα

$$AX = 0_{5 \times 1}, \quad A^T X = 0_{4 \times 1}, \quad (A^T A)X = 0_{4 \times 1}, \quad (AA^T)X = 0_{5 \times 1}.$$

ii) Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \\ 21 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad (AA^T) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \\ 11 \\ 21 \end{bmatrix},$$

$$A^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -10 \\ 55 \\ -13 \end{bmatrix}, \quad (A^T A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -10 \\ 55 \\ -13 \end{bmatrix}.$$

3. Έστω $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν οι μηδενοχώροι

$$\text{null}(M), \quad \text{null}(M^T), \quad \text{null}(M^T M), \quad \text{null}(MM^T).$$

Τι παρατηρείτε;

4. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 10 \\ 1 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} -31 \\ -21 \\ -11 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -10 \end{bmatrix}$.

i) Να αποδείξετε ότι τα συστήματα $AX = B_1$, $A^T X = B_2$ έχουν άπειρες λύσεις, τις οποίες και να υπολογίσετε, ενώ τα συστήματα $AX = B_2$, $A^T X = B_1$ είναι ασύμβατα.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ που να είναι λύση και του $AX = B_1$ και του $A^T X = B_2$.

(Υπόδειξη: να λύσετε το 6×3 -γραμμικό σύστημα $\begin{bmatrix} A \\ \dots \\ A^T \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} B_1 \\ \dots \\ B_2 \end{bmatrix}$).

5. Μαγικά Τετράγωνα

Έστω πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{R})$ τέτοιος, ώστε το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης του, το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου και το άθροισμα $a_{13} + a_{22} + a_{31}$ να είναι ίσα μεταξύ τους.

i) Να δείξετε ότι ο πίνακας A έχει τη μορφή

$$\kappa \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} + \mu \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

ii) Αν κάθε ένα από τα παραπάνω αθροίσματα είναι ίσο με s , να δείξετε ότι ο πίνακας A έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} 2s/3 & 2s/3 & -s/3 \\ -2s/3 & s/3 & 4s/3 \\ s & 0 & 0 \end{bmatrix} + \kappa \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρήστε ότι για όλους τους παραπάνω πίνακες ισχύει $a_{22} = s/3$. Να βρείτε το άθροισμα s και έναν τέτοιο πίνακα (a_{ij}) , όταν $\{a_{ij} : 1 \leq i, j \leq 3\} = \{1, 2, \dots, 9\}$.

6. i) Για καθένα από τα παρακάτω γραμμικά συστήματα να βρείτε τη συνθήκη ή τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα να είναι συμβατό.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 7a \\ 3x + 2y = 2b \\ 2x + 3y = c \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3a \\ x + 2y - z = 6b \\ 2x + 3y = c \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = a \\ -x + 3y + z = b \\ 2x - y + 3z = c \\ x - 4y = a \\ 3x + y - 2z = b \end{array} \right\}.$$

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχουν a, b, c , με $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, για τα οποία να είναι συμβατά και τα τρία συστήματα.

7. Να αποδείξετε ότι το παρακάτω γραμμικό σύστημα, όπου $k, m \in \mathbb{R}$, είναι συμβατό, αν και μόνο αν $k = -15/16, m = -3/16$.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = k \\ -x + 3y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = m + 3 \\ x - 4y = -k \\ 3x + y - 2z = k + m \end{array} \right\}.$$

8. Να βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να πληρούν τα $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 2 που να διέρχεται από τα σημεία

$$(1, y_1), (2, y_2), (3, y_3), (4, y_4).$$

7.8 Ασκήσεις

Λυμένες Ασκήσεις

7.8.1 Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{array}{c|c|c|c|c} \Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 & \Sigma_4 & \Sigma_5 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ \hline -2 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \in M_{4 \times 5}(\mathbb{R}), \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \in M_{4 \times 1}(\mathbb{R}).$$

- i) Να υπολογίσετε τον μηδενχώρο $\text{null}(A)$ του πίνακα A .
- ii) Να λύσετε το γραμμικό σύστημα $AX = B$ και να γράψετε τη στήλη B ως γραμμικό συνδυασμό των στηλών $\Sigma_1, \dots, \Sigma_5$ του πίνακα A .
- iii) Να βρείτε έναν γραμμικό συνδυασμό $B = \lambda_1 \Sigma_1 + \dots + \lambda_5 \Sigma_5$, με $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και $\lambda_i \neq 0$, $\forall i = 1, \dots, 5$.

Λύση. Ο μηδενχώρος $\text{null}(A)$ είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος $AX = 0_{4 \times 1}$. Μπορούμε να απαντήσουμε σε όλα τα ερωτήματα της άσκησης, αν εφαρμόσουμε γραμμοπράξεις στον επαυξημένο πίνακα $[A \mid B]$, ώστε να φέρουμε τον A σε ε.κ.μ.γ.

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \textcircled{1} & -1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline -2 & 3 & 0 & -4 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \textcircled{1} & -1 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline 0 & \textcircled{1} & 2 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_3]{\Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + \Gamma_3} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \textcircled{1} & -1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \hline 0 & \textcircled{1} & 2 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2} \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \textcircled{1} & 0 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ \hline 0 & \textcircled{1} & 2 & 0 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Παρατηρούμε ότι $\text{rank}([A \mid B]) = \text{rank}(A) = 3$ και το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό. Η 3η και 4η στήλη της ε.κ.μ.γ. δεν έχουν καθοδηγητικές μονάδες, έτσι οι αντίστοιχοι άγνωστοι x_3, x_5 γίνονται **παράμετροι**. Έτσι τα συστήματα $AX = 0_{4 \times 1}$ και $AX = B$ έχουν άπειρες λύσεις:

$$\text{i) } AX = 0_{4 \times 1} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_3 - x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -3x_3 + x_5 \\ x_2 = -2x_3 + 2x_5 \\ x_4 = x_5 \end{array} \right\} \quad x_3, x_5 \in \mathbb{R},$$

$$\text{null}(A) = \{(-3x_3 + x_5, -2x_3 + 2x_5, x_3, x_5, x_3) : x_3, x_5 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{x_3 \cdot (-3, -2, 1, 0, 0) + x_5 \cdot (1, 2, 0, 1, 1) : x_3, x_5 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

$$\text{ii) } AX = B \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_3 - x_5 = 3 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_5 = -1 \\ x_4 - x_5 = -3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3 - 3x_3 + x_5 \\ x_2 = -1 - 2x_3 + 2x_5 \\ x_4 = -3 + x_5 \end{array} \right\} \quad x_3, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Το σύνολο S των άπειρων λύσεων του συστήματος $AX = B$ είναι το

$$S = \{(3 - 3x_3 + x_5, -1 - 2x_3 + 2x_5, x_3, -3x_5, x_3) : x_3, x_5 \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{(3, -1, 0, -3, 0) + x_3 \cdot (-3, -2, 1, 0, 0) + x_5 \cdot (1, 2, 0, 1, 1) : x_3, x_5 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^5.$$

Για $x_3 = x_5 = 0$ παίρνουμε τη λύση $(3, -1, 0, -3, 0) \in S$ του συστήματος $AX = B$, έτσι

$$B = 3 \cdot \Sigma_1 - \Sigma_2 + 0 \cdot \Sigma_3 - 3 \cdot \Sigma_4 + 0 \cdot \Sigma_5 : \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

iii) Αρκεί να βρούμε λύση $(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in S$, με $\lambda_1, \dots, \lambda_5 \neq 0$. Αν θέσουμε για παράδειγμα $x_3 = x_5 = 1$,

$$(3, -1, 0, -3, 0) + (-3, -2, 1, 0, 0) + (1, 2, 0, 1, 1) = (1, -1, 1, -2, 1) \in S$$

και

$$B = \Sigma_1 - \Sigma_2 + \Sigma_3 - 2 \cdot \Sigma_4 + \Sigma_5 : \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad \square$$

7.8.2 i) Να λυθούν τα 3×2 -γραμμικά συστήματα με συντελεστές από το \mathbb{R}

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 3 \\ -x + 2y = 2 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 4 \\ 3x - y = 2 \\ -x + 2y = 5 \end{array} \right\}.$$

ii) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να πληρούν τα $a, b, c \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συμβατό το 3×2 -γραμμικό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = a \\ 3x - y = b \\ -x + 2y = c \end{array} \right\}.$$

Λύση. Ο πίνακας συντελεστών και των τριών συστημάτων είναι ο $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, ενώ

οι πίνακες των σταθερών όρων είναι οι $B_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ και $B_3 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ αντίστοιχα.

i) Λύνουμε ταυτόχρονα τα συστήματα $AX = B_1$ και $AX = B_2$ εφαρμόζοντας γραμμοπράξεις στον πίνακα $[A \mid B_1 \mid B_2]$,

$$\begin{aligned} [A \mid B_1 \mid B_2] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 3\Gamma_1} \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 9 & 17 \\ 0 & 5 & 9 & 14 \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_1 \rightarrow -\Gamma_1]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{cc|cc} \textcircled{1} & -2 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & 9 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{5}\Gamma_2} \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} \textcircled{1} & -2 & -2 & -5 \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{9}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 2\Gamma_2} \left[\begin{array}{cc|cc} \textcircled{1} & 0 & \frac{8}{5} & -\frac{9}{5} \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{9}{5} & \frac{17}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

- $AX = B_1$. Παρατηρούμε ότι $\text{rank}([A \mid B_1]) = \text{rank}(A) = 2 = \text{πλήθος αγνώστων}$ και το σύστημα έχει μοναδική λύση,

$$(x, y) = \left(\frac{8}{5}, \frac{9}{5}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

- $AX = B_2$. Παρατηρούμε ότι $\text{rank}([A \mid B_2]) = 3 \neq \text{rank}(A)$ και το σύστημα είναι ασύμβατο.

ii) Γνωρίζουμε ότι

$$AX = B_3 \text{ συμβατό} \Leftrightarrow \text{rank}([A \mid B_3]) = \text{rank}(A) \Leftrightarrow \text{rank}([A \mid B_3]) = 2.$$

α' τρόπος: Υπολογίζουμε τη βαθμίδα του πίνακα $[A \mid B_3]$,

$$\begin{aligned} [A \mid B_3] &= \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & a \\ 3 & -1 & b \\ -1 & 2 & c \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & c \\ 3 & -1 & b \\ 2 & 1 & a \end{array} \right] \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 3\Gamma_1} \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & c \\ 0 & 5 & b + 3c \\ 0 & 5 & a + 2c \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & c \\ 0 & 5 & b + 3c \\ 0 & 0 & a - b - c \end{array} \right] \end{aligned}$$

και

$$\text{rank}([A \mid B_3]) = 2 \Leftrightarrow a - b - c = 0,$$

που είναι η ζητούμενη συνθήκη ώστε να είναι συμβατό το σύστημα $AX = B_3$.

β' τρόπος: Αφού $\text{rank}(A) = 2 \Rightarrow \text{rank}([A \mid B_3]) \geq 2$. Έτσι, από την Πρόταση 6.3.0.1, έχουμε

$$\begin{aligned} \text{rank}([A \mid B_3]) = 2 &\Leftrightarrow \text{rank}([A \mid B_3]) \neq 3 \Leftrightarrow \det([A \mid B_3]) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ 3 & -1 & b \\ -1 & 2 & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5(a - b - c) = 0. \end{aligned}$$

Επομένως, $AX = B_3$ συμβατό $\Leftrightarrow a - b - c = 0$. □

7.8.3 Να βρεθούν τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω γραμμικό σύστημα να έχει μοναδική, άπειρες ή καθόλου λύσεις και να βρείτε τις λύσεις του συστήματος στις δύο πρώτες περιπτώσεις.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda x + \mu y + z = 1 \\ x + \lambda \mu y + z = 1 \\ x + \mu y + \lambda z = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow A_{\lambda, \mu} X = B, \quad A_{\lambda, \mu} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 1 \\ 1 & \lambda \mu & 1 \\ 1 & \mu & \lambda \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Λύση. Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα συντελεστών του συστήματος,

$$\begin{aligned} |A_{\lambda, \mu}| &= \begin{vmatrix} \lambda & \mu & 1 \\ 1 & \lambda \mu & 1 \\ 1 & \mu & \lambda \end{vmatrix} = \mu \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3} \mu \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 & 1 \\ \lambda + 2 & \lambda & 1 \\ \lambda + 2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \\ &= \mu \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \mu(\lambda + 2)(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

Όμοια βρίσκουμε

$$|A_{\lambda, \mu}(1, B)| = \begin{vmatrix} 1 & \mu & 1 \\ 1 & \lambda \mu & 1 \\ 1 & \mu & \lambda \end{vmatrix} = \mu(\lambda - 1)^2, \quad |A_{\lambda, \mu}(2, B)| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2,$$

$$|A_{\lambda,\mu}(3, B)| = \begin{vmatrix} \lambda & \mu & 1 \\ 1 & \lambda\mu & 1 \\ 1 & \mu & 1 \end{vmatrix} = \mu(\lambda - 1)^2.$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

α. $|A_{\lambda,\mu}| \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1, \lambda \neq -2, \mu \neq 0$. Το σύστημα $A_{\lambda,\mu}X = B$ έχει μοναδική λύση,

$$(x, y, z) = \left(\frac{|A_{\lambda,\mu}(1, B)|}{|A_{\lambda,\mu}|}, \frac{|A_{\lambda,\mu}(2, B)|}{|A_{\lambda,\mu}|}, \frac{|A_{\lambda,\mu}(3, B)|}{|A_{\lambda,\mu}|} \right) = \left(\frac{1}{\lambda + 2}, \frac{1}{\mu(\lambda + 2)}, \frac{1}{\lambda + 2} \right) \in \mathbb{R}^3.$$

β. $|A_{\lambda,\mu}| = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$, ή $\lambda = -2$ ή $\mu = 0$, τότε $\text{rank}(A_{\lambda,\mu}) < 3$ και το σύστημα μπορεί να είναι ασύμβατο ή να έχει άπειρες λύσεις. Εξετάζουμε κάθε μία από τις υποπεριπτώσεις αυτές:

β₁) $\lambda = 1$. Λύνουμε το σύστημα $A_{1,\mu}X = B$:

$$[A_{1,\mu} \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & \mu & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & \mu & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

$$A_{1,\mu}X = B \Leftrightarrow x + \mu y + z = 1 \Leftrightarrow x = 1 - \mu y - z, \quad y, z \in \mathbb{R}.$$

Το σύστημα $A_{1,\mu}X = B$ έχει άπειρες λύσεις, $\forall \mu \in \mathbb{R}$. Το σύνολο λύσεων είναι το $\{(1 - \mu y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

β₂) $\lambda = -2$. Λύνουμε το σύστημα $A_{-2,\mu}X = B$:

$$[A_{-2,\mu} \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & \mu & 1 & 1 \\ 1 & -2\mu & 1 & 1 \\ 1 & \mu & -2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \mu & -2 & 1 \\ 1 & -2\mu & 1 & 1 \\ -2 & \mu & 1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \mu & -2 & 1 \\ 0 & -3\mu & 3 & 0 \\ 0 & 3\mu & -3 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \mu & -2 & 1 \\ 0 & -3\mu & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right] = Q_\mu$$

Συμπεραίνουμε ότι το σύστημα $A_{-2,\mu}X = B$ είναι ασύμβατο $\forall \mu \in \mathbb{R}$, λόγω της τελευταίας γραμμής του πίνακα Q_μ .

β₃) $\mu = 0, \lambda \neq 1, -2$ (οι περιπτώσεις $\lambda = 1, \lambda = -2$ εξετάστηκαν παραπάνω).

$$[A_{\lambda,0} \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ \lambda & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda & 1 \end{array} \right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{array} \right] = P_\lambda.$$

Συμπεραίνουμε και στην περίπτωση αυτή ότι το σύστημα $A_{\lambda,0}X = B$ είναι ασύμβατο $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 1$, λόγω της τελευταίας γραμμής του πίνακα P_λ . \square

7.8.4 Αν για τους $a, b, c \in \mathbb{R}$, υπάρχουν $x, y, w \in \mathbb{R}$ που δεν είναι όλοι μηδέν, ώστε να ισχύει

$$x = cy + bw, \quad y = aw + cx, \quad w = bx + ay, \tag{7.8.1}$$

να δείξετε ότι $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$.

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$(7.8.1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - cy - bw = 0 \\ -cx + y - aw = 0 \\ -bx - ay + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -c & -b \\ -c & 1 & -a \\ -b & -a & 1 \end{pmatrix}.$$

Αφού $\exists (x, y, w) \neq (0, 0, 0)$ που πληροί τις σχέσεις (7.8.1), το 3×3 -ομογενές σύστημα $AX = 0_{3 \times 1}$ έχει μη μηδενική λύση (άρα άπειρες λύσεις). Από το Πόρισμα 7.3.0.5.i αυτό συμβαίνει, αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \text{rank}(A) < 3 &\Leftrightarrow \det(A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ -c & 1 & -a \\ -b & -a & 1 \end{vmatrix} = 0 \xLeftrightarrow[\begin{smallmatrix} \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + c\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + b\Gamma_1 \end{smallmatrix}] \\ &\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ 0 & 1 - c^2 & -a - bc \\ 0 & -a - bc & 1 - b^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - c^2 & -a - bc \\ -a - bc & 1 - b^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - b^2 - c^2 + b^2c^2 - (a + bc)^2 = 0 \Leftrightarrow 1 - b^2 - c^2 + b^2c^2 - a^2 - 2abc - b^2c^2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1. \quad \square \end{aligned}$$

7.8.5 Έστω $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Να αποδείξετε ότι το $n \times m$ -γραμμικό σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό για κάθε $B \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ αν και μόνο αν η βαθμίδα του πίνακα A ισούται με το πλήθος των εξισώσεων του συστήματος,

$$AX = B \text{ συμβατό } \forall B \in M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \text{rank}(A) = n.$$

Λύση. Αν $\text{rank}(A) = n$, τότε το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό για κάθε $B \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, αφού $\text{rank}([A | B]) = \text{rank}(A) = n$. Αντίστροφα, έστω ότι το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό για κάθε $B \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ και $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T) < n$. Από την Πρόταση 5.5.0.4 προκύπτει ότι οι n στήλες του πίνακα A^T , δηλαδή οι γραμμές $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ του πίνακα A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Έτσι θα υπάρχει μία γραμμή του A που θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων γραμμών του. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι αυτή είναι η γραμμή Γ_n , έτσι $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$\Gamma_n = \lambda_1 \cdot \Gamma_1 + \dots + \lambda_{n-1} \cdot \Gamma_{n-1}.$$

Θεωρούμε το σύστημα $AX = E_n$, όπου $E_n = [0 \ \dots \ 0 \ 1]^T$ και τον πίνακα A' στον οποίο μεταβαίνουμε αν εφαρμόσουμε στον πίνακα A διαδοχικά τις γραμμοπράξεις

$$\Gamma_n \rightarrow \Gamma_n - \lambda_1 \cdot \Gamma_1, \quad \Gamma_n \rightarrow \Gamma_n - \lambda_2 \cdot \Gamma_2, \dots, \Gamma_n \rightarrow \Gamma_n - \lambda_{n-1} \cdot \Gamma_{n-1},$$

έτσι

$$[A \ \vdots \ E_n] = \left[\begin{array}{c|c} \Gamma_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma_{n-1} & 0 \\ \Gamma_n & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\Gamma_n \rightarrow \Gamma_n - \lambda_1 \cdot \Gamma_1 - \dots - \lambda_{n-1} \cdot \Gamma_{n-1}} \left[\begin{array}{c|c} \Gamma_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \Gamma_{n-1} & 0 \\ 0_{1 \times m} & 1 \end{array} \right] = [A' \ \vdots \ E_n].$$

Λόγω της τελευταίας γραμμής του επαυξημένου πίνακα $[A' \ \vdots \ E_n]$, το σύστημα $A'X = E_n$ είναι ασύμβατο. Επομένως, και το ισοδύναμο σύστημα $AX = E_n$ είναι ασύμβατο, το οποίο είναι άτοπο. Καταλήξαμε σε άτοπο, διότι υποθέσαμε ότι $\text{rank}(A) < n$, επομένως ισχύει $\text{rank}(A) = n$. \square

Ασκήσεις για Εξάσκηση

7.8.1 Να λυθούν τα παρακάτω γραμμικά συστήματα

$$\text{i)} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}, \quad \text{ii)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}, \quad \text{iii)} \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}.$$

7.8.2 Δίνονται οι παρακάτω πίνακες με στοιχεία από το \mathbb{R}

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

i) Να βρείτε τους μηδενοχώρους των πινάκων A_1, A_2, A_3 .

ii) Να βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να πληρούν τα a, b, c έτσι, ώστε το σύστημα $A_i X = B$ να είναι συμβατό, $i = 1, 2, 3$.

7.8.3 Να βρεθούν τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, αν $(1, -1, 2) \in \text{null}(A)$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ b & c & 1 \\ c & 1 & a \end{bmatrix}$.

7.8.4 Να λυθούν τα γραμμικά συστήματα $AX = B$ και $A^T X = B$, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

7.8.5 Έστω A ο πίνακας συντελεστών του παρακάτω 4×5 -γραμμικού συστήματος

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - 7x_2 + 3x_3 + 8x_4 - 4x_5 = -3 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

Να βρείτε τον μηδενοχώρο $\text{null}(A)$ και να λύσετε το σύστημα.

7.8.6 Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι συμβατό το σύστημα $AX = B$ και για την τιμή αυτή να λύσετε το σύστημα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}.$$

7.8.7 Να λυθούν με τη μέθοδο του Cramer τα γραμμικά συστήματα

$$\text{i)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}, \quad \text{ii)} \begin{cases} 2x_1 + x_4 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 9 \end{cases}.$$

7.8.8 Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να λύσετε το ομογενές σύστημα

$$\begin{cases} x + 2\mu y + z = 0 \\ x + 2\mu y + \mu z = 0 \\ \mu x + 4\mu y + 2z = 0 \end{cases}.$$

7.8.9 Για τις διάφορες τιμές των $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ να λύσετε το ομογενές σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + \kappa z = 0 \\ x + \lambda y + \mu z = 0 \end{cases}.$$

7.8.10 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{i) } \begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 + \lambda \\ x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 = 6 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = -3 \end{cases}, \quad \text{ii) } \begin{cases} x_1 + x_2 + (1 - \lambda)x_3 = \lambda + 2 \\ 2x_1 - \lambda x_2 + 3x_3 = \lambda + 2 \\ (1 + \lambda)x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

7.8.11 Να βρεθούν τα $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει μοναδική, άπειρες ή καμία λύση.

$$\begin{cases} 3a + \lambda b - c = 4 \\ 2a + b + 3c = 2 \\ a - 6b + 7c = \mu \end{cases}.$$

7.8.12 Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω σύστημα να έχει μοναδική, άπειρες ή καμία λύση.

$$\begin{cases} 2x + y + z = -6\kappa \\ \lambda x + 3y + 2z = 2\lambda \\ 2x + y + \mu z = 4 \end{cases}.$$

7.8.13 Να λύσετε το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + \mu z = 2 \\ x + \lambda^2 y + \mu^2 z = 4 \end{cases}.$$

7.8.14 Έστω $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το ομογενές 2×2 -γραμμικό σύστημα

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

έχει μη μηδενική λύση. Για τις τιμές αυτές να λύσετε το σύστημα.

7.8.15 Έστω $A = \begin{bmatrix} 3 & -a \\ a & -1 \end{bmatrix}$. Αν υπάρχει $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \in M_{2 \times 1}(\mathbb{R})$, $\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, με

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix},$$

να δείξετε ότι $-2 \leq a \leq 2$.

7.8.16 Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη που πρέπει να πληρούν τα $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, ώστε να είναι συμβατό το σύστημα

$$\begin{cases} x + z = a \\ -x + y - z = b \\ x - y + 2z = c \\ 2x + y = d \end{cases}.$$

7.8.17 Μπορεί να προσδιοριστεί ένας 2×2 -πίνακας $A \in M_2(\mathbb{R})$, αν είναι γνωστό το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής και κάθε στήλης του;

7.8.18 Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

ώστε να υπάρχει μη μηδενικός πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}), \quad \text{με} \quad AB + BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.8.19 ([1, Άσκηση 2.2.18]) Σε εμβόλιμη εξεταστική 100 φοιτητές εξετάζονται σε τέσσερα μαθήματα. Από αυτούς, 50 φοιτητές επέλεξαν να εξεταστούν μόνο σε ένα ή και στα τέσσερα μαθήματα. Επίσης, κάθε ένα από τα τέσσερα μαθήματα επιλέχθηκε από 70 φοιτητές. Να βρεθεί το μέγιστο και το ελάχιστο δυνατό πλήθος των φοιτητών που επέλεξαν να εξεταστούν και στα τέσσερα μαθήματα.

7.8.20 i) Να βρεθεί πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 2 που διέρχεται από τα σημεία

$$(-2, 5), \quad (1, -4), \quad (3, 0).$$

ii) Να βρεθεί πολυωνυμική καμπύλη βαθμού το πολύ 3 που διέρχεται από τα σημεία

$$(-1, 0), \quad (0, 2), \quad (1, 2), \quad (2, 6).$$

Βιβλιογραφία

- [1] Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Βαβατσούλας και Χ. Χαραλάμπους. *Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2017. ISBN: 978-960-418-727-0.
- [2] Α. Φωτιάδης και Χ. Χαραλάμπους. *Μία Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις, 2015. ISBN: 978-960-603-273-8. URL: <http://hdl.handle.net/11419/2329>.
- [3] S. Gilbert. *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*. Κρήτη: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1993. ISBN: 978-960-730-970-9.
- [4] Αθ. Πάπιστας. *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2019. ISBN: 978-960-418-841-3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Σύνοψη

Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου αυτού εισάγεται η έννοια του διανυσματικού χώρου. Μελετώνται γραμμικοί συνδυασμοί και σχέσεις γραμμικής εξάρτησης ή ανεξαρτησίας διανυσμάτων στο δισδιάστατο επίπεδο και στον τρισδιάστατο χώρο εστιάζοντας στη γεωμετρική ερμηνεία των εννοιών αυτών. Στη συνέχεια μελετώνται ευθείες και επίπεδα, η σχετική τους θέση και δίνεται γεωμετρική ερμηνεία στην επίλυση γραμμικών συστημάτων με δύο ή τρεις αγνώστους. Στην ενότητα «Εργαστήριο με Mathematica» που ακολουθεί προσφέρεται εποπτεία των παραπάνω θεμάτων στον δισδιάστατο και στον τρισδιάστατο χώρο. Το κεφάλαιο κλείνει με μια ενότητα ασκήσεων πάνω στη θεωρία που αναπτύχθηκε. Για βιβλιογραφία στα θέματα αυτά παραπέμπουμε στα βιβλία [1], [2], [3]. Για βασικές γνώσεις γεωμετρίας παραπέμπουμε στο [4] ή [5].

Προαπαιτούμενη γνώση: Κεφάλαια 4, 5, 6, 7, βασικές γνώσεις γεωμετρίας.

8.1 Ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^n

Έστω K ένα σώμα. Θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στις ιδιότητες που έχει η δομή $(M_{n \times m}(K), +, \cdot)$, όπου $M_{n \times m}(K)$ είναι βέβαια το σύνολο των $n \times m$ -πινάκων με στοιχεία από το K , «+» είναι η πράξη της πρόσθεσης των πινάκων στο $M_{n \times m}(K)$ και « \cdot » είναι η πράξη του βαθμωτού πολλαπλασιασμού στοιχείου του K επί πίνακα του $M_{n \times m}(K)$. Οι ιδιότητες αυτές περιγράφονταν στην Πρόταση 4.2.1.2 και στην Πρόταση 4.2.3.2. Στο προηγούμενο κεφάλαιο, παρατηρήσαμε ότι με την πρόσθεση ανά συντεταγμένη των διατεταγμένων n -άδων του K^n και με τον σκαλινό πολλαπλασιασμό της κάθε συντεταγμένης με στοιχείο του K , η δομή $(K^n, +, \cdot)$ των διατεταγμένων n -άδων ικανοποιεί τις ίδιες ιδιότητες, βλ. Παρατήρηση 7.1.0.3.

Η έννοια του διανυσματικού χώρου είναι η ομπρέλα που προσδιορίζει όλες τις δομές που ικανοποιούν την ίδια σειρά ιδιοτήτων. Έτσι έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 8.1.0.1 Έστω ένα σώμα K . Ένας **διανυσματικός χώρος πάνω από το K** είναι ένα μη κενό σύνολο V εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad (v, u) \mapsto v + u$$

και του βαθμωτού ή σκαλινοῦ πολλαπλασιασμού

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, \quad (\kappa, v) \mapsto \kappa \cdot v,$$

που ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

- (i) προσεταιριστική ιδιότητα: $(v + u) + w = v + (u + w), \forall v, u, w \in V,$
- (ii) ύπαρξη μηδενικού στοιχείου: $\exists 0_V \in V$ έτσι ώστε $0_V + u = u + 0_V = u, \forall u \in V,$
- (iii) ύπαρξη αντίθετου για κάθε στοιχείο του K : $\forall u \in V,$ υπάρχει $u' \in V$ έτσι ώστε $u + u' = u' + u = 0_V$ (το u' συμβολίζεται με $-u$ και λέγεται *αντίθετος* του u),
- (iv) αντιμεταθετική ιδιότητα: $v + u = u + v, \forall v, u \in V,$
- (v) επιμεριστική ιδιότητα I: $\kappa \cdot (v + u) = \kappa \cdot v + \kappa \cdot u, \forall v, u \in V, \forall \kappa \in K,$
- (vi) επιμεριστική ιδιότητα II: $(\kappa + \lambda) \cdot v = \kappa \cdot v + \lambda \cdot v, \forall v \in V, \forall \kappa, \lambda \in K,$
- (vii) $\kappa \cdot (\lambda \cdot v) = (\kappa\lambda) \cdot v, \forall v \in V, \forall \kappa, \lambda \in K,$
- (viii) $1 \cdot v = v, \forall v \in V,$ όπου $1 = 1_K$ είναι το μοναδιαίο στοιχείο του σώματος K .

Για συντομία λέμε ότι ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το K είναι K -διανυσματικός χώρος. Αποκαλούμε τα στοιχεία του V **διανύσματα** για να δηλώσουμε ότι σκεφτόμαστε τον V με τη δομή του ως K -διανυσματικό χώρο.

Ας επικεντρωθούμε στον \mathbb{R} -διανυσματικό χώρο $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. Με $\mathbf{0}$ ή $0_{\mathbb{R}^n}$ συμβολίζουμε το μηδενικό διάνυσμα $(0, \dots, 0)$ του \mathbb{R}^n . Θα αξιοποιήσουμε όσο μπορούμε τη συνάρτηση

$$\phi : M_{n \times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mapsto (a_1, \dots, a_n)$$

για να μεταφέρουμε έννοιες που έχουμε ήδη δει και μελετήσει από τον $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ στον \mathbb{R}^n . Είναι εύκολο να δούμε ότι η ϕ είναι ένα προς ένα και επί, (άλλωστε το πέρασμα στον \mathbb{R}^n είναι απλά ένας διαφορετικός τρόπος να αποθηκεύουμε την πληροφορία n στοιχείων). Επιπλέον, είναι εύκολο να επιβεβαιώσουμε ότι

$$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow M_{n \times 1}(\mathbb{R}), \quad v = (a_1, \dots, a_n) \mapsto [v] = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

είναι η ϕ^{-1} , αφού

$$\phi \circ \psi = \text{id}_{\mathbb{R}^n}, \quad \psi \circ \phi = \text{id}_{M_{n \times 1}(\mathbb{R})},$$

όπου με id_S συμβολίζουμε την ταυτοτική συνάρτηση του συνόλου S , $\text{id}_S : S \rightarrow S$, $\text{id}_S(x) = x$, $\forall x \in S$. Είναι, επίσης, ιδιαίτερα ενδιαφέρον ότι ισχύουν οι εξής δύο ιδιότητες για την ϕ .

- $\phi : \kappa \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mapsto (\kappa a_1, \dots, \kappa a_n) = \kappa(a_1, \dots, a_n)$
- $\phi : \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \mapsto (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n).$

Αντίστοιχα, οι ίδιες ιδιότητες ισχύουν και για τη ψ .

- $\psi : \kappa(a_1, \dots, a_n) \mapsto \kappa \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$
- $\psi : (a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) \mapsto \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$

Έτσι, αν $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ και $\Sigma_1, \Sigma_2 \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, τότε

$$\phi(\kappa_1 \Sigma_1 + \kappa_2 \Sigma_2) = \phi(\kappa_1 \Sigma_1) + \phi(\kappa_2 \Sigma_2) = \kappa_1 \phi(\Sigma_1) + \kappa_2 \phi(\Sigma_2)$$

ενώ, αντίστοιχα, αν $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\psi(\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2) = \psi(\kappa_1 v_1) + \psi(\kappa_2 v_2) = \kappa_1 \psi(v_1) + \kappa_2 \psi(v_2).$$

Οι ιδιότητες αυτές για τις ϕ και ψ προκύπτουν αβίαστα αν κάνουμε τις πράξεις και δεν θα κουράσουμε με τις λεπτομέρειες. Θα σας ζητήσουμε όμως να σκεφτείτε ότι εύκολα μπορούμε να γενικεύσουμε, με χρήση μαθηματικής επαγωγής, σε αθροίσματα διανυσμάτων με περισσότερους προσθετέους των αντίστοιχων διανυσματικών χώρων. Έτσι, ισχύει η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 8.1.0.2 Αν $\kappa_1, \dots, \kappa_s \in \mathbb{R}$, $\Sigma_1, \dots, \Sigma_s \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ και $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\phi(\kappa_1 \Sigma_1 + \dots + \kappa_s \Sigma_s) = \kappa_1 \phi(\Sigma_1) + \dots + \kappa_s \phi(\Sigma_s)$$

και

$$\psi(\kappa_1 v_1 + \dots + \kappa_s v_s) = \kappa_1 \psi(v_1) + \dots + \kappa_s \psi(v_s).$$

Θα δούμε αργότερα ότι αυτή η ιδιότητα κάνει τις ϕ και ψ να είναι γραμμικές συναρτήσεις και μάλιστα ισομορφισμούς που σημαίνει ότι στη μαθηματική γενικότητα μπορούμε να ταυτίσουμε τον κόσμο των πινάκων στηλών του $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ με τον κόσμο των στοιχείων του \mathbb{R}^n . Ας μελετήσουμε, τώρα, την έννοια της γραμμικής εξάρτησης και ανεξαρτησίας στοιχείων του \mathbb{R}^n . Έχουμε ήδη δει αυτές τις έννοιες για τους πίνακες στήλη στην Ενότητα 5.5.

Έστω $v, v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^n$. Αν για κάποια $c_1, c_2, \dots, c_s \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$v = c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + \dots + c_s \cdot v_s,$$

τότε λέμε ότι v είναι **γραμμικός συνδυασμός** των v_1, v_2, \dots, v_s και το στοιχείο c_i είναι ο **συντελεστής** του v_i , για $i = 1, \dots, s$. Ο γραμμικός συνδυασμός

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_s = \mathbf{0}$$

ονομάζεται **τετριμμένος** γραμμικός συνδυασμός. Το σύνολο $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ ονομάζεται **γραμμικά εξαρτημένο** ή **ισοδύναμα** τα v_1, v_2, \dots, v_s ονομάζονται **γραμμικά εξαρτημένα**, αν υπάρχουν $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$, με τουλάχιστον ένα $\lambda_i \neq 0$ τέτοια ώστε

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_s v_s = \mathbf{0}.$$

Μία τέτοια σχέση ονομάζεται **σχέση γραμμικής εξάρτησης** των v_1, v_2, \dots, v_s . Τα διανύσματα v_1, v_2, \dots, v_s ονομάζονται **γραμμικά ανεξάρτητα**, αν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές που έχουμε αναπτύξει στην Ενότητα 5.5 για να απαντήσουμε σε ερωτήματα γραμμικής εξάρτησης και ανεξαρτησίας στον \mathbb{R}^n ; Η επόμενη παρατήρηση θα μας δείξει τον δρόμο.

Παρατήρηση 8.1.0.3 Έστω ότι v είναι γραμμικός συνδυασμός των $u_1, u_2, \dots, u_s \in \mathbb{R}^n$. Τότε

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_s u_s$$

για $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \mathbb{R}$. Επομένως

$$\psi(v) = \psi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_s u_s)$$

και από την Πρόταση 8.1.0.2 προκύπτει ότι

$$[v] = [\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_s u_s] = \lambda_1 [u_1] + \lambda_2 [u_2] + \dots + \lambda_s [u_s]. \quad (8.1.1)$$

Αντίστοφα, αν γνωρίζουμε ότι $[v] = \lambda_1 [u_1] + \lambda_2 [u_2] + \dots + \lambda_s [u_s]$, τότε εφαρμόζοντας τη συνάρτηση ϕ , χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\phi([u]) = \phi\psi(u) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}(u) = u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

και την Πρόταση 8.1.0.2 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi([v]) &= \phi(\lambda_1 [u_1] + \lambda_2 [u_2] + \dots + \lambda_s [u_s]) = \\ &= \lambda_1 \phi([u_1]) + \dots + \lambda_s \phi([u_s]) \implies v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_s u_s. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, $\{u_1, \dots, u_s\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν και μόνο αν $\{[u_1], \dots, [u_s]\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Το επόμενο συμπέρασμα μας επιτρέπει να περνάμε σε πίνακες και με αυτόν τον τρόπο θα έχουμε στην εργαλειοθήκη μας όλη τη φαρέτρα της άλγεβρας πινάκων που έχουμε ήδη αναπτύξει.

Πρόταση 8.1.0.4 Έστω $u_1, u_2, \dots, u_s \in \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τον πίνακα $A \in M_{n \times s}(\mathbb{R})$ με στήλες τους πίνακες στήλη $[u_1], \dots, [u_s]$. Τότε το v είναι γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2, \dots, u_s , αν και μόνο αν το σύστημα $AX = [v]$ είναι συμβατό. Επιπλέον, τα διανύσματα $u_1, \dots, u_s \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αν και μόνο $\text{null}(A) \neq \{0\}$.

Απόδειξη. Από την Παρατήρηση 8.1.0.3 έχουμε ότι

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_s u_s \quad \text{αν και μόνο αν} \quad [v] = \lambda_1 [u_1] + \lambda_2 [u_2] + \dots + \lambda_s [u_s]$$

επομένως (από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων), αν και μόνο αν

$$[u_1 | u_2 | \dots | u_s] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_s \end{bmatrix} = [v]$$

και το σύστημα $AX = [v]$ είναι συμβατό. Επιπλέον, τα διανύσματα $u_1, \dots, u_s \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αν και μόνο αν το σύστημα $AX = 0_{n \times 1}$ έχει μη μηδενική λύση, άρα $\text{null}(A) \neq \{0\}$. ■

Στα επόμενα παραδείγματα θα εφαρμόσουμε τις παραπάνω έννοιες σε διανύσματα του \mathbb{R}^3 .

Παραδείγματα 8.1.0.5

i. Τα στοιχεία

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1)$$

του \mathbb{R}^3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θα το δείξουμε, εφαρμόζοντας πρώτα τον ορισμό. Έστω ότι 0 είναι γραμμικός συνδυασμός των e_1, e_2, e_3 . Τότε υπάρχουν $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}$ με

$$\kappa_1 \cdot e_1 + \kappa_2 \cdot e_2 + \kappa_3 \cdot e_3 = 0 \Rightarrow (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (0, 0, 0) \Rightarrow \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0.$$

Ισοδύναμα, οι στήλες του μοναδιαίου πίνακα $[e_1 | e_2 | e_3] = I_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες και τα e_1, e_2, e_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Παρατηρούμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ γράφεται εύκολα ως γραμμικός συνδυασμός των e_1, e_2, e_3 , αφού

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= (x_1, 0, 0) + (0, x_2, 0) + (0, 0, x_3), \quad \text{άρα} \\ (x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot (1, 0, 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0) + x_3 \cdot (0, 0, 1) \quad \text{και τελικά} \\ (x_1, x_2, x_3) &= x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + x_3 \cdot e_3. \end{aligned}$$

Το σύνολο $B_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ ονομάζεται **κανονική βάση** του \mathbb{R}^3 . Καθώς οι συντελεστές του διανύσματος $v = (x_1, x_2, x_3)$ ως προς τα διανύσματα του B_3 δίνουν ακριβώς τον πίνακα $[v]$, λέμε ότι ο $[v]$ είναι ο πίνακας συντεταγμένων του v ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 ή απλούστερα ότι $[v]$ είναι ο πίνακας συντεταγμένων του v .

ii. Έστω

$$v_1 = (-3, 1, 2), \quad v_2 = (2, 1, 2), \quad v_3 = (0, 0, 5), \quad v_4 = (0, 5, 10), \quad v_5 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3.$$

Το διάνυσμα $w = (7, 4, -3)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των v_2, v_3, v_5 , αφού

$$w = 3 \cdot v_2 - 2 \cdot v_3 + v_5.$$

Επιπλέον, το w είναι γραμμικός συνδυασμός των v_1, \dots, v_5 , αφού

$$w = 0 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 - 2 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 + v_5.$$

Η σχέση

$$v_1 + 4 \cdot v_2 - v_3 - 5 \cdot v_5 = \mathbf{0}$$

είναι σχέση γραμμικής εξάρτησης για τα διανύσματα v_1, v_2, v_3, v_5 . Κατά συνέπεια, το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Τέλος, θα δείξουμε ότι τα διανύσματα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, ο πίνακας

$$[v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

έχει μη μηδενική ορίζουσα (επιβεβαιώστε το!), επομένως οι στήλες, δηλαδή οι πίνακες $[v_1], [v_2], [v_3]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητοι και τελικά τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Μας ενδιαφέρουν τα πεπερασμένα υποσύνολα του \mathbb{R}^n με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό στοιχείων από τα οποία με γραμμικούς συνδυασμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε όλα τα στοιχεία του \mathbb{R}^n . Ένα τέτοιο σύνολο, όπως θα δούμε λίγο αργότερα, είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^n . Η **κανονική ή συνήθης βάση** του \mathbb{R}^n είναι το σύνολο

$$B_n = \{ e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1) \}.$$

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία της βάσης B_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα (μπορείτε να το δείτε;) και ότι ο πίνακας $[e_1|e_2|\dots|e_n]$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_n . Επιπλέον, αν $v = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ είναι τυχαίο στοιχείο του \mathbb{R}^n , τότε

$$v = x_1 \cdot e_1 + x_2 \cdot e_2 + \dots + x_n \cdot e_n.$$

Λέμε ότι $[v] = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ είναι ο **πίνακας συντεταγμένων** του v ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^n ή απλούστερα ο πίνακας συντεταγμένων του v . Στην επόμενη πρόταση συγκεντρώνουμε βασικά αποτελέσματα που αφορούν τη γραμμική ανεξαρτησία στοιχείων του \mathbb{R}^n , τα οποία έχουμε ήδη δει αναλυτικά για πίνακες στήλες.

Πρόταση 8.1.0.6

- (i) Το πεπερασμένο σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, αν και μόνο αν κάποιο από τα στοιχεία του γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων.
- (ii) Αν το πεπερασμένο σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά εξαρτημένο και S' είναι πεπερασμένο υπερσύνολο του S , δηλαδή $S \subset S' \subset \mathbb{R}^n$, τότε S' είναι επίσης γραμμικά εξαρτημένο.
- (iii) Αν το πεπερασμένο σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $S'' \subset S$, τότε S'' είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο.
- (iv) Το $\mathbf{0}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Αν $v \neq \mathbf{0}$, τότε το $\{v\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αν $\mathbf{0} \in S \subset \mathbb{R}^n$, τότε S είναι γραμμικά εξαρτημένο.
- (v) Τα διανύσματα $v, u \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αν και μόνο αν $v = \lambda u$ ή $u = \lambda v$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Έστω $S = \{u_1, \dots, u_s\} \subset \mathbb{R}^n$. Αν

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s = \mathbf{0}$$

είναι σχέση γραμμικής εξάρτησης και $\lambda_i \neq 0$, τότε

$$u_i = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_i} u_1\right) + \dots + \left(-\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} u_{i-1}\right) + \left(-\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} u_{i+1}\right) + \dots + \left(-\frac{\lambda_{s-1}}{\lambda_i} u_s\right).$$

Η παραπάνω σχέση αποδεικνύει το (i) και το (v) (για $s = 2$). Το (iii) προκύπτει από το (ii). Τα (ii) και (iv) αφήνονται ως άσκηση. ■

Έστω τώρα ένας πίνακας $A \in M_{n \times s}(\mathbb{R})$. Γνωρίζουμε ότι $\text{rank}(A) \leq \min\{n, s\}$ και ότι οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = s$. Στην περίπτωση που $s > n$, τότε οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες. Αν $\text{rank}(A) = n$, τότε το σύστημα $AX = [v]$ είναι συμβατό για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$. Αντίστροφα, αν το σύστημα $AX = [v]$ είναι συμβατό $\forall v \in \mathbb{R}^n$, τότε $\text{rank}(A) = n$ (βλ. Λυμένη Άσκηση 7.8.5). Όταν ο A είναι τετραγωνικός πίνακας ($s = n$), τότε $\text{rank}(A) = n$, αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$. Έτσι, η συνθήκη ο A να είναι αντιστρέψιμος πίνακας μας δίνει ισοδύναμα ότι οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες καθώς και ότι το σύστημα $AX = [v]$ είναι συμβατό για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$, ενώ επιπλέον η λύση του συστήματος είναι μοναδική. Τα παραπάνω δίνουν την απόδειξη της επόμενης πρότασης.

Πρόταση 8.1.0.7 Έστω $u_1, u_2, \dots, u_s \in \mathbb{R}^n$ και έστω $A = [u_1 | u_2 | \dots | u_s]$.

- (i) Το σύνολο $\{u_1, u_2, \dots, u_s\}$ γραμμικά ανεξάρτητο, αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = s$.
- (ii) Αν $\text{rank}(A) = n$, τότε κάθε στοιχείο w του \mathbb{R}^n γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2, \dots, u_s και αντιστρόφως.
- (iii) Αν $s = n$, τότε $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$.
- (iv) Αν $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε κάθε στοιχείο w του \mathbb{R}^n γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2, \dots, u_n .
- (v) Το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων του \mathbb{R}^n ισούται με n . Έτσι $n + 1$ ή περισσότερα στοιχεία του \mathbb{R}^n είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.

Παραδείγματα 8.1.0.8

- $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αν και μόνο αν $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0$,
- Τρία ή περισσότερα στοιχεία του \mathbb{R}^2 είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.
- Τέσσερα ή περισσότερα στοιχεία του \mathbb{R}^3 είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.

Έστω $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^n$. Η **γραμμική θήκη** των στοιχείων v_1, \dots, v_s είναι το υποσύνολο του \mathbb{R}^n που αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των v_1, \dots, v_s και συμβολίζεται με $\text{span}\{v_1, \dots, v_s\}$:

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_s\} = \{\mu_1 \cdot v_1 + \dots + \mu_s \cdot v_s : \mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Πρόταση 8.1.0.9 Τα διανύσματα $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αν και μόνο αν $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Έστω ότι τα v_1, v_2, \dots, v_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα και $w \in \mathbb{R}^n$. Από την Πρόταση 8.1.0.7.iv γνωρίζουμε ότι υπάρχουν (μοναδικά) $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n \Rightarrow w \in \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{R}^n \subseteq \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$. Αφού $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$, έχουμε ότι

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = \mathbb{R}^n.$$

Αντίστροφα, αν $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε ο $n \times n$ -πίνακας A με στήλες τα $[v_1], [v_2], \dots, [v_n]$ δεν είναι αντιστρέψιμος, έχει βαθμίδα μικρότερη του n και υπάρχει τουλάχιστον ένα διάνυσμα $w \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε το σύστημα $AX = [w]$ να μην είναι συμβατό (βλ. Λυμένη Άσκηση 7.8.5). Επομένως, $w \notin \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ και $\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} \neq \mathbb{R}^n$. ■

Παραδείγματα 8.1.0.10

i. $\text{span}\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}.$

ii. Αν $u \in \mathbb{R}^n$, τότε $\text{span}\{u\} = \{\kappa u : \kappa \in \mathbb{R}\}.$

iii. Έστω B_n η κανονική βάση του \mathbb{R}^n . Τότε $\text{span } B_n = \mathbb{R}^n.$

iv. Έστω

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (0, 1, 1), \quad v_3 = (1, 0, 1), \quad w = (a, b, c).$$

Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και επομένως $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$. Παράλληλα, θα γράψουμε το w ως γραμμικό συνδυασμό των v_1, v_2, v_3 . Φέρνουμε σε ε.κ.μ.γ. τον πίνακα $[v_1|v_2|v_3|w]$:

$$[v_1|v_2|v_3|w] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 1 & c \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & \frac{a+b-c}{2} \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & \frac{-a+b+c}{2} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & \frac{a-b+c}{2} \end{bmatrix} = R.$$

(βλ. Λυμένη Άσκηση 5.7.5). Οι καθοδηγητικές μονάδες βρίσκονται στις τρεις πρώτες στήλες του R , επομένως οι στήλες $[v_1], [v_2], [v_3]$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, έτσι και τα στοιχεία v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Για τη στήλη $[w]$ έχουμε:

$$[w] = \frac{a+b-c}{2} [v_1] + \frac{-a+b+c}{2} [v_2] + \frac{a-b+c}{2} [v_3] \xrightarrow[\text{8.1.0.3}]{\text{Παρατήρηση}}$$

$$w = \frac{a+b-c}{2} \cdot v_1 + \frac{-a+b+c}{2} \cdot v_2 + \frac{a-b+c}{2} \cdot v_3 :$$

$$(a, b, c) = \frac{a+b-c}{2} \cdot (1, 1, 0) + \frac{-a+b+c}{2} \cdot (0, 1, 1) + \frac{a-b+c}{2} \cdot (1, 0, 1).$$

Αν για παράδειγμα $w = (-3, 4, 5)$, τότε $w = -2 \cdot v_1 + 6 \cdot v_2 - v_3$:

$$(-3, 4, 5) = -2 \cdot (1, 1, 0) + 6 \cdot (0, 1, 1) - (1, 0, 1).$$

v. Έστω v, u δύο γραμμικά ανεξάρτητα (άρα και μη μηδενικά) στοιχεία του \mathbb{R}^2 . Έτσι $v \neq \kappa u, \forall \kappa \in \mathbb{R}$. Από την Πρόταση 8.1.0.9 έχουμε ότι

$$\text{span}\{v, u\} = \{\lambda_1 v + \lambda_2 u : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Αντίστροφα, αν $\text{span}\{v, u\} = \mathbb{R}^2$, τότε το σύνολο $\{v, u\}$ είναι σίγουρα γραμμικά ανεξάρτητο (Πρόταση 8.1.0.9). Πράγματι, αν $\{v, u\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε όλα τα διανύσματα στο $\text{span}\{v, u\}$ είναι αναγκαστικά πολλαπλάσια του ενός από τα δύο διανύσματα v, u και σίγουρα υπάρχει κάποιο διάνυσμα στον \mathbb{R}^2 που δεν ανήκει στο $\text{span}\{v, u\}$. Μπορείτε να κατασκευάσετε ένα τέτοιο διάνυσμα;

8.2 Σημεία και Διανύσματα του \mathbb{R}^n

Θα ξεκινήσουμε αυτήν την ενότητα ορίζοντας μία σχέση ισοδυναμίας στο καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, για $n \geq 2$. Στη συνέχεια θα δούμε την ερμηνεία των όσων ορίσαμε στους χώρους \mathbb{R}^2 και \mathbb{R}^3 όπου έχουμε γεωμετρική εποπτεία. Έστω δύο στοιχεία (A, B) και (C, D) του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, όπου $A(a_1, \dots, a_n)$, $B(b_1, \dots, b_n)$, ενώ $C(c_1, \dots, c_n)$, $D(d_1, \dots, d_n)$. Λέμε ότι

$$(A, B) \sim (C, D), \text{ αν και μόνο αν } (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n) = (d_1 - c_1, \dots, d_n - c_n).$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η \sim είναι μία σχέση ισοδυναμίας, η οποία διαμελίζει το σύνολο των στοιχείων του $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ σε κλάσεις ισοδυναμίας. Μπορούμε να θεωρήσουμε «γεωμετρικά» τις δυάδες (A, B) ως ευθύγραμμα τμήματα με αρχικό σημείο το A και τελικό σημείο το B και θα βοηθούσε εάν γράφαμε AB στη θέση του (A, B) . Ας τα δούμε αυτά στους \mathbb{R} -διανυσματικούς χώρους

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \quad \text{και} \quad \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Για να αποκτήσουμε γεωμετρική εποπτεία σε αυτούς τους χώρους χρησιμοποιούμε το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων των αξόνων $x'x, y'y$ για το δισδιάστατο επίπεδο \mathbb{R}^2 και των τριών αξόνων $x'x, y'y, z'z$ για τον τρισδιάστατο χώρο \mathbb{R}^3 . Η δυάδα (A, B) ορίζει ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα AB , με αρχή το A και πέρας το B . Το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα AB είναι διαφορετικό από το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα BA με αρχή το B και πέρας το A , καθώς έχουν αντίθετες φορές. Συμβολίζουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB με (AB) . Λέμε ότι δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμο τμήματα $AB, \Gamma\Delta$ έχουν την ίδια διεύθυνση, αν οι ευθείες που ορίζονται από τα ευθύγραμμο τμήματα AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες ή ταυτίζονται. Γράφουμε και πάλι τη σχέση ισοδυναμίας που ορίσαμε προηγουμένως ως σχέση ισοδυναμίας \sim στο σύνολο \mathbf{S} των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων:

$$AB \sim \Gamma\Delta \text{ αν } AB, \Gamma\Delta \text{ έχουν ίδια διεύθυνση, ίδια φορά και ίσο μήκος.}$$

Η \sim διαμελίζει το σύνολο \mathbf{S} των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων σε κλάσεις ισοδυναμίας. Έστω $MN \in \mathbf{S}$. Η κλάση ισοδυναμίας του MN , δηλαδή το υποσύνολο του \mathbf{S} που περιέχει όλα τα προσανατολισμένα ευθύγραμμο τμήματα που είναι ισοδύναμα με το MN συμβολίζεται με \overrightarrow{MN} και ονομάζεται διάνυσμα με αρχή το σημείο M και πέρας το N ,

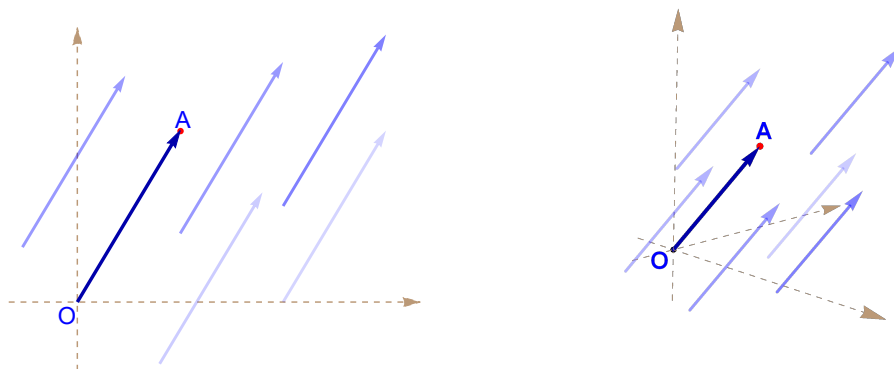
$$\overrightarrow{MN} = \{ZH \in \mathbf{S} : ZH \sim MN\}.$$

Όλα τα στοιχεία του \mathbf{S} με μηδενικό μήκος (το πέρας τους ταυτίζεται με την αρχή τους) είναι ισοδύναμα και η κλάση ισοδυναμίας που τα περιέχει ονομάζεται μηδενικό διάνυσμα και συμβολίζεται με $\vec{0}$.

Παράδειγμα 8.2.0.1 Έστω ότι είμαστε στον \mathbb{R}^2 και έστω ότι $O(0, 0)$, $A(a_1, a_2)$. Αν $C(c_1, c_2)$, $D(d_1, d_2)$, τότε

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CD} \text{ αν και μόνο αν } (a_1, a_2) = (d_1 - c_1, d_2 - c_2).$$

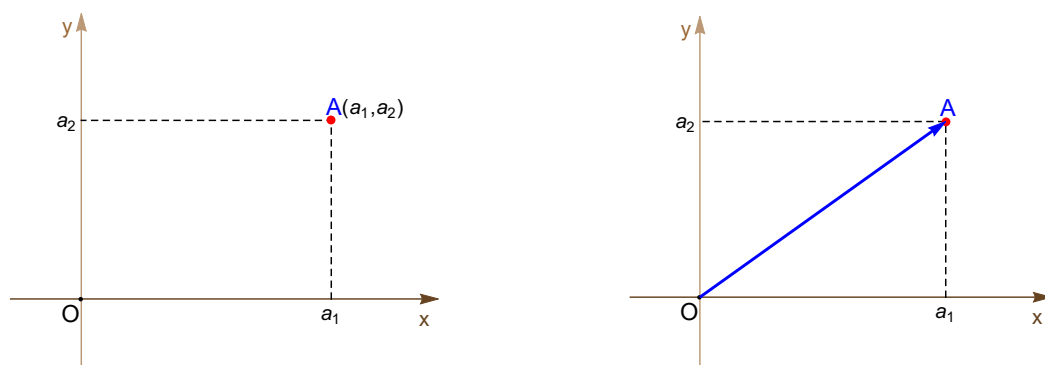
Έστω τώρα ότι $K\Lambda \sim MN$, δηλαδή $K\Lambda \in \overrightarrow{MN}$, τότε $K\Lambda, MN$ ορίζουν την ίδια κλάση ισοδυναμίας: $\overrightarrow{K\Lambda} = \overrightarrow{MN}$. Ως αντιπρόσωπο της κλάσης ισοδυναμίας \overrightarrow{MN} μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα του S που είναι ισοδύναμο με το MN . Σημειώνουμε ότι σε κάθε κλάση ισοδυναμίας υπάρχει ένα μοναδικό προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχή την αρχή των αξόνων. Συνήθως ως αντιπρόσωπο της κλάσης \overrightarrow{MN} επιλέγουμε το στοιχείο αυτό. Η ευθεία που καθορίζεται από τον αντιπρόσωπο OA ονομάζεται **φορέας** του \overrightarrow{MN} . Στο Σχήμα 8.1 αναπαρίσταται μία κλάση ισοδυναμίας, δηλαδή ένα διάνυσμα, αριστερά στον \mathbb{R}^2 και δεξιά στον \mathbb{R}^3 .



Σχήμα 8.1: Διανύσματα στον \mathbb{R}^2 και στον \mathbb{R}^3 .

Έστω Oxy ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σημείο $A(a_1, a_2)$ με συντεταγμένες a_1, a_2 αντιστοιχίζεται στο διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ και αντιστρόφως. Ορίζεται έτσι μία 1-1 και επί απεικόνιση από το σύνολο των σημείων στο σύνολο διανυσμάτων (βλ. Σχήμα 8.2),

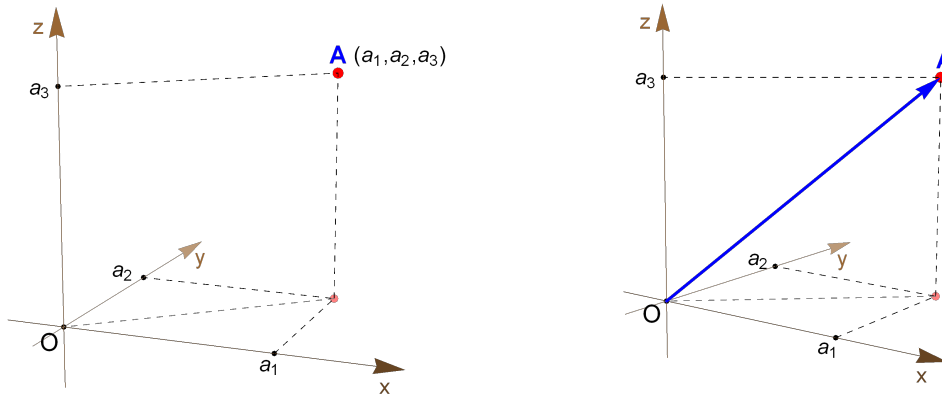
$$A(a_1, a_2) \longleftrightarrow \overrightarrow{OA} = (a_1, a_2).$$



Σχήμα 8.2: Το (a_1, a_2) ως σημείο ή διάνυσμα του \mathbb{R}^2 .

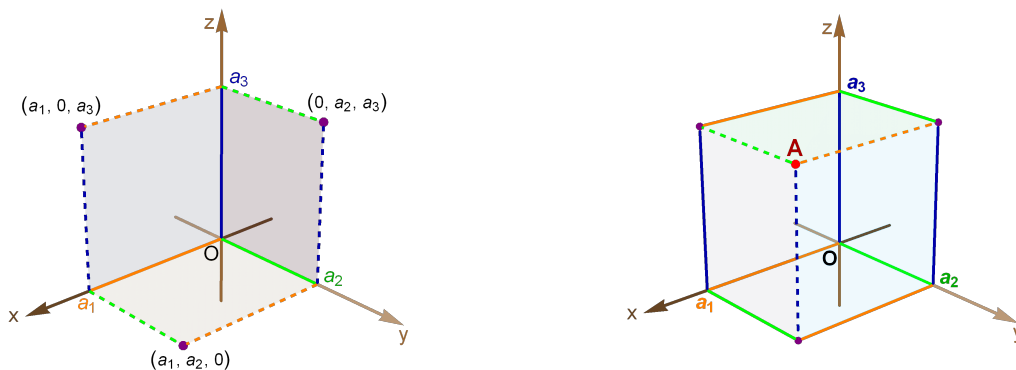
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ στον χώρο. Κάθε σημείο A του χώρου σημειώνεται με τρεις συντεταγμένες (a_1, a_2, a_3) , δηλαδή $A(a_1, a_2, a_3)$, όπου a_1, a_2, a_3 είναι οι αλγεβρικές τιμές των προσανατολισμένων αποστάσεων του σημείου A από τα επίπεδα Oyz, Oxz και Oxy αντίστοιχα. Έτσι, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το σημείο $A(a_1, a_2, a_3)$ με το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2, a_3)$ και αντιστρόφως. Ορίζεται, λοιπόν, μία 1-1 και επί απεικόνιση από το σύνολο των σημείων στο σύνολο των διανυσμάτων (βλ. Σχήμα 8.3),

$$A(a_1, a_2, a_3) \longleftrightarrow \overrightarrow{OA}.$$



Σχήμα 8.3: Αναπαράσταση του $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ ως σημείο ή διάνυσμα του χώρου.

Σημειώνουμε ότι ο χώρος \mathbb{R}^3 χωρίζεται σε οκταμόρια. Θα δούμε πώς σχεδιάζουμε ένα σημείο ή διάνυσμα στο πρώτο οκταμόριο. Έστω ότι $a_1, a_2, a_3 \geq 0$. Για να σχεδιάσουμε το σημείο $A(a_1, a_2, a_3)$ ή το διάνυσμα \vec{OA} , βρίσκουμε πρώτα το σημείο $(a_1, a_2, 0)$ στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy , προσδιορίζοντας το σημείο με συντεταγμένες $(a_1, 0, 0)$ στον άξονα των x , φέρνοντας από αυτό ευθεία παράλληλη προς τον άξονα των y και μετρώντας επί της ευθείας αυτής a_2 μονάδες. Στη συνέχεια, από το σημείο $(a_1, a_2, 0)$ του επιπέδου, φέρνουμε ευθεία κάθετη προς το επίπεδο Oxy , παράλληλη δηλαδή προς τον άξονα των z και μετρούμε a_3 μονάδες για να προσδιορίσουμε το σημείο $A(a_1, a_2, a_3)$. Παρατηρούμε ότι τα σημεία $(a_1, a_2, 0)$, $(a_1, 0, a_3)$, $(0, a_2, a_3)$ βρίσκονται επί των καρτεσιανών επιπέδων Oxy , Oxz και Oyz και καθορίζουν ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο. Το A είναι η κορυφή του παραλληλεπιπέδου με τη μεγαλύτερη απόσταση από την αρχή των αξόνων $O(0, 0, 0)$ (βλ. Σχήματα 8.4). Κάνοντας την αντίστοιχη διαδικασία όταν κάποια από τις συντεταγμένες είναι αρνητική, μπορούμε να απεικονίσουμε σημεία ή διανύσματα σε διαφορετικά οκταμόρια του \mathbb{R}^3 .



Σχήμα 8.4: Σχεδίαση του σημείου $A(a_1, a_2, a_3)$ στον χώρο.

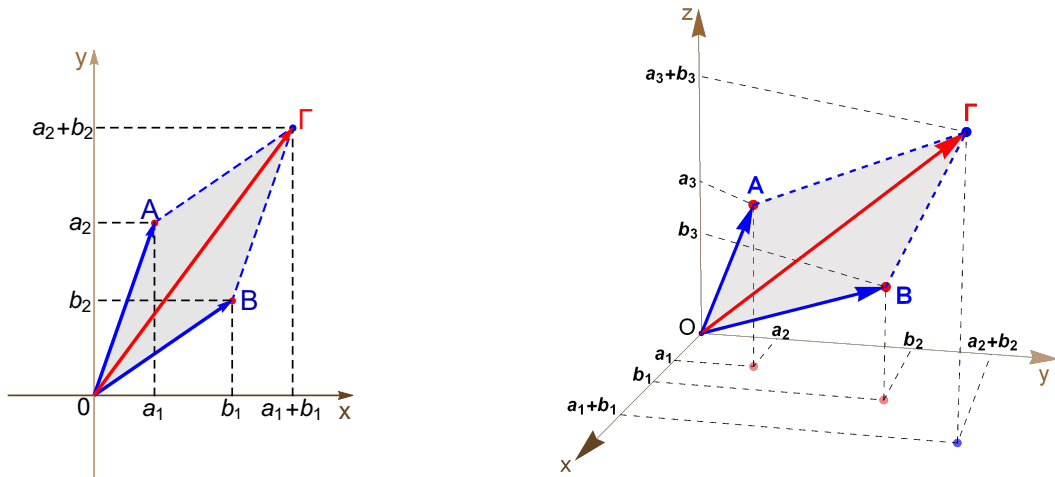
Για να προσθέσουμε δύο διανύσματα \vec{OA} , \vec{OB} του επιπέδου ή του χώρου χρησιμοποιούμε τον **κανόνα του παραλληλογράμμου** (βλ. Σχήμα 8.5),

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OG},$$

όπου $OAGB$ είναι το παραλληλόγραμμο με πλευρές OA , OB . Ισοδύναμα, έστω Γ το τελικό σημείο του αντιπροσώπου του \vec{OB} , που έχει αρχικό σημείο το A . Το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα με αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων και τελικό σημείο το Γ είναι αντιπρόσωπος του $\vec{OA} + \vec{OB}$. Σημειώνουμε ότι

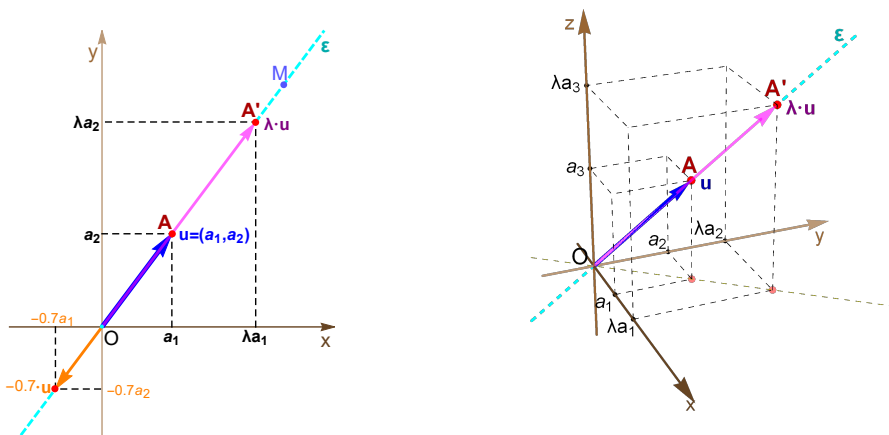
- στον \mathbb{R}^2 , αν $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, τότε $\Gamma(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$,

- στον \mathbb{R}^3 αν $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, τότε $\Gamma(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.



Σχήμα 8.5: Πρόσθεση διανυσμάτων στο επίπεδο και στον χώρο.

Έστω τώρα ε ο φορέας ενός μη μηδενικού διανύσματος \vec{OA} (βλ. Σχήμα 8.6). Ας περιγράψουμε όλα τα διανύσματα που έχουν τον ίδιο φορέα. Θα δούμε μαζί την περίπτωση ενός διανύσματος στον \mathbb{R}^2 και θα αφήσουμε για επιβεβαίωση την περίπτωση ενός διανύσματος στον \mathbb{R}^3 .



Σχήμα 8.6: Ο φορέας και η γραμμική θήκη διανύσματος στο επίπεδο και στον χώρο.

Καθώς ε διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν $A(a_1, a_2)$, τότε κάθε άλλο σημείο A' πάνω στην ευθεία θα έχει συντεταγμένες $A'(\lambda a_1, \lambda a_2)$, όπου

$$\lambda = \begin{cases} \frac{(OA')}{(OA)}, & \text{αν } A' \text{ είναι σημείο της ημιευθείας } OA \\ -\frac{(OA')}{(OA)}, & \text{αν } A' \text{ δεν είναι σημείο της ημιευθείας } OA \end{cases}$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\vec{OA'} = \lambda \vec{OA},$$

δηλαδή το $\vec{OA'} \in \text{span}\{\vec{OA}\}$. Αντίστροφα, παρατηρούμε ότι αν $(b_1, b_2) \in \text{span}\{\vec{OA}\}$, τότε το $B(b_1, b_2)$ είναι επί της ευθείας ε . Έχουμε λοιπόν ότι τα σημεία του ε προσδιορίζουν με μοναδικό τρόπο τα διανύσματα του $\text{span}\{\vec{OA}\}$ και ότι υπάρχει 1-1 και επί αντιστοιχία

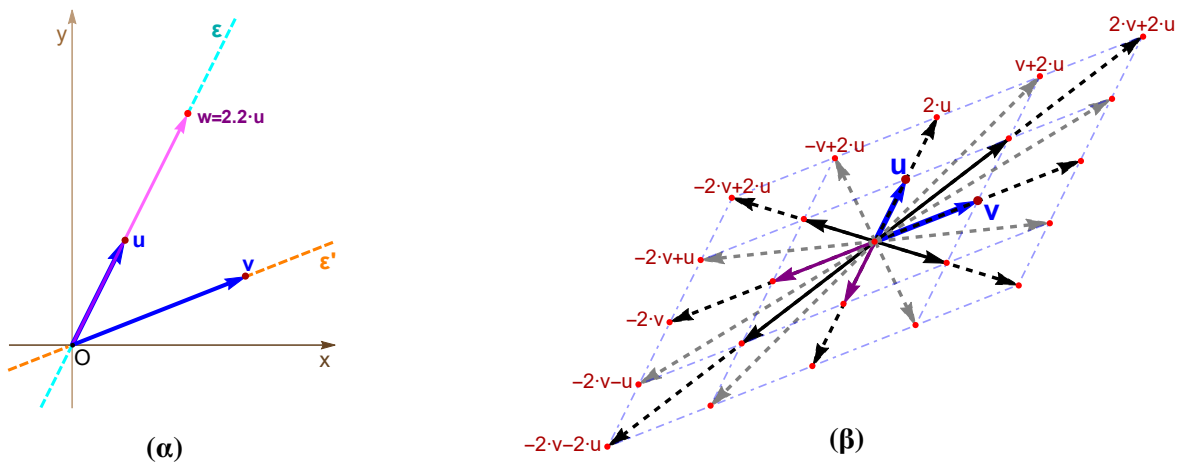
$$\text{σημεία της } \varepsilon \longleftrightarrow \text{span}\{\vec{OA}\}.$$

Παραδείγματα 8.2.0.2

- i. Ο άξονας z' του χώρου \mathbb{R}^3 είναι η ευθεία που παράγεται από το στοιχείο $e_3 = (0, 0, 1)$ του \mathbb{R}^3 ,

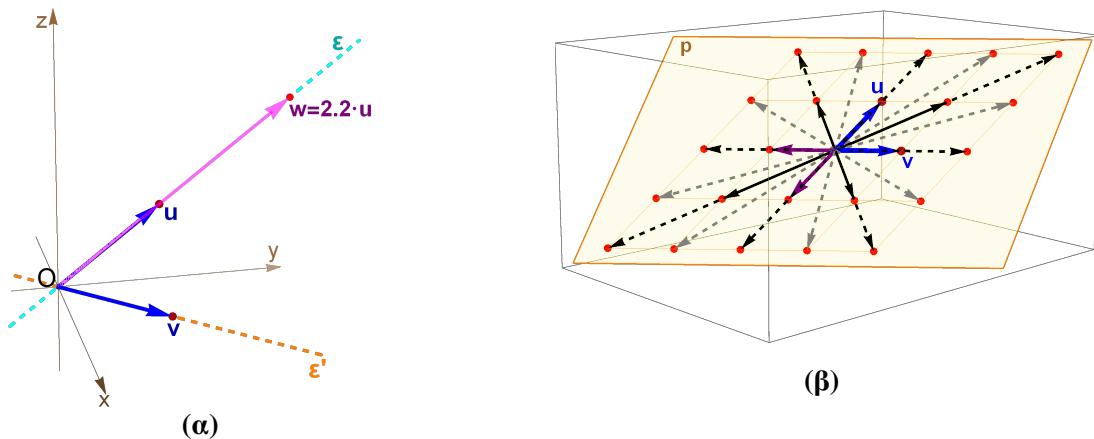
$$\text{span}\{e_3\} = \{\lambda e_3 : \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- ii. Έστω δύο διανύσματα u, w του \mathbb{R}^2 ή \mathbb{R}^3 . Από την Πρόταση 8.1.0.6.v γνωρίζουμε ότι τα u, w είναι γραμμικά εξαρτημένα, αν και μόνο αν $\exists \mu \in \mathbb{R}$, ώστε $w = \mu u$. Με άλλα λόγια, τα v, u είναι γραμμικά εξαρτημένα, αν και μόνο αν τα u, w έχουν τον ίδιο φορέα. Ισοδύναμα, v, w είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αν και μόνο αν τα v, w έχουν διαφορετικούς φορείς. Στο Σχήμα 8.7.α απεικονίζονται τα γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα u, w . Σημειώνουμε ότι τα σύνολα $\{u, v\}$ και $\{v, w\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Στο Σχήμα 8.7.β βλέπουμε γραμμικούς συνδυασμούς των u, v . Θα δούμε ότι η γραμμική θήκη των $\{u, v\}$ είναι όλο το \mathbb{R}^2 .



Σχήμα 8.7: Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία στον \mathbb{R}^2 .

Στο Σχήμα 8.8 εξετάζουμε αντίστοιχα διανύσματα στον \mathbb{R}^3 . Τα διανύσματα u, w είναι γραμμικά εξαρτημένα, ενώ τα $\{u, v\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Όπως θα δούμε, η γραμμική θήκη δύο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στον \mathbb{R}^3 ορίζει ένα επίπεδο.



Σχήμα 8.8: Γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία στον \mathbb{R}^3 .

- iii. Στο Σχήμα 8.9.α δείχνουμε πώς το διάνυσμα \overrightarrow{OM} του \mathbb{R}^2 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των γραμμικά ανεξάρτητων \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} . Φέρνουμε από το M μία ευθεία παράλληλη προς τον φορέα του \overrightarrow{OA} . Έστω B' το σημείο τομής αυτής της ευθείας με τον φορέα του \overrightarrow{OB} . Αντίστοιχα, από το M φέρνουμε μία ευθεία παράλληλη προς τον φορέα του \overrightarrow{OB} και έστω A' το σημείο τομής με τον φορέα του \overrightarrow{OA} . Τότε OM είναι η διαγώνιος του παραλληλόγραμμου $OB'MA'$ και άρα

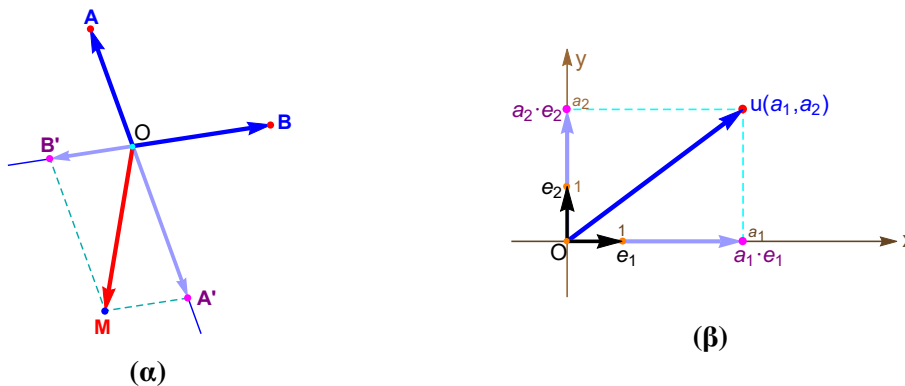
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}.$$

Αφού $\overrightarrow{OA'}$ έχει τον ίδιο φορέα με το \overrightarrow{OA} συμπεραίνουμε ότι $\overrightarrow{OA'} = \kappa \overrightarrow{OA}$, για κάποιο $\kappa \in \mathbb{R}$. Αντίστοιχα, $\overrightarrow{OB'} = \lambda \overrightarrow{OB}$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Επομένως,

$$\overrightarrow{OM} = \kappa \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{OB}$$

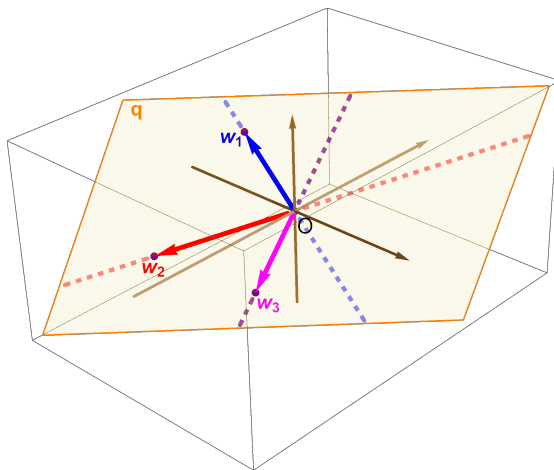
είναι η ανάλυση του \overrightarrow{OM} ως γραμμικός συνδυασμός των \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} . Μπορείτε να προσδιορίσετε το σημείο στην παραπάνω εξήγηση, όπου χρησιμοποιήθηκε (γεωμετρικά) η γραμμική ανεξαρτησία των \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} ; Στο Σχήμα 8.9.β απεικονίζεται το στοιχείο $u = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της κανονικής βάσης $B_2 = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ του \mathbb{R}^2 . Στην περίπτωση αυτή έχουμε ότι

$$(a_1, a_2) = a_1 e_1 + a_2 e_2.$$

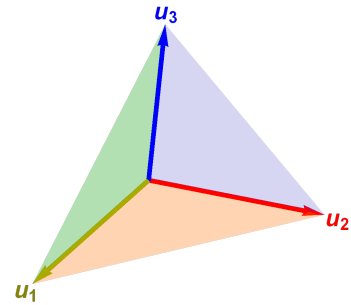


Σχήμα 8.9: Διάνυσμα ως γραμμικός συνδυασμός.

- iv. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη γραμμική θήκη δύο γραμμικά ανεξάρτητων στοιχείων v, u του \mathbb{R}^3 . Σημειώνουμε ότι οι φορείς των v, u είναι ευθείες που περνούν από την αρχή των αξόνων και που προσδιορίζουν ένα επίπεδο, έστω \mathbf{p} . Γνωρίζουμε ότι $\text{span}\{v, u\}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του \mathbb{R}^3 (Πρόταση 8.1.0.9). Επιπλέον, το $\mathbf{0} \in \text{span}\{v, u\}$ και αν $w \in \text{span}\{v, u\}$, τότε ο αντιπρόσωπος του w με αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων θα έχει το τελικό του σημείο επί του επιπέδου \mathbf{p} που οι φορείς των v, u προσδιορίζουν. Στο Σχήμα 8.8.β απεικονίζονται γραμμικοί συνδυασμοί των v, u και το επίπεδο \mathbf{p} που παράγουν. Σημειώνουμε ότι τα $v, u, w \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αν και μόνο αν υπάρχει επίπεδο του \mathbb{R}^3 που περιέχει και τους τρεις φορείς των v, u, w . Στο Σχήμα 8.10.α τα w_1, w_2, w_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα, καθώς οι φορείς τους ανήκουν στο ίδιο επίπεδο \mathbf{q} . Κατά συνέπεια, για να κατασκευάσουμε τρία γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του \mathbb{R}^3 αρκεί να πάρουμε δύο μη μηδενικά διανύσματα u_1, u_2 του \mathbb{R}^3 που δεν έχουν τον ίδιο φορέα και ένα τρίτο στοιχείο u_3 που ο φορέας του να μην ανήκει στο επίπεδο $\text{span}\{u_1, u_2\}$, βλ. Σχήμα 8.10.β.



(α) Τα w_1, w_2, w_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα.

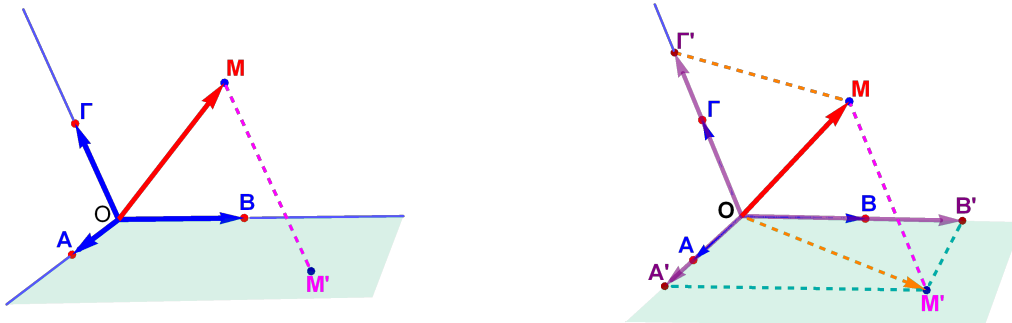


(β) Τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Σχήμα 8.10: Γραμμική εξάρτηση και ανεξάρτησία στον \mathbb{R}^3 .

v. Στο Σχήμα 8.11 δείχνουμε πώς αναλύουμε το διάνυσμα \overrightarrow{OM} του \mathbb{R}^3 ως γραμμικό συνδυασμό των γραμμικά ανεξάρτητων $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OG}$. Φέρνουμε από το M ευθεία παράλληλη προς τον φορέα του OG και βρίσκουμε το σημείο τομής M' με το επίπεδο που προσδιορίζεται από τους φορείς των $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Στη συνέχεια γράφουμε το $\overrightarrow{OM'}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OG'}$$



Σχήμα 8.11: Ανάλυση ως γραμμικός συνδυασμός τριών διανυσμάτων.

vi. Στο Σχήμα 8.12 απεικονίζεται το

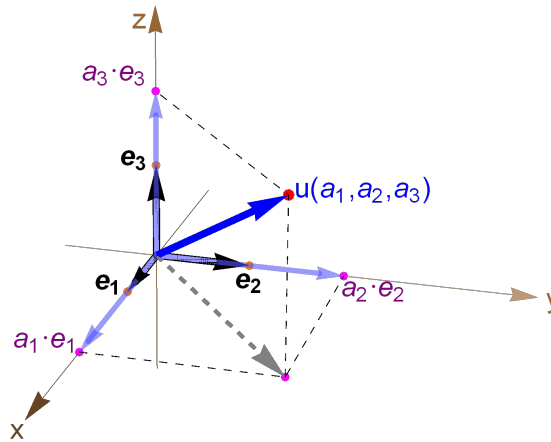
$$u = (a_1, a_2, a_3) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 \in \mathbb{R}^3$$

ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της κανονικής βάσης

$$B_3 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3.$$

8.3 Ευθείες και επίπεδα στον \mathbb{R}^n

Γνωρίζουμε ότι από δύο σημεία του επιπέδου ή και του τριδιάστατου χώρου περνά ακριβώς μία ευθεία. Ποιος, όμως, είναι ο ορισμός της ευθείας στον \mathbb{R}^3 ή ακόμα γενικότερα στον \mathbb{R}^n ; Ας ξεκινήσουμε διευκρινίζοντας ότι όταν $n > 2$, μία ευθεία στον \mathbb{R}^n (ειδικότερα στον \mathbb{R}^3) **δεν**



Σχήμα 8.12: Η κανονική βάση του χώρου \mathbb{R}^3 .

μπορεί να δοθεί από κάποια γραμμική εξίσωση της μορφής $\alpha x + \beta y = \gamma$. Θα επιβεβαιώσουμε, λίγο αργότερα, ότι στον \mathbb{R}^3 οι λύσεις της εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$ καθορίζουν ένα επίπεδο του \mathbb{R}^3 (και όχι μία ευθεία!).

Παράδειγμα 8.3.0.1 Έστω $x = 0$. Στο επίπεδο \mathbb{R}^2 , τα σημεία που ικανοποιούν την εξίσωση $x = 0$, είναι της μορφής $(0, y)$, για $y \in \mathbb{R}$, δηλαδή τα σημεία του άξονα y' . Στον τριδιάστατο, όμως, χώρο \mathbb{R}^3 , οι λύσεις της εξίσωσης $x = 0$ είναι οι τριάδες της μορφής $(0, b, c)$, όπου $b, c \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι τα σημεία του yz επιπέδου.

Ας δώσουμε, λοιπόν, τον ορισμό της ευθείας στον \mathbb{R}^n , για $n \geq 2$. Έστω l η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(a_1, \dots, a_n), B(b_1, \dots, b_n)$. Παρατηρούμε ότι l είναι παράλληλη προς τον φορέα του διανύσματος \overrightarrow{AB} , όπου $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$, αφού το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι επί της ευθείας l .

Ορισμός 8.3.0.2 Η ευθεία l που διέρχεται από τα σημεία $A(a_1, \dots, a_n), B(b_1, \dots, b_n)$ του \mathbb{R}^n είναι το σύνολο

$$\{(x_1, \dots, x_n) = (a_1, \dots, a_n) + t(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n) : t \in \mathbb{R}\}.$$

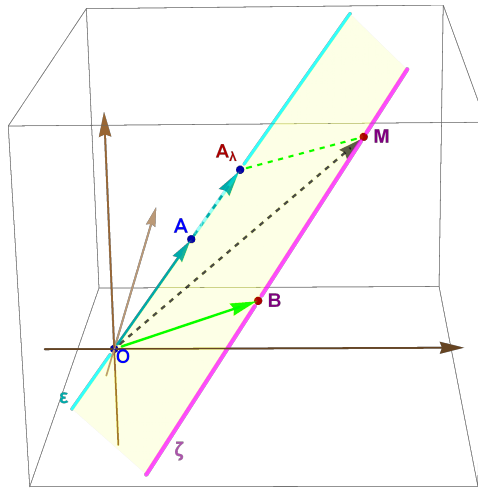
Οι παραμετρικές εξισώσεις της l είναι οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t(b_1 - a_1) \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + t(b_n - a_n). \end{aligned}$$

Στο Σχήμα 8.13 απεικονίζεται η ευθεία ϵ που είναι ο φορέας του \overrightarrow{OA} και περνά από την αρχή των αξόνων καθώς και η ευθεία ζ που περνά από τα σημεία B, M . Σημειώνουμε ότι $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OA} = t\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OA}$ και οι ϵ, ζ είναι παράλληλες.

Παρατηρούμε ότι αν (x_1, \dots, x_n) ικανοποιεί τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t w_1 \\ &\vdots \\ x_n &= a_n + t w_n, \end{aligned}$$



Σχήμα 8.13: Ευθείες στον \mathbb{R}^3 .

τότε (x_1, \dots, x_n) ανήκει στο σύνολο

$$\{(a_1, \dots, a_n) + t(w_1, \dots, w_n) : t \in \mathbb{R}\},$$

δηλαδή βρίσκεται (σύμφωνα με τον ορισμό μας) επί της ευθείας l που διέρχεται από το σημείο (a_1, \dots, a_n) (για $t = 0$) και το σημείο $B(a_1 + w_1, \dots, a_n + w_n)$ (για $t = 1$). Γενικότερα, έστω ότι μας δίνονται οι παραμετρικές εξισώσεις μίας ευθείας. Για να βεβαιωθούμε ότι ένα σημείο με συγκεκριμένες συντεταγμένες βρίσκεται επί της ευθείας, θα πρέπει να βεβαιωθούμε ότι υπάρχει $t \in \mathbb{R}$, που δίνει αυτές τις συντεταγμένες. Ας δούμε κάποια παραδείγματα.

Παραδείγματα 8.3.0.3

- i. Έστω ότι $\alpha \neq 0$. Το (x, y) είναι λύση της γραμμικής εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$, αν και μόνο αν

$$x = \gamma - \frac{\beta}{\alpha} y.$$

Το y είναι «ελεύθερη» παράμετρος και μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το \mathbb{R} . Επομένως, το σύνολο των λύσεων (x, y) της $\alpha x + \beta y = \gamma$ ικανοποιεί τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= \gamma - t \frac{\beta}{\alpha} \\ y &= t. \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο των λύσεων (x, y) της γραμμικής εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$ είναι μία ευθεία l (όπως άλλωστε το περιμένουμε), η οποία διέρχεται από το $(\gamma, 0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $(-\beta, \alpha)$. Συνοπτικά:

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha x + \beta y = \gamma\} &= \{(\gamma - \frac{\beta}{\alpha} t, t) : t \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(\gamma, 0) + \frac{t}{\alpha}(-\beta, \alpha) : t \in \mathbb{R}\} = \{(\gamma, 0) + \kappa(-\beta, \alpha) : \kappa \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

- ii. Έστω $(a, b), (c, d)$ δύο διαφορετικά σημεία του \mathbb{R}^2 με $a \neq c$. Οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας l που διέρχεται από τα σημεία αυτά είναι οι

$$\begin{aligned} x &= a + t(c - a) \\ y &= b + t(d - b). \end{aligned}$$

Τότε $t = \frac{x-a}{c-a}$ και αντικαθιστώντας στην εξίσωση του y , βρίσκουμε ότι

$$y = b + \frac{x-a}{c-a} (d-b) \implies (d-b)x + (a-c)y = bc - ad.$$

Με άλλα λόγια, τα σημεία που ικανοποιούν τις παραμετρικές εξισώσεις μίας ευθείας στον \mathbb{R}^2 είναι λύσεις μίας γραμμικής εξίσωσης με δύο αγνώστους. Αντίστροφα, οι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης

$$(d-b)x + (a-c)y = bc - ad$$

ικανοποιούν τις παραμετρικές εξισώσεις της l , όπως μπορείτε να επιβεβαιώσετε.

- iii. Σημειώνουμε το επιμύθιο των προηγούμενων παραδειγμάτων. Στον \mathbb{R}^2 , ο συνήθης τρόπος ορισμού μίας ευθείας ως το σύνολο των λύσεων (x, y) που ικανοποιούν μία γραμμική εξίσωση της μορφής

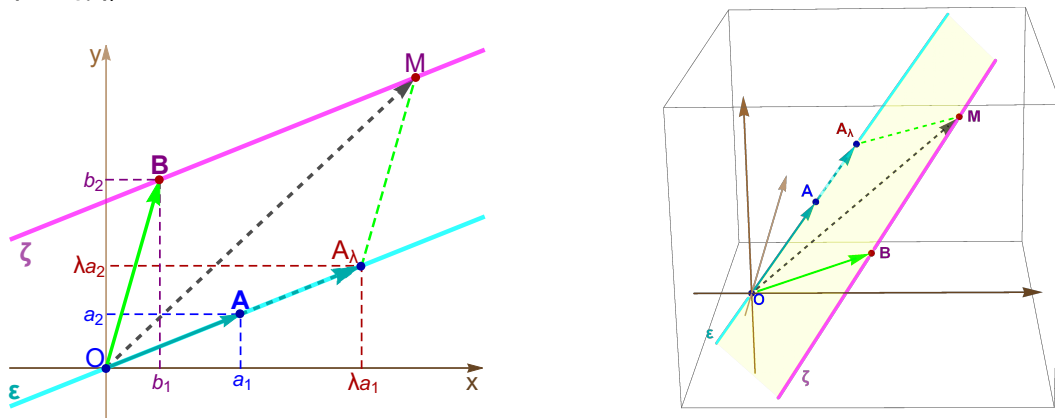
$$\alpha x + \beta y = \gamma$$

για κατάλληλα α, β, γ είναι ισοδύναμος με τον ορισμό 8.3.0.2 αυτής της ενότητας. Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία στον \mathbb{R}^2 προσδιορίζεται από τις λύσεις μίας γραμμικής εξίσωσης με δύο αγνώστους.

- iv. Έστω $A, B \in \mathbb{R}^n$. Ο κανόνας του παραλληλόγραμμου μας δίνει ότι για οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{R}$, αν

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \lambda \cdot \overrightarrow{OA}$$

τότε ο αντιπρόσωπος του \overrightarrow{OM} με αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων έχει τελικό σημείο επί ευθείας παράλληλης προς τον φορέα του \overrightarrow{OA} και η οποία περνά από το σημείο B (βλ. Σχήμα 8.14).



Σχήμα 8.14: Παράλληλες ευθείες και παραμετρικές εξισώσεις.

- v. Η ευθεία στον \mathbb{R}^3 που περνά από τα σημεία $(1, 0, 1)$ και $(0, 2, 2)$ δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2t \\ z &= 1 + t \end{aligned}$$

Επομένως, το σημείο $(-1, 4, 3)$ βρίσκεται επί της ευθείας (δείτε για $t = 2$). Η ευθεία είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $(-1, 2, 1)$ και προσδιορίζεται από το σύνολο

$$L : \{ (1, 0, 1) + t(-1, 2, 1) : t \in \mathbb{R} \}.$$

Η ευθεία δεν περνά από την αρχή των αξόνων, αφού δεν υπάρχει t που να δίνει ταυτόχρονα τις τιμές $(0, 0, 0)$.

vi. Το σύνολο

$$\{(2, 2, 0) + \mu(1, 2, 1) : \mu \in \mathbb{R}\}$$

είναι η ευθεία ζ του \mathbb{R}^3 που διέρχεται από το σημείο $B(2, 2, 0)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $\text{span}\{(1, 2, 1)\}$. Σημειώνουμε ότι $\text{span}\{(1, 2, 1)\}$ είναι η ευθεία ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το $A(1, 2, 1)$ (βλ. Σχήμα 8.13).

vii. Έστω ότι $A, B, C \in \mathbb{R}^n$. Τα σημεία λέγονται **συνευθειακά** αν υπάρχει ευθεία που διέρχεται και από τα τρία σημεία. Στην περίπτωση αυτή, τα διανύσματα \vec{AB}, \vec{AC} , ανήκουν στο $\text{span}\{\vec{AB}\}$ και είναι γραμμικά εξαρτημένα. Αντίστροφα, αν τα διανύσματα \vec{AB}, \vec{AC} είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα σημεία A, B, C δεν είναι συνευθειακά. Η (αλγεβρική) απόδειξη, με χρήση του ορισμού αφήνεται ως άσκηση. Η γεωμετρική εποπτεία επιβεβαιώνει άμεσα τους ισχυρισμούς μας.

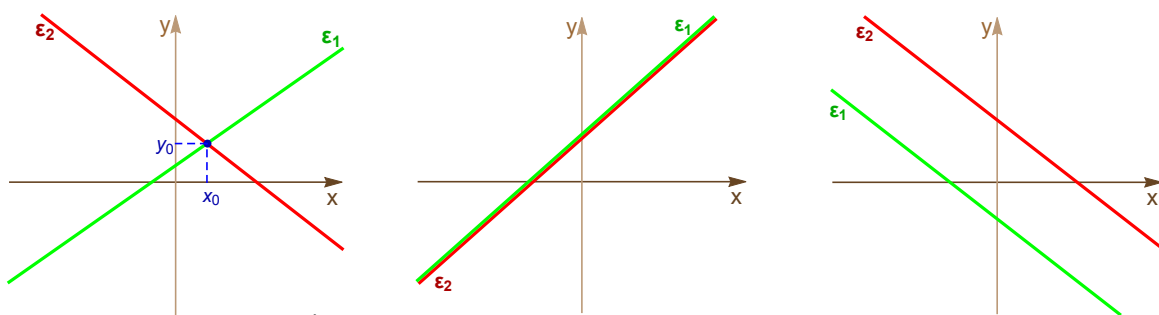
Πώς υπολογίζουμε σημεία τομής δύο ή περισσότερων ευθειών; Στον \mathbb{R}^2 το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση λύσεων ενός γραμμικού συστήματος. Καθώς τα σημεία μίας ευθείας στον \mathbb{R}^2 ικανοποιούν μία γραμμική εξίσωση με δύο μεταβλητές, τα σημεία τομής θα πρέπει να ικανοποιούν τις εξισώσεις όλων των ευθειών. Προσπαθούμε λοιπόν να λύσουμε ένα σύστημα με δύο μεταβλητές και με εξισώσεις όσες είναι οι ευθείες. Σημειώνουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα $AX = B$, όπου A είναι μη μηδενικός $n \times 2$ πίνακας και $n \geq 2$, μπορεί να έχει:

1. μία ακριβώς λύση όταν $\text{rank}(A) = 2 = \text{rank}([A|B])$
2. άπειρες λύσεις όταν $\text{rank}(A) = 1 = \text{rank}([A|B])$
3. καμία λύση, όταν $\text{rank}(A) + 1 = \text{rank}([A|B])$

Αυτό σημαίνει ότι οι ευθείες στον \mathbb{R}^2 μπορεί να έχουν

1. ένα κοινό σημείο τομής, δηλαδή όλες να διέρχονται από το ίδιο σημείο,
2. είτε όλες οι ευθείες να ταυτίζονται,
3. είτε να μην υπάρχει σημείο τομής, δηλαδή να μη διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Το σχήμα 8.15 απεικονίζει χαρακτηριστικά τις περιπτώσεις αυτές για δύο ευθείες.



Σχήμα 8.15: Σχετική θέση ευθειών στο επίπεδο.

Παράδειγμα 8.3.0.4 Έστω οι ευθείες

$$\epsilon_1 : 2x + y = 3$$

$$\epsilon_2 : x - y = 2$$

$$\epsilon_3 : x + 3y = 1$$

$$\epsilon_4 : 4x + 2y = 6$$

$$\epsilon_5 : 2x + y = 4.$$

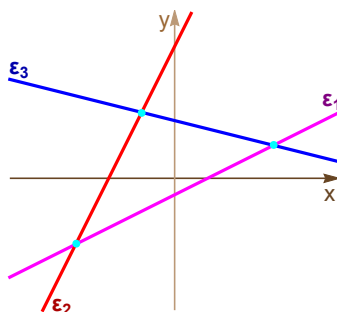
Παρατηρούμε ότι οι ευθείες ϵ_1, ϵ_4 ταυτίζονται, ενώ οι ϵ_1, ϵ_5 είναι παράλληλες. Για τους υπόλοιπους συνδυασμούς ευθειών, βλέπουμε ότι ανά δύο οι ευθείες τέμνονται. Ας εξετάσουμε, τώρα, αν υπάρχει κοινό σημείο τομής των ευθειών $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα $AX = B$ που αντιστοιχεί στις τρεις πρώτες ευθείες.

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right]$$

Βρίσκουμε τη βαθμίδα του $[A \mid B]$. Αφού

$$-1 = \det([A \mid B]) \neq 0 \text{ συμπεραίνουμε ότι } \text{rank}([A \mid B]) = 3,$$

άρα το σύστημα $AX = B$ είναι ασύμβατο. Κατά συνέπεια, οι τρεις ευθείες τέμνονται ανά δύο, ωστόσο δεν υπάρχει κοινό σημείο τομής. Τα σημεία τομής των ευθειών καθορίζουν ένα τρίγωνο (βλ. Σχήμα 8.16).



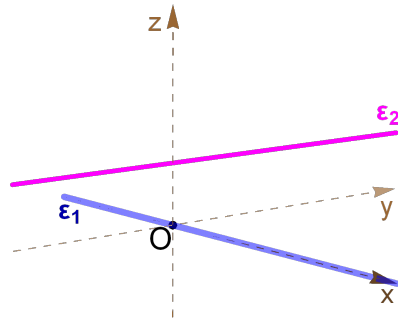
Σχήμα 8.16: Σύστημα τριών ευθειών ανά δύο τεμνόμενες.

Έστω τώρα ο χώρος \mathbb{R}^3 (ή γενικότερα ο \mathbb{R}^n για $n > 2$). Παρατηρούμε ότι στον \mathbb{R}^3 υπάρχουν ευθείες που δεν τέμνονται, παρόλο που δεν είναι παράλληλες.

Παράδειγμα 8.3.0.5 Έστω οι ευθείες

$$\begin{array}{l} x = t \\ \epsilon_1 : y = 0 \\ z = 0 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ \epsilon_2 : y = t \\ z = 1 \end{array} .$$

Είναι φανερό ότι οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 δεν τέμνονται, καθώς δεν υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί ταυτόχρονα τις παραμετρικές εξισώσεις και των δύο ευθειών. Η ευθεία ϵ_1 είναι ο άξονας των x , ενώ η ευθεία ϵ_2 είναι παράλληλη προς τον άξονα των y . Παρατηρήστε ότι οι δύο ευθείες δεν είναι συνεπίπεδες, δηλαδή δεν υπάρχει επίπεδο που τις περιέχει και τις δύο (!). Αν και εποπτικά αυτό είναι εύλογο (βλ. Σχήμα 8.17), υπάρχει τρόπος να το αποδείξουμε αλγεβρικά; Θα δούμε την απάντηση λίγο αργότερα.



Σχήμα 8.17: Ευθείες του τριδιάστατου χώρου δίχως κοινά σημεία.

Πώς, όμως, ορίζεται ένα επίπεδο στον \mathbb{R}^n ; Επιλέγουμε, εδώ, να δώσουμε τον «διανυσματικό ορισμό» του επιπέδου. Ξεκινάμε, βέβαια, από την πολύ βασική παραδοχή ότι τρία μη συνευθειακά σημεία ορίζουν ένα επίπεδο. Θα δείτε ισοδύναμους ορισμούς σε μαθήματα λογισμού και γεωμετρίας για τα επίπεδα του \mathbb{R}^3 , που θα σας επιτρέψουν να εμβαθύνετε ακόμη περισσότερο σε αυτές τις έννοιες. Ας δούμε λοιπόν τον ορισμό. Λέμε ότι ένα υποσύνολο q του \mathbb{R}^n είναι **επίπεδο στον \mathbb{R}^n** , αν υπάρχουν $C(c_1, \dots, c_n)$, $A(a_1, \dots, a_n)$, $B(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε

$$q = \{(c_1, \dots, c_n) + t(a_1, \dots, a_n) + s(b_1, \dots, b_n) : t, s \in \mathbb{R}\}, \quad (8.3.1)$$

όπου τα O, A, B είναι μη συνευθειακά. Καθώς $\vec{OC} = (c_1, \dots, c_n)$, $\vec{OA} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{OB} = (b_1, \dots, b_n)$, συμπεραίνουμε ότι το σημείο $M(x, y, z)$ ανήκει στο επίπεδο q , αν και μόνο αν υπάρχουν $t, s \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\vec{OM} = \vec{OC} + t\vec{OA} + s\vec{OB}$$

Θέτοντας $t = s = 0$ στην εξίσωση (8.3.1), βρίσκουμε ότι $C(c_1, \dots, c_n)$ είναι σημείο του επιπέδου q . Επίσης, στο επίπεδο q κείται η ευθεία που περνά από το C και είναι παράλληλη προς το \vec{OA} : πράγματι, όταν θέσουμε $s = 0$ στην εξίσωση (8.3.1) παίρνουμε το υποσύνολο του q :

$$\{(c_1, \dots, c_n) + t(a_1, \dots, a_n) : t \in \mathbb{R}\} \subset q,$$

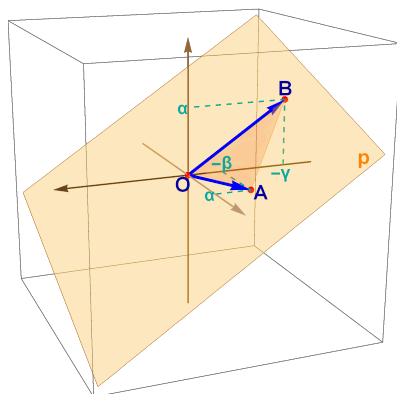
που ορίζει αυτήν την ευθεία. Αντίστοιχα, η ευθεία που περνά από το C και είναι παράλληλη στο \vec{OB} επίσης κείται επί του q . Λέμε ότι το διάνυσμα v είναι **παράλληλο** προς το q αν υπάρχει αντιπρόσωπος του v πάνω στο q ή ισοδύναμα αν πάνω στο q υπάρχει ευθεία που είναι παράλληλη προς το v . Έτσι, τα διανύσματα \vec{OA}, \vec{OB} είναι **παράλληλα** προς το q . Στο Σχήμα 8.18 βλέπουμε το επίπεδο p που περνά από την αρχή των αξόνων και τα σημεία A, B .

Σημειώνουμε ότι ένα επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων και τα σημεία $A(a_1, \dots, a_n), B(b_1, \dots, b_n)$ δίνεται από την εξίσωση (8.3.2):

$$p = \{t(a_1, \dots, a_n) + s(b_1, \dots, b_n) : t, s \in \mathbb{R}\}. \quad (8.3.2)$$

και κατά συνέπεια αντιστοιχεί στη γραμμική θήκη $\text{span}\{\vec{OA}, \vec{OB}\}$.

Παραδείγματα 8.3.0.6



Σχήμα 8.18: Το επίπεδο p .

- i. Έστω p το επίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τα σημεία $(1, 1, 0)$ και $(0, 1, 1)$. Τα σημεία (x, y, z) του p είναι τα σημεία του συνόλου

$$\text{span}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\} = \{t(1, 1, 0) + s(0, 1, 1) : t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Επομένως, θα ισχύει ότι το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

είναι συμβατό. Όμως

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & x-y+z \end{array} \right]$$

και για να είναι το σύστημα συμβατό θα πρέπει $x - y + z = 0$. Αντίστροφα, αν (x, y, z) ικανοποιεί την εξίσωση $x - y + z = 0$, τότε λύνοντας ως προς y βρίσκουμε ότι $y = x + z$ και άρα

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\} &= \{(x, x + z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x(1, 1, 0) + z(0, 1, 1)\} = \text{span}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \end{aligned}$$

δηλαδή $(x, y, z) \in p$.

- ii. Έστω q το επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(0, 0, 2)$, $A(4, 1, 0)$ και $B(2, 0, 1)$. Τα διανύσματα $\vec{\Gamma A} = (4, 1, -2)$, $\vec{\Gamma B} = (2, 0, -1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τα σημεία (x, y, z) του q είναι τα στοιχεία του συνόλου

$$\begin{aligned} &\{(0, 0, 2) + \text{span}\{(4, 1, -2), (2, 0, -1)\}\} = \\ &= \{(0, 0, 2) + t(4, 1, -2) + s(2, 0, -1) : t, s \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

και ισοδύναμα

$$(x, y, z - 2) = t(4, 1, -2) + s(2, 0, -1), \text{ για κάποιο } t, s \in \mathbb{R}.$$

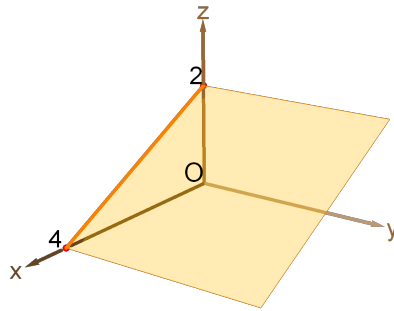
Επομένως, θα ισχύει ότι το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z - 2 \end{bmatrix}$$

είναι συμβατό. Όμως

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & x \\ 1 & 0 & y \\ -2 & -1 & z-2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & x+2z-4 \\ 1 & 0 & y \\ -2 & -1 & z-2 \end{array} \right]$$

και για να είναι το σύστημα συμβατό θα πρέπει $x + 2z = 4$. Αφήνουμε σε εσάς να αποδείξετε ότι αν (x, y, z) ικανοποιεί την εξίσωση $x + 2z = 4$, τότε $(x, y, z) \in q$, βλ. Σχήμα 8.19.



Σχήμα 8.19: Το επίπεδο $x + 2z = 4$.

Όπως είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, όταν είμαστε στον \mathbb{R}^3 , η εξίσωση ενός επιπέδου p οδηγεί σε μία γραμμική εξίσωση $ax + \beta y + \gamma z = \delta$, όπου τουλάχιστον ένα από τα α, β, γ δεν είναι μηδέν. Πράγματι, η εξίσωση (8.3.1) αντιστοιχεί σε ένα γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - c_1 \\ y - c_2 \\ z - c_3 \end{bmatrix}$$

και για να είναι το σύστημα συμβατό, ο επαυξημένος πίνακας $[A|B]$ πρέπει να έχει τη βαθμίδα του A , δηλαδή 2. Αφού οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, όταν φέρουμε τον πίνακα $[A|B]$ σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών, θα βρούμε έναν πίνακα της μορφής

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & \alpha x + \beta y + \gamma z - \delta \end{array} \right].$$

Επομένως, για να είναι το σύστημα συμβατό και το (x, y, z) σημείο του επιπέδου θα πρέπει $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$. Σημειώνουμε, εδώ, ότι τουλάχιστον ένα α, β, γ δεν είναι μηδέν. Μπορείτε να δείτε το γιατί; Αντίστροφα, έστω $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ μία γραμμική εξίσωση, όπου τουλάχιστον ένα από τα α, β, γ δεν είναι μηδέν. Θα εργαστούμε θεωρώντας ότι $\alpha \neq 0$, καθώς οι άλλες περιπτώσεις είναι ανάλογες. Παρατηρούμε ότι $C(\delta/\alpha, 0, 0)$ είναι λύση αυτής της εξίσωσης. Επιπλέον, βρίσκουμε ότι το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned} \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta\} &= \left\{ \left(\frac{\delta}{\alpha}, 0, 0 \right) + \left(-\frac{\beta}{\alpha} y - \frac{\gamma}{\alpha} z, y, z \right) : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ \left(\frac{\delta}{\alpha}, 0, 0 \right) + \frac{y}{\alpha} (-\beta, \alpha, 0) + \frac{z}{\alpha} (-\gamma, 0, \alpha) : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ \left(\frac{\delta}{\alpha}, 0, 0 \right) + \kappa (-\beta, \alpha, 0) + \lambda (-\gamma, 0, \alpha) : \kappa, \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

άρα είναι επίπεδο του \mathbb{R}^3 . Σημειώνουμε ότι το $(0, 0, 0)$ ανήκει στο επίπεδο $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$, αν και μόνο αν $\delta = 0$. Αποδείξαμε, λοιπόν, την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 8.3.0.7 Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, όχι όλα μηδέν, και έστω $\delta \in \mathbb{R}$. Το σύνολο των σημείων του χώρου \mathbb{R}^3 που οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωση

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

είναι ένα επίπεδο. Αντίστροφα, κάθε επίπεδο του \mathbb{R}^3 περιγράφεται από το σύνολο των λύσεων μίας γραμμικής εξίσωσης αυτής της μορφής. Το επίπεδο διέρχεται από την αρχή των αξόνων, αν και μόνο αν $\delta = 0$.

Σε επόμενο μάθημα γεωμετρίας θα δείτε ότι το διάνυσμα (α, β, γ) είναι ορθογώνιο προς κάθε ευθεία που βρίσκεται επί του επιπέδου $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ και ότι αυτή η ιδιότητα μπορεί να αξιοποιηθεί για την εύρεση της εξίσωσης του επιπέδου. Στο Σχήμα 8.18 βλέπουμε το επίπεδο

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \alpha x + \beta y + \gamma z = 0\} = \text{span}\{(-\beta, \alpha, 0), (-\gamma, 0, \alpha)\}.$$

Παράδειγμα 8.3.0.8 Θα βρούμε την εξίσωση του επιπέδου p του χώρου \mathbb{R}^3 που διέρχεται από τα σημεία $A(4, 1, 0)$, $B(0, 1, 2)$, $\Gamma(3, 0, -1)$. Έστω

$$p : \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta.$$

Έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} A(4, 1, 0) \in p \Leftrightarrow 4\alpha + \beta = \delta \\ B(0, 1, 2) \in p \Leftrightarrow \beta + 2\gamma = \delta \\ \Gamma(3, 0, -1) \in p \Leftrightarrow 3\alpha - \gamma = \delta \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Θέλουμε να βρούμε τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ που είναι λύσεις του ομογενούς συστήματος. Έστω M ο πίνακας των συντελεστών. Φέρνουμε τον M σε ε.κ.μ.γ.:

$$M \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

επομένως

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha - \delta = 0 \\ \beta - 3\delta = 0 \\ \gamma - 2\delta = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \delta \\ \beta = -3\delta \\ \gamma = 2\delta \end{array} \right\}.$$

Επιλέγουμε $\delta \neq 0$, έστω $\delta = 1$. Η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$p : x - 3y + 2z = 1.$$

βλ. Σχήμα 8.20. Παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε άλλη μη μηδενική τιμή του δ θα έδινε μία εξίσου αποδεκτή γραμμική εξίσωση για το p .

Πώς τέμνονται δύο ή περισσότερα επίπεδα στον \mathbb{R}^3 ; Χρησιμοποιώντας τις γραμμικές εξισώσεις των επιπέδων, το πρόβλημα ανάγεται σε εύρεση λύσεων ενός γραμμικού συστήματος δύο ή περισσότερων εξισώσεων με τρεις αγνώστους.

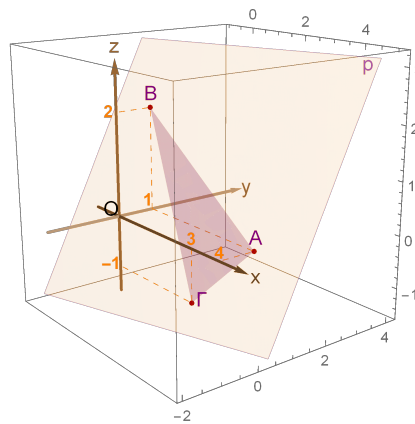
Παραδείγματα 8.3.0.9

i. Στον \mathbb{R}^3 θεωρούμε τα επίπεδα

$$\begin{array}{l} p_1 : x - z = 2 \\ p_2 : -y + 2z = -2. \end{array}$$

Για να βρούμε την τομή τους, επιλύουμε το 2×3 σύστημα

$$AX = B, \text{ όπου } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 8.20: Το επίπεδο $x - 3y + 2z = 1$.

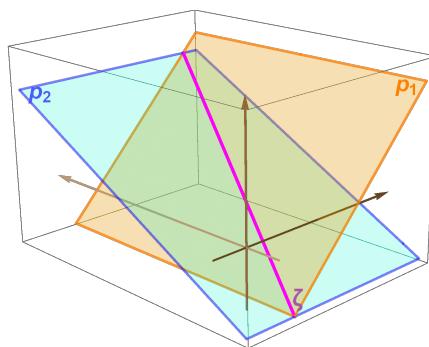
Έχουμε

$$[A \mid B] \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right),$$

έτσι $\text{rank}([A \mid B]) = \text{rank}(A) = 2$ και το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το

$$S = \{(2 + z, 2 + 2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{(2, 2, 0) + z(1, 2, 1) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Βλέπουμε ότι το σύνολο λύσεων είναι η ευθεία ζ του χώρου \mathbb{R}^3 που διέρχεται από το σημείο $B(2, 2, 0)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $\text{span}\{(1, 2, 1)\}$, βλ. Σχήμα 8.21.



Σχήμα 8.21: Ευθεία ως τομή δύο επιπέδων.

ii. Είναι εύκολο να δούμε ότι τα επίπεδα

$$\begin{aligned} p_1 : & x + y - z = 2 \\ p_2 : & 2x + 2y - 2z = 4. \end{aligned}$$

ταυτίζονται. Πράγματι

$$(x, y, z) \in p_1 \Leftrightarrow x + y - z = 2 \Leftrightarrow 2x + 2y - 2z = 4 \Leftrightarrow (x, y, z) \in p_2.$$

iii. Είναι εύκολο να δούμε ότι τα επίπεδα

$$\begin{aligned} p_1 : & x + y - z = 3 \\ p_2 : & x + y - z = 2 \end{aligned}$$

δεν έχουν κοινό σημείο τομής. Θα αποδείξουμε ότι τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα. Καθώς δεν έχουμε ορίσει την έννοια της απόστασης δύο επιπέδων (θα τη δείτε σε επόμενο μάθημα), δεχόμαστε ότι δύο επίπεδα p_1, p_2 είναι παράλληλα, αν δεν ταυτίζονται

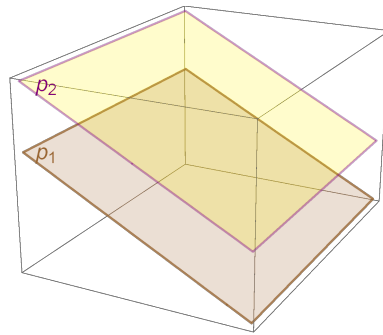
και κάθε φορά που ένα διάνυσμα v είναι παράλληλο προς το p_1 , τότε το v είναι παράλληλο προς το p_2 . Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, ένα μη μηδενικό διάνυσμα $v = (v_1, v_2, v_3)$ παράλληλο προς το p_1 . Υπάρχουν σημεία $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3)$ του p_1 , τέτοια ώστε $v = \overrightarrow{AB}$, άρα $(v_1, v_2, v_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$. Έχουμε

$$\begin{cases} a_1 + a_2 - a_3 = 3 \\ b_1 + b_2 - b_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) - (b_3 - a_3) = 0 \Rightarrow v_1 + v_2 - v_3 = 0.$$

Ας επιλέξουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $\Gamma(c_1, c_2, c_3)$ του p_2 , επομένως $c_1 + c_2 - c_3 = 2$. Θα δείξουμε ότι το σημείο $D(c_1 + v_1, c_2 + v_2, c_3 + v_3) \in p_2$ και άρα v είναι παράλληλο προς το p_2 . Πράγματι

$$(c_1 + v_1) + (c_2 + v_2) - (c_3 + v_3) = (c_1 + c_2 - c_3) + (v_1 + v_2 - v_3) = 2 - 0 = 2.$$

Συμπεραίνουμε ότι τα επίπεδα p_1, p_2 είναι παράλληλα (βλ. Σχήμα 8.22).



Σχήμα 8.22: Παράλληλα επίπεδα.

iv. Θα βρούμε τη σχετική θέση των επιπέδων

$$\begin{aligned} p_1 : x + 3y - 2z &= 1 \\ p_2 : y + 3z &= 2 \\ p_3 : x + 5y + 4z &= 4. \end{aligned}$$

Βρίσκουμε τη βαθμίδα του πίνακα των συντελεστών A και του επαυξημένου πίνακα $[A \mid B]$ του 3×3 -γραμμικού συστήματος $AX = B$ που σχηματίζουν οι εξισώσεις των επιπέδων,

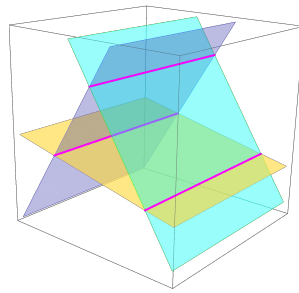
$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 4 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 3 & -2 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{-1} \end{array} \right].$$

Έχουμε $\text{rank}([A \mid B]) = 3$, ενώ $\text{rank}(A) = 2$. Επομένως, το σύστημα $AX = B$ είναι ασύμβατο. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει κοινό σημείο τομής για τα τρία επίπεδα. Παρατηρούμε ότι ανά δύο τα επίπεδα τέμνονται. Το Σχήμα 8.23 απεικονίζει τη σχετική θέση των τριών επιπέδων.

Η απόδειξη της επόμενης πρότασης γίνεται όπως στο Παράδειγμα 8.3.0.9.iii.

Πρόταση 8.3.0.10 Έστω $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ η εξίσωση ενός επιπέδου p . Εάν $\delta \neq \delta' \in \mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta'$ είναι ένα επίπεδο p' παράλληλο προς το p .

Σημειώνουμε ότι για να βρούμε την τομή τριών επιπέδων στον \mathbb{R}^3 καλούμαστε να λύσουμε ένα σύστημα $AX = B$ με τρεις εξισώσεις και τρεις αγνώστους. Αν το σύστημα $AX = B$ είναι συμβατό, τότε μπορεί να ισχύει ένα από τα εξής:



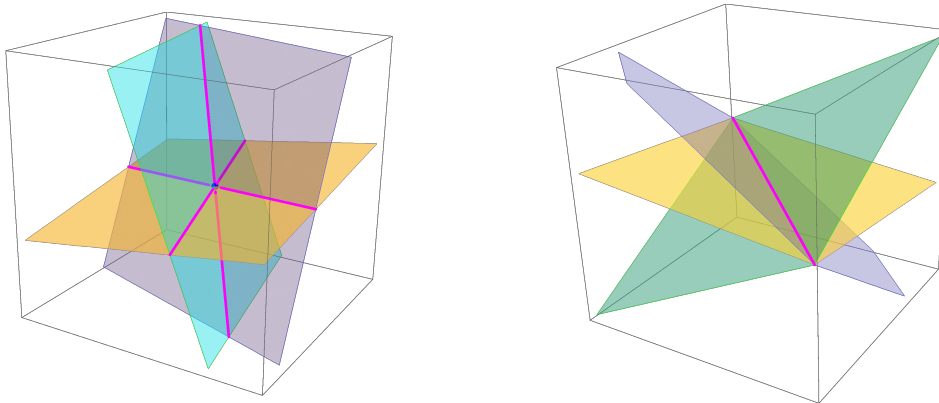
Σχήμα 8.23: Σύστημα ανά δύο τεμνόμενων επιπέδων.

- $\text{rank}(A) = 3$ και το σύστημα να έχει μοναδική λύση,
- $\text{rank}(A) = 2$ και το σύνολο των λύσεων να δίνεται με χρήση μίας παραμέτρου,
- $\text{rank}(A) = 1$ και το σύνολο των λύσεων να δίνεται με χρήση δύο παραμέτρων.

Σημειώνουμε ότι αφού $A \neq 0$, αποκλείουμε την περίπτωση $\text{rank}(A) = 0$. Η γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω είναι η εξής:

- στην πρώτη περίπτωση τα τρία επίπεδα τέμνονται σε ένα μοναδικό σημείο,
- στη δεύτερη περίπτωση τα τρία επίπεδα τέμνονται σε μία ευθεία,
- στην τρίτη περίπτωση τα τρία επίπεδα ταυτίζονται.

Στα σχήματα 8.24 βλέπουμε τις δύο πρώτες περιπτώσεις.



Σχήμα 8.24: Τεμνόμενα επίπεδα.

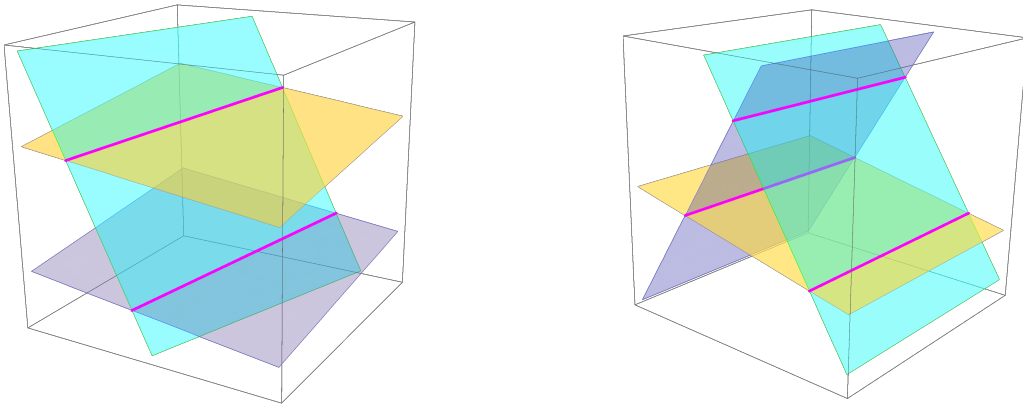
Όταν τα επίπεδα δεν έχουν κοινά σημεία τομής, τότε προκύπτουν διάφοροι συνδυασμοί, ανάλογα με το αν κάποια από τα επίπεδα είναι παράλληλα ή ταυτίζονται. Στο Σχήμα 8.25 βλέπουμε κάποιες πιθανές σχετικές θέσεις τριών επιπέδων που δεν έχουν κοινό σημείο τομής.

8.4 Εργαστήριο με Mathematica

Γεωμετρική απεικόνιση γραμμικών συστημάτων

Θεωρούμε το 2×2 -γραμμικό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow A_1 X = B_1, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 8.25: Μη τεμνόμενα επίπεδα.

Παρατηρούμε ότι $\det(A_1) = 1 \neq 0$, έτσι το σύστημα έχει μοναδική λύση, την οποία υπολογίζουμε με την εντολή **LinearSolve** (βλ. ενότητα 7.7).

A1 = {{2, 1}, {1, 1}}; MatrixForm[A1]

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

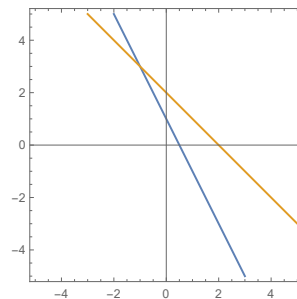
LinearSolve[A1, {1, 2}]

$$\{-1, 3\}$$

Οι εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν δύο ευθείες του επιπέδου \mathbb{R}^2 που τέμνονται στο σημείο $(-1, 3)$, βλ. Σχήμα 8.26.

Με την εντολή **ContourPlot[f(x, y) == 0, {x, κ, λ}, {y, μ, ν}]** απεικονίζουμε τα σημεία (x, y) του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν την εξίσωση $f(x, y) = 0$, όταν το x παίρνει τιμές από κ έως λ και το y από μ έως ν . Μπορούμε να κάνουμε μία «λίστα» από εξισώσεις, όπως φαίνεται παρακάτω, όπου απεικονίζουμε τις δύο ευθείες του συστήματος. Με την εντολή **Axes → True** εμφανίζονται οι άξονες του καρτεσιανού επιπέδου.

ContourPlot[{2x + y == 1, x + y == 2}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Axes → True]



Σχήμα 8.26: Τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου.

Λύνουμε το ομογενές 3×3 -γραμμικό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 3z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow A_2 X = 0_{3 \times 1}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (8.4.1)$$

A2 = {{1, 1, 3}, {2, 2, 3}, {-1, -1, 2}}; MatrixForm[A2]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Det[A2]

0

MatrixRank[A2]

2

Αφού $\det(A_2) = 0$, το σύστημα $A_2X = 0_{3 \times 1}$ έχει άπειρες λύσεις που περιγράφονται από πλήθος $3 - \text{rank}(A) = 1$ παράμετρο. Υπολογίζουμε τις λύσεις $\text{null}(A_2)$ του συστήματος με την εντολή **NullSpace** (βλ. ενότητα 7.7).

NullSpace[A2]

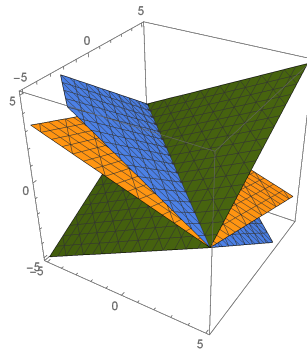
$\{-1, 1, 0\}$

Το σύνολο λύσεων του $A_2X = 0_{3 \times 1}$ είναι το

$$\text{null}(A_2) = \{k(-1, 1, 0) : k \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-1, 1, 0)\},$$

μία ευθεία του χώρου \mathbb{R}^3 που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0, 0)$ και το σημείο $(-1, 1, 0)$. Στο Σχήμα 8.27 απεικονίζουμε στον χώρο τα τρία επίπεδα που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος. Χρησιμοποιούμε την εντολή **ContourPlot3D**, η οποία έχει την ίδια δομή με την εντολή **ContourPlot** που είδαμε προηγουμένως. Τώρα όμως τα σημεία (x, y, z) έχουν τρεις συντεταγμένες. Διαπιστώνουμε ότι τα κοινά σημεία των τριών επιπέδων είναι η ευθεία $\text{null}(A_2)$.

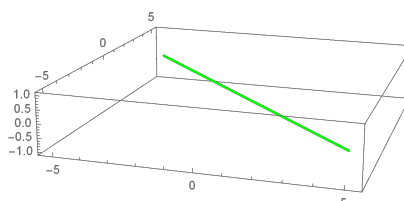
C2 = ContourPlot3D $\{x + y + 3z == 0, 2x + 2y + 3z == 0, -x - y + 2z == 0\},$
 $\{x, -5, 5\}, \{y, -5, 5\}, \{z, -5, 5\}$



Σχήμα 8.27: Επίπεδα με μία κοινή ευθεία.

Στο Σχήμα 8.28 απεικονίζουμε και την ευθεία $\text{null}(A_2)$ με την εντολή **ParametricPlot3D**, δίνοντας τις τιμές που θέλουμε στην παράμετρο που χρησιμοποιούμε. Στην εντολή αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μέχρι δύο παραμέτρους. Προσθέτοντας στο τέλος την εντολή **PlotStyle** δίνουμε στο γράφημά μας διάφορα χαρακτηριστικά όπως χρώμα, πάχος κτλ.

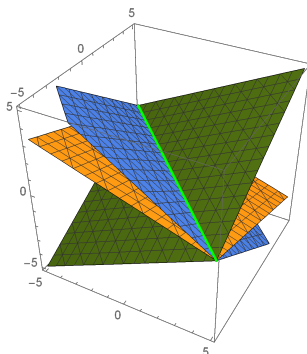
P2 = ParametricPlot3D $[k * \{-1, 1, 0\}, \{k, -5, 5\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Green}, \text{Thick}\}]$



Σχήμα 8.28: Ευθεία του χώρου.

Με την εντολή **Show** μπορούμε να εμφανίσουμε ταυτόχρονα δύο ή περισσότερα γραφήματα, βλ. Σχήμα 8.29.

Show[C2, P2]



Σχήμα 8.29: Η κοινή ευθεία τριών επιπέδων.

Λύνουμε και το ομογενές 3×3 -γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} -3y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \\ 5x + 9y - 8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A_3 X = 0_{3 \times 1}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 9 & -8 \end{pmatrix}.$$

Θα διαπιστώσουμε ότι $\det(A_3) \neq 0$, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $\text{null}(A_2) = \{0\}$ και τα επίπεδα που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος έχουν μοναδικό κοινό σημείο, την αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$, βλ. Σχήμα 8.30.

A3 = {{0, -3, 1}, {3, 1, -2}, {5, 9, -8}}; MatrixForm[A3]

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 9 & -8 \end{pmatrix}$$

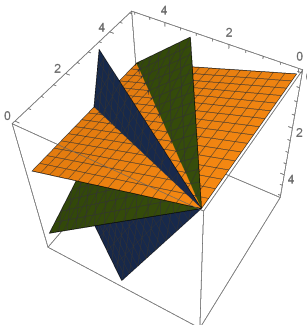
Det[A3]

-20

NullSpace[A3]

{}

ContourPlot3D[{-3y + z == 0, 3x + y - 2z == 0, 5x + 9y - 8z == 0}, {x, 0, 5}, {y, 0, 5}, {z, 0, 5}]



Σχήμα 8.30: Επίπεδα με ένα κοινό σημείο.

Θα λύσουμε το παρακάτω 3×3 παραμετρικό σύστημα, για τις διάφορες τιμές του $m \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + (1 - m)z = 2 + m \\ 2x - my + 3z = 2 + m \\ (1 + m)x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A(m) X = B(m),$$

$$A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 2 & -m & 3 \\ 1+m & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B(m) = \begin{bmatrix} m+2 \\ m+2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε χρησιμοποιώντας μεταβλητή \mathbf{m}_- (βλ. ενότητα 1.1) τον πίνακα $A(m)$, τη λίστα $b[m] = \{m+2, m+2, 0\}$ των σταθερών όρων, τον πίνακα $B(m)$ των σταθερών όρων και τον επαυξημένο πίνακα $[A(m) \mid B(m)]$, όπως είδαμε στην ενότητα 7.7,

$A[\mathbf{m}_-] := \{\{1, 1, 1-m\}, \{2, -m, 3\}, \{1+m, -1, 2\}\}; b[\mathbf{m}_-] := \{m+2, m+2, 0\};$

$B[\mathbf{m}_-] := \text{Transpose}[\{b[m]\}]; \text{AB}[\mathbf{m}_-] := \text{ArrayFlatten}[\{\{A[m], B[m]\}\}];$

MatrixForm[**AB**[\mathbf{m}_-]]

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m & 2+m \\ 2 & -m & 3 & 2+m \\ 1+m & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα $A(m)$,

Det[**A**[\mathbf{m}_-]]

$$4m - m^3$$

Με την εντολή **Roots**[$f(x) == 0, x]$ βρίσκουμε τις ρίζες της πολυωνυμικής εξίσωσης $f(x) = 0$,

Roots[**Det**[**A**[\mathbf{m}_-]] == 0, \mathbf{m}_-]

$$m == 0 \parallel m == 2 \parallel m == -2$$

• Αν $m \neq -2, 0, 2$, τότε $\det(A(m)) \neq 0$ και το σύστημα $A(m)X = B(m)$ έχει μοναδική λύση, την οποία υπολογίζουμε με την εντολή **LinearSolve**,

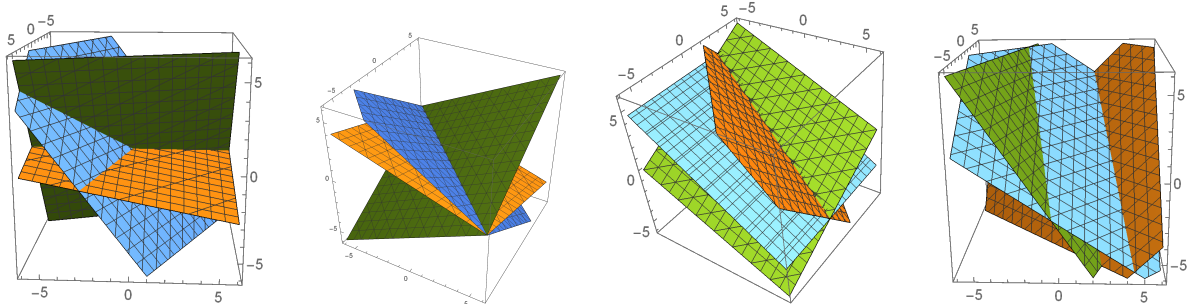
LinearSolve[**A**[\mathbf{m}_-], **b**[\mathbf{m}_-]]

$$\left\{ \frac{1}{-2+m}, \frac{-3-m}{-2+m}, \frac{-2-m}{-2+m} \right\}$$

• Αν $m \in \{-2, 0, 2\}$, τότε $\det(A(m)) = 0$ και σύστημα $A(m)X = B(m)$ έχει άπειρες λύσεις ή είναι ασύμβατο.

Στο Σχήμα 8.31 απεικονίζουμε γραφικά τα επίπεδα του \mathbb{R}^3 που παριστάνουν οι τρεις εξισώσεις του συστήματος $A(m)X = B(m)$, για την περίπτωση που $m = -4$, $m = -2$, $m = 0$ και $m = 2$:

$c[\mathbf{m}_-] := \text{ContourPlot3D}[\{x + y + (1-m)z == m+2, 2x - my + 3z == m+2, (1+m)x - y + 2z == 0\}, \{x, -6, 6\}, \{y, -6, 6\}, \{z, -6, 6\}]; \{c[-4], c[-2], c[0], c[2]\}$



Σχήμα 8.31: Γραφική απεικόνιση παραμετρικού συστήματος.

Παρατηρούμε ότι για $m = -4$ τα τρία επίπεδα έχουν ένα κοινό σημείο, το σύστημα $A(-4)X = B(-4)$ έχει μοναδική λύση.

Για $m = -2$ το $A(-2)X = B(-2)$ είναι το ομογενές σύστημα της σχέσης (8.4.1). Όπως

είδαμε παραπάνω, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, τα επίπεδα που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος τέμνονται στην ευθεία $\text{null}(A(-2)) = \{k(-1, 1, 0) : k \in \mathbb{R}\}$.

Όμοια βλέπουμε ότι για $m = 0$ το γραμμικό σύστημα $A(0)X = B(0)$ έχει άπειρες λύσεις, τα επίπεδα που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος τέμνονται σε μία ευθεία ε του χώρου \mathbb{R}^3 . Οι συντεταγμένες των σημείων της ε αποτελούν το σύνολο των άπειρων λύσεων του συστήματος, το οποίο υπολογίζουμε συνδυάζοντας τις εντολές **NullSpace** και **LinearSolve** (βλ. ενότητα 7.7):

NullSpace[A[0]]

$\{-3, 1, 2\}$

LinearSolve[A[0], b[0]]

$\{1, 1, 0\}$

Το σύνολο λύσεων είναι το $\{(1, 1, 0) + k(-3, 1, 2) : k \in \mathbb{R}\}$.

Τέλος, για $m = 2$ παρατηρούμε ότι τα επίπεδα που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος $A(2)X = B(2)$ τέμνονται ανά δύο σε τρεις ευθείες που είναι μεταξύ τους παράλληλες και το σύστημα είναι ασύμβατο, $\text{rank}([A(2) ; B(2)]) \neq \text{rank}(A(2))$, όπως διαπιστώνουμε παρακάτω:

{MatrixRank[AB[2]], MatrixRank[A[2]]}

$\{3, 2\}$

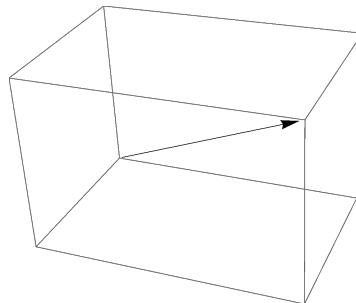
Χρησιμοποιώντας την εντολή **Animate**, μπορείτε να παρακολουθήσετε πώς μεταβάλλεται το γράφημα των τριών επιπέδων που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος $A(m)X = B(m)$, όταν η παράμετρος m παίρνει τιμές από -2 έως 2 .

Animate[c[m], {m, -2, 2}]

Διανύσματα στο επίπεδο και στον χώρο

Με τις εντολές **Graphics** και **Graphics3D** κάνουμε γραφήματα στο δισδιάστατο επίπεδο \mathbb{R}^2 και στον τρισδιάστατο χώρο \mathbb{R}^3 αντίστοιχα. Έτσι μπορούμε να κάνουμε το γράφημα διανύσματος \overrightarrow{AB} χρησιμοποιώντας την εντολή **Arrow[{pt1, pt2}]**, όπου **pt1** και **pt2** είναι οι συντεταγμένες του A και B αντίστοιχα. Απεικονίζουμε στο Σχήμα 8.32 το στοιχείο $u = (3, -2, 2)$ του \mathbb{R}^3 ως διάνυσμα \overrightarrow{OA} , όπου O είναι η αρχή των αξόνων και A το σημείο με συντεταγμένες $(3, -2, 2)$:

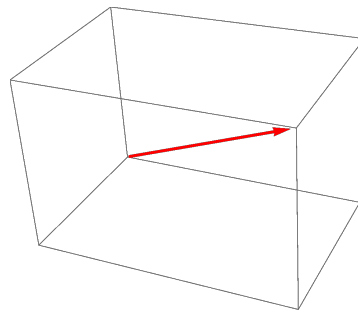
Graphics3D[Arrow[{0, 0, 0}, {3, -2, 2}]]



Σχήμα 8.32: Το διάνυσμα $(3, -2, 2)$ I .

Μπορούμε να προσθέσουμε χαρακτηριστικά σε ένα διάνυσμα, όπως χρώμα, πάχος κτλ., αν χρησιμοποιήσουμε άγκιστρα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 8.33.

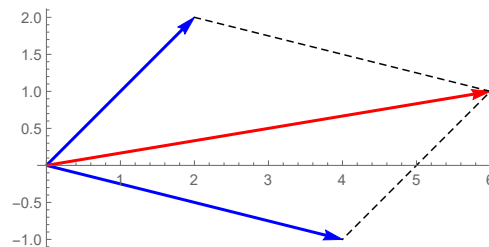
o3 = {0, 0, 0}; u = {3, -2, 2}; G1 = Graphics3D[{Red, Thick, Arrow[{o3, u}]]}



Σχήμα 8.33: Το διάνυσμα $(3, -2, 2)$ II.

Στο Σχήμα 8.34 απεικονίζουμε με μπλε τα στοιχεία $v_1 = (2, 2)$, $v_2 = (4, -1)$ του \mathbb{R}^2 και με κόκκινο το άθροισμά τους. Με την εντολή `Line[{pt1, ..., pts}]` σχεδιάζουμε μία πολυγωνική γραμμή που έχει κορυφές τα σημεία με συντεταγμένες $pt1, \dots, pts$. Με την εντολή `Dashed` η γραμμή γίνεται διακεκομμένη.

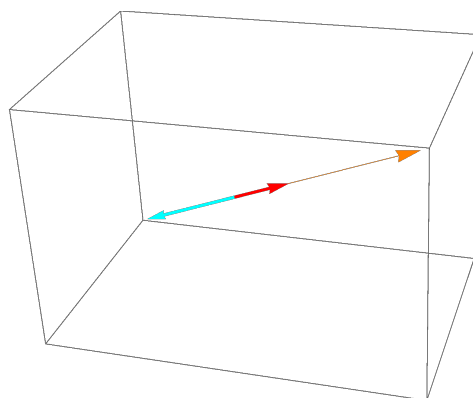
```
o2 = {0, 0}; v1 = {2, 2}; v2 = {4, -1};
Graphics[{{Blue, Thick, Arrow[{o2, v1}], Arrow[{o2, v2}]},
{Red, Thick, Arrow[{o2, v1+v2}]}, {Dashed, Line[{v1, v1+v2, v2}]}, Axes -> True]
```



Σχήμα 8.34: Άθροισμα διανυσμάτων του επιπέδου.

Απεικονίζουμε στο Σχήμα 8.35 τα γραμμικά εξαρτημένα στοιχεία u , $3u$ και $-2u$ του \mathbb{R}^3 :

```
o3 = {0, 0, 0}; u = {3, -2, 2}; Graphics3D[{{Red, Thick, Arrow[{o3, u}]},
{Orange, Arrow[{o3, 3u}]}, {Cyan, Thick, Arrow[{o3, -2u}]}}]
```



Σχήμα 8.35: Γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα του χώρου.

Απεικονίζουμε τέλος στο Σχήμα 8.36 τα στοιχεία της κανονικής βάσης του \mathbb{R}^3 ,

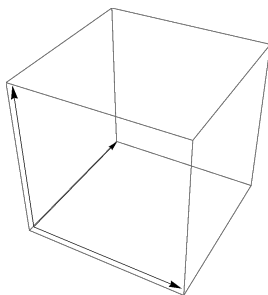
$$B_3 = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$$

και στο Σχήμα 8.37 γράφουμε το $u = (3, -2, 2)$ ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης B_3 ,

$$(3, -2, 2) = 3 \cdot (1, 0, 0) - 2 \cdot (0, 1, 0) + 2 \cdot (0, 0, 1) \Rightarrow u = 3e_1 - 2e_2 + 2e_3.$$

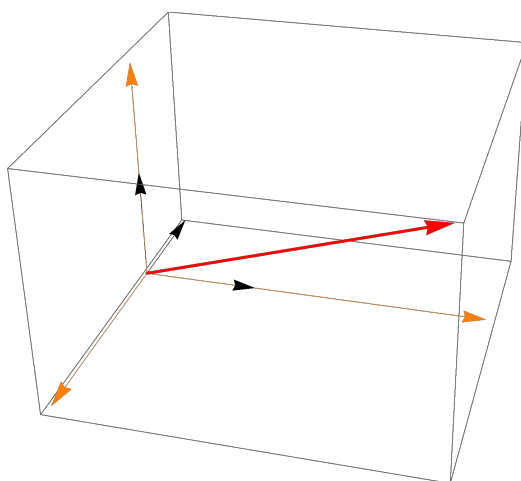
$$\mathbf{e}_1 = \{1, 0, 0\}; \mathbf{e}_2 = \{0, 1, 0\}; \mathbf{e}_3 = \{0, 0, 1\};$$

```
Ax = Graphics3D[{Arrow[{o3, e1}], Arrow[{o3, e2}], Arrow[{o3, e3}]}]
```



Σχήμα 8.36: Η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 .

```
G2 = Graphics3D[{{Orange, Arrow[{o3, 3e1}], Arrow[{o3, -2e2}], Arrow[{o3, 2e3}]}]};  
Show[Ax, G1, G2]
```



Σχήμα 8.37: Το διάνυσμα $(3, -2, 2) = 3e_1 - 2e_2 + 2e_3$.

Εξάσκηση με το Mathematica

1. Να λύσετε τα παρακάτω γραμμικά συστήματα και να απεικονίσετε τα επίπεδα που παριστάνουν οι εξισώσεις τους στον χώρο, χρησιμοποιώντας το Mathematica.

$$3x - 2y + 4z = 0$$

$$3x - 2y + 4z = 3$$

$$3x - 2y + 4z = 2$$

$$4x + y + 2z = 0$$

$$4x + y + 2z = 7$$

$$4x + y + 2z = 1$$

$$6x + 7y - 2z = 0$$

$$6x + 7y - 2z = 15$$

$$6x + 7y - 2z = 3$$

2. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το παρακάτω ομογενές σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Για κάθε τιμή του λ που θα βρείτε να λύσετε το αντίστοιχο σύστημα και να απεικονίσετε εξισώσεις και λύσεις στον χώρο.

$$2x + 3y + z = \lambda x$$

$$4x + 6y + 3z = \lambda y$$

$$4x + 6y + 4z = \lambda z$$

3. Να λύσετε τα παρακάτω παραμετρικά συστήματα για τις διάφορες τιμές του $m \in \mathbb{R}$ και να απεικονίσετε εξισώσεις και λύσεις στον χώρο.

$$\begin{array}{ll}
 mx + y + z = 0 & mx + y + z = 2 \\
 \text{i)} \quad x + my + z = 0 & \text{ii)} \quad x + my + z = 1 + m \\
 \quad x + y + mz = 0 & \quad x + y + mz = 2m \\
 \\
 2x + my + z = 0 & 2x + my + z = 3m + 3 \\
 \text{iii)} \quad x + 3y - z = 0 & \text{iv)} \quad x + 3y - z = m + 3 \\
 \quad 2x + y + mz = 0 & \quad 2x + y + mz = 3m + 3
 \end{array}$$

4. Θεωρήστε δύο στοιχεία $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ με συντεταγμένες της αρεσκείας σας. Απεικονίστε στον χώρο τα $v_1, v_2, v_1 + v_2, v_1 - v_2, 2 \cdot v_1 + v_2, v_1 - 2 \cdot v_2, \frac{1}{2} \cdot v_1 + v_2, v_1 + \frac{1}{3} \cdot v_2$ και όσους ακόμα γραμμικούς συνδυασμούς των v_1, v_2 θέλετε. Τι παρατηρείτε; Ονομάστε **G** το γράφημα που κάνατε και εκτελέστε την εντολή **Show[G, P]**, όπου $P = \text{ParametricPlot3D}[t * v_1 + s * v_2, \{t, -2, 2\}, \{s, -2, 2\}]$.

8.5 Ασκήσεις

Λυμένες Ασκήσεις

8.5.1 Έστω $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^n$. Να αποδείξετε την παρακάτω συνεπαγωγή

$$\left. \begin{array}{l}
 \bullet \quad u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^n} \\
 \bullet \quad u_2 \neq \mu u_1, \forall \mu \in \mathbb{R} \\
 \bullet \quad u_3 \notin \text{span}\{u_1, u_2\}
 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{τα } u_1, u_2, u_3 \text{ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.}$$

Λύση. Έστω $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}$, με

$$\kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^n}. \tag{8.5.1}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0$. Αρχικά παρατηρούμε ότι $\kappa_3 = 0$, γιατί αν $\kappa_3 \neq 0$, τότε

$$(8.5.1) \Rightarrow u_3 = -\frac{\kappa_1}{\kappa_3} u_1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_3} u_2 \in \text{span}\{u_1, u_2\},$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση της άσκησης. Έτσι η σχέση (8.5.1) γίνεται

$$\kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\kappa_2 = 0$, γιατί αν $\kappa_2 \neq 0$, τότε $u_2 = -\frac{\kappa_1}{\kappa_2} u_1$, το οποίο είναι επίσης άτοπο από την υπόθεση της άσκησης. Τελικά, η σχέση (8.5.1) γίνεται

$$\kappa_1 u_1 = 0_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{u_1 \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \kappa_1 = 0$$

και τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Από την Πρόταση 8.1.0.6 γνωρίζουμε ότι ισχύει και η αντίστροφη συνεπαγωγή της άσκησης. \square

8.5.2 Δίνονται τα στοιχεία $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (5, \mu, 2), v_3 = (0, -3, \mu)$ του \mathbb{R}^3 . Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε τα v_1, v_2, v_3 να είναι γραμμικά εξαρτημένα. Για τις τιμές αυτές να βρεθεί μία σχέση γραμμικής εξάρτησης των v_1, v_2, v_3 .

Λύση. Από την Πρόταση 8.1.0.7.iii έχουμε

$$v_1, v_2, v_3 \text{ γραμμικά εξαρτημένα} \Leftrightarrow \det([v_1|v_2|v_3]) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & \mu & -3 \\ 0 & 2 & \mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & \mu - 5 & -3 \\ 0 & 2 & \mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \mu - 5 & -3 \\ 2 & \mu \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 5\mu + 6 = 0 \Leftrightarrow \mu = 2 \text{ ή } \mu = 3.$$

Για τις τιμές $\mu = 2, 3$ θα βρούμε σχέση της μορφής $\kappa_1 u_1 + \kappa_2 u_2 + \kappa_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, με $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \mathbb{R}$ και τουλάχιστον ένα από τα $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ να είναι διάφορο του 0. Φέρνουμε σε ε.κ.μ.γ. τον πίνακα συντεταγμένων $[v_1|v_2|v_3]$.

• $\mu = 2$.

$$[v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & -5 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [v_3] = -5[v_1] + [v_2] \Rightarrow v_3 = -5v_1 + v_2 \Rightarrow 5v_1 - v_2 + v_3 = 0_{\mathbb{R}^3},$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι μία σχέση γραμμικής εξάρτησης των v_1, v_2, v_3 .

• $\mu = 3$.

$$[v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & -15/2 \\ 0 & \textcircled{1} & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow [v_3] &= -\frac{15}{2}[v_1] + \frac{3}{2}[v_2] \Rightarrow v_3 = -\frac{15}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 15v_1 - 3v_2 + 2v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}. \quad \square \end{aligned}$$

8.5.3 Να δείξετε ότι τα στοιχεία $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, a^2, 1)$, $u_3 = (-1, a, -1)$ του \mathbb{R}^3 είναι γραμμικά εξαρτημένα $\forall a \in \mathbb{R}$ και να βρείτε μία σχέση γραμμικής εξάρτησης των στοιχείων αυτών.

Λύση. Τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα, αν και μόνο αν $\det([u_1|u_2|u_3]) = 0$. Πράγματι, η πρώτη γραμμή του πίνακα συντεταγμένων είναι ίση με την τρίτη γραμμή και η ορίζουσα ισούται με 0, $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\det([u_1|u_2|u_3]) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Φέρνουμε τον πίνακα συντεταγμένων σε ε.κ.μ.γ. R , ώστε να βρούμε μία σχέση γραμμικής εξάρτησης των u_1, u_2, u_3 :

$$[u_1|u_2|u_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & a^2 - 1 & a + 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R'.$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

• $a = 1$. Τότε

$$R' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$[u_2] = [u_1] \Rightarrow u_2 = u_1 \Rightarrow u_1 - u_2 + 0 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3},$$

η ζητούμενη σχέση γραμμικής εξάρτησης.

- $a = -1$. Όμοια

$$R' = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R \Rightarrow [u_2] = [u_1], \quad [u_3] = -[u_1],$$

και η ισότητα $u_1 - u_2 + 0 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ (ή $u_1 + 0 \cdot u_2 + u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$) είναι μία σχέση γραμμικής εξάρτησης των u_1, u_2, u_3 .

- $a \neq \pm 1$. Εκτελώντας τη γραμμοπράξη $\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{a^2-1} \cdot \Gamma_2$ στον πίνακα R' παίρνουμε

$$\begin{aligned} R' &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & -\frac{a}{a-1} \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{1}{a-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R \Rightarrow \\ &\Rightarrow [u_3] = -\frac{a}{a-1} [u_1] + \frac{1}{a-1} [u_2] \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_3 = -\frac{a}{a-1} \cdot u_1 + \frac{1}{a-1} \cdot u_2 \Rightarrow a \cdot u_1 - u_2 + (a-1) \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα είναι μία σχέση γραμμικής εξάρτησης των u_1, u_2, u_3 . Η σχέση ισχύει και στην περίπτωση που $a = 1$ ή $a = -1$,

$$a \cdot (1, 1, 1) - (1, a^2, 1) + (a-1) \cdot (-1, a, -1) = (0, 0, 0). \quad \square$$

Ασκήσεις για Εξάσκηση

8.5.1 Δίνονται τα στοιχεία $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, a, -1)$, $v_3 = (5, 4, a)$ του \mathbb{R}^3 . Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε τα v_1, v_2, v_3 να είναι γραμμικά εξαρτημένα. Για τις τιμές αυτές να βρεθεί μία σχέση γραμμικής εξάρτησης των v_1, v_2, v_3 .

8.5.2 Έστω $w_1 = (a-1, b, c)$, $w_2 = (a, b-1, c)$, $w_3 = (a, b, c-1) \in \mathbb{R}^3$. Να δείξετε ότι

$$w_1, w_2, w_3 \text{ γραμμικά ανεξάρτητα} \Leftrightarrow a + b + c \neq 1.$$

8.5.3 Να βρεθούν οι τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ για τις οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα παρακάτω στοιχεία του \mathbb{R}^3

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (-2, a, b), \quad u_3 = (4, a^2, b^2).$$

8.5.4 Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου του χώρου \mathbb{R}^3 που διέρχεται από τα σημεία

$$A(3, -3, 0), \quad B(0, -1, -1), \quad \Gamma(2, 1, 1).$$

8.5.5 Δίνονται τα σημεία $A(3, -3, 0)$, $B(0, -1, -1)$ του χώρου \mathbb{R}^3 . Να βρεθούν δύο επίπεδα του \mathbb{R}^3 που η τομή τους να είναι η ευθεία AB .

8.5.6 Να βρεθεί η σχετική θέση των παρακάτω ευθειών του επιπέδου \mathbb{R}^2 :

i) $\varepsilon_1 : 2x - 5y = 7, \quad \varepsilon_2 : 3x + y = 4, \quad \varepsilon_3 : -x + 2y = 0,$

ii) $\eta_1 : 3x + 5y = -1, \quad \eta_2 : 2x - y = 8, \quad \eta_3 : 4x + 3y = 6.$

8.5.7 Δίνονται τα παρακάτω επίπεδα του χώρου \mathbb{R}^3 :

$$p_1 : x + 2y + z = 3, \quad p_2 : 2x + y + 3z = 4, \quad p_3 : x - y + 2z = 1,$$

$$p_4 : x + 2y + z = 4, \quad p_5 : 2x - 2y + 3z = 1.$$

Να βρεθεί η σχετική θέση των επιπέδων

i) $p_1, p_2, p_3, \quad \mathbf{ii)}$ $p_2, p_3, p_4, \quad \mathbf{iii)}$ $p_4, p_5, p_1, \quad \mathbf{iv)}$ $p_5, p_1, p_2.$

Βιβλιογραφία

- [1] Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Βαβατσούλας και Χ. Χαραλάμπους. *Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2017. ISBN: 978-960-418-727-0.
- [2] Α. Φωτιάδης και Χ. Χαραλάμπους. *Μία Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις, 2015. ISBN: 978-960-603-273-8. URL: <http://hdl.handle.net/11419/2329>.
- [3] S. Gilbert. *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*. Κρήτη: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1993. ISBN: 978-960-730-970-9.
- [4] Γ. Θωμαΐδης κ.ά. *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, 1999.
- [5] Η. Αργυρόπουλος κ.ά. *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου*. Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων, 2001.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζονται και μελετώνται οι ιδιότητες των γραμμικών συναρτήσεων από τον \mathbb{R}^n στον \mathbb{R}^m . Οι συναρτήσεις αυτές σέβονται την αλγεβρική δομή των διανυσματικών χώρων και ορίζονται με τη βοήθεια πινάκων. Αναπτύσσονται οι έννοιες της εικόνας και του πυρήνα γραμμικής συνάρτησης οι οποίες προσεγγίζονται γεωμετρικά. Δίνεται πληθώρα παραδειγμάτων και εξετάζονται οι ιδιότητες γραμμικών συναρτήσεων στον \mathbb{R}^2 και στον \mathbb{R}^3 . Στην ενότητα «Εργαστήριο με Mathematica» που ακολουθεί γίνεται χρήση εποπτικών μέσων για την καλύτερη εμπέδωση των εννοιών αυτών. Το κεφάλαιο κλείνει με μια ενότητα ασκήσεων πάνω στη θεωρία που αναπτύχθηκε. Παραπέμπουμε στα βιβλία [1], [2], [3] για τη γενίκευση των όσων κάνουμε σε αφηρημένους διανυσματικούς χώρους.

Προαπαιτούμενη γνώση: Κεφάλαια 4, 5, 6, 7, 8.

9.1 Γραμμικές Συναρτήσεις και Πίνακες

Έστω $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Με τη βοήθεια του A θα ορίσουμε μία συνάρτηση $f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. Διευκρινίζουμε ότι γράφοντας $A \cdot v$, όταν $v \in \mathbb{R}^m$, εννοούμε το στοιχείο $w \in \mathbb{R}^n$, με $[w] = A[v]$.

Ορισμός 9.1.0.1 Έστω $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Η απεικόνιση $f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $v \mapsto A \cdot v$ ονομάζεται γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο A .

Στα επόμενα παραδείγματα θα δούμε τον τρόπο για να βρούμε τον αναλυτικό τύπο μίας γραμμικής συνάρτησης.

Παραδείγματα 9.1.0.2**i.** Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Η γραμμική συνάρτηση που αντιστοιχεί στον A είναι η απεικόνιση

$$f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto A \cdot v$$

Ας δούμε κάποιες τιμές της f_A .

$$- \text{Αφού } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ βλέπουμε ότι } f_A(1, 0, 0) = (2, 1).$$

$$- \text{Αφού } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ βλέπουμε ότι } f_A(0, 1, 0) = (3, 0).$$

$$- \text{Έστω } v_1 = (3, 2, 1). \text{ Τότε } A \cdot [v_1] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ άρα } f_A(v_1) = (11, 1).$$

Ας δώσουμε τον γενικό τύπο της f_A . Πώς ορίζεται το $f_A(x, y, z)$, για $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
Αφού

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3y + 4z \\ x - z \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot (x, y, z) = (2x + 3y + 4z, x - z)$$

και τελικά $f_A(x, y, z) = (2x + 3y + 4z, x - z)$.**ii.** Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Αν $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, τότε

$$A[v] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{bmatrix},$$

επομένως ο A ορίζει τη γραμμική συνάρτηση

$$f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \text{με } f_A(x, y) = (x + 2y, 3x + 4y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

iii. Θεωρούμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$$

του Παραδείγματος 9.1.0.2.i. Ο A ορίζει τη γραμμική συνάρτηση

$$f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_1 - x_3),$$

όπου $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Έτσι

$$f_A(0, 0, 0) = (0, 0), \quad f_A(3, 2, 1) = (16, 2), \quad f_A(2, 1, 1) = (11, 1).$$

Παρατηρούμε ότι

$$f_A(1, 0, 0) = (2, 1), \quad f_A(0, 1, 0) = (3, 0), \quad f_A(0, 0, 1) = (4, -1),$$

δηλαδή οι εικόνες των τριών στοιχείων της κανονικής βάσης του \mathbb{R}^3 έχουν συντεταγμένες τα στοιχεία της αντίστοιχης στήλης του πίνακα A . Αντίστοιχο συμπέρασμα διαπιστώνουμε για τη γραμμική συνάρτηση του επόμενου παραδείγματος.

iv. Έστω $B_2 = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 και

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} = [\Sigma_1 \mid \Sigma_2]. \quad \text{Τότε} \quad A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \\ a_3x + b_3y \end{bmatrix} \text{ και}$$

ο A ορίζει τη γραμμική συνάρτηση

$$f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_A(x, y) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y, a_3x + b_3y).$$

Αφού

$$[f_A(e_1)] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \Sigma_1, \quad [f_A(e_2)] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \Sigma_2,$$

βλέπουμε ότι

$$A = [f_A(e_1) \mid f_A(e_2)].$$

v. Η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο μηδενικός $n \times m$ πίνακας είναι η μηδενική συνάρτηση

$$\mathbf{0} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto (0, \dots, 0),$$

αφού ο πολλαπλασιασμός με τον μηδενικό πίνακα δίνει μηδενικό πίνακα.

vi. Η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο μοναδιαίος $n \times n$ πίνακας I_n είναι η ταυτοτική συνάρτηση

$$\text{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto v,$$

αφού $I_n \cdot v = v, \forall v \in \mathbb{R}^n$.

vii. Έστω

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z).$$

Παρατηρούμε ότι f είναι η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}.$$

viii. Έστω

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_m) \mapsto (a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m).$$

Τότε η f είναι η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$.

Στην επόμενη πρόταση συγκεντρώνουμε βασικές ιδιότητες των γραμμικών συναρτήσεων που ορίζονται με τη βοήθεια πινάκων.

Πρόταση 9.1.0.3 Έστω $f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο πίνακας $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Τότε

$$(i) \quad f_A(v_1 + v_2) = f_A(v_1) + f_A(v_2), \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m.$$

$$(ii) f_A(\kappa \cdot v) = \kappa \cdot f_A(v) \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

$$(iii) f_A(\kappa_1 \cdot v_1 + \kappa_2 \cdot v_2) = \kappa_1 \cdot f_A(v_1) + \kappa_2 \cdot f_A(v_2), \quad \forall \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m.$$

$$(iv) f_A(0_{\mathbb{R}^m}) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

$$(v) f_A(-v) = -f_A(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

(vi) Αν $A' \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, τότε

$$f_{A+A'} = f_A + f_{A'} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto (A + A') \cdot v, \quad \forall v \in \mathbb{R}^m,$$

(vii) Αν $\mu \in \mathbb{R}$, τότε η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο πίνακας μA είναι η συνάρτηση μf_A :

$$f_{\mu A} = \mu f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto \mu(A \cdot v), \quad \forall v \in \mathbb{R}^m.$$

(viii) Αν $B \in M_{m \times s}(\mathbb{R})$, τότε

$$f_{AB} = f_A \circ f_B : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto (AB) \cdot u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^s,$$

(ix) Αν $\{e_1, \dots, e_m\}$ είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^m , τότε

$$A = [f_A(e_1) \quad \cdots \quad f_A(e_m)].$$

Απόδειξη. Οι ιδιότητες προκύπτουν εύκολα από τις ιδιότητες πολλαπλασιασμού πινάκων.

(i) Έστω $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ και $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$. Από τη Σχέση (8.1.1) προκύπτει ότι

$$A[v_1 + v_2] = A([v_1] + [v_2]) = A[v_1] + A[v_2],$$

άρα

$$A \cdot (v_1 + v_2) = A \cdot v_1 + A \cdot v_2 \quad \text{και} \quad f_A(v_1 + v_2) = f_A(v_1) + f_A(v_2).$$

(ii) Αν $v \in \mathbb{R}^m$, τότε

$$A[\kappa \cdot v] = A(\kappa[v]) \Rightarrow A[\kappa \cdot v] = \kappa(A[v]) = (\kappa A)[v],$$

έτσι

$$A \cdot (\kappa \cdot v) = \kappa \cdot (A \cdot v) = (\kappa A) \cdot v \quad \text{και} \quad f_A(\kappa v) = \kappa f_A(v).$$

(v) Για $\kappa = -1$ έχουμε

$$A \cdot (-1 \cdot v) = -1 \cdot (A \cdot v) \Rightarrow A \cdot (-v) = -(A \cdot v) \quad \text{και} \quad f_A(-v) = -f_A(v).$$

(iii) Αν $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$, τότε από το (i) και το (ii) έχουμε ότι

$$f_A(\kappa_1 \cdot v_1 + \kappa_2 \cdot v_2) = f_A(\kappa_1 v_1) + f_A(\kappa_2 v_2) = \kappa_1 \cdot f_A(v_1) + \kappa_2 \cdot f_A(v_2).$$

(iv) Αφού $A 0_{m \times 1} = 0_{n \times 1}$, προκύπτει ότι $f_A(0_{\mathbb{R}^m}) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

(vi) Αν $A, A' \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, τότε

$$(A + A')[v] = A[v] + A'[v] \Rightarrow (A + A') \cdot v = A \cdot v + A' \cdot v,$$

άρα

$$f_A + f_{A'} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad v \mapsto f_A(v) + f_{A'}(v).$$

(vii) Απευθείας από τον ορισμό.

(viii) Έστω $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m \times s}(\mathbb{R})$. Επομένως,

$$f_B : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f_{AB} : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$$

είναι οι γραμμικές συναρτήσεις που ορίζουν οι πίνακες $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m \times s}(\mathbb{R})$ και $AB \in M_{n \times s}(\mathbb{R})$ αντίστοιχα, με

$$f_B(u) = B \cdot u, \quad f_A(v) = A \cdot v, \quad f_{AB}(u) = (AB) \cdot u, \quad \text{για } u \in \mathbb{R}^s, v \in \mathbb{R}^m.$$

Αφού

$$(AB)[u] = A(B[u]) \implies (AB) \cdot u = A \cdot (B \cdot u),$$

βλέπουμε ότι $f_{AB}(u) = f_A \circ f_B(u)$, $\forall u \in \mathbb{R}^s$ και επομένως, $f_{AB} = f_A \circ f_B$.

(ix) Απευθείας από τον ορισμό (δείτε και τα Παραδείγματα 9.1.0.2.iii, iv). ■

Παράδειγμα 9.1.0.4 Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Παρατηρούμε ότι $f_A, f_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ και

$$f_A(x, y, z) = (2x + 3y + 4z, x - z), \quad \text{ενώ } f_B(x, y, z) = (x + 2y, 3x + y + 2z).$$

Ας βρούμε, τώρα, τον τύπο για τη συνάρτηση $2 \cdot f_A - 3 \cdot f_B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Από τις ιδιότητες της Πρότασης 9.1.0.3 έχουμε

$$2 \cdot f_A - 3 \cdot f_B = f_{2A} + f_{-3B} = f_{2A-3B},$$

έτσι $2 \cdot f_A - 3 \cdot f_B$ είναι η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο πίνακας

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ -7 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

και επομένως

$$f_{2A-3B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + 8z, -7x - 3y - 8z).$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον τύπο της συνάρτησης $f_{A^T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Αφού

$$A^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 \\ 4x_1 - x_2 \end{bmatrix},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$f_{A^T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_{A^T}(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, 3x_1, 4x_1 - x_2).$$

Παρατηρούμε ότι

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}),$$

άρα

$$f_{AA^T} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, x_2) \mapsto (29x_1 - 2x_2, -2x_1 + 2x_2).$$

Τέλος, θα υπολογίσουμε τη σύνθεση $f_{B^T} \circ f_A$. Από την Πρόταση 9.1.0.3 έχουμε ότι $f_{B^T} \circ f_A = f_{B^T A}$. Αφού

$$B^T A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

βλέπουμε ότι

$$f_{B^T A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (5x + 3y + z, 5x + 6y + 7z, 2x - 2z).$$

Ο ορισμός της γραμμικής συνάρτησης γενικεύεται σε διανυσματικούς χώρους πάνω από οποιοδήποτε σώμα K ως εξής:

Ορισμός 9.1.0.5 Έστω K ένα σώμα και δύο K -διανυσματικοί χώροι $(V, +, \cdot)$, $(E, +, \cdot)$. Μία συνάρτηση $\phi : V \rightarrow E$ ονομάζεται **γραμμική συνάρτηση** διανυσματικών χώρων αν είναι

συμβατή με τις πράξεις των χώρων, δηλαδή αν

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2), \quad \phi(\kappa \cdot v) = \kappa \cdot \phi(v), \quad \text{για } \forall v_1, v_2, v \in V, \kappa \in K.$$

Έστω $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Σύμφωνα με την Πρόταση 9.1.0.3, η συνάρτηση f_A είναι γραμμική συνάρτηση διανυσματικών χώρων και έτσι απλά θα αναφερόμαστε σε γραμμικές συναρτήσεις. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι όλες οι γραμμικές συναρτήσεις διανυσματικών χώρων $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ορίζονται από πίνακες.

Πρόταση 9.1.0.6 Έστω $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ γραμμική συνάρτηση. Τότε η ϕ είναι η γραμμική συνάρτηση f_A που ορίζει ο πίνακας $A = [\phi(e_1) | \cdots | \phi(e_m)]$, όπου $\{e_1, \dots, e_m\}$ είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^m .

Απόδειξη. Έστω $v = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Αφού

$$v = \sum_{i=1}^m x_i e_i$$

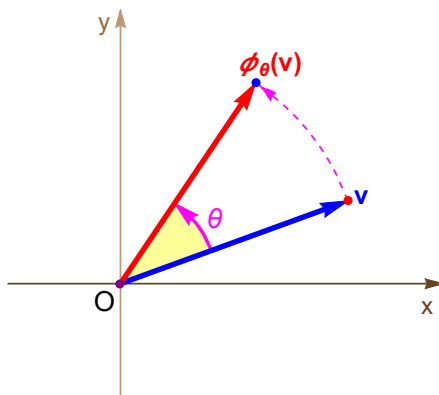
και $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι γραμμική συνάρτηση συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} [\phi(v)] &= \left[\phi\left(\sum_{i=1}^m x_i e_i\right) \right] = \left[\sum_{i=1}^m \phi(x_i e_i) \right] = \left[\sum_{i=1}^m x_i \phi(e_i) \right] = \sum_{i=1}^m x_i [\phi(e_i)] = \\ &= [\phi(e_1) | \cdots | \phi(e_m)] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = [f_A(v)], \end{aligned}$$

δηλαδή $\phi(v) = f_A(v)$ και επομένως $\phi = f_A$. ■

Παραδείγματα 9.1.0.7

- i. Με **αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία θ** στον \mathbb{R}^2 εννοούμε τη συνάρτηση $\phi_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, η οποία στρέφει ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ του \mathbb{R}^2 ως προς την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ κατά γωνία θ με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού, βλ. Σχήμα 9.1.



Σχήμα 9.1: Αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία θ .

Γεωμετρικά, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία θ είναι γραμμική συνάρτηση:

- $\phi_\theta(v+w) = \phi_\theta(v) + \phi_\theta(w)$, αφού η διαγώνιος του παραλληλόγραμμου που ορίζεται από τα v και w περιστρέφεται και αυτή κατά γωνία θ και άρα είναι η διαγώνιος του παραλληλόγραμμου που ορίζεται από τα $\phi_\theta(v)$ και $\phi_\theta(w)$,
- $\phi_\theta(\kappa v) = \kappa \phi_\theta(v)$.

Από την Πρόταση 9.1.0.6, ο πίνακας της ϕ_θ προσδιορίζεται από τις εικόνες των στοιχείων e_1, e_2 της κανονικής βάσης του \mathbb{R}^2 . Αφού

$$\phi_\theta(e_1) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \phi_\theta(e_2) = (-\sin \theta, \cos \theta)$$

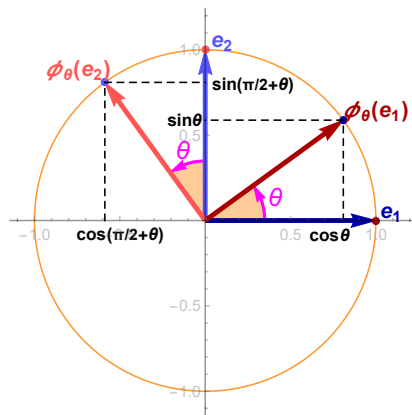
(βλ. Σχήμα 9.2) συμπεραίνουμε ότι

$$A_\theta = [\phi_\theta(e_1) \ \vdots \ \phi_\theta(e_2)] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

και άρα

$$\phi_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (\cos \theta \cdot x - \sin \theta \cdot y, \sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y).$$

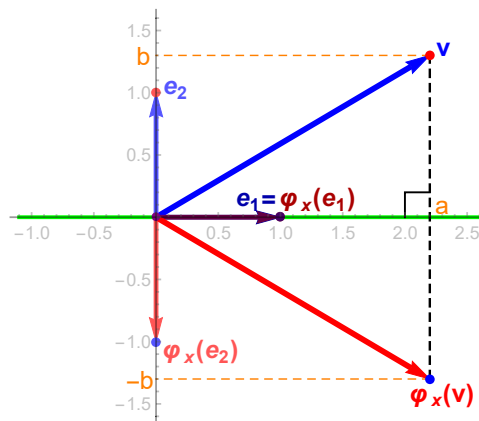
Σημειώνουμε ότι $\det(A_\theta) = 1$ και $A_\theta^{-1} = A_\theta^T$, δηλαδή ο πίνακας A_θ είναι ορθογώνιος.



Σχήμα 9.2: Κανονική βάση και αριστερόστροφη περιστροφή.

- ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, η οποία απεικονίζει ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OM} = (a, b)$ του \mathbb{R}^2 στο $\overrightarrow{OM'} = (a, -b)$, τη συμμετρική του εικόνα ως προς τον άξονα x' (βλ. Σχήμα 9.3):

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x, -y).$$



Σχήμα 9.3: Αντικατοπτρισμός ως προς τον άξονα των x .

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ϕ είναι γραμμική συνάρτηση:

- $\phi((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \phi(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, -y_1 - y_2) = \phi(x_1, y_1) + \phi(x_2, y_2)$,
- $\phi(\kappa(x, y)) = \phi(\kappa x, \kappa y) = (\kappa x, -\kappa y) = \kappa \phi(x, y)$.

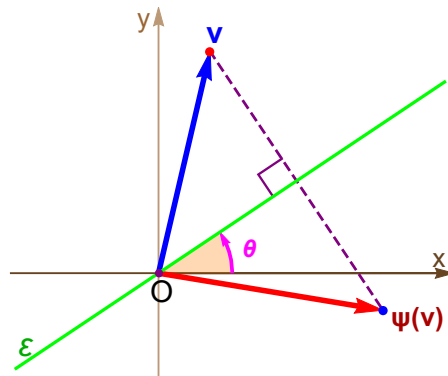
Η συνάρτηση ϕ ονομάζεται **αντικατοπτρισμός** ως προς τον άξονα των x . Αφού

$$\phi(e_1) = e_1 = (1, 0), \quad \phi(e_2) = -e_2 = (0, -1),$$

η ϕ είναι η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο πίνακας

$$A_x = [\phi(e_1) \mid \phi(e_2)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- iii. Στο παράδειγμα αυτό θα μελετήσουμε τη συνάρτηση ψ που αντικατοπτρίζει τα διανύσματα ως προς ευθεία ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται ο **αντικατοπτρισμός** ως προς την ευθεία ε .



Σχήμα 9.4: Αντικατοπτρισμός ως προς ευθεία ε .

Έστω ότι $v = \overrightarrow{OM}$ και έστω ότι $\psi(v) = \overrightarrow{OM'}$. Τι μπορούμε να πούμε για το σημείο M' ; Πρώτα από όλα, παρατηρούμε ότι το M' είναι πάνω στην περιφέρεια του κύκλου με ακτίνα το OM , ενώ αν α είναι η γωνία $\angle MO\varepsilon$, τότε α είναι η γωνία $\angle \varepsilon OM'$ (βλ. Σχήμα 9.4). Αν βέβαια, η ευθεία μας είναι ο άξονας των x , τότε όπως είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, είναι εύκολο να βρούμε τις συντεταγμένες του M' . Έστω, όμως, ότι η ευθεία ε σχηματίζει γωνία $\theta \in [0, \pi)$ με τον ημίαξονα Ox . Ας δοκιμάσουμε να αλλάξουμε την οπτική μας γωνία. Τι θα γινόταν αν προς στιγμή μεταφερθούμε στον κόσμο όπου η ευθεία ε είναι ο άξονας των x (η περιστροφή κατά γωνία $-\theta$ θα το κάνει αυτό), πάροουμε τη συμμετρική εικόνα του περιστραμμένου v ως προς τον άξονα των x και στη συνέχεια γυρίσουμε πίσω στον αρχικό μας κόσμο (περιστρέφοντας κατά γωνία θ αυτήν τη φορά); Καθώς ο αντικατοπτρισμός σέβεται τις γωνίες ανάμεσα σε ευθείες, παρατηρούμε ότι το διάνυσμα v θα καταλήξει στη συμμετρική του εικόνα ως προς την ευθεία ε , στο $\psi(v)$. Τι σημαίνει αυτό; Καταρχήν ότι ψ είναι γραμμική συνάρτηση, αφού ψ προκύπτει ως η σύνθεση τριών γραμμικών συναρτήσεων. Κατά δεύτερο, για να βρούμε τον τύπο της ψ αρκεί να παρακολουθήσουμε τις διαδοχικές εικόνες των στοιχείων της κανονικής βάσης (ή ισοδύναμα να υπολογίσουμε το γινόμενο των πινάκων). Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} e_1 \mapsto (\cos(-\theta), \sin(-\theta)) &= (\cos \theta, -\sin \theta) \mapsto (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto \\ &(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta, 2 \sin \theta \cos \theta) = (\cos 2\theta, \sin 2\theta) \end{aligned}$$

ενώ

$$e_2 \mapsto (-\sin(-\theta), \cos(-\theta)) = (\sin \theta, \cos \theta) \mapsto (\sin \theta, -\cos \theta) \mapsto (2 \sin \theta \cos \theta, \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = (\sin 2\theta, -\cos 2\theta).$$

Κατά συνέπεια, έχουμε τον πίνακα της ψ

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

καθώς και τον τύπο της ψ :

$$\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (\cos 2\theta \cdot x + \sin 2\theta \cdot y, \sin 2\theta \cdot x - \cos 2\theta \cdot y).$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας που ορίζει την ψ είναι συμμετρικός και ισχύει ότι

$$\det(A) = -1, \quad A^{-1} = A^T = A.$$

Σημειώνουμε, λοιπόν, ότι ο πίνακας A είναι ορθογώνιος. Όταν η ευθεία ε δίνεται από την εξίσωση $y = mx$ (δηλ. η ε δεν είναι ο άξονας των y), τότε $m = \sin \theta / \cos \theta$ και εύκολα προκύπτει ότι ο πίνακας της ψ είναι ο

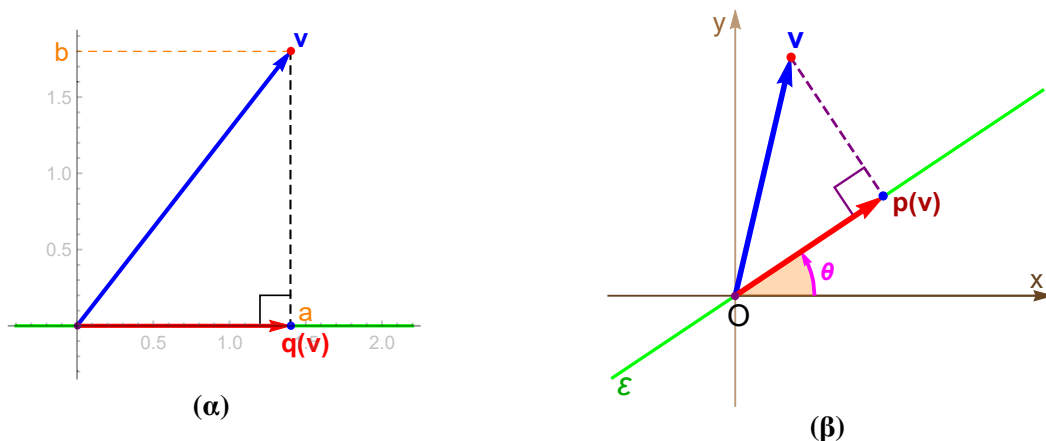
$$A = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & m^2-1 \end{pmatrix}.$$

iv. Έστω η συνάρτηση

$$q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, 0)$$

η οποία απεικονίζει ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OM} = (a, b)$ στην προβολή του $\overrightarrow{OM}' = (a, 0)$ στον άξονα $x'x$ (βλ. Σχήμα 9.5.α). Η q είναι γραμμική συνάρτηση με πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Σχήμα 9.5: Προβολή σε ευθεία.

Έστω, τώρα, ε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση p , η οποία προβάλλει τα διανύσματα στην ε (βλ. Σχήμα 9.5.β). Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **προβολή στην ευθεία ε** . Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, η p είναι γραμμική συνάρτηση, αφού προκύπτει ως σύνθεση τριών γραμμικών συναρτήσεων. Πράγματι, αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ε με τον ημιάξονα Ox , τότε πρώτα περιστρέφουμε κατά γωνία $-\theta$ και με την περιστροφή είμαστε σε ένα νέο σύστημα, όπου η ε είναι ο άξονας των x . Στη συνέχεια προβάλλουμε το (περιστραμμένο)

διάνυσμα στον άξονα $x'x$, ενώ τέλος περιστρέφουμε κατά γωνία θ για να επιστρέψουμε στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων. Το αποτέλεσμα είναι η προβολή του διανύσματος επί της ευθείας ε . Για να βρούμε τον τύπο της συνάρτησης, παρατηρούμε την εικόνα των διανυσμάτων της κανονικής βάσης. Ειδικότερα:

$$e_1 \mapsto (\cos(-\theta), \sin(-\theta)) = (\cos \theta, -\sin \theta) \mapsto (\cos \theta, 0) \mapsto (\cos^2 \theta, \sin \theta \cos \theta)$$

ενώ

$$e_2 \mapsto (-\sin(-\theta), \cos(-\theta)) \mapsto (\sin \theta, 0) \mapsto (\sin \theta \cos \theta, \sin^2 \theta)$$

και έτσι, ο πίνακας της p είναι

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Εάν η ευθεία ε δίνεται από την εξίσωση $y = mx$ (δηλ. η ευθεία δεν είναι ο άξονας των y), τότε $m = \sin \theta / \cos \theta$ και εύκολα προκύπτει ότι

$$A = \frac{1}{1+m^2} \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & m^2 \end{pmatrix}.$$

Αναφέρουμε μία καταπληκτικά ισχυρή ιδιότητα, που αναδεικνύει την ιδιαιτερότητα της κανονικής βάσης. Η ιδιότητα αυτή είναι ειδική περίπτωση της «Καθολικής Ιδιότητας Απεικόνισης Βάσης» που θα τη συναντήσετε σε άλλες μορφές σε προχωρημένα μαθήματα άλγεβρας.

Πρόταση 9.1.0.8 Έστω $\{e_1, \dots, e_m\}$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^m και έστω w_1, \dots, w_m οποιαδήποτε m στοιχεία του \mathbb{R}^n . Υπάρχει μοναδική γραμμική συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\phi(e_1) = w_1, \phi(e_2) = w_2, \dots, \phi(e_m) = w_m$.

Απόδειξη. Έστω

$$A = [w_1 | \dots | w_m].$$

Η συνάρτηση $f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ έχει τις επιθυμητές ιδιότητες. Αν $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μία γραμμική συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνθήκες της πρότασης, τότε η Πρόταση 9.1.0.6 δείχνει ότι $\phi = f_A$. ■

Παράδειγμα 9.1.0.9 Έστω $w_1 = (1, 1, 1), w_2 = (2, 0, 1)$. Θα βρούμε τον τύπο της γραμμικής συνάρτησης $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με την ιδιότητα $\phi(e_1) = w_1, \phi(e_2) = w_2$. Έχουμε

$$\phi(x, y) = \phi(xe_1 + ye_2) = x\phi(e_1) + y\phi(e_2) = (x + 2y, x, x + y).$$

Σημειώνουμε ότι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y \\ x \\ x + y \end{bmatrix}, \quad \phi = f_A.$$

9.2 Πυρήνας και Εικόνα Γραμμικής Συνάρτησης

Έστω $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ μία γραμμική συνάρτηση. Θα μελετήσουμε δύο σύνολα που καθορίζουν την f , τον πυρήνα και την εικόνα. Ο πυρήνας είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού, ενώ η εικόνα είναι υποσύνολο του πεδίου τιμών.

Ορισμός 9.2.0.1 Έστω $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ μία γραμμική συνάρτηση. Ο πυρήνας της f συμβολίζεται με $\text{Ker } f$ και είναι το σύνολο

$$\text{Ker } f = \{v \in \mathbb{R}^m : f(v) = 0_{\mathbb{R}^n}\} \subseteq \mathbb{R}^m.$$

Πώς βρίσκουμε τα στοιχεία του $\text{Ker } f$; Θα δούμε ότι το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση λύσεων ενός ομογενούς συστήματος.

Παραδείγματα 9.2.0.2

- i. Έστω $f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ένας πίνακας $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Αφού $f_A(0_{\mathbb{R}^m}) = 0_{\mathbb{R}^n}$, βλέπουμε ότι $0_{\mathbb{R}^m} \in \text{Ker } f_A$ και συμπεραίνουμε ότι $\text{Ker } f_A \neq \emptyset$.
- ii. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(v) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$, η μηδενική συνάρτηση. Τότε $\text{Ker } f = \mathbb{R}^2$.
- iii. Έστω $\text{id} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\text{id}(v) = v$, $\forall v \in \mathbb{R}^2$, η ταυτοτική συνάρτηση. Τότε $\text{Ker } \text{id} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.
- iv. Θα υπολογίσουμε τον πυρήνα της γραμμικής συνάρτησης

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x - 2y + 3z, -2x + 5y - 4z).$$

Παρατηρούμε ότι $f = f_A$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker } f_A &\Leftrightarrow f_A(x, y, z) = (0, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -2x + 5y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX = 0_{2 \times 1}. \end{aligned}$$

Διαπιστώνουμε ότι ο πυρήνας $\text{Ker } f_A$ είναι το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος $AX = 0_{2 \times 1}$, δηλαδή ο μηδενοχώρος $\text{null}(A)$ του πίνακα A . Φέρνουμε, λοιπόν, τον A σε ε.κ.μ.γ.,

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

έτσι

$$AX = 0_{2 \times 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 7z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7z \\ y = -2z \end{cases},$$

επομένως $\text{Ker } f_A = \text{null}(A) = \{(-7z, -2z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-7, -2, 1) : z \in \mathbb{R}\}$ και $\text{Ker } f_A = \text{span}\{(-7, -2, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$.

Πρόταση 9.2.0.3 Έστω $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Τότε $\text{Ker } f_A = \text{null}(A)$.

Απόδειξη. Έστω $v = (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \text{Ker} f_A$. Τότε $f_A(v) = 0_{\mathbb{R}^n}$ και άρα

$$A \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως (ν_1, \dots, ν_m) είναι λύση του ομογενούς συστήματος $AX = 0_{n \times 1}$ και άρα $v = (\nu_1, \dots, \nu_m) \in \text{null}(A)$. Το αντίστροφο προκύπτει αντιστρέφοντας τις συνεπαγωγές. ■

Παράδειγμα 9.2.0.4 Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση

$$f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_A(x, y, z) = (x - 2y + 3z, -2x + 5y - 4z),$$

του Παραδείγματος 9.2.0.2. Είδαμε ότι

$$\text{Ker} f_A = \{z \cdot (-7, -2, 1) : z \in \mathbb{R}\} \neq \{(0, 0, 0)\},$$

έτσι για τα στοιχεία $(-7, -2, 1), (0, 0, 0) \in \text{Ker} f_A$ έχουμε

$$f_A(-7, -2, 1) = f_A(0, 0, 0) = (0, 0),$$

και η f_A δεν είναι συνάρτηση 1-1. Γενικότερα, έστω ότι $v = t(-7, -2, 1)$, για κάποιο $t \in \mathbb{R}$. Τότε $v \in \text{Ker} f_A$ και $f_A(v) = (0, 0)$. Επομένως, αν $u \in \mathbb{R}^3$ τότε,

$$f_A(u + v) = f_A(u) + f_A(v) = f_A(u) + (0, 0) \Rightarrow f_A(u + v) = f_A(u).$$

Αυτό σημαίνει ότι η ευθεία $\{u + t(-7, -2, 1) : t \in \mathbb{R}\}$ απεικονίζεται σε ένα σημείο, το $f(u)$. Ειδικότερα, αν $u = (3, 2, 1)$, τότε

$$f_A(u + z(-7, -2, 1)) = f(u) = (2, 0), \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

δηλαδή

$$f_A(3 - 7z, 2 - 2z, 1 + z) = f_A(3, 2, 1) = (2, 0), \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Πρόταση 9.2.0.5 Η γραμμική συνάρτηση $f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν ο $\text{Ker} f_A = \{0_{\mathbb{R}^m}\}$. Ισοδύναμα η f_A είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = m$.

Απόδειξη. Έστω ότι η f_A είναι συνάρτηση 1-1. Σημειώνουμε ότι $f_A(0_{\mathbb{R}^m}) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Αφού η f_A είναι 1-1, συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει άλλο στοιχείο του \mathbb{R}^m που να απεικονίζεται στο $0_{\mathbb{R}^n}$, άρα $\text{Ker} f_A = \{0_{\mathbb{R}^m}\}$. Αντίστροφα, αν $\text{Ker} f_A = \{0_{\mathbb{R}^m}\}$, τότε με χρήση της Πρότασης 9.1.0.3 βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned} f_A(u_1) = f_A(u_2) &\Rightarrow f_A(u_1) - f_A(u_2) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow f_A(u_1) + f_A(-u_2) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_A(u_1 - u_2) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow u_1 - u_2 \in \text{Ker} f_A = \{0_{\mathbb{R}^m}\} \Rightarrow u_1 - u_2 = 0_{\mathbb{R}^m} \Rightarrow u_1 = u_2. \end{aligned}$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι η f_A είναι συνάρτηση 1-1. Για την τελευταία ισοδυναμία της πρότασης, παρατηρούμε ότι $\text{Ker} f_A = \text{null}(A) = \{0_{\mathbb{R}^m}\}$, αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $AX = 0_{n \times 1}$ έχει μοναδική λύση, δηλ., αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = m$. ■

Παραδείγματα 9.2.0.6

i. Έστω $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ γραμμική συνάρτηση που ορίζει ένας πίνακας $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$. Η f_A δεν μπορεί να είναι 1-1, αφού

$$\text{rank}(A) \leq \min\{2, 3\} = 2 < 3.$$

ii. Έστω $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$. Τότε η γραμμική συνάρτηση

$$f_{A^T A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

δεν μπορεί να είναι 1-1. Πράγματι, όπως είδαμε προηγουμένως $\text{Ker } f_A \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ και υπάρχει μη μηδενικό $v \in \text{Ker } f_A$. Τότε

$$f_{A^T A}(v) = f_{A^T}(f_A(v)) = f_{A^T}(0_{\mathbb{R}^2}) = 0_{\mathbb{R}^3},$$

άρα $v \in \text{Ker } f_{A^T A}$. Συμπεραίνουμε ότι $\text{rank}(A^T A) < 3$.

Ας εξετάσουμε τώρα την έννοια της εικόνας μίας γραμμικής συνάρτησης.

Ορισμός 9.2.0.7 Έστω $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ και $f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ η αντίστοιχη γραμμική συνάρτηση. Αν $S \subseteq \mathbb{R}^m$, τότε

$$f_A(S) = \{f_A(s) : s \in S\} = \{r \in \mathbb{R}^n : \exists \sigma \in S, \text{ με } f_A(\sigma) = r\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

ονομάζεται **εικόνα** του S . Ειδικότερα, όταν $S = \mathbb{R}^m$, τότε $f_A(\mathbb{R}^m)$ συμβολίζεται με $\text{Im } f_A$ και ονομάζεται εικόνα της γραμμικής συνάρτησης f_A .

Παραδείγματα 9.2.0.8

i. Αν $f_{0_{n \times m}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι η μηδενική γραμμική συνάρτηση, τότε $\text{Im } f_{0_{n \times m}} = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

ii. Η εικόνα της ταυτοτικής συνάρτησης $\text{id} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ είναι ο \mathbb{R}^2 .

iii. Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση

$$f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x - 2y + 3z, -2x + 5y - 4z),$$

με πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε ότι $(x, y, z) = x e_1 + y e_2 + z e_3$, όπου $\{e_1, e_2, e_3\}$ είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 και γνωρίζουμε ότι $f_A(e_1) = (1, -2)$, $f_A(e_2) = (-2, 5)$, $f_A(e_3) = (3, -4)$. Επομένως, το στοιχείο $v = (a, b) \in \text{Im } f_A$, αν και μόνο αν υπάρχει (x, y, z) , τέτοιο ώστε $f_A(x, y, z) = v$ ή

$$x(1, -2) + y(-2, 5) + z(3, -4) = (a, b).$$

Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{9.2.1}$$

είναι συμβατό ή ισοδύναμα ότι $v \in \text{span}\{f_A(e_1), f_A(e_2), f_A(e_3)\}$. Μπορούμε, όμως, εύκολα να δούμε ότι $\text{rank } A = 2$, άρα $\text{rank}[A|v] = 2$ και το σύστημα (9.2.1) είναι πάντα συμβατό. Συμπεραίνουμε ότι $\text{Im } f_A = \mathbb{R}^2$ και η συνάρτηση f_A είναι συνάρτηση επί.

Πρόταση 9.2.0.9 Έστω $f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο πίνακας $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ και $\{e_1, \dots, e_m\}$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^m . Τότε

$$\text{Im } f_A = \text{span}\{f_A(e_1), \dots, f_A(e_m)\}.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 9.1.0.3.iii γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_A &= \{f_A(x_1, \dots, x_m) : (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m\} = \\ &= \{f_A(x_1 e_1 + \dots + x_m e_m) : x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x_1 f_A(e_1) + \dots + x_m f_A(e_m) : x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{f_A(e_1), \dots, f_A(e_m)\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ας δούμε στη συνέχεια μία ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ένας πίνακας να είναι επί.

Πόρισμα 9.2.0.10 Έστω $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$. Η γραμμική συνάρτηση $f_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνάρτηση επί, αν και μόνο αν $\operatorname{rank}(A) = n$. Με άλλα λόγια,

$$\operatorname{rank}(A) = n \Leftrightarrow \operatorname{Im} f_A = \mathbb{R}^n.$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 9.2.0.9 αρκεί να δείξουμε ότι $\operatorname{span}\{f_A(e_1), \dots, f_A(e_m)\} = \mathbb{R}^n$, αν και μόνο αν $\operatorname{rank}(A) = n$. Αυτό όμως προκύπτει από την Πρόταση 8.1.0.7.ii. \blacksquare

Επικεντρώνουμε στη συνέχεια τη μελέτη μας σε γραμμικές συναρτήσεις με το ίδιο πεδίο ορισμού και τιμών. Οι συναρτήσεις αυτές καθορίζονται από τετραγωνικούς πίνακες.

Πρόταση 9.2.0.11 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Η γραμμική συνάρτηση $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι αντιστρέψιμη, αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$. Επιπλέον,

$$f_A^{-1} = f_{A^{-1}}.$$

Απόδειξη. Έχουμε $\det(A) \neq 0$, επομένως $\operatorname{rank}(A) = n$ (βλ. Πρόταση 6.3.0.1). Από την Πρόταση 9.2.0.5 και το Πόρισμα 9.2.0.10 έπεται ότι η f_A είναι συνάρτηση 1 – 1 και επί, επομένως ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f_A^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, με

$$f_A^{-1} \circ f_A = f_A \circ f_A^{-1} = \operatorname{id}_{\mathbb{R}^n},$$

όπου $\operatorname{id}_{\mathbb{R}^n}$ η ταυτοτική συνάρτηση του \mathbb{R}^n . Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση $f_{A^{-1}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ορίζει ο πίνακας A^{-1} . Από την Πρόταση 9.1.0.3.viii έχουμε

$$f_A \circ f_{A^{-1}} = f_{AA^{-1}} = f_{I_n} = \operatorname{id}_{\mathbb{R}^n},$$

επομένως $f_{A^{-1}} = f_A^{-1}$. \blacksquare

Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με την πρόταση, όταν f_A είναι αντιστρέψιμη, η αντίστροφη συνάρτηση της f_A είναι η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο αντίστροφος του πίνακα A .

Παράδειγμα 9.2.0.12 Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση

$$f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f_A(x, y, z) = (x + 2y + 5z, 4x + 2y + 5z, 3x + y + 2z),$$

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, που ορίζει ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Στο Παράδειγμα 6.5.0.2.i βρήκαμε ότι

$$\det(A) = 3 \neq 0, \quad A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 7 & -13 & 15 \\ -2 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, η f_A είναι συνάρτηση 1 – 1 και επί, $\operatorname{Ker} f_A = \{(0, 0, 0)\}$, $\operatorname{Im} f_A = \mathbb{R}^3$ και ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f_A^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, με

$$f_A^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{-x+y}{3}, \frac{7x-13y+15z}{3}, \frac{-2x+5y-6z}{3} \right).$$

9.3 Γραμμικές Συναρτήσεις στον \mathbb{R}^2 και στον \mathbb{R}^3

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας μη μηδενικός πίνακας και έστω $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Αφού

$$f_A\left(\sum_{i=1}^m c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^m c_i f_A(v_i)$$

συμπεραίνουμε ότι η γραμμική θήκη ενός συνόλου διανυσμάτων $\{v_i : i = 1, \dots, m\}$ απεικονίζεται στη γραμμική θήκη του συνόλου των εικόνων $\{f_A(v_i) : i = 1, \dots, m\}$. Ας δούμε τα συμπεράσματα που προκύπτουν όταν $n = 2, n = 3$.

Πρόταση 9.3.0.1 Έστω $A \in M_2(\mathbb{R})$ ένας μη μηδενικός πίνακας και έστω $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η αντίστοιχη γραμμική συνάρτηση.

- Έστω $\text{rank}(A) = 2$. Αν l είναι ευθεία, τότε $f_A(l)$ είναι ευθεία. Το μοναδιαίο τετράγωνο απεικονίζεται σε ένα παραλληλόγραμμο με εμβαδό $|\det(A)|$.
- Έστω $\text{rank}(A) = 1$. Τότε $\text{Ker } f_A$ και $\text{Im } f_A$ είναι ευθείες του \mathbb{R}^2 . Το μοναδιαίο τετράγωνο απεικονίζεται σε ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Απόδειξη. Αν $\text{rank}(A) = 2$, τότε $\text{Ker } f_A = \{(0, 0)\}$ και $\text{Im } f_A = \mathbb{R}^2$. Αν

$$l : \{(c_1, c_2) + t(v_1, v_2) : t \in \mathbb{R}\}$$

είναι ευθεία στον \mathbb{R}^2 , τότε

$$f_A(l) : \{f_A(c_1, c_2) + t f_A(v_1, v_2) : t \in \mathbb{R}\}$$

είναι ευθεία που είναι παράλληλη στο $f_A(v_1, v_2)$. Το μοναδιαίο τετράγωνο προσδιορίζεται ως το σύνολο

$$T = \{x e_1 + y e_2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$$

και η εικόνα του είναι

$$f_A(T) = \{x f_A(e_1) + y f_A(e_2) : 0 \leq x, y \leq 1\}$$

που περιγράφει το παραλληλόγραμμο με πλευρές $f_A(e_1), f_A(e_2)$. Το συμπέρασμα για το εμβαδόν προκύπτει από την Πρόταση 6.2.0.7.

Αντίστοιχα, αν $\text{rank}(A) = 1$, τότε τα $f_A(e_1), f_A(e_2)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Επομένως $\text{span}\{f_A(e_1), f_A(e_2)\}$ είναι μία ευθεία. Έστω ότι $f_A(e_1) = \kappa f_A(e_2)$ (αντίστοιχα γίνεται η απόδειξη αν $f_A(e_2) = \kappa f_A(e_1)$). Έχουμε ότι

$$\{x f_A(e_1) + y f_A(e_2) : 0 \leq x, y \leq 1\} = \{(x\kappa + y) f_A(e_2) : 0 \leq x, y \leq 1\}.$$

Συμπεραίνουμε ότι η εικόνα του μοναδιαίου τετραγώνου είναι ένα τμήμα της ευθείας $\text{span}\{f_A(e_1), f_A(e_2)\}$. ■

Παραδείγματα 9.3.0.2

- i. Έστω $\phi_{\frac{\pi}{6}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, η αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία $\pi/6$. Ο πίνακας και ο τύπος της $\phi_{\frac{\pi}{6}}$ είναι (βλ. Παράδειγμα 9.1.0.7.i):

$$A_{\frac{\pi}{6}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

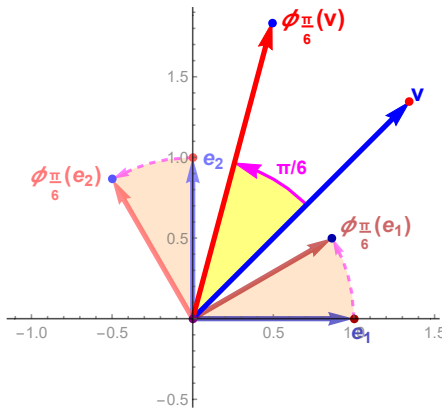
και

$$\phi_{\frac{\pi}{6}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3}x - y, x + \sqrt{3}y).$$

βλ. Σχήμα 9.6. Καθώς όλα τα διανύσματα περιστρέφονται, είναι φανερό ότι $\text{Ker } \phi_{\frac{\pi}{6}} = \{(0, 0)\}$. Άλλωστε

$$\det(A_{\frac{\pi}{6}}) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \neq 0$$

και η συνάρτηση $\phi_{\frac{\pi}{6}}$ είναι αντιστρέψιμη. Συμπεραίνουμε ότι $\text{Im } \phi_{\frac{\pi}{6}} = \mathbb{R}^2$. Το μοναδιαίο τετράγωνο απεικονίζεται σε ένα τετράγωνο με εμβαδόν 1.



Σχήμα 9.6: Περιστροφή κατά γωνία $\pi/6$.

ii. Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση

$$f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_A(x, y) = (-x + 2y, 2x - y),$$

με πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $f_A(e_1) = (-1, 2)$, $f_A(e_2) = (2, -1)$, ενώ $\det(A) = -3 \neq 0$. Άρα $\text{Ker } f_A = \{(0, 0)\}$, $\text{Im } f_A = \mathbb{R}^2$ και η f_A είναι συνάρτηση 1-1 και επί.

Θα βρούμε την εικόνα της ευθείας $\epsilon : x + 3y = -1$ του \mathbb{R}^2 . Η ευθεία ϵ περιγράφεται ως το σύνολο

$$\epsilon = \{(-1 - 3y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{(-1, 0) + y(-3, 1) : y \in \mathbb{R}\},$$

επομένως

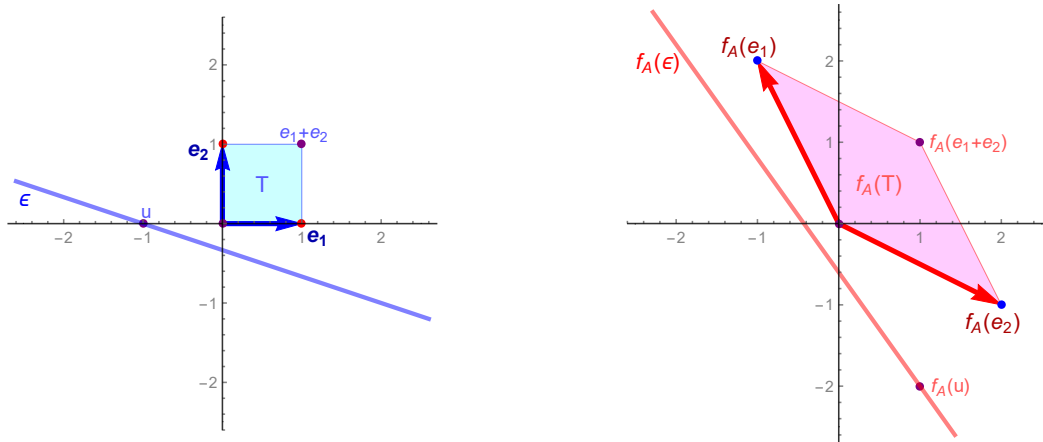
$$\begin{aligned} f_A(\epsilon) &= \{f_A((-1, 0) + y(-3, 1)) : y \in \mathbb{R}\} = \{f_A(-1, 0) + y f_A(-3, 1) : y \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(1, -2) + y(5, -7) : y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι η εικόνα της ϵ είναι μία ευθεία του \mathbb{R}^2 που διέρχεται από το σημείο $(-1, 2)$ και είναι παράλληλη στον φορέα του στοιχείου $(5, -7)$ του \mathbb{R}^2 . Στο Σχήμα 9.7, απεικονίζεται αριστερά η ευθεία ϵ και το μοναδιαίο τετράγωνο T , ενώ δεξιά απεικονίζεται η ευθεία $f_A(\epsilon)$ και το παραλληλόγραμμο $f_A(T)$.

Τέλος, θα βρούμε την εικόνα του μοναδιαίου κύκλου $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Έστω $(x', y') \in f_A(C)$. Τότε υπάρχει $(x, y) \in C$, με $f_A(x, y) = (x', y')$. Αυτό σημαίνει ότι

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

Υπολογίζοντας τον A^{-1} και κάνοντας τον πολλαπλασιασμό βρίσκουμε ότι



Σχήμα 9.7: Εικόνα της ϵ και του μοναδιαίου τετραγώνου.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{cases} x = (x' + 2y')/3 \\ y = (2x' + y')/3 \end{cases}.$$

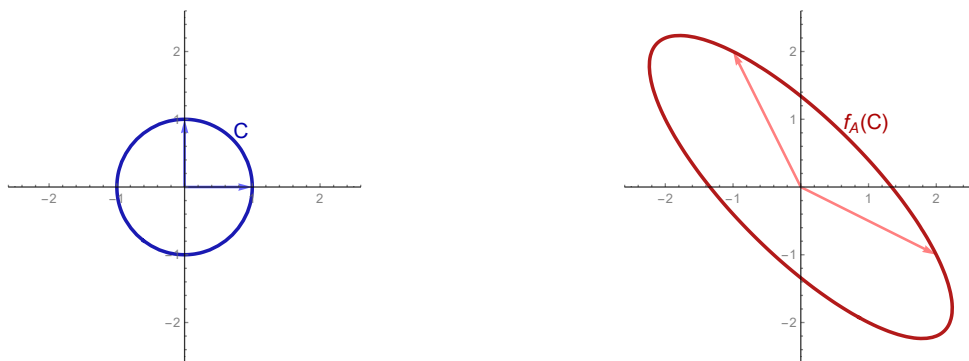
Αντικαθιστώντας στην εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$ του C προκύπτει ότι

$$(x' + 2y')^2 + (2x' + y')^2 = 9 \Leftrightarrow 5x'^2 + 8x'y' + 5y'^2 = 9.$$

Επομένως, οι συντεταγμένες (x', y') ικανοποιούν μία δευτεροβάμια εξίσωση, που περιγράφει μία έλλειψη. Αντίστροφα, αφού f_A είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε σημείο της έλλειψης είναι η εικόνα ενός σημείου (x, y) που ανήκει στον κύκλο. Συμπεραίνουμε ότι

$$f_A(C) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 : 5x'^2 + 8x'y' + 5y'^2 = 9\}.$$

Το Σχήμα 9.8 απεικονίζει τον μοναδιαίο κύκλο και την εικόνα του.



Σχήμα 9.8: Η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου.

iii. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_A(x, y) = (3x - 6y, x - 2y).$$

Παρατηρούμε ότι $\det(A) = 0$ και η ε.κ.μ.γ. του A είναι $R = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Έτσι, αν $\{e_1, e_2\}$ είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 , τότε $f_A(e_1) = (3, 1)$ και $f_A(e_2) = (-6, -2) = -2f_A(e_1)$. Υπολογίζουμε τον πυρήνα $\text{Ker } f_A = \text{null}(A)$, λύνοντας το ομογενές σύστημα $AX = 0_{2 \times 1}$. Από την ε.κ.μ.γ. R προκύπτει ότι

$$AX = 0_{2 \times 1} \Leftrightarrow x - 2y = 0,$$

άρα

$$\text{Ker } f_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\} = \{(2y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(2, 1)\}$$

και ο πυρήνας της f_A είναι η ευθεία $\delta : x - 2y = 0$, που περνά από την αρχή των αξόνων και το σημείο $(2, 1)$. Επίσης,

$$\begin{aligned} \text{Im } f_A &= \{x f_A(e_1) + y f_A(e_2) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x f_A(e_1) - 2y f_A(e_1) : x, y \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x - 2y) f_A(e_1) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{\kappa f_A(e_1) : \kappa \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{f_A(e_1)\} = \text{span}\{(3, 1)\}, \end{aligned}$$

άρα η εικόνα της f_A είναι η ευθεία του \mathbb{R}^2 , που περνά από την αρχή των αξόνων και το σημείο $(3, 1)$.

Θα βρούμε την εικόνα των ευθειών $\epsilon : x + y = 2$ και $\zeta : x - 2y = 2$ του \mathbb{R}^2 . Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \epsilon &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\} = \{(2, 0) + y(-1, 1) : y \in \mathbb{R}\}, \\ \zeta &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 2\} = \{(2, 0) + y(2, 1) : y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

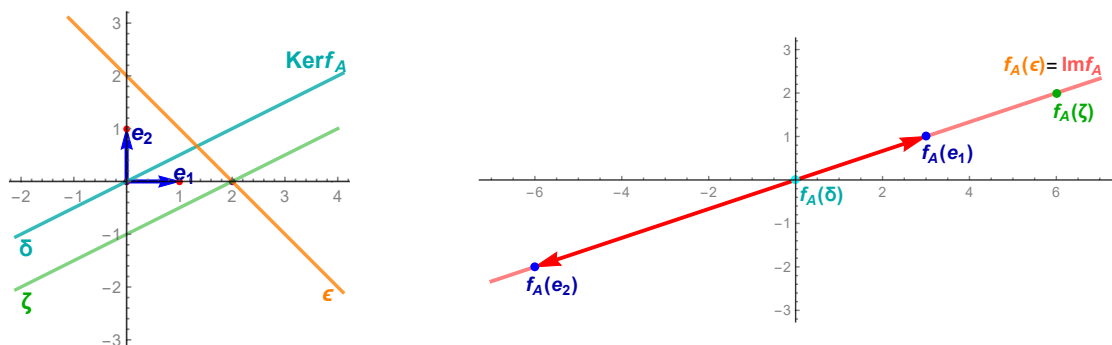
Επομένως,

$$\begin{aligned} f_A(\epsilon) &= \{f_A(2, 0) + y f_A(-1, 1) : y \in \mathbb{R}\} = \{(6, 2) + y(-9, -3) : y \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(2 - 3y) \cdot (3, 1) : y \in \mathbb{R}\} = \{\kappa (3, 1) : \kappa \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(3, 1)\} = \text{Im } f_A. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα,

$$f_A(\zeta) = \{f_A(2, 0) + y f_A(2, 1) : y \in \mathbb{R}\} = \{(6, 2) + y(0, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \{(6, 2)\}.$$

Σημειώνουμε ότι η ευθεία $\text{Ker } f_A = \text{span}\{(2, 1)\}$ απεικονίζεται στην αρχή των αξόνων και ότι η ευθεία ζ , που είναι παράλληλη στην ευθεία $\text{span}\{(2, 1)\}$, επίσης απεικονίζεται σε ένα σημείο. Το Σχήμα 9.9 απεικονίζει τη δράση της συνάρτησης f_A στις ευθείες ζ , δ , τις εικόνες $f_A(e_1)$, $f_A(e_2)$ καθώς και την εικόνα $\text{Im } f_A$.



Σχήμα 9.9: Δράση της f_A .

Ας δούμε τώρα την περίπτωση μίας γραμμικής συνάρτησης στον τρισδιάστατο χώρο. Η απόδειξη της επόμενης πρότασης γίνεται κατ' αναλογία της Πρότασης 9.3.0.1 και σας καλούμε να συμπληρώσετε τις λεπτομέρειες.

Πρόταση 9.3.0.3 Έστω $A \in M_3(\mathbb{R})$ ένας μη μηδενικός πίνακας και έστω $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ η αντίστοιχη γραμμική συνάρτηση.

- Έστω $\text{rank}(A) = 3$. Αν l είναι ευθεία, τότε $f_A(l)$ είναι ευθεία. Αν p είναι παραλληλόγραμμα, τότε $f_A(p)$ είναι παραλληλόγραμμα. Ο μοναδιαίος κύβος απεικονίζεται σε ένα παραλληλεπίπεδο με όγκο $|\det(A)|$.

- Έστω $\text{rank}(A) = 2$. Τότε $\text{Ker } f_A$ είναι ευθεία και $\text{Im } f_A$ είναι επίπεδο του \mathbb{R}^3 που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Ο μοναδιαίος κύβος απεικονίζεται σε ένα παραλληλόγραμμο.
- Έστω $\text{rank}(A) = 1$. Τότε $\text{Ker } f_A$ είναι επίπεδο και $\text{Im } f_A$ είναι ευθεία του \mathbb{R}^3 που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Ο μοναδιαίος κύβος απεικονίζεται σε ένα ευθύγραμμο τμήμα.

Παράδειγμα 9.3.0.4 Έστω η γραμμική συνάρτηση

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x+z, -x+y, 2x+2z).$$

Γράφουμε τον πίνακα A που αντιστοιχεί στη f και την ε.κ.μ.γ. του A ,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έστω $\{e_1, e_2, e_3\}$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 . Είναι φανερό ότι $f(e_1), f(e_2)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του \mathbb{R}^3 , αφού οι αντίστοιχες στήλες του A δεν είναι πολλαπλάσια η μία της άλλης. Από την ε.κ.μ.γ. του A βλέπουμε ότι $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$. Υπολογίζουμε τον πυρήνα της f . Έχουμε

$$AX = 0_{3 \times 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x & + z = 0 \\ & y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases},$$

άρα

$$\text{Ker } f = \{(-z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-1, -1, 1)\}$$

και ο πυρήνας της f είναι η ευθεία του \mathbb{R}^3 που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $(-1, -1, 1)$. Επίσης,

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \text{span}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \{x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x f(e_1) + y f(e_2) + z (f(e_1) + f(e_2)) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x+z) \cdot f(e_1) + (y+z) \cdot f(e_2) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{\kappa f(e_1) + \lambda f(e_2) : \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\} = \\ &= \text{span}\{f(e_1), f(e_2)\} = \text{span}\{(1, -1, 2), (0, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

Η εικόνα της f είναι το επίπεδο του \mathbb{R}^3 που παράγουν τα γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία $f(e_1), f(e_2)$. Για να βρούμε την εξίσωση του επιπέδου, φέρνουμε τον επόμενο πίνακα σε κλιμακωτή μορφή γραμμών.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ -1 & 1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 2 & c \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a \end{array} \right].$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\text{Im } f = \text{span}\{(1, -1, 2), (0, 1, 0)\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}.$$

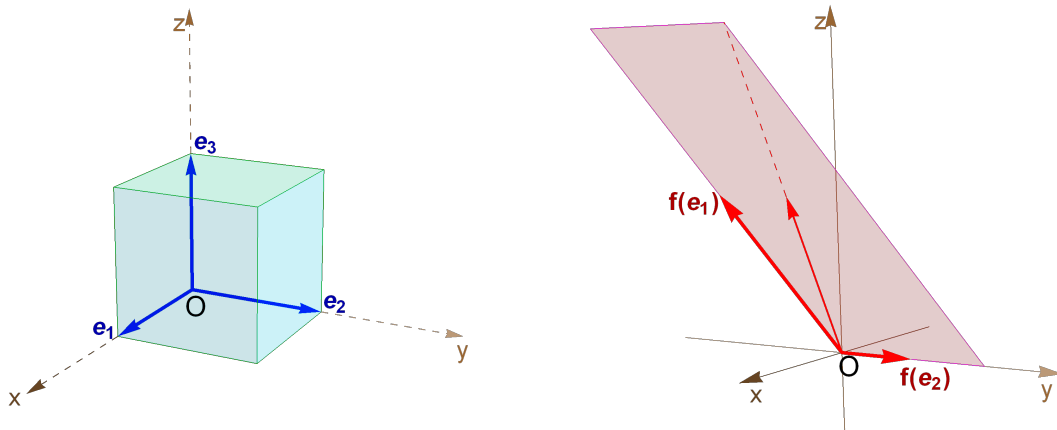
Έστω

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}$$

ο μοναδιαίος κύβος. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f(C) &= \{x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) : 0 \leq x, y, z \leq 1\} = \\ &= \{(x+z) \cdot f(e_1) + (y+z) \cdot f(e_2) : 0 \leq x, y, z \leq 1\} = \\ &= \{\kappa f(e_1) + \lambda f(e_2) : 0 \leq \kappa, \lambda \leq 2\} \end{aligned}$$

είναι το παραλληλόγραμμο με πλευρές $(2, -2, 4)$ και $(0, 2, 0)$, βλ. Σχήμα 9.10.



Σχήμα 9.10: Η εικόνα $f(C)$ του μοναδιαίου κύβου.

Έστω, τώρα, το επίπεδο

$$q = \{(x, z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) + z(0, 1, 1) : x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Έχουμε

$$f(q) = \{x f(1, 0, 0) + z f(0, 1, 1) : x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -1, 2) + z(1, 1, 2) : x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Επομένως $f(q)$ περιγράφει ένα επίπεδο στον \mathbb{R}^3 . Αφού $f(q) \subset \text{Im} f$, συμπεραίνουμε ότι $f(q) = \text{Im} f$. Για επιβεβαίωση, αν επιθυμούμε, εύκολα βλέπουμε όπως νωρίτερα, ότι

$$\text{span}\{(1, -1, 2), (1, 1, 2)\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : 2a - c = 0\}.$$

Ας υπολογίσουμε και την εικόνα του επιπέδου

$$s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 1\} = \{(1, 0, 0) + y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} f(s) &= \{f(1, 0, 0) + y f(-2, 1, 0) + z f(-3, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(1, -1, 2) + y(-2, 3, 4) + z(-2, 3, 4) : y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(1, -1, 2) + (y + z) \cdot (-2, 3, 4) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{(1, -1, 2) + \kappa(-2, 3, 4) : \kappa \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

δηλαδή $f(s)$ είναι η ευθεία του \mathbb{R}^3 που διέρχεται από το σημείο $(1, -1, 2)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $(-2, 3, 4)$. Τέλος, έστω οι ευθείες

$$\varepsilon_1 = \{(0, 1, 1) + \kappa(1, 0, 1) : \kappa \in \mathbb{R}\}, \quad \varepsilon_2 = \{(0, 1, 1) + \kappa(1, 1, -1) : \kappa \in \mathbb{R}\}.$$

Τότε

$$\begin{aligned} f(\varepsilon_1) &= \{f(0, 1, 1) + \kappa f(1, 0, 1) : \kappa \in \mathbb{R}\} = \{(1, 1, 2) + \kappa(2, -1, 4) : \kappa \in \mathbb{R}\}, \\ f(\varepsilon_2) &= \{f(0, 1, 1) + \kappa f(1, 1, -1) : \kappa \in \mathbb{R}\} = \{(1, 1, 2) + (0, 0, 0) : \kappa \in \mathbb{R}\} = \{(1, 1, 2)\}, \end{aligned}$$

άρα η εικόνα της ε_1 είναι μία ευθεία του \mathbb{R}^3 , ενώ η εικόνα της ε_2 είναι ένα σημείο.

9.4 Εργαστήριο με Mathematica

Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f_A(v) = A \cdot v$, $v \in \mathbb{R}^2$, που ορίζει ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

MatrixForm[$A = \{\{0, -2\}, \{-1, 1\}\}$]

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε το στοιχείο $A \cdot v$ του \mathbb{R}^2 με την εντολή $A.v$, χρησιμοποιώντας την τελεία « \cdot » όπως στον πολλαπλασιασμό πινάκων.

$\{A.\{x, y\}, A.\{5, 6\}\}$

$\{\{-2y, -x + y\}, \{-12, 1\}\}$

Η γραμμική συνάρτηση f_A δίνεται από τον τύπο

$$f_A(x, y) = (-2y, -x + y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

έτσι $f_A(5, 6) = (-12, 1)$. Παρακάτω διαπιστώνουμε ότι $A = [f_A(e_1)|f_A(e_2)]$, όπου $\{e_1, e_2\}$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^2 .

$e_1 = \{1, 0\}; e_2 = \{0, 1\}; \{A.e_1, A.e_2\}$

$\{\{0, -1\}, \{-2, 1\}\}$

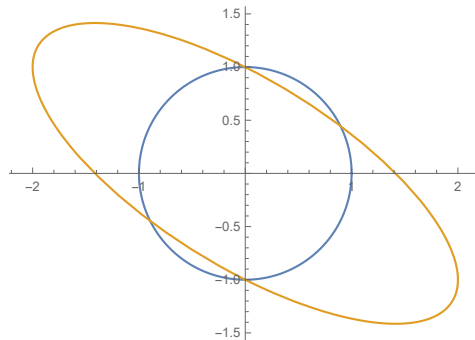
Παρατηρούμε ότι $\det(A) = -2 \neq 0$, επομένως η συνάρτηση f_A είναι 1-1 και επί, $\text{Ker } f_A = \{(0, 0)\}$ και $\text{Im } f_A = \mathbb{R}^2$. Χρησιμοποιούμε την εντολή **ParametricPlot** για να αναπαραστήσουμε γραφικά τον μοναδιαίο κύκλο

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \{(\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi)\}$$

και την εικόνα του

$$f_A(C) = \{f_A(c) : c \in C\} = \{A \cdot c : c \in C\} = \{A \cdot (\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi)\}.$$

ParametricPlot[\{\{Cos[t], Sin[t]\}, A.\{Cos[t], Sin[t]\}\}, \{t, 0, 2Pi\}]



Σχήμα 9.11: Ο μοναδιαίος κύκλος και η εικόνα του.

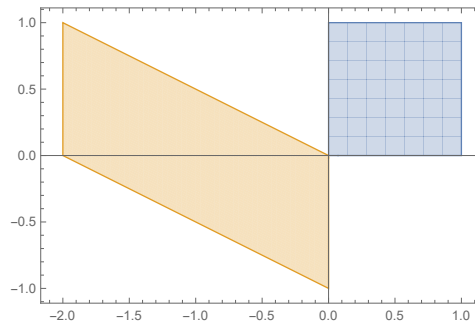
Η εικόνα του C είναι μία έλλειψη (βλ. Σχήμα 9.11). Αναπαριστούμε όμοια το μοναδιαίο τετράγωνο

$$T = \{s e_1 + t e_2 : 0 \leq s, t \leq 1\}$$

και την εικόνα του

$$f_A(T) = \{f_A(\tau) : \tau \in T\} = \{A \cdot (s e_1 + t e_2) : 0 \leq s, t \leq 1\}.$$

ParametricPlot[\{s * e1 + t * e2, A.(s * e1 + t * e2), \{s, 0, 1\}, \{t, 0, 1\}\}]



Σχήμα 9.12: Το μοναδιαίο τετράγωνο και η εικόνα του.

Η εικόνα του T είναι ένα παραλληλόγραμμο, βλ. Σχήμα 9.12.

Επαναλαμβάνουμε για τη γραμμική συνάρτηση $f_B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f_B(x, y) = (-2x + 6y, x - 3y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, που ορίζει ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$B = \{-2, 6\}, \{1, -3\}; B.\{x, y\}$$

$$\{-2x + 6y, x - 3y\}$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε $\det(B) = 0$, επομένως η f_B δεν είναι συνάρτηση 1-1 ή επί. Παρατηρούμε ότι $f_B(e_2) = -3f_B(e_1)$, έτσι

$$\text{Im}f_B = \text{span}\{f_B(e_1), f_B(e_2)\} = \text{span}\{f_B(e_1)\} = \text{span}\{(-2, 1)\},$$

η εικόνα $\text{Im}f_B$ είναι μία ευθεία του \mathbb{R}^2 . Υπολογίζουμε τον πυρήνα $\text{Ker}f_B = \text{null}(B)$.

NullSpace[B]

$$\{\{3, 1\}\}$$

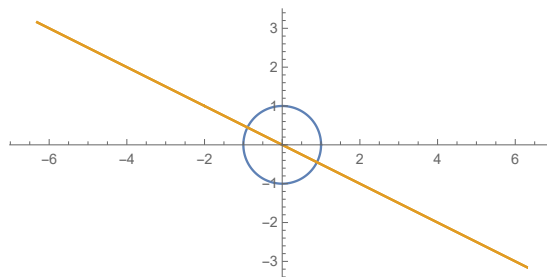
Συμπεραίνουμε ότι ο πυρήνας $\text{Ker}f_B = \{k(3, 1) : k \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(3, 1)\}$ είναι επίσης μία ευθεία του \mathbb{R}^2 . Επαληθεύουμε ότι $f_B(3k, k) = 0_{\mathbb{R}^2}$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

$$B.\{3k, k\}$$

$$\{0, 0\}$$

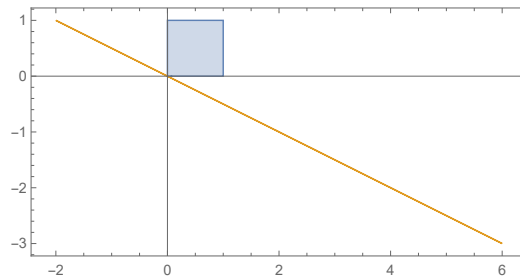
Στα Σχήματα 9.13 και 9.14 διαπιστώνουμε ότι η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου και του μοναδιαίου τετραγώνου είναι ευθύγραμμα τμήματα του \mathbb{R}^2 , υποσύνολα της ευθείας $\text{Im}f_B$.

ParametricPlot[{{Cos[t], Sin[t]}, B.{Cos[t], Sin[t]}}, {t, 0, 2Pi}]



Σχήμα 9.13: Η εικόνα του μοναδιαίου κύκλου.

ParametricPlot[{s * e1 + t * e2, B.(s * e1 + t * e2)}, {s, 0, 1}, {t, 0, 1}]



Σχήμα 9.14: Η εικόνα του μοναδιαίου τετραγώνου.

Μελετάμε, τέλος, τη γραμμική συνάρτηση $f_M : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f_M(u) = M \cdot u$, $u \in \mathbb{R}^3$, που ορίζει ο πίνακας

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

MatrixForm[$M = \{\{-1, 1, 3\}, \{0, 1, 2\}, \{1, 0, -1\}\}$]

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Επαληθεύουμε και στην περίπτωση αυτή ότι οι στήλες του πίνακα M είναι οι πίνακες συντεταγμένων των εικόνων των στοιχείων της κανονικής βάσης $\{E_1, E_2, E_3\}$ του \mathbb{R}^3 .

E1 = {1, 0, 0}; E2 = {0, 1, 0}; E3 = {0, 0, 1}; {M.E1, M.E2, M.E3}

$\{\{-1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}, \{3, 2, -1\}\}$

Φέρνουμε τον πίνακα M σε ε.κ.μ.γ.

MatrixForm[**RowReduce**[M]]

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Βλέπουμε ότι $\text{rank}(M) = 2 \neq 3$, επομένως η f_M δεν είναι συνάρτηση 1-1 ή επί. Υπολογίζουμε τον πυρήνα της f_M .

NullSpace[M]

$\{\{1, -2, 1\}\}$

Ο πυρήνας $\text{Ker } f_M = \{k(1, -2, 1) : k \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, -2, 1)\}$ είναι μία ευθεία του \mathbb{R}^3 . Επίσης, από την τρίτη στήλη της ε.κ.μ.γ. του πίνακα M συμπεραίνουμε ότι

$$f_M(E_3) = -f_M(E_1) + 2f_M(E_2)$$

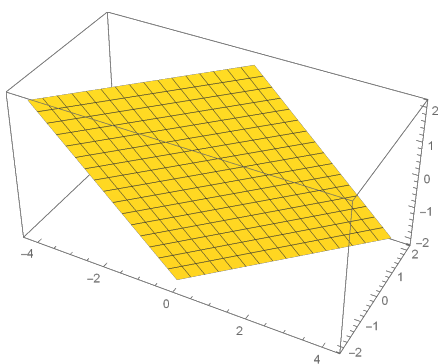
και η εικόνα

$$\text{Im } f_M = \text{span}\{f_M(E_1), f_M(E_2)\} = \text{span}\{(-1, 0, 1), (1, 1, 0)\},$$

είναι ένα επίπεδο του \mathbb{R}^3 . Στο Σχήμα 9.15 αναπαριστούμε γραφικά ένα μέρος του επιπέδου $\text{Im } f_M$, το υποσύνολο

$$\text{Im1} = \{s f_M(E_1) + t f_M(E_2) : -2 \leq s, t \leq 2\} \subset \text{Im } f_M.$$

Im1 = ParametricPlot3D[$s * M.E1 + t * M.E2, \{s, -2, 2\}, \{t, -2, 2\}$]

Σχήμα 9.15: Το επίπεδο $\text{Im}f_M$.

Θα βρούμε την εξίσωση του επιπέδου $\text{Im}f_M$. Το $w = (a, b, c)$ ανήκει στην εικόνα $\text{Im}f_M$, αν και μόνο αν είναι συμβατό το γραμμικό σύστημα $MX = [w]$. Εφαρμόζουμε την τεχνική που παρουσιάσαμε στην υποενότητα «Συμβατότητα Γραμμικών Συστημάτων» της ενότητας 7.7 για να βρούμε τη συνθήκη που πρέπει να πληρούν τα a, b, c , ώστε το σύστημα $MX = [w]$ να είναι συμβατό.

```
MIw = ArrayFlatten[{{M, IdentityMatrix[3], Transpose[{{a, b, c}}]}}];
```

```
{MatrixForm[MIw], MatrixForm[RowReduce[MIw]]}
```

$$\left\{ \left(\begin{array}{cccccc|c} -1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & c \end{array} \right), \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & a - b + c \end{array} \right) \right\}$$

Συμπεραίνουμε ότι $(a, b, c) \in \text{Im}f_M$, αν και μόνο αν $a - b + c = 0$ και

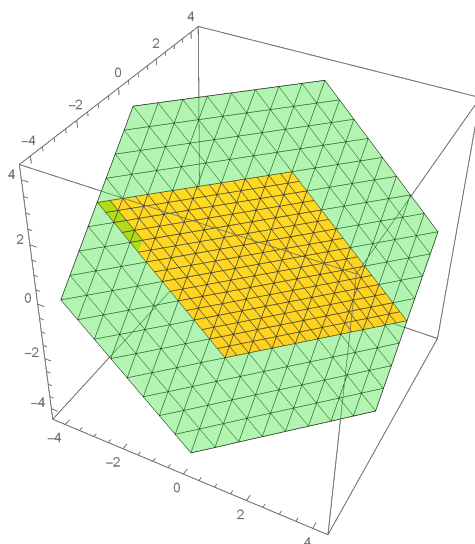
$$\text{Im}f_M = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - b + c = 0\}.$$

Ονομάζουμε $\text{Im}2$ το παρακάτω υποσύνολο του επιπέδου $a - b + c = 0$:

$$\text{Im}2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - b + c = 0, -4 \leq a, b, c \leq 4\} \subset \text{Im}f_M$$

και στο Σχήμα 9.16 παρουσιάζουμε ταυτόχρονα τα γραφήματα των $\text{Im}1, \text{Im}2$. Χρησιμοποιούμε την εντολή **Opacity** για να καθορίσουμε το μέγεθος της διαφάνειας ενός σχήματος.

```
Im2 = ContourPlot3D[a - b + c == 0, {a, -4, 4}, {b, -4, 4}, {c, -4, 4}, ContourStyle ->  
{Green, Opacity[0.3]}; Show[Im1, Im2]
```

Σχήμα 9.16: Η εικόνα της f_M .

Αναπαριστούμε, τέλος, γραφικά στο Σχήμα 9.17 τη μοναδιαία σφαίρα

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} = \\ = \{(\sin r \cdot \cos t, \sin r \cdot \sin t, \cos r) : t \in [0, 2\pi), r \in [-\pi/2, \pi/2]\}$$

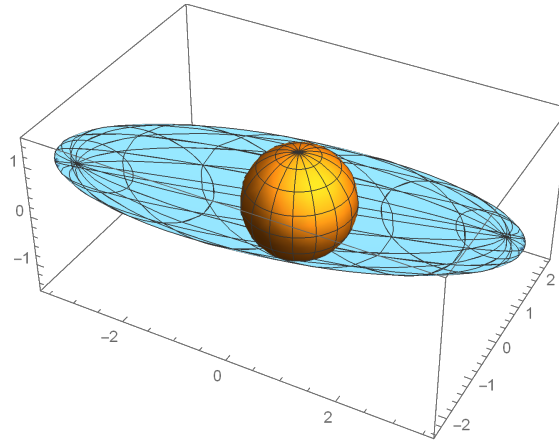
και την εικόνα της

$$f_M(S) = \{f_M(s) : s \in S\} = \{A \cdot s : s \in S\},$$

για την οποία διαπιστώνουμε στο Σχήμα 9.18 γραφικά, με την εντολή `Show[Im2, S]`, ότι

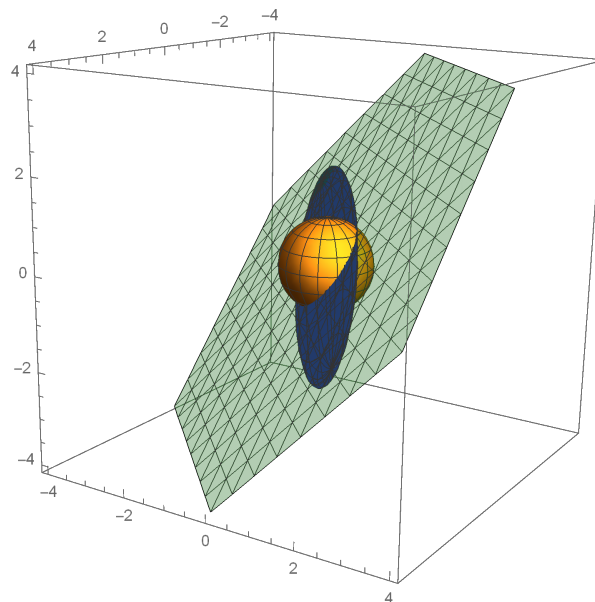
$$f_M(C) \subset \text{Im}2 \subset \text{Im}f_M.$$

`S = ParametricPlot3D[{{Sin[r] * Cos[t], Sin[r] * Sin[t], Cos[r]},
M.{Sin[r] * Cos[t], Sin[r] * Sin[t], Cos[r]}}, {t, 0, 2Pi}, {r, -Pi/2, 3Pi/2}]`



Σχήμα 9.17: Η μοναδιαία σφαίρα και η εικόνα της.

`Show[Im2, S]`



Σχήμα 9.18: Η εικόνα της μοναδιαίας σφαίρας και η $\text{Im}f_M$.

Εξάσκηση με το Mathematica

1. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Να βρείτε τις γραμμικές συναρτήσεις $f_A, f_B, f_{A^T}, f_{B^T}$, που ορίζουν οι πίνακες A, B, A^T, B^T και να υπολογίσετε τον πυρήνα και την εικόνα τους.

ii) Να κάνετε το ίδιο για τις γραμμικές συναρτήσεις

$$f_A + f_B, \quad 3f_{A^T} - 2f_{B^T}, \quad f_A \circ f_{A^T}, \quad f_{A^T} \circ f_A, \quad f_B \circ f_{B^T}, \quad f_{B^T} \circ f_B.$$

iii) Να αναπαραστήσετε γραφικά στο ίδιο σχήμα τον μοναδιαίο κύκλο και την εικόνα του μέσω των συναρτήσεων $f_A \circ f_{A^T}$ και $f_B \circ f_{B^T}$. Επαναλάβετε για το μοναδιαίο τετράγωνο και την εικόνα του.

iv) Να αναπαραστήσετε γραφικά την εικόνα της μοναδιαίας σφαίρας στον \mathbb{R}^2 για τις συναρτήσεις f_A και f_B και στον \mathbb{R}^3 για τη συνάρτηση $f_{A^T} \circ f_A$.

2. i) Να βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα των γραμμικών συναρτήσεων που ορίζουν οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Να διαπιστώσετε ότι οι πυρήνες είναι ευθείες, ενώ οι εικόνες είναι επίπεδα του \mathbb{R}^3 . Να αναπαραστήσετε γραφικά χρησιμοποιώντας την εντολή **ParametricPlot3D**.

ii) Να βρείτε την εξίσωση των επιπέδων $\text{Im} f_A, \text{Im} f_B$ και να τα αναπαραστήσετε γραφικά χρησιμοποιώντας τώρα την εντολή **ContourPlot3D**.

9.5 Ασκήσεις

Λυμένες Ασκήσεις

9.5.1 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

i) Να βρείτε η γραμμική συνάρτηση f_A που ορίζει ο πίνακας A .

ii) Να υπολογίσετε τον πυρήνα $\text{Ker} f_A$.

iii) Να αποδείξετε ότι το στοιχείο $w_1 = (4, 1, 1)$ ανήκει στην εικόνα $\text{Im} f_A$, ενώ το $w_2 = (4, 1, -1)$ δεν ανήκει στην $\text{Im} f_A$. Να βρείτε όλα τα στοιχεία του \mathbb{R}^3 που έχουν εικόνα το w_1 .

iv) Να βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να πληρούν τα $x, y, z \in \mathbb{R}$, ώστε

$$w = (x, y, z) \in \text{Im} f_A.$$

Λύση. i) Έστω $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, τότε

$$A[v] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \end{bmatrix},$$

επομένως

$$f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \text{με} \quad f_A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3, x_1 + x_2 - x_3, -2x_1 - 3x_2 + 5x_3).$$

ii) Ο πυρήνας είναι το σύνολο λύσεων $\text{null}(A)$ του ομογενούς συστήματος $AX = 0_{3 \times 1}$. Φέρνουμε τον πίνακα A σε ε.κ.μ. R :

$$A \xrightarrow[\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_1]{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 3\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\text{rank}(A) = 2$. Έχουμε

$$AX = 0_{3 \times 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases},$$

άρα

$$\text{Ker} f_A = \{(-2x_3, 3x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-2, 3, 1)\},$$

ο πυρήνας της f_A είναι μία ευθεία του \mathbb{R}^3 , ο φορέας του στοιχείου $(-2, 3, 1)$.

iii)-iv) Έστω $w = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Ισχύουν οι παρακάτω ισοδυναμίες

$$\begin{aligned} w \in \text{Im} f_A &\Leftrightarrow \exists v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \text{ με } f_A(v) = w \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^3, \text{ με } [f_A(v)] = A[v] = [w] \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \text{το } 3 \times 3\text{-γραμμικό σύστημα } A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [w] \text{ έχει λύση} \Leftrightarrow \text{rank}([A \mid w]) = \text{rank}(A).$$

Υπολογίζουμε τη βαθμίδα του επαυξημένου πίνακα

$$\begin{aligned} [A \mid w] &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 1 & 1 & -1 & y \\ -2 & -3 & 5 & z \end{array} \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & y-x \\ 0 & -3 & 9 & z+2x \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x \\ 0 & 1 & -3 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & -x+3y+z \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι $\text{rank}([A \mid w]) = \text{rank}(A) = 2 \Leftrightarrow -x+3y+z = 0$, δηλαδή

$$w = (x, y, z) \in \text{Im} f_A \Leftrightarrow -x+3y+z = 0$$

και η εικόνα της f_A είναι το επίπεδο του \mathbb{R}^3 με εξίσωση $-x+3y+z = 0$. Παρατηρούμε ότι

$$-4+3 \cdot 1+1=0 \Rightarrow w_1 = (4, 1, 1) \in \text{Im} f_A, \quad -4+3 \cdot 1-1 \neq 0 \Rightarrow w_2 = (4, 1, -1) \notin \text{Im} f_A.$$

Βρίσκουμε τέλος όλα τα στοιχεία $v = (x_1, x_2, x_3)$ του πεδίου ορισμού \mathbb{R}^3 που έχουν εικόνα το στοιχείο $w_1 = (4, 1, 1)$ λύνοντας το 3×3 -γραμμικό σύστημα $AX = [w_1]$. Έχουμε

$$[A \mid w_1] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 5 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \dots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

έτσι

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [w_1] \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 4 \\ x_2 - 3x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 2x_3 \\ x_2 = -3 + 3x_3 \end{cases},$$

και $f_A(4-2x_3, -3+3x_3, x_3) = (4, 1, 1)$, $\forall x_3 \in \mathbb{R}$. Αν θέσουμε $v_1 = (4, -3, 0)$, τότε

$$f_A(v_1 + \eta) = w_1, \quad \forall \eta = (-2x_3, 3x_3, x_3) \in \text{Ker} f_A. \quad \square$$

9.5.2 Να αποδείξετε ότι τα στοιχεία

$$v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (-1, 1, 1), \quad v_3 = (2, -1, -1)$$

του \mathbb{R}^3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα και να βρείτε 2×3 -πίνακα $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$, αν για τη γραμμική συνάρτηση $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζει ισχύουν

$$f_A(v_1) = (2, -3), \quad f_A(v_2) = (-3, 6), \quad f_A(v_3) = (4, -8).$$

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$\det([v_1|v_2|v_3]) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \neq 0,$$

επομένως το σύνολο $\{v_1, v_2, v_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Γράφουμε το τυχαίο στοιχείο $u = (x, y, z)$ του πεδίου ορισμού \mathbb{R}^3 της f_A ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων v_1, v_2, v_3 που γνωρίζουμε την εικόνα τους. Αρκεί να φέρουμε σε ε.κ.μ.γ. R τον 3×4 -πίνακα συντεταγμένων των v_1, v_2, v_3, u :

$$[v_1|v_2|v_3|u] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 & y \\ -1 & 1 & -1 & z \end{array} \right] \rightarrow \cdots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y-z \\ 0 & 1 & 0 & x+y+z \\ 0 & 0 & 1 & x+z \end{array} \right] = R.$$

Για τη στήλη $[u]$ έχουμε:

$$\begin{aligned} [u] &= (y-z)[v_1] + (x+y+z)[v_2] + (x+z)[v_3] \Rightarrow \\ &\Rightarrow u = (y-z) \cdot v_1 + (x+y+z) \cdot v_2 + (x+z) \cdot v_3. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (iii) της Πρότασης 9.1.0.3 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} f_A(u) &= f_A[(y-z) \cdot v_1 + (x+y+z) \cdot v_2 + (x+z) \cdot v_3] \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_A(u) = (y-z) \cdot f_A(v_1) + (x+y+z) \cdot f_A(v_2) + (x+z) \cdot f_A(v_3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_A(x, y, z) = (y-z) \cdot (2, -3) + (x+y+z) \cdot (-3, 6) + (x+z) \cdot (4, -8) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_A(x, y, z) = (2y-2z, -3y+3z) + (-3x-3y-3z, 6x+6y+6z) + (4x+4z, -8x-8z) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_A(x, y, z) = (x-y-z, -2x+3y+z). \end{aligned}$$

Βρήκαμε λοιπόν τον τύπο της f_A . Υπολογίζουμε τις εικόνες των στοιχείων e_1, e_2, e_3 της κανονικής βάσης του \mathbb{R}^3 :

- $f_A(e_1) = f_A(1, 0, 0) = (1, -2) \Rightarrow$ η 1η στήλη του A είναι η $[f_A(e_1)] = [1 \ -2]^T$,
- $f_A(e_2) = f_A(0, 1, 0) = (-1, 3) \Rightarrow$ η 2η στήλη του A είναι η $[f_A(e_2)] = [-1 \ 3]^T$,
- $f_A(e_3) = f_A(0, 0, 1) = (-1, 1) \Rightarrow$ η 3η στήλη του A είναι η $[f_A(e_3)] = [-1 \ 1]^T$.

Έτσι

$$A = [f_A(e_1) \ \vdots \ f_A(e_2) \ \vdots \ f_A(e_3)] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

9.5.3 Να βρεθεί η συνάρτηση του \mathbb{R}^2 που

- i) πρώτα προβάλλει κάθε στοιχείο του \mathbb{R}^2 στην ευθεία $\varepsilon : y = x$ και μετά το περιστρέφει δεξιόστροφα κατά γωνία $\pi/4$,
- ii) πρώτα περιστρέφει δεξιόστροφα κάθε στοιχείο του \mathbb{R}^2 κατά γωνία $\pi/4$ και έπειτα το προβάλλει στην ευθεία ε .

Λύση. Η συνάρτηση που προβάλλει τα στοιχεία του \mathbb{R}^2 στην ευθεία ε είναι η γραμμική συνάρτηση $p_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζει ο πίνακας

$$P_\varepsilon = \frac{1}{1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η συνάρτηση που περιστρέφει δεξιόστροφα τα στοιχεία του \mathbb{R}^2 κατά γωνία $\pi/4$ είναι η γραμμική συνάρτηση $\phi_{-\pi/4} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζει ο πίνακας

$$A_{-\pi/4} = \begin{pmatrix} \cos(-\pi/4) & -\sin(-\pi/4) \\ \sin(-\pi/4) & \cos(-\pi/4) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Η ζητούμενη συνάρτηση $\phi_{-\pi/4} \circ p_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ορίζεται από τον πίνακα

$$A_{-\pi/4} P_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

έτσι

$$\phi_{-\pi/4} \circ p_\varepsilon(x, y) = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

ii) Η ζητούμενη συνάρτηση $p_\varepsilon \circ \phi_{-\pi/4} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ορίζεται από τον πίνακα

$$P_\varepsilon A_{-\pi/4} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

άρα

$$p_\varepsilon \circ \phi_{-\pi/4}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (y, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad \square$$

9.5.4 Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

i) Να βρείτε η γραμμική συνάρτηση $f = f_A$ που ορίζει ο πίνακας A και να υπολογίσετε τον πυρήνα και την εικόνα της.

ii) Να υπολογίσετε τις εικόνες των επιπέδων $q : y - z = 0$, $s : x + 2y + 3z = 1$ και του μοναδιαίου κύβου του \mathbb{R}^3 ,

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x, y, z \leq 1\}.$$

Λύση. i) Έστω $\{e_1, e_2, e_3\}$ η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 και $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Έχουμε

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (x+2y+3z, -x-2y-3z, 2x+4y+6z).$$

Φέρνουμε τον πίνακα A σε ε.κ.μ.γ.,

$$A = [f(e_1)|f(e_2)|f(e_3)] \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Συμπεραίνουμε ότι $f(e_2) = 2f(e_1)$, $f(e_3) = 3f(e_1)$, ενώ

$$AX = 0_{3 \times 1} \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0.$$

Έτσι ο πυρήνας της f είναι το επίπεδο $p : x + 2y + 3z = 0$,

$$\text{Ker } f = \{(-2y - 3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \operatorname{span}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \{x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x+2y+3z) \cdot f(e_1) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{\kappa f(e_1) : \kappa \in \mathbb{R}\} = \\ &= \operatorname{span}\{f(e_1)\} = \operatorname{span}\{(1, -1, 2)\}. \end{aligned}$$

Η εικόνα της f είναι μία ευθεία του \mathbb{R}^3 , ο φορέας του στοιχείου $f(e_1)$.

ii) Έχουμε

$$q = \{(x, z, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 0) + z(0, 1, 1) : x, z \in \mathbb{R}\},$$

επομένως,

$$\begin{aligned} f(q) &= \{x f(1, 0, 0) + z f(0, 1, 1) : x, z \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -1, 2) + z(5, -5, 10) : x, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(x+5z) \cdot (1, -1, 2) : x, z \in \mathbb{R}\} = \{\kappa(1, -1, 2) : \kappa \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{(1, -1, 2)\} = \operatorname{Im} f, \end{aligned}$$

η εικόνα του επιπέδου q είναι η ευθεία $\operatorname{Im} f$. Επίσης,

$$s = \{(1-2y-3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{(1, 0, 0) + y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\}$$

και

$$\begin{aligned} f(s) &= \{f(1, 0, 0) + y f(-2, 1, 0) + z f(-3, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{(1, -1, 2) + y(0, 0, 0) + z(0, 0, 0) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{(1, -1, 2)\}, \end{aligned}$$

η εικόνα του επιπέδου s είναι το σημείο $M(1, -1, 2)$ του \mathbb{R}^3 . Τέλος,

$$\begin{aligned} f(C) &= \{x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) : 0 \leq x, y, z \leq 1\} = \\ &= \{(x+2y+3z) \cdot f(e_1) : 0 \leq x, y, z \leq 1\} = \{\kappa f(e_1) : 0 \leq \kappa \leq 6\}, \end{aligned}$$

η εικόνα του μοναδιαίου κύβου C είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα την αρχή των αξόνων και το σημείο $(6, -6, 12)$. \square

Στα Παραδείγματα 9.1.0.7 i και iii διαπιστώσαμε ότι ο πίνακας A_θ που ορίζει την αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία θ είναι ένας ορθογώνιος πίνακας του $M_2(\mathbb{R})$ με $|A_\theta| = 1$, ενώ ο πίνακας A_ε που ορίζει τον αντικατοπτρισμό σε ευθεία ε του \mathbb{R}^2 , που διέρχεται από την αρχή των αξόνων είναι ένας ορθογώνιος πίνακας του $M_2(\mathbb{R})$ με $|A_\varepsilon| = -1$. Στην επόμενη Άσκηση αποδεικνύουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ένας ορθογώνιος πίνακας του $M_2(\mathbb{R})$ με ορίζουσα 1 (αντίστοιχα -1) είναι περιστροφή (αντίστοιχα αντικατοπτρισμός) του \mathbb{R}^2 . Έτσι, αν $A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{R})$ είναι οι πίνακες που ορίζουν περιστροφή ή αντικατοπτρισμό του \mathbb{R}^2 , η σύνθεσή τους είναι η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο ορθογώνιος πίνακας $A_1 A_2$. Η σύνθεση είναι περιστροφή, αν $|A_1 A_2| = |A_1| |A_2| = 1$ ή αντικατοπτρισμός, αν $|A_1 A_2| = -1$. Για παράδειγμα, η σύνθεση δύο αντικατοπτρισμών είναι περιστροφή, βλ. Σχήμα 9.19.

9.5.5 Να αποδείξετε ότι η γραμμική συνάρτηση $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζει ένας ορθογώνιος πίνακας $A \in M_2(\mathbb{R})$ είναι περιστροφή ή αντικατοπτρισμός.

Λύση. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Αν ο A είναι ορθογώνιος, τότε $|A| = \pm 1$ (βλ. Λυμένη Άσκηση 6.7.11) και

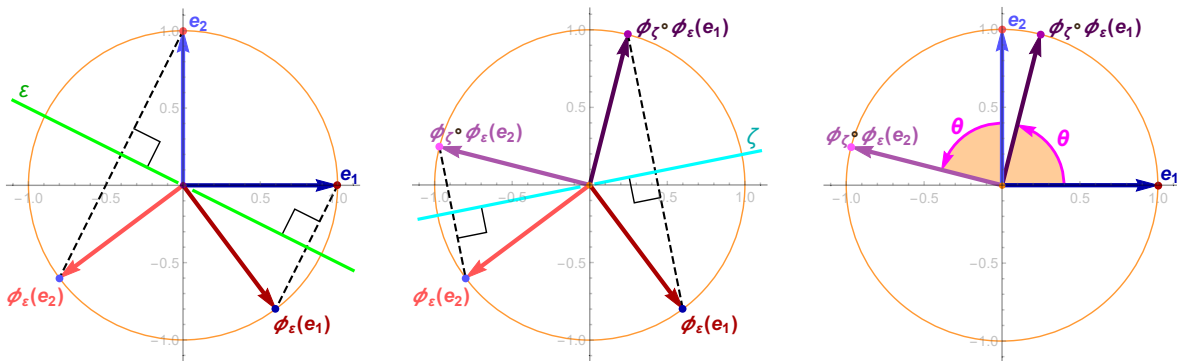
$$\begin{aligned} A^T = A^{-1} &\Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d = a, b = -c, \text{ αν } |A| = 1, \quad \text{ή} \quad d = -a, b = c, \text{ αν } |A| = -1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}, \quad \mu\epsilon \quad a^2 + c^2 = 1,$$

επομένως $\exists \theta \in [0, 2\pi)$, με $a = \cos \theta$, $c = \sin \theta$ και ο A γίνεται

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Στην πρώτη περίπτωση, η γραμμική συνάρτηση $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζει ο πίνακας A είναι αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία θ , ενώ στη δεύτερη περίπτωση είναι αντικατοπτρισμός ως προς την ευθεία $\varepsilon : y = \tan(\theta/2) \cdot x$. \square



Σχήμα 9.19: Η σύνθεση δύο αντικατοπτρισμών είναι περιστροφή.

Ασκήσεις για Εξάσκηση

9.5.1 Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Να βρεθούν οι γραμμικές συναρτήσεις $f_A, f_{A^T}, f_B, f_{B^T}$ που ορίζουν αντίστοιχα οι πίνακες A, A^T, B, B^T , καθώς και οι τύποι των γραμμικών συναρτήσεων

$$f_A \circ f_{A^T}, \quad f_{A^T} \circ f_A, \quad f_{B^T} \circ f_B, \quad 3 \cdot f_A + 2 \cdot f_{A^T}, \quad f_A + f_B \circ f_{B^T}.$$

9.5.2 Να βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα των γραμμικών συναρτήσεων f_A και f_B που ορίζουν αντίστοιχα οι παρακάτω πίνακες του $M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

9.5.3 Έστω $v_1 = (1, 1), v_2 = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$. Να βρεθεί πίνακας $A \in M_2(\mathbb{R})$, αν για τη γραμμική συνάρτηση $f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζει ισχύει $f_A(v_1) = 2 \cdot v_1, f_A(v_2) = -v_2$.

9.5.4 Να βρείτε τη γραμμική συνάρτηση f_A που ορίζει ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Επίσης, να δείξετε ότι για κάθε $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ υπάρχει μοναδικό $u \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο, ώστε $f_A(u) = w$, το οποίο και να υπολογίσετε. Τέλος, να δείξετε ότι η συνάρτηση f_A αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f_A^{-1} .

9.5.5 Δίνεται η κανονική βάση $\{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ του \mathbb{R}^3 και ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Να βρείτε τη γραμμική συνάρτηση f_A που ορίζει ο πίνακας A και να αποδείξετε ότι είναι συνάρτηση 1 – 1 και επί.

ii) Να βρείτε στοιχεία $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ τέτοια, ώστε

$$f_A(v_1) = e_1, \quad f_A(v_2) = e_2, \quad f_A(v_3) = e_3.$$

iii) Να υπολογίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f_A^{-1} της f_A .

9.5.6 Αφού βρείτε τον τύπο, τον πυρήνα και την εικόνα της γραμμικής συνάρτησης f_A που ορίζει ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix},$$

να υπολογίσετε τις εικόνες των ευθειών $\varepsilon : x + 3y = 2$ και $\zeta : 2x + 3y = 2$ του \mathbb{R}^2 .

9.5.7 Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

i) Να βρεθεί η γραμμική συνάρτηση f_A που ορίζει ο πίνακας A και να υπολογιστεί ο πυρήνας της $\text{Ker} f_A$.

ii) Να δοθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα στοιχείο (a, b, c) του \mathbb{R}^3 να ανήκει στην εικόνα $\text{Im} f_A$.

iii) Να βρεθεί $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο, ώστε $f_A(x, y, z) = (2, 3, 5)$.

iv) Να βρεθεί η εικόνα των επιπέδων $p : x - y + z = 0$ και $q : x + y + z = 1$ του \mathbb{R}^3 .

v) Να βρεθεί η εικόνα του άξονα $y'y$ καθώς και της τομής του επιπέδου q με το επίπεδο $r : y - 2z = 1$.

9.5.8 Έστω f_A η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}).$$

i) Να ορίσετε τη συνάρτηση f_A .

ii) Να αποδείξετε ότι η f_A δεν είναι συνάρτηση 1 – 1, αλλά είναι συνάρτηση επί.

iii) Να βρείτε την εικόνα των επιπέδων $p : x + 2z = 0$ και $q : y - z = 2$ του \mathbb{R}^3 .

iv) Να βρείτε την εικόνα των παρακάτω ευθειών του \mathbb{R}^3

$$\varepsilon_1 : \text{span}\{(1, 2, 1)\}, \quad \varepsilon_2 : \{(1, 2, 1) + \kappa(2, 1, 1) : \kappa \in \mathbb{R}\}.$$

9.5.9 Να βρεθούν οι συναρτήσεις του \mathbb{R}^2 που περιστρέφουν αριστερόστροφα και δεξιόστροφα κάθε στοιχείο του \mathbb{R}^2 κατά γωνία $2\pi/3$.

9.5.10 Να βρείτε την προβολή M' του σημείου $M(1, 5)$ του \mathbb{R}^2 στην ευθεία $\varepsilon : y = -2x$ και το συμμετρικό του M'' ως προς την ευθεία ε .

9.5.11 Να βρεθεί η συνάρτηση του \mathbb{R}^2 που

i) πρώτα προβάλλει κάθε στοιχείο του \mathbb{R}^2 στην ευθεία $\varepsilon : y = 2x$ και μετά το αντικατοπτρίζει στην ευθεία $\zeta : y = \frac{1}{2}x$,

ii) πρώτα αντικατοπτρίζει κάθε στοιχείο του \mathbb{R}^2 στην ευθεία ζ και έπειτα το προβάλλει στην ευθεία ε .

Βιβλιογραφία

- [1] Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Βαβατσούλας και Χ. Χαραλάμπους. *Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2017. ISBN: 978-960-418-727-0.
- [2] S. Gilbert. *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*. Κρήτη: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1993. ISBN: 978-960-730-970-9.
- [3] Αθ. Πάπιστας, *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2019. ISBN: 978-960-418-841-3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγονται οι έννοιες της ιδιοτιμής, του ιδιοδιανύσματος και του ιδιοχώρου τετραγωνικού πίνακα. Δίνεται έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των εννοιών αυτών στην περίπτωση 2×2 και 3×3 πινάκων. Μελετάται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο πίνακα και αναπτύσσεται ο αλγόριθμος υπολογισμού των ιδιοχώρων πίνακα. Εξετάζεται πότε η διαγωνιοποίηση 2×2 και 3×3 πινάκων είναι εφικτή και δίνονται εφαρμογές. Το κεφάλαιο περιλαμβάνει μία ενότητα «Εργαστήριο με Mathematica» που επιτρέπει τον πειραματισμό πάνω στις έννοιες που αναπτύχθηκαν και βοηθάει στην εμπέδωση των θεμάτων που έχουν προηγηθεί. Το κεφάλαιο κλείνει με μια ενότητα ασκήσεων πάνω στη θεωρία που αναπτύχθηκε. Παραπέμπουμε στα βιβλία [1], [2], [3], [4] για τη γενίκευση των όσων κάνουμε σε αφηρημένους διανυσματικούς χώρους.

Προαπαιτούμενη γνώση: Κεφάλαια 2 έως 9.

10.1 Ιδιοτιμές, Ιδιοδιανύσματα

10.1.1 Βασικοί Ορισμοί

Έστω ο $n \times n$ -πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$. Μας ενδιαφέρει να βρούμε, αν υπάρχουν, τα μη μηδενικά διανύσματα του \mathbb{R}^n που απεικονίζονται σε πολλαπλάσια του εαυτού τους, όταν πολλαπλασιάσουμε με τον A . Έστω, λοιπόν, ότι $0_{\mathbb{R}^n} \neq u = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ και ότι $A \cdot u = \lambda u$, για κάποιο λ του \mathbb{R} . Τότε το λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του πίνακα A , ενώ το u ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Αν, λοιπόν, το $u = (a_1, \dots, a_n)$ είναι

ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ , τότε ισχύει ότι

$$A \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Το σύνολο όλων των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ , μαζί με το $0_{\mathbb{R}^n}$, λέγεται **ιδιοχώρος της ιδιοτιμής λ** και συμβολίζεται με $V_A(\lambda)$:

$$V_A(\lambda) = \left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n : A \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα A , αν υπάρχουν, θα χρειαστεί να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα $A - xI_n$. Η ορίζουσα $\det(A - xI_n)$ ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** του πίνακα A και συμβολίζεται με $P_A(x)$. Σημειώνουμε ότι αν $A = (a_{ij})$, τότε

$$P_A(x) = |A - xI_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

Έστω $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, η γραμμική συνάρτηση που ορίζεται από τον A . Θα λέμε ότι $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^n$, $P(x)$ είναι ιδιοτιμή, ιδιοδιάνυσμα, χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f_A αν λ , u , $P(x)$ είναι, αντίστοιχα, ιδιοτιμή, ιδιοδιάνυσμα, χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A . Παίρνοντας την ανάπτυξη της ορίζουσας $|A - xI_n|$, βλέπουμε, ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x)$, είναι πράγματι πολυώνυμο του x με πραγματικούς συντελεστές, έχει βαθμό n και ο μεγιστοβάθμιος όρος του είναι ίσος με $(-1)^n x^n$.

Παραδείγματα 10.1.1.1

i. Η μοναδική ιδιοτιμή του I_n είναι το 1. Πράγματι, για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$I_n \cdot v = v \Rightarrow \mathbb{R}^n = V_{I_n}(1).$$

Έτσι, η ταυτοτική συνάρτηση έχει ιδιοχώρο όλο το \mathbb{R}^n .

ii. Η μοναδική ιδιοτιμή του μηδενικού πίνακα 0_n είναι το 0. Η μηδενική συνάρτηση έχει ιδιοχώρο όλο το \mathbb{R}^n :

$$0_n \cdot v = 0_{\mathbb{R}^n} = 0v \Rightarrow \mathbb{R}^n = V_{0_n}(0).$$

iii. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή για τη συνάρτηση f_A , αν και μόνο αν η συνάρτηση f_A δεν είναι 1-1. Τα ιδιοδιανύσματα για την τιμή $\lambda = 0$ είναι τα μη μηδενικά διανύσματα του $\text{Ker } f_A = \text{null}(A)$. Πράγματι, αν $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, τότε

$$f_A(v) = A \cdot v = 0v = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow v \in \text{Ker } f_A.$$

iv. Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση

$$f_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_A(x, y) = (-y, -2x + y),$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$, που ορίζει ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Έστω $w = (1, -2)$. Τότε

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow f_A(w) = 2w.$$

Επομένως, το w είναι ιδιοδιάνυσμα του A (και της f_A) για την ιδιοτιμή 2. Επιπλέον,

$$P_A(x) = |A - xI_n| = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ -2 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - x - 2.$$

Παρατηρούμε ότι ο φορέας του w ταυτίζεται με την εικόνα του, δηλ. ο φορέας του w παραμένει «αναλλοίωτος» μετά τη δράση της γραμμικής συνάρτησης f_A . Με αυτό εννοούμε ότι η εικόνα του φορέα μέσω της f_A είναι υποσύνολο του φορέα. Πράγματι, ο φορέας του w είναι η ευθεία $\zeta = \text{span}\{w\}$. Ας υπολογίσουμε, λοιπόν, την εικόνα της ζ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} \zeta = \text{span}\{w\} &= \{\kappa w : \kappa \in \mathbb{R}\} \Rightarrow f_A(\zeta) = \{f_A(\kappa w) : \kappa \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{\kappa f_A(w) : \kappa \in \mathbb{R}\} = \{2\kappa w : \kappa \in \mathbb{R}\} = \{\mu w : \mu \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{w\}. \end{aligned}$$

Μπορείτε, με τον ίδιο τρόπο, να επιβεβαιώσετε ότι $w' = (1, 1)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή -1 και ο φορέας του w' (δηλ. η ευθεία $\zeta' = \text{span}\{w'\}$) παραμένει αναλλοίωτος (βλ. Σχήμα 10.1), αφού

$$A \cdot w' = -1 \cdot w'.$$

Ίσως να παρατηρήσατε ότι οι ιδιοτιμές 2, -1 είναι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P_A(x)$. Πώς συνδέονται λοιπόν οι ρίζες του $P_A(x)$ με τα ιδιοδιανύσματα του A και πώς μπορούμε να τα υπολογίσουμε; Θέλουμε να βρούμε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$, έτσι ώστε

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - \lambda I_2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (A - \lambda I_2) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Για να έχει, όμως, το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I_2)X = 0_{2 \times 1}$ μη μηδενική λύση ικανή και αναγκαία συνθήκη είναι η ορίζουσα του πίνακα συντελεστών, $|A - \lambda I_2|$, να είναι μηδενική. Επομένως,

$$\begin{aligned} \det \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] &= \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -1. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, υπάρχουν ακριβώς δύο ιδιοτιμές για τον A , $\lambda = 2$ ή $\lambda = -1$. Ας βρούμε, τώρα, όλα τα ιδιοδιανύσματα του A .

Για $\lambda = 2$ λύνουμε το σύστημα $(A - 2I_2)X = 0_{2 \times 1}$ φέρνοντας τον αντίστοιχο πίνακα συντελεστών σε ε.κ.μ.γ.. Αφού

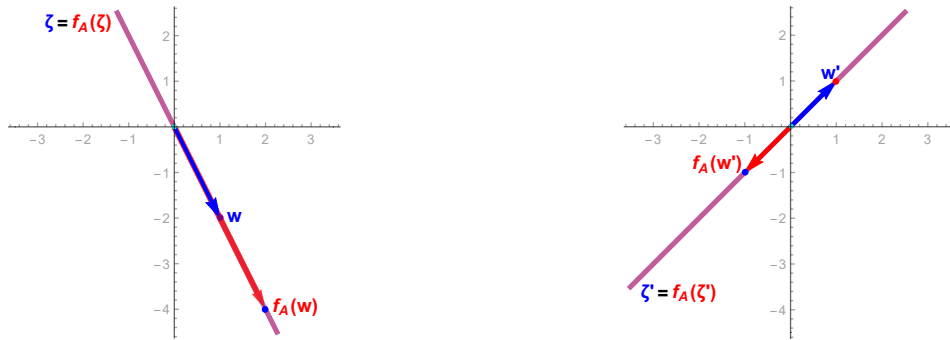
$$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

βλέπουμε ότι

$$\text{null}(A - 2I_2) = \{(x_1, -2x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, -2)\}.$$

Αντίστοιχα, αφού

$$A + I_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$



Σχήμα 10.1: Οι ευθείες ζ και ζ' ταυτίζονται με τις εικόνες τους.

έχουμε ότι

$$\text{null}(A + I_2) = \{(x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 1)\}.$$

Άρα

$$V_A(2) = \text{span}\{(1, -2)\}, \quad V_A(-1) = \text{span}\{(1, 1)\}.$$

Θεωρούμε, τέλος, τον πίνακα με στήλες τα διανύσματα $[w]$, $[w']$,

$$P = [w \mid w'] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $\det(P) = 3 \neq 0$, ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος και

$$P^{-1}AP = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{diag}(2, -1),$$

δηλαδή το γινόμενο $P^{-1}AP$ ισούται με διαγώνιο πίνακα.

Γενικεύουμε τα συμπεράσματα του παραδείγματος για οποιονδήποτε $n \times n$ πίνακα.

Πρόταση 10.1.1.2 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- (i) Το $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A , αν και μόνο αν λ είναι ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P_A(x)$.
- (ii) Αν λ είναι μία ιδιοτιμή του A , τότε ο αντίστοιχος ιδιοχώρος $V_A(\lambda)$ είναι το σύνολο των άπειρων λύσεων του ομογενούς $n \times n$ -γραμμικού συστήματος $(A - \lambda I_n)X = 0_{n \times 1}$, δηλαδή ο $\text{null}(A - \lambda I_n)$. Τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ είναι όλα τα μη μηδενικά στοιχεία του συνόλου $V_A(\lambda)$.
- (iii) Αν w είναι ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή λ , τότε $S = \text{span}\{w\}$ είναι αναλλοίωτος υποχώρος του \mathbb{R}^n υπό τη δράση της f_A , δηλαδή $f_A(S) \subseteq S$.

Απόδειξη. Έστω $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι

$$(A - \lambda I_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

(i) Θα δείξουμε ότι

$$\lambda \text{ ιδιοτιμή του } A \Leftrightarrow P_A(\lambda) = 0.$$

Πράγματι:

λ ρίζα του $P_A(x) = \det(A - xI_n) \Leftrightarrow P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \text{rank}(A - \lambda I_n) < n \Leftrightarrow$
 \Leftrightarrow το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I_n)X = 0_{n \times 1}$ έχει άπειρες λύσεις \Leftrightarrow
 $\Leftrightarrow \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, με $(A - \lambda I_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, με $A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \lambda$ ιδιοτιμή του A .

(ii) Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του ιδιοχώρου.

(iii) Αρκεί να δείξουμε ότι $f_A(\kappa w) \in \text{span}\{w\}$, για $\kappa \in \mathbb{R}$. Πράγματι

$$f_A(\kappa w) = \kappa f_A(w) = \kappa(\lambda w) = (\kappa \lambda)w \in \text{span}\{w\}.$$

Κατά συνέπεια, $f_A(S) \subseteq S$ και επομένως S είναι f_A -αναλλοίωτος υποχώρος του \mathbb{R}^n . ■

Είναι φανερό ότι οι ορισμοί που δώσαμε αλλά και η Πρόταση 10.1.1.2 γενικεύονται σε τετραγωνικούς πίνακες με συντελεστές από οποιοδήποτε σώμα K . Παρόλο που το κύριο ενδιαφέρον μας είναι πίνακες με συντελεστές από τον \mathbb{R} , αναφέρουμε τον αλγόριθμο εύρεσης ιδιοτιμών και ιδιοχώρων για τετραγωνικούς πίνακες με στοιχεία από οποιοδήποτε σώμα K .

Αλγόριθμος εύρεσης Ιδιοτιμών και Ιδιοχώρων πίνακα

Έστω πίνακας $A \in M_n(K)$.

- **Βήμα 1** Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A ,

$$P_A(x) = |A - xI_n|.$$

- **Βήμα 2** Βρίσκουμε τις ρίζες του $P_A(x)$ που ανήκουν στο σώμα K . Οι ρίζες είναι οι ιδιοτιμές του A .
- **Βήμα 3** Αν λ είναι ιδιοτιμή του A , λύνουμε το ομογενές $n \times n$ -γραμμικό σύστημα

$$(A - \lambda I_n)X = 0_{n \times 1}.$$

Ο $V_A(\lambda)$ είναι το σύνολο των άπειρων λύσεων του συστήματος, δηλαδή ο μηδενοχώρος του πίνακα $A - \lambda I_n$,

$$V_A(\lambda) = \text{null}(A - \lambda I_n).$$

Παρατηρήσεις 10.1.1.3

- (α) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Όταν δουλεύουμε πάνω από το \mathbb{R} , δεχόμαστε για ιδιοτιμές του A τις πραγματικές ρίζες του πολυωνύμου $P_A(x)$. Ο βαθμός του $P_A(x)$ ισούται με n , έτσι από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας το $P_A(x)$ έχει n μιγαδικές ρίζες και το πλήθος των πραγματικών ριζών του, δηλαδή το πλήθος των ιδιοτιμών του A , δεν μπορεί να ξεπεράσει το n . Για να βρούμε όλους τους ιδιοχώρους του A , χρειάζεται να λύσουμε τόσα ομογενή συστήματα όσες είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A .
- (β) Όταν $A \in M_n(\mathbb{C})$ και δουλεύουμε πάνω από το \mathbb{C} , τότε οι ιδιοτιμές του A είναι όλες οι ρίζες του $P_A(x)$, έτσι ο A έχει ακριβώς n ιδιοτιμές (όχι απαραίτητα διαφορετικές

μεταξύ τους). Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε μία ιδιοτιμή λ είναι στοιχεία του \mathbb{C}^n και $V_A(\lambda) \subseteq \mathbb{C}^n$.

- (γ) Έστω ότι $A \in M_n(\mathbb{R})$ και έστω ότι $P_A(x)$ έχει κάποιες μιγαδικές μη πραγματικές ρίζες. Στην περίπτωση αυτή σημειώνουμε ότι αν $\rho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ είναι μη πραγματική ρίζα του $P_A(x)$, τότε ο συζυγής $\bar{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του $P_A(x)$, βλ. Πρόταση 3.5.0.2. Οι $\rho, \bar{\rho}$ δεν είναι ιδιοτιμές του A όταν δουλεύουμε πάνω από το \mathbb{R} . Ωστόσο, αφού $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $A \in M_n(\mathbb{C})$. Οι $\rho, \bar{\rho}$ είναι ιδιοτιμές του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ όταν δουλεύουμε πάνω από το \mathbb{C} και οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι $V_A(\rho), V_A(\bar{\rho})$ είναι υποσύνολα του \mathbb{C}^n , βλ. Παράδειγμα 10.1.1.4.iii.

Παραδείγματα 10.1.1.4

- i. Θα βρούμε τις ιδιοτιμές και τους ιδιοχώρους του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Υπολογίζουμε αρχικά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα,

$$\begin{aligned} P_A(x) = |A - xI_3| &= \begin{vmatrix} -x & -2 & 1 \\ 1 & -3-x & 1 \\ 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (-1-x) \begin{vmatrix} -x & -2 \\ 1 & -3-x \end{vmatrix} = \\ &= -(x+1)(x^2 + 3x + 2) = -(x+1)^2(x+2). \end{aligned}$$

Το $P_A(x)$ έχει τρεις πραγματικές ρίζες, $-1, -1, -2$ και οι ιδιοτιμές του A είναι οι

- $\lambda = -1$, με πολλαπλότητα 2,
- $\lambda = -2$, με πολλαπλότητα 1.

Βρίσκουμε τον ιδιοχώρο $V_A(-1)$ λύνοντας το ομογενές σύστημα $(A - (-1)I_3)X = 0_{3 \times 1}$. Φέρνουμε τον πίνακα συντελεστών του συστήματος σε ε.κ.μ.γ.,

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $\text{rank}(A + I_3) = 1$,

$$(A + I_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2x_2 - x_3,$$

και ο ιδιοχώρος $V_A(-1)$ είναι το επίπεδο του \mathbb{R}^3 με εξίσωση $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$,

$$\begin{aligned} V_A(-1) &= \text{null}(A + I_3) = \{(2x_2 - x_3, x_2, x_3) : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x_2(2, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1) : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Τα γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία $v_1 = (2, 1, 0), v_2 = (-1, 0, 1)$ του \mathbb{R}^3 είναι δύο ιδιοδιανύσματα του A για την ιδιοτιμή $\lambda = -1$, ενώ οποιοσδήποτε μη μηδενικός γραμμικός συνδυασμός τους $w = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 \in V_A(-1)$, $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$, είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του A για την ιδιοτιμή $\lambda = -1$,

$$A \cdot v_1 = -v_1, \quad A \cdot v_2 = -v_2, \quad A \cdot w = -w.$$

Όμοια λύνουμε το ομογενές σύστημα $(A + 2I_3)X = 0_{3 \times 1}$ για να βρούμε τον ιδιοχώρο $V_A(-2)$,

$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A + 2I_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{array} \right\},$$

$$V_A(-2) = \text{null}(A + 2I_3) = \{(x_2, x_2, 0) : x_2 \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 1, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Ο ιδιοχώρος $V_A(-2)$ είναι η ευθεία $\text{span}\{v_3\}$ του \mathbb{R}^3 , όπου $v_3 = (1, 1, 0)$ και τα ιδιοδιανύσματα του A για την ιδιοτιμή $\lambda = -2$ είναι τα στοιχεία $u = \mu v_3 \in V_A(-2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$,

$$A \cdot v_3 = -2v_3, \quad A \cdot u = -2u.$$

ii. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$P_A(x) = |A - xI_2| = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1$$

δεν έχει ρίζες στο \mathbb{R} , επομένως ο A δεν έχει ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, ιδιοχώρους.

iii. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα στοιχεία του προηγούμενου πίνακα ανήκουν στο \mathbb{C} ,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Τότε

$$P_A(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = i \quad \text{ή} \quad x = -i$$

και ο A έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ιδιοτιμές $\lambda = i, \lambda = -i$. Βρίσκουμε τους αντίστοιχους ιδιοχώρους λύνοντας τα ομογενή συστήματα

$$(A - iI_2)X = 0_{2 \times 1}, \quad (A + iI_2)X = 0_{2 \times 1}.$$

Έχουμε

$$A - iI_2 = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow i\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(A - iI_2)X = 0_{2 \times 1} \Leftrightarrow x_1 - ix_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = ix_2,$$

$$V_A(i) = \text{null}(A - iI_2) = \{(ix_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{C}\} = \text{span}\{(i, 1)\} \subseteq \mathbb{C}^2,$$

και

$$A + iI_2 = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A + iI_2)X = 0_{2 \times 1} \Leftrightarrow x_1 + ix_2 = 0,$$

$$V_A(-i) = \text{null}(A + iI_2) = \{(-ix_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{C}\} = \text{span}\{(-i, 1)\} \subseteq \mathbb{C}^2.$$

10.2 Βασικές Ιδιότητες Ιδιοχώρων και Χαρακτηριστικού Πολυωνύμου

Λέμε ότι ένα υποσύνολο S του \mathbb{R}^n είναι f_A -**αναλλοίωτο**, αν $f_A(S) \subseteq S$, δηλαδή αν $f_A(s) \in S$, $\forall s \in S$. Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι οι φορείς των ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα A είναι f_A -αναλλοίωτοι υποχώροι του \mathbb{R}^n . Γενικεύουμε για τους ιδιοχώρους του A .

Στην επόμενη Πρόταση περιγράφουμε τις ιδιότητες των ιδιοχώρων ενός πίνακα.

Πρόταση 10.2.0.1 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$, λ μία ιδιοτιμή του A , $V_A(\lambda)$ ο αντίστοιχος ιδιοχώρος.

(i) Αν $v, u \in V_A(\lambda)$ είναι ιδιοδιανύσματα του A , τότε

$$\mu_1 v + \mu_2 u \in V_A(\lambda), \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

(ii) Ο $V_A(\lambda)$ είναι f_A -αναλλοίωτος και μάλιστα αν $\lambda \neq 0$, τότε $f_A(V_A(\lambda)) = V_A(\lambda)$.

(iii) Ο ιδιοχώρος $V_A(\lambda)$ ισούται με τον πυρήνα της γραμμικής συνάρτησης $f_{(A-\lambda I_n)} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ που ορίζει ο πίνακας $A - \lambda I_n$,

$$V_A(\lambda) = \text{Ker} f_{(A-\lambda I_n)}.$$

Απόδειξη. (i) Έστω $v, u \in V_A(\lambda)$, επομένως $f_A(v) = \lambda v$, $f_A(u) = \lambda u$, και $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$. Τότε

$$f_A(\mu_1 v + \mu_2 u) = \mu_1 f_A(v) + \mu_2 f_A(u) = \lambda(\mu_1 v + \mu_2 u) \Rightarrow \mu_1 v + \mu_2 u \in V_A(\lambda).$$

(ii) Θα δείξουμε αρχικά ότι $f_A(V_A(\lambda)) \subseteq V_A(\lambda)$. Ας πάρουμε ένα στοιχείο w του $f_A(V_A)$. Αυτό σημαίνει ότι $w = f_A(v)$, για κάποιο $v \in V_A(\lambda)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $f_A(w) = \lambda w$. Έχουμε

$$f_A(w) = f_A(f_A(v)) = f_A(\lambda v) = \lambda f_A(v) = \lambda w \Rightarrow w \in V_A(\lambda),$$

άρα $f_A(V_A(\lambda)) \subseteq V_A(\lambda)$. Έστω, τώρα, ότι $\lambda \neq 0$ και $v \in V_A(\lambda)$. Από το (i) ξέρουμε ότι $\frac{1}{\lambda} v \in V_A(\lambda)$, άρα

$$v = \frac{1}{\lambda} (\lambda v) = \frac{1}{\lambda} f_A(v) = f_A\left(\frac{1}{\lambda} v\right) \Rightarrow v \in f_A(V_A(\lambda)).$$

Προκύπτει ότι $V_A(\lambda) \subseteq f_A(V_A(\lambda))$, έτσι τα δύο σύνολα είναι ίσα.

(iii) Από τις Προτάσεις 10.1.1.2.ii και 9.2.0.3, έχουμε

$$V_A(\lambda) = \text{null}(A - \lambda I_n) = \text{Ker} f_{(A-\lambda I_n)}. \quad \blacksquare$$

Παράδειγμα 10.2.0.2 Έστω ότι οι αριθμοί 5 και 2 είναι ιδιοτιμές του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ και v_1, v_2 είναι αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των ιδιοτιμών αυτών,

$$f_A(v_1) = 5v_1, \quad f_A(v_2) = 2v_1 \quad v_1, v_2 \neq 0_{\mathbb{R}^n},$$

όπου $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο πίνακας A . Θα δείξουμε ότι τα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του \mathbb{R}^n . Έστω

$$\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad (10.2.1)$$

όπου $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. Από τη σχέση (10.2.1) έπεται ότι

$$f_A(\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2) = f_A(0_{\mathbb{R}^n}) \Rightarrow \kappa_1 f_A(v_1) + \kappa_2 f_A(v_2) = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\kappa_1 v_1 + 2\kappa_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^n}. \quad (10.2.2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (10.2.1) επί 2 και την αφαιρούμε από την (10.2.2), έτσι

$$3\kappa_1 v_1 = 0_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{v_1 \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \kappa_1 = 0$$

και η σχέση (10.2.1) γίνεται

$$\kappa_2 v_2 = 0_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{v_2 \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \kappa_2 = 0.$$

Επομένως, τα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Η απόδειξη και κατά συνέπεια το συμπέρασμα του προηγούμενου παραδείγματος γενικεύεται για m πλήθος διαφορετικών μεταξύ τους ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Δεν θα κάνουμε εδώ αναλυτικά την απόδειξη, αλλά την αφήνουμε σε εσάς ως άσκηση.

Πρόταση 10.2.0.3 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Αν $v_1, \dots, v_s \in \mathbb{R}^n$ είναι ιδιοδιανύσματα για τις διακεκομμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ του A , τότε τα v_1, \dots, v_s είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Στη συνέχεια μελετούμε με περισσότερη λεπτομέρεια το χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

Πρόταση 10.2.0.4 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ και

$$P_A(x) = |A - xI_n| = (-1)^n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A . Τότε

- (i) $a_0 = \det(A)$.
- (ii) $P_{A^T}(x) = P_A(x)$ και επομένως A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.
- (iii) Έστω $S \in M_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος πίνακας. Τότε $P_{SAS^{-1}}(x) = P_A(x)$ και οι όμοιοι πίνακες A και SAS^{-1} έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη.

(i) $a_0 = (-1)^n \cdot 0^n + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 = P_A(0) = |A - 0 \cdot I_n| = \det(A)$.

(ii) Παρατηρούμε ότι

$$xI_n = \text{diag}(x, \dots, x) = (xI_n)^T.$$

Επομένως,

$$P_{A^T}(x) = |A^T - xI_n| = |A^T - (xI_n)^T| = |(A - xI_n)^T| = |A - xI_n| = P_A(x).$$

(iii) Αφού S είναι αντιστρέψιμος πίνακας, $|S| \neq 0$. Άρα

$$\begin{aligned} P_{SAS^{-1}}(x) &= |SAS^{-1} - xI_n| = |SAS^{-1} - xSI_nS^{-1}| = |S(A - xI_n)S^{-1}| = \\ &= |S| |A - xI_n| |S^{-1}| = |S| |A - xI_n| \frac{1}{|S|} = |A - xI_n| = P_A(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Έχουμε δει ότι το 0 είναι ιδιοτιμή ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$, αν και μόνο αν η γραμμική συνάρτηση f_A έχει μη μηδενικό πυρήνα. Στον επόμενο πίνακα συγκεντρώνουμε ισοδύναμες συνθήκες για να είναι το 0 ιδιοτιμή του A , χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 7.1.0.5 και τις Προτάσεις 9.2.0.3, 9.2.0.5.

Ισοδύναμες συνθήκες για να είναι το 0 ιδιοτιμή πίνακα

Έστω πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο A . Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A ,
2. $\det(A) = 0$,
3. ο σταθερός όρος του $P_A(x)$ είναι 0.

4. ο A είναι μη αντιστρέψιμος πίνακας,
5. $\text{rank}(A) < n$,
6. η τελευταία γραμμή της ε.κ.μ.γ. του πίνακα A είναι μηδενική,
7. οι στήλες του A είναι γραμμικά εξαρτημένες,
8. οι γραμμές του A είναι γραμμικά εξαρτημένες,
9. το ομογενές σύστημα $AX = 0_{n \times 1}$ έχει μία μη μηδενική λύση,
10. το ομογενές σύστημα $AX = 0_{n \times 1}$ έχει άπειρες λύσεις,
11. $\text{null}(A) \neq \{(0, \dots, 0)\}$,
12. $\text{Ker} f_A \neq \{(0, \dots, 0)\}$,
13. η συνάρτηση f_A δεν είναι $1 - 1$.

Διατυπώνουμε αντίστοιχες προτάσεις για οποιαδήποτε ιδιοτιμή του $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Ισοδύναμες συνθήκες για να είναι το λ ιδιοτιμή πίνακα

Έστω πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο A . Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες

1. το λ είναι ιδιοτιμή του A ,
2. $\det(A - \lambda I_n) = 0$,
3. το λ είναι ρίζα του $P_A(x)$.
4. ο $A - \lambda I_n$ είναι μη αντιστρέψιμος πίνακας,
5. $\text{rank}(A - \lambda I_n) < n$,
6. η τελευταία γραμμή της ε.κ.μ.γ. του πίνακα $A - \lambda I_n$ είναι μηδενική,
7. οι στήλες του $A - \lambda I_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένες,
8. οι γραμμές του $A - \lambda I_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένες,
9. το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I_n)X = 0_{n \times 1}$ έχει μία μη μηδενική λύση,
10. το ομογενές σύστημα $(A - \lambda I_n)X = 0_{n \times 1}$ έχει άπειρες λύσεις,
11. $\text{null}(A - \lambda I_n) \neq \{(0, \dots, 0)\}$,
12. $\text{Ker} f_{(A - \lambda I_n)} \neq \{(0, \dots, 0)\}$,
13. η συνάρτηση $f_{(A - \lambda I_n)}$ δεν είναι $1 - 1$.

Παραδείγματα 10.2.0.5

- i. Έστω $g(x) = x^2 + a_1x + a_0$, όπου $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Το $g(x)$ είναι χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix}, \quad \text{αφού} \quad P_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -a_0 & -a_1 - x \end{vmatrix} = a_0 + a_1x + x^2.$$

- ii. Έστω $q(x) = -x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, όπου $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Θα δείξουμε ότι $P_A(x) = q(x)$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
 P_A(x) &= \left| \begin{array}{ccc|c} -x & 1 & 0 & \\ 0 & -x & 1 & \\ a_0 & a_1 & a_2 - x & \end{array} \right| \xrightarrow{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2 + x \Sigma_3} \left| \begin{array}{ccc|c} -x & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ a_0 & a_1 + a_2 x - x^2 & a_2 - x & \end{array} \right| \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 + x \Sigma_2} \\
 &= \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - x^3 & a_1 + a_2 x - x^2 & a_2 - x & \end{array} \right| = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - x^3) \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \end{array} \right| = \\
 &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 - x^3.
 \end{aligned}$$

iii. Έστω λ μία ιδιοτιμή του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$. Θα δείξουμε ότι

- $\lambda + 1$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $A + I_n$,
- λ^2 είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα A^2 .

Αφού το λ είναι ιδιοτιμή του A , γνωρίζουμε ότι υπάρχει $0_{\mathbb{R}^n} \neq v \in V_A(\lambda)$. Έτσι,

$$A \cdot v = \lambda v \Rightarrow (A + I_n) \cdot v = A \cdot v + I_n \cdot v = \lambda v + v = (\lambda + 1)v$$

και επομένως το v είναι ιδιοδιάνυσμα για τον πίνακα $A + I_n$ για την ιδιοτιμή $\lambda + 1$. Επίσης,

$$(AA) \cdot v = A \cdot (A \cdot v) = A \cdot (\lambda v) = \lambda(A \cdot v) = \lambda(\lambda v) \Rightarrow A^2 \cdot v = \lambda^2 v,$$

επομένως το v είναι ιδιοδιάνυσμα του πίνακα A^2 για την ιδιοτιμή λ^2 .

iv. Αν λ είναι ιδιοτιμή του A , τότε το λ^s είναι ιδιοτιμή του πίνακα A^s , για $s \geq 1$. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στο s .

v. Αν A είναι αντιστρέψιμος πίνακας και λ είναι ιδιοτιμή του A , τότε

- $\frac{1}{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A^{-1} ,
- $V_A(\lambda) = V_{A^{-1}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Αφού A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, $|A| \neq 0$ και $\lambda \neq 0$. Έστω $0_{\mathbb{R}^n} \neq v \in V_A(\lambda)$. Τότε:

$$\begin{aligned}
 v &= I_n \cdot v = (A^{-1}A) \cdot v = A^{-1} \cdot (A \cdot v) = A^{-1} \cdot (\lambda v) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow v = \lambda(A^{-1} \cdot v) \Rightarrow \frac{1}{\lambda}v = A^{-1} \cdot v
 \end{aligned}$$

και επομένως v είναι ιδιοδιάνυσμα του A^{-1} για την ιδιοτιμή λ^{-1} . Άρα

$$V_A(\lambda) \subseteq V_{A^{-1}}(\lambda^{-1}).$$

Η σχέση αυτή ισχύει για όλους τους αντιστρέψιμους πίνακες. Αν θέσουμε στη θέση του A τον πίνακα A^{-1} , η προηγούμενη σχέση εγκλεισμού γίνεται,

$$V_{A^{-1}}(\lambda^{-1}) \subseteq V_{(A^{-1})^{-1}}((\lambda^{-1})^{-1}) \Rightarrow V_{A^{-1}}(\lambda^{-1}) \subseteq V_A(\lambda),$$

και τελικά $V_A(\lambda) = V_{A^{-1}}(\lambda^{-1})$.

vi. Αν το $\lambda = 2$ είναι ιδιοτιμή του αντιστρέψιμου πίνακα $A \in M_3(\mathbb{R})$, θα βρούμε μία ιδιοτιμή του πίνακα

$$M = 3A^2 + A - 5I_3 + 4A^{-1} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Έστω $v \in V_A(2) \setminus \{(0, 0, 0)\}$, άρα $A \cdot v = 2v$. Από τα προηγούμενα παραδείγματα γνωρίζουμε ότι

$$v \in V_{A^2}(4), \quad v \in V_{A^{-1}}(1/2),$$

άρα

$$M \cdot v = 3A^2 \cdot v + A \cdot v - 5I_3 \cdot v + 4A^{-1} \cdot v = 3(4v) + 2v - 5v + 4(1/2v) = 11v,$$

επομένως το 11 είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα M και $v \in V_M(11)$.

- vii.** Όμοια αποδεικνύεται ότι αν λ είναι μία ιδιοτιμή ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $s \in \mathbb{N}$, τότε $c_s \lambda^s + \dots + c_1 \lambda + c_0$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $c_s A^s + \dots + c_1 A + c_0 I_n$, για $c_0, c_1, \dots, c_s \in \mathbb{R}$. Επιπλέον, αν ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, $s, m \in \mathbb{N}$, τότε $c_s \lambda^s + \dots + c_1 \lambda + c_0 + c_{-1} \lambda^{-1} + \dots + c_{-m} \lambda^{-m}$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $c_s A^s + \dots + c_1 A + c_0 I_n + c_{-1} A^{-1} + \dots + c_{-m} A^{-m}$, για $c_{-1}, \dots, c_{-m} \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση 10.2.0.6 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $P_A(x) = (-1)^n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A . Ορίζουμε $P_A(A)$ να είναι ο πίνακας

$$P_A(A) := (-1)^n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Σύμφωνα με ένα από τα σημαντικότερα θεωρήματα της Γραμμικής Άλγεβρας, το **Θεώρημα των Cayley-Hamilton**, ο πίνακας $P_A(A)$ είναι ο μηδενικός, δηλαδή

$$(-1)^n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I_n = 0_n.$$

Θα δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος των Cayley-Hamilton σε επόμενο μάθημα γραμμικής άλγεβρας. Παραπέμπουμε στο [1, Θεώρημα 6.3.7] για περισσότερες λεπτομέρειες.

10.2.1 Γεωμετρική Ερμηνεία Ιδιοτιμών και Ιδιοχώρων

Στα επόμενα παραδείγματα, στον \mathbb{R}^2 και στον \mathbb{R}^3 , θα βρούμε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πινάκων και συναρτήσεων βασισμένοι στη γεωμετρική εποπτεία του χώρου και στην ιδιότητα ότι οι ιδιοχώροι παραμένουν αναλλοίωτοι από τη δράση της γραμμικής συνάρτησης. Γνωρίζουμε ότι για μη μηδενική ιδιοτιμή ο φορέας του ιδιοδιανύσματος απεικονίζεται στον εαυτό του, ενώ όταν η ιδιοτιμή είναι μηδέν, τότε ο φορέας του ιδιοδιανύσματος απεικονίζεται σε ένα σημείο, την αρχή των αξόνων. Σημειώνουμε ότι όταν η ιδιοτιμή λ είναι θετική, τότε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα και η εικόνα του έχουν την ίδια φορά, ενώ όταν $\lambda < 0$ οι φορές αντιστρέφονται. Επιπλέον, η ιδιοτιμή δηλώνει διαστολή του ιδιοδιανύσματος όταν $|\lambda| > 1$, τη συστολή του ιδιοδιανύσματος όταν $|\lambda| < 1$, ενώ αν $\lambda = 0$, τότε το ιδιοδιάνυσμα απεικονίζεται στην αρχή των αξόνων.

Παραδείγματα 10.2.1.1

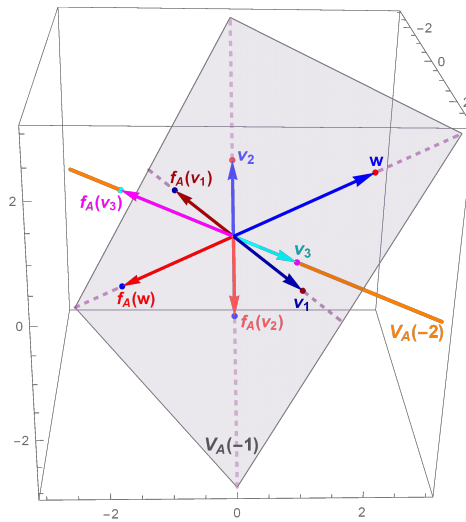
- i.** Στο Παράδειγμα 10.1.1.4.i υπολογίσαμε τις ιδιοτιμές και τους ιδιοχώρους του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Δείξαμε ότι οι αριθμοί $-1, -1, -2$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα. Το $\lambda = -1$ είναι ιδιοτιμή πολλαπλότητας 2 και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι ένα επίπεδο του \mathbb{R}^3 ,

$$p : V_A(-1) = \text{span}\{v_1, v_2\}, \quad v_1 = (2, 1, 0), \quad v_2 = (-1, 0, 1).$$

Αν θεωρήσουμε τη γραμμική συνάρτηση $f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ που ορίζει ο A , τότε η εικόνα κάθε στοιχείου $w = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2$, $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, του επιπέδου p ισούται με το αντίθετό του,

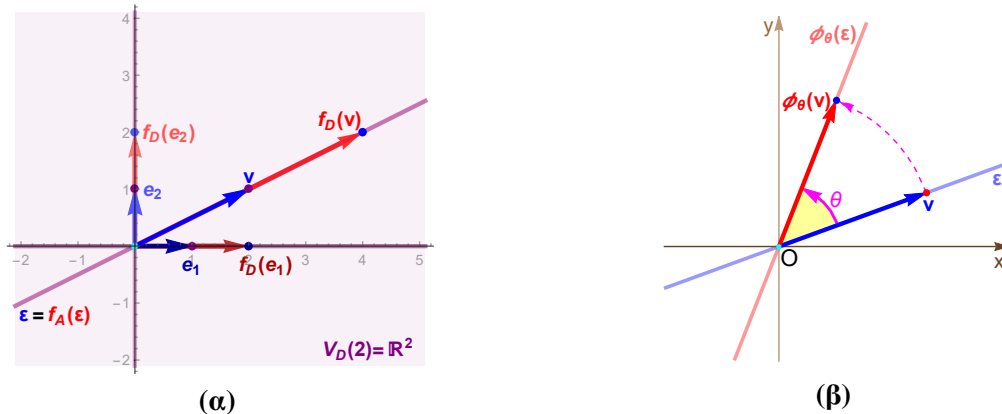


Σχήμα 10.2: Οι ιδιοχώροι του πίνακα A του Παραδείγματος 10.2.1.1.ii.

$f_A(w) = -1 \cdot w$. Κάθε ευθεία του επιπέδου p παραμένει αναλλοίωτη μετά τη δράση της f_A , αναλλοίωτο παραμένει και όλο το επίπεδο, $f_A(V_A(-1)) = V_A(-1)$, βλ. Πρόταση 10.2.0.1.ii. Ο αντίστοιχος ιδιοχώρος της ιδιοτιμής $\lambda = -2$ είναι η ευθεία

$$\zeta : V_A(-2) = \text{span}\{v_3\}, \quad v_3 = (1, 1, 0),$$

η οποία επίσης παραμένει αναλλοίωτη μετά τη δράση της f_A , βλ. Σχήμα 10.2.



Σχήμα 10.3: Η συνάρτηση $2 \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ και η αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία θ .

ii. Θεωρούμε τη γραμμική συνάρτηση

$$f_D : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f_D(x, y) = (2x, 2y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

που ορίζει ο διαγώνιος πίνακας

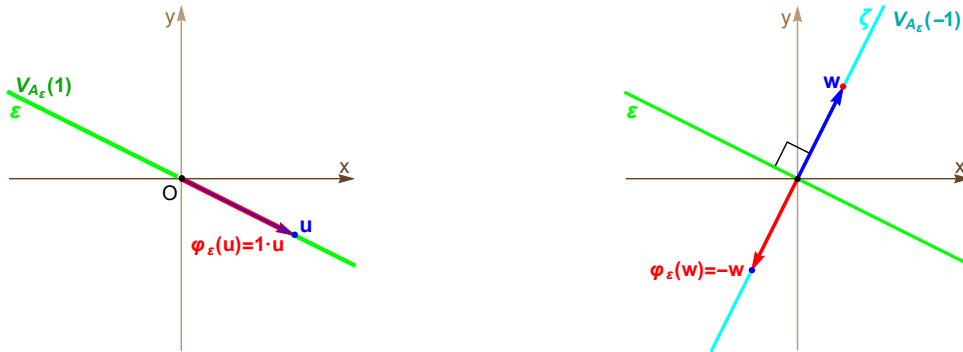
$$D = 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Για κάθε $v \in \mathbb{R}^2$ έχουμε $f_D(v) = 2v$, επομένως το $\lambda = 2$ είναι ιδιοτιμή του D και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι το \mathbb{R}^2 , $V_D(2) = \mathbb{R}^2$. Κάθε ευθεία του επιπέδου \mathbb{R}^2 ταυτίζεται με την εικόνα της μέσω της συνάρτησης f_D , βλ. Σχήμα 10.3.α.

iii. Έστω $\phi_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η αριστερόστροφη περιστροφή κατά γωνία $\theta \in (0, 2\pi)$, $\theta \neq \pi$, που ορίζει ο πίνακας

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι καμία ευθεία του \mathbb{R}^2 δεν παραμένει αναλλοίωτη μετά τη δράση της ϕ_θ , αφού περιστρέφεται κατά γωνία θ . Έτσι ο πίνακας A_θ δεν έχει ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα, ιδιοχώρους, βλ. Σχήμα 10.3.β.

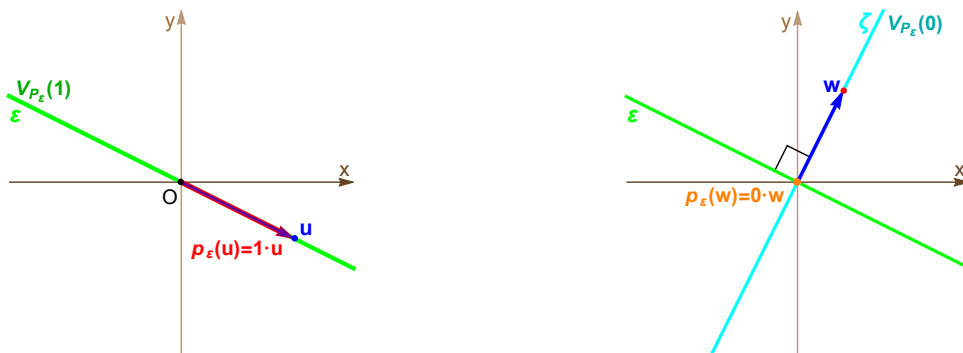


Σχήμα 10.4: Ιδιοδιανύσματα και ιδιοχώροι του αντικατοπτρισμού ϕ_ε σε ευθεία ε του \mathbb{R}^2 .

- iv. Θεωρούμε τον αντικατοπτρισμό $\phi_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ως προς την ευθεία $\varepsilon : \alpha x + \beta y = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Έστω A_ε ο πίνακας που ορίζει τον ϕ_ε .

Παρατηρούμε τα εξής, βλ. Σχήμα 10.4:

- Αν το u ανήκει στην ευθεία ε , τότε $\phi_\varepsilon(u) = u = 1 \cdot u$. Έτσι το $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A_ε και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος αποτελείται από όλα τα σημεία της ευθείας ε , $V_{A_\varepsilon}(1) = \text{span}\{(-\beta, \alpha)\}$.
- Θεωρούμε την ευθεία $\zeta : -\beta x + \alpha y = 0$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ και είναι κάθετη στην ε . Αν το w ανήκει στην ζ , τότε $\phi_\varepsilon(w) = -w = -1 \cdot w$. Συμπεραίνουμε ότι το $\lambda = -1$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A_ε και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος αποτελείται από όλα τα σημεία της ευθείας ζ , $V_{A_\varepsilon}(-1) = \text{span}\{(\alpha, \beta)\}$.

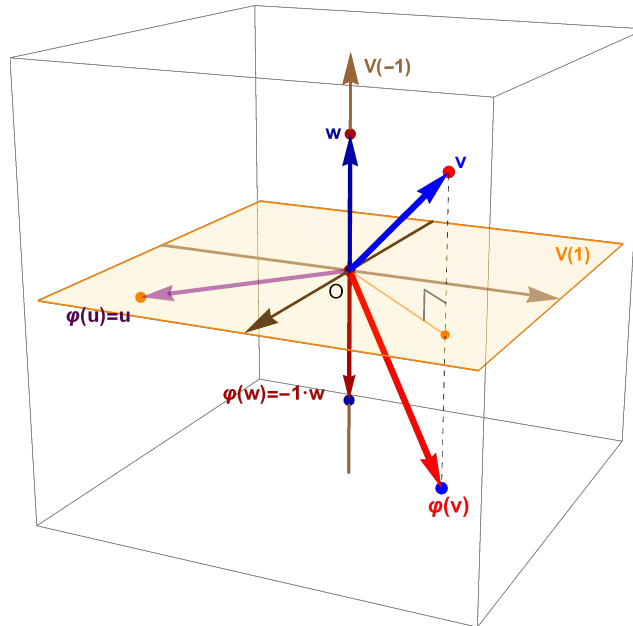


Σχήμα 10.5: Ιδιοδιανύσματα και ιδιοχώροι της προβολής p_ε σε ευθεία ε του \mathbb{R}^2 .

- v. Έστω η προβολή $p_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ στην ευθεία $\varepsilon : \alpha x + \beta y = 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ και P_ε ο πίνακας που ορίζει την p_ε .

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, θεωρούμε την ευθεία $\zeta : -\beta x + \alpha y = 0$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε και παρατηρούμε τα εξής, βλ. Σχήμα 10.5:

- Αν το u ανήκει στην ευθεία ε , τότε $p_\varepsilon(u) = u$, το $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα P_ε και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος αποτελείται από όλα τα σημεία της ευθείας ε , $V_{P_\varepsilon}(1) = \text{span}\{(-\beta, \alpha)\}$.
- Αν το w ανήκει στην ζ , τότε $p_\varepsilon(w) = (0, 0) = 0 \cdot w$ και $w \in \text{Ker } p_\varepsilon$. Η p_ε δεν είναι συνάρτηση $1 - 1$, το $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα P_ε και ο αντίστοιχος ιδιοχώρος αποτελείται από όλα τα σημεία της ευθείας ζ , $V_{P_\varepsilon}(0) = \text{Ker } p_\varepsilon = \text{span}\{(\alpha, \beta)\}$.



Σχήμα 10.6: Αντικατοπτρισμός στο επίπεδο $z = 0$.

- vi. Έστω ο αντικατοπτρισμός $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ στο επίπεδο $z = 0$ (βλ. Σχήμα 10.6).
- Αν το u ανήκει στο επίπεδο $z = 0$, τότε $\phi(u) = u$ και το $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή της ϕ , με αντίστοιχο ιδιοχώρο το επίπεδο $z = 0$.
 - Αν το w ανήκει στην ευθεία $x = 0, y = 0, z = t$, δηλ. τον άξονα των z , τότε $\phi(w) = -w$, έτσι το $\lambda = -1$ είναι ιδιοτιμή της ϕ , με αντίστοιχο ιδιοχώρο τον άξονα των z .

10.3 Διαγωνιοποίηση

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται **διαγωνιοποιήσιμος**, αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$, τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος. Ισοδύναμα, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος, αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$ και διαγώνιος πίνακας $D \in M_n(\mathbb{R})$, έτσι ώστε να ισχύει $A = PDP^{-1}$:

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow A = PDP^{-1}$$

Έτσι, A είναι διαγωνιοποιήσιμος, αν και μόνο αν ο A είναι όμοιος με διαγώνιο πίνακα.

Παραδείγματα 10.3.0.1

- Κάθε διαγώνιος πίνακας $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ είναι διαγωνιοποιήσιμος, αφού $I_n D I_n = D$ είναι διαγώνιος πίνακας.
- Ο πίνακας του Παραδείγματος 10.1.1.1.iv δεν είναι διαγώνιος, είναι όμως διαγωνιοποιήσιμος.

Όταν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε ο διαγώνιος πίνακας μας δίνει πληροφορίες για τις ιδιοτιμές του A .

Πρόταση 10.3.0.2 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ διαγωνιοποιήσιμος πίνακας, $P \in M_n(\mathbb{R})$ αντιστρέψιμος πίνακας και $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, έτσι ώστε $A = PDP^{-1}$. Τότε

(i) $\det(A) = \det(D) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

(ii) Ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, αν και μόνο αν ο D είναι αντιστρέψιμος πίνακας. Αυτό συμβαίνει, αν και μόνο αν $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$.

(iii) $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(D)$.

(iv) $P_A(x) = P_D(x)$ και άρα

$$P_A(x) = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x).$$

(v) Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι τα $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

(vi) Αν $P = [v_1 | \cdots | v_n]$, τότε τα v_1, \dots, v_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A , με $v_i \in V_A(\lambda_i)$, για $i = 1, \dots, n$.

Απόδειξη. Για τα (i), (iii), (iv), βλ. αντίστοιχα Πρόταση 6.4.0.2.iv, Πρόταση 4.3.0.4.v και Πρόταση 10.2.0.4.iii. Παρατηρούμε ότι

$$P_D(x) = |D - xI_n| = \begin{vmatrix} \lambda_1 - x & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n - x \end{vmatrix} = (\lambda_1 - x) \cdots (\lambda_n - x).$$

Το (ii) προκύπτει από το (i) και το (v) από το (iv). Αποδεικνύουμε το (vi).

Αφού P είναι αντιστρέψιμος πίνακας, οι στήλες $[v_1], \dots, [v_n]$ είναι μη μηδενικές και γραμμικά ανεξάρτητες και τα v_1, \dots, v_n είναι μη μηδενικά, γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του \mathbb{R}^n , βλ. Πρόταση 8.1.0.7.iii. Έχουμε:

$$A = PDP^{-1} \xleftrightarrow{\exists P^{-1}} AP = PD \Leftrightarrow A[v_1 | \cdots | v_n] = [v_1 | \cdots | v_n] \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Όμως

$$A[v_1 | \cdots | v_n] = [A \cdot v_1 | \cdots | A \cdot v_n], \quad \text{ενώ} \quad [v_1 | \cdots | v_n] \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = [\lambda_1 v_1 | \cdots | \lambda_n v_n].$$

Επομένως,

$$[A \cdot v_1 | \cdots | A \cdot v_n] = [\lambda_1 v_1 | \cdots | \lambda_n v_n] \quad \text{και άρα} \quad A \cdot v_i = \lambda_i v_i, \quad \text{για } i = 1, \dots, n.$$

Κατά συνέπεια, τα v_1, \dots, v_n είναι ιδιοδιανύσματα του A . ■

Παρατήρηση 10.3.0.3 Η πληροφορία ότι ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι διαγωνιοποιήσιμος είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στους υπολογισμούς δυνάμεων του A . Ειδικότερα, έστω ότι $A = PDP^{-1}$, όπου $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Τότε για $m \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$A^m = PD^m P^{-1} \quad \text{όπου} \quad D^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m).$$

Επιπλέον, αν ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας, τότε $\forall m \in \mathbb{Z}$

$$A^m = PD^m P^{-1} \quad \text{όπου} \quad D^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m).$$

Το πρώτο συμπέρασμα προκύπτει με απλή επαγωγή στο m (βλ. Λυμένη Άσκηση 4.5.9). Για το δεύτερο συμπέρασμα, αναφέρουμε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο D είναι αντιστρέψιμος, επομένως

$$A^{-m} = (A^m)^{-1} = (PD^m P^{-1})^{-1} = (P^{-1})^{-1} (D^m)^{-1} P^{-1} = PD^{-m} P^{-1}.$$

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Καθώς οι συνεπαγωγές στην απόδειξη του (vi) της προηγούμενης πρότασης αντιστρέφονται, βλέπουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο. Πράγματι, έστω ότι υπάρχουν πλήθους n γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε

$$A \cdot v_1 = \lambda_1 v_1, \dots, A \cdot v_n = \lambda_n v_n,$$

τότε ο πίνακας $P = [v_1 | \dots | v_n]$ είναι αντιστρέψιμος (βλ. Πόρισμα 8.1.0.7.iii) και

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Επομένως, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος πίνακας. Ισχύει, λοιπόν, η επόμενη πρόταση.

Θεώρημα 10.3.0.4 *Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι διαγωνιοποιήσιμος, αν και μόνο αν έχει πλήθους n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.*

Σημειώνουμε ότι η σειρά των ιδιοτιμών στη διαγώνιο ακολουθεί τη διάταξη των στηλών των ιδιοδιανυσμάτων.

Παράδειγμα 10.3.0.5 Ο πίνακας του Παραδείγματος 10.1.1.1.iv είναι διαγωνιοποιήσιμος:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Ισχύει επίσης ότι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Πόρισμα 10.3.0.6 *Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο A έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $1 \leq i < j \leq n$ και έστω v_1, \dots, v_n αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα των ιδιοτιμών αυτών. Τα v_1, \dots, v_n είναι ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, έτσι από την Πρόταση 10.2.0.3 έπεται ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα και από το Θεώρημα 10.3.0.4 προκύπτει ότι ο A διαγωνιοποιείται. ■

Παρατηρήσεις 10.3.0.7

- (α) Από την ιδιότητα (v) της Πρότασης 10.3.0.2 συμπεραίνουμε ότι απαραίτητη προϋπόθεση για να διαγωνιοποιείται ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $P_A(x)$ να είναι όλες πραγματικές. Οι ιδιοτιμές του A μπορεί να επαναλαμβάνονται. Δεν αρκεί, ωστόσο, οι ρίζες του $P_A(x)$ να είναι πραγματικές για να είναι ο A διαγωνιοποιήσιμος. Θα πρέπει επιπλέον, ο A να έχει «αρκετά» (πλήθους n) γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
- (β) Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$. Ο A διαγωνιοποιείται πάνω από το \mathbb{C} αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{C})$, τέτοιος ώστε ο πίνακας $D = P^{-1}AP \in M_n(\mathbb{C})$ να είναι διαγώνιος. Σύμφωνα με το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x)$ έχει n μιγαδικές ρίζες, όσες είναι και ο βαθμός του. Για να διαγωνιοποιείται ο A , θα πρέπει ο A να έχει «αρκετά» (πλήθους n) γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

- (γ) Αποδεικνύεται ότι ένας συμμετρικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι πάντα διαγωνιοποιήσιμος και μάλιστα οι φορείς των ιδιοδιανυσμάτων του συμμετρικού πίνακα A που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ευθείες ορθογώνιες μεταξύ τους. Το συμπέρασμα αυτό είναι γνωστό ως **Φασματικό Θεώρημα** και θα το αποδείξετε σε επόμενο μάθημα γραμμικής άλγεβρας.
- (δ) Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$. Αποδεικνύεται ότι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ στο $P_A(x)$ δίνει άνω φράγμα για τον αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων στο $V_A(\lambda)$ (βλ. ([1, Πρόταση 6.2.5]).

Θυμίζουμε ότι, όπως έχουμε ήδη δει, υπάρχουν μη μηδενικοί πίνακες του $M_n(\mathbb{R})$ που κάποια δύναμή τους είναι ίση με τον μηδενικό πίνακα 0_n .

Πρόταση 10.3.0.8 Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ διαγωνιοποιήσιμος πίνακας και έστω ότι $A^m = 0_n$, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Τότε $A = 0_n$.

Απόδειξη. Αφού ο A διαγωνιοποιείται, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$ και διαγώνιος $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{R})$, τέτοιοι ώστε $A = PDP^{-1}$. Επομένως, $D = P^{-1}AP$ και

$$D^m = P^{-1}A^mP = P^{-1}0_nP \Rightarrow D^m = 0_n.$$

Όμως $D^m = \text{diag}(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m)$, επομένως συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda_1^m = \dots = \lambda_n^m = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \Rightarrow D = 0_n.$$

Άρα

$$A = P^{-1}0_nP = 0_n.$$

και αποδείχθηκε το ζητούμενο. ■

10.3.1 Διαγωνιοποίηση 2×2 Πινάκων

Έστω

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A είναι το τριώνυμο

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = x^2 - (a+d)x + ad - bc = x^2 - \text{Tr}(A)x + \det(A).$$

Συμβολίζουμε με Δ τη διακρίνουσα του $P_A(x)$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $\Delta > 0$. Το $P_A(x)$ έχει δύο πραγματικές ρίζες, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, και

$$P_A(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2), \text{ όπου } \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Ο A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, επομένως διαγωνιοποιείται, βλ. Πόρισμα 10.3.0.6. Αν $(0, 0) \neq v_1 \in V_A(\lambda_1)$, $(0, 0) \neq v_2 \in V_A(\lambda_2)$ και $P = [v_1 | v_2]$, τότε

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι όταν $\Delta > 0$, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος στο \mathbb{R} και στο \mathbb{C} .

- $\Delta < 0$. Το $P_A(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες και δεν παραγοντοποιείται στο \mathbb{R} . Αφού ο A δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές, ο A δεν διαγωνιοποιείται στο \mathbb{R} . Σημειώνουμε ότι οι μιγαδικές ρίζες του $P_A(x)$ είναι συζυγείς και μάλιστα είναι διαφορετικές, δηλαδή

$$P_A(x) = (x - \lambda)(x - \bar{\lambda}), \quad \lambda \neq \bar{\lambda}.$$

Επομένως, αν θεωρήσουμε τον A ως πίνακα με στοιχεία από το \mathbb{C} , τότε ο A διαγωνιοποιείται και υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in M_2(\mathbb{C})$, με

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Συμπεραίνουμε ότι όταν $\Delta < 0$, ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος στο \mathbb{R} , είναι όμως διαγωνιοποιήσιμος στο \mathbb{C} .

- $\Delta = 0$. Τότε

$$P_A(x) = (x - \lambda)^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

και λ είναι ρίζα του $P_A(x)$ πολλαπλότητας 2. Ας εξετάσουμε τη βαθμίδα $\text{rank}(A - \lambda I_2)$. Αφού $\det(A - \lambda I_2) = 0$, γνωρίζουμε ότι

$$0 \leq \text{rank}(A - \lambda I_2) < 2$$

άρα

$$\text{rank}(A - \lambda I_2) = 0 \quad \text{ή} \quad \text{rank}(A - \lambda I_2) = 1.$$

Αν $\text{rank}(A - \lambda I_2) = 0$, τότε $A - \lambda I_2 = 0_2$ και επομένως $A = \lambda I_2$ είναι διαγώνιος πίνακας. Διαφορετικά, αν $\text{rank}(A - \lambda I_2) = 1$, τότε $V_A(\lambda) = \text{null}(A - \lambda I_2)$ είναι η γραμμική θήκη ενός διανύσματος και δεν μπορούμε να βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα για να διαγωνιοποιήσουμε τον A . Ο A , λοιπόν, δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος ούτε στο \mathbb{R} , ούτε στο \mathbb{C} .

Συμπεραίνουμε ότι όταν $\Delta = 0$, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος στο \mathbb{R} ή στο \mathbb{C} , αν και μόνο αν ο A είναι ήδη διαγώνιος πίνακας.

Παρατήρηση 10.3.1.1 Έστω, γενικότερα, ότι $A \in M_2(\mathbb{C})$. Το $P_A(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού 2 και έχει δύο ρίζες λ_1, λ_2 στο \mathbb{C} . Αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε από το Πόρισμα 10.3.0.6 συμπεραίνουμε ότι ο A θα είναι διαγωνιοποιήσιμος στο \mathbb{C} . Στην περίπτωση που $\lambda_1 = \lambda_2$ και $P_A(x) = (x - \lambda_1)^2$, βλέπουμε, όπως προηγουμένως, ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος στο \mathbb{C} , αν και μόνο αν ο A είναι ήδη διαγώνιος πίνακας.

Παραδείγματα 10.3.1.2

- i. Θα διαγωνιοποιήσουμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε αρχικά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο και τις ιδιοτιμές του A ,

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1).$$

Ο A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, επομένως διαγωνιοποιείται. Φέρνουμε σε ε.κ.μ.γ. τους πίνακες $A - 3I_2$, $A + I_2$, ώστε να βρούμε τους ιδιοχώρους $V_A(3)$, $V_A(-1)$,

$$A - 3I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως

$$V_A(3) = \text{null}(A - 3I_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 3y = 0\} = \text{span}\{(3, 1)\},$$

$$V_A(-1) = \text{null}(A + I_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\} = \text{span}\{(-1, 1)\}.$$

Τα $v_1 = (3, 1)$, $v_2 = (-1, 1)$ είναι ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$. Συνεπώς:

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{όπου } P = [v_1|v_2] = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Όπως είδαμε, $P_A(x) = x^2 + 1$ δεν έχει πραγματικές ιδιοτιμές, επομένως ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος στο \mathbb{R} . Αν όμως θεωρήσουμε τον A ως στοιχείο του $M_2(\mathbb{C})$, τότε ο A έχει τις ιδιοτιμές $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, με αντίστοιχους ιδιοχώρους

$$V_A(i) = \text{span}\{(i, 1)\}, \quad V_A(-i) = \text{span}\{(-i, 1)\}.$$

Έτσι ο $A \in M_2(\mathbb{C})$ διαγωνιοποιείται,

$$A = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

iii. Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Τότε

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ 4 & -2-x \end{vmatrix} = x^2.$$

Κατά συνέπεια, ο A έχει μία ιδιοτιμή, το 0 με πολλαπλότητα 2. Όμως, ο A δεν είναι διαγώνιος πίνακας, άρα ο A δεν είναι διαγωνιοποιήσιμος. Σημειώνουμε ότι

$$V_A(0) = \text{span}\{(1, 2)\}$$

και ότι τα ιδιοδιανύσματα του A είναι τα μη μηδενικά βαθμωτά πολλαπλάσια του $(1, 2)$.

iv. Οι επόμενοι πίνακες δεν είναι διαγωνιοποιήσιμοι πάνω από το \mathbb{C} .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}, \quad b \neq 0.$$

10.3.2 Διαγωνιοποίηση 3×3 Πινάκων

Έστω $A \in M_3(\mathbb{R})$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού με συντελεστές από τον \mathbb{R} :

$$P_A(x) = -x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Καθώς $P_A(x)$ έχει πραγματικούς συντελεστές, οι μιγαδικές μη πραγματικές ρίζες του $P_A(x)$ εμφανίζονται ανά ζεύγη. Θα πρέπει, λοιπόν, να ισχύει ένα από τα δύο: είτε $P_A(x)$ έχει μόνον πραγματικές ρίζες είτε $P_A(x)$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα (έστω λ_1) και δύο μιγαδικές μη πραγματικές ρίζες λ_2, λ_3 που όμως είναι συζυγείς, δηλ. $\lambda_2 \neq \lambda_3$ και $\lambda_3 = \overline{\lambda_2}$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Το $P_A(x)$ έχει τρεις ρίζες, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ που διαφέρουν η μία από την άλλη. Έτσι, ο A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές, επομένως διαγωνιοποιείται, βλ. Πόρισμα 10.3.0.6.

Αν $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ είναι ιδιοδιανύσματα για τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ αντίστοιχα και $P = [v_1|v_2|v_3]$, τότε

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

- Το $P_A(x)$ έχει μία πραγματική ρίζα πολλαπλότητας 2, έστω λ . Έστω λ_3 η τρίτη (αναγκαστικά πραγματική) ρίζα του $P_A(x)$:

$$P_A(x) = (x - \lambda)^2(x - \lambda_3), \quad \lambda \neq \lambda_3.$$

Εξετάζουμε τη βαθμίδα του (μη αντιστρέψιμου) πίνακα $A - \lambda I_3$. Ο A δεν είναι ο διαγώνιος πίνακας λI_3 , καθώς

$$P_{\lambda I_3}(x) = (x - \lambda)^3.$$

Αφού, λοιπόν, $A - \lambda I_3$ δεν είναι ο μηδενικός πίνακας, ισχύει ότι $0 < \text{rank}(A - \lambda I_3) < 3$. Επομένως,

$$\text{rank}(A - \lambda I_3) = 1 \quad \text{ή} \quad \text{rank}(A - \lambda I_3) = 2.$$

Εξετάζουμε τις δύο υποπεριπτώσεις που προέκυψαν.

Αν $\text{rank}(A - \lambda I_3) = 1$, τότε η ε.κ.μ.γ. R του πίνακα $A - \lambda I_3$ έχει μία από τις παρακάτω μορφές:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Σε κάθε περίπτωση, σας καλούμε να δείξετε ότι $V_A(\lambda) = \text{span}\{v_1, v_2\}$, για κάποια γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα v_1, v_2 και επομένως $v_1, v_2 \in V_A(\lambda)$ είναι δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A . Έτσι, αν v_3 είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_3 , τότε τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, έστω

$$\kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2 + \kappa_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

μία σχέση γραμμικής εξάρτησης και $u = \kappa_1 v_1 + \kappa_2 v_2$. Αν $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, τότε $u \in V_A(\lambda)$ είναι ιδιοδιάνυσμα για την ιδιοτιμή λ και από την Πρόταση 10.2.0.3 οδηγούμαστε σε άτοπο, καθώς

$$1 \cdot u + \kappa_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$$

είναι σχέση γραμμικής εξάρτησης, ενώ u, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συμπεραίνουμε ότι $u = 0_{\mathbb{R}^3}$ και άρα $\kappa_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, επομένως $\kappa_3 = 0$. Αφού $u = 0_{\mathbb{R}^3}$ και τα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, βλέπουμε ότι $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. Τελικά, αποδείξαμε ότι είναι αδύνατον να υπάρξει σχέση γραμμικής εξάρτησης και ότι v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Επομένως, ο A διαγωνιοποιείται και αν $P = [v_1|v_2|v_3]$, τότε

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Αν $\text{rank}(A - \lambda I_3) = 2$, τότε η ε.κ.μ.γ. R του πίνακα $A - \lambda I_3$ έχει μία από τις παρακάτω μορφές:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad R = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Σε κάθε περίπτωση οι λύσεις του ομογενούς συστήματος $(A - \lambda I_3)X = 0_{3 \times 1}$ περιγράφονται από μία μόνο παράμετρο και ο ιδιοχώρος για την ιδιοτιμή λ είναι η γραμμική θήκη ενός μόνου διανύσματος. Επομένως, στο $V_A(\lambda)$, ο μέγιστος αριθμός γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων είναι 1. Το ίδιο όμως συμβαίνει και για τον $V_A(\lambda_3)$ (βλ. Παρατήρηση 10.3.0.7.δ). Δεν θα μπορέσουμε, λοιπόν, να βρούμε τρία γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα για να διαγωνιοποιήσουμε τον A και ο πίνακας A δεν διαγωνιοποιείται στο \mathbb{R} ή στο \mathbb{C} .

- Το $P_A(x)$ έχει μία πραγματική ρίζα λ πολλαπλότητας 3. Αν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος πίνακας, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in M_3(\mathbb{R})$, τέτοιος ώστε

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}. \text{ Τότε όμως } A = P(\lambda I_3)P^{-1} = \lambda P I_3 P^{-1} = \lambda I_3,$$

άρα $A = \lambda I_3$. Αν, λοιπόν, ο A δεν είναι ήδη διαγώνιος και η ιδιοτιμή λ έχει πολλαπλότητα 3, τότε ο A δεν διαγωνοποιείται.

- Το $P_A(x)$ έχει μόνο μία πραγματική ρίζα, πολλαπλότητας 1. Τότε ο A δεν διαγωνοποιείται στον \mathbb{R} (βλ. Παρατήρηση 10.3.0.7.α). Αν θεωρήσουμε όμως τον A ως πίνακα του $M_3(\mathbb{C})$, τότε ο A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$. Έτσι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος πίνακας στο \mathbb{C} .

Παραδείγματα 10.3.2.1

- i. Θα διαγωνιοποιήσουμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Υπολογίζουμε αρχικά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα,

$$\begin{aligned} P_A(x) = |A - xI_3| &= \begin{vmatrix} 5-x & -5 & 4 \\ 4 & -4-x & 4 \\ 3 & -3 & 4-x \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3} \begin{vmatrix} 4-x & -5 & 4 \\ 4-x & -4-x & 4 \\ 4-x & -3 & 4-x \end{vmatrix} = \\ &= (4-x) \begin{vmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 1 & -4-x & 4 \\ 1 & -3 & 4-x \end{vmatrix} \xrightarrow{\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_3 - 4\Sigma_1} (4-x) \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 1 & -4-x & 0 \\ 1 & -3 & -x \end{vmatrix} = \\ &= -x(4-x) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -4-x \end{vmatrix} = -x(4-x)(1-x). \end{aligned}$$

Ο πίνακας A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές, $0, 1, 4 \in \mathbb{R}$, επομένως διαγωνοποιείται. Βρίσκουμε τους αντίστοιχους ιδιοχώρους λύνοντας τα ομογενή συστήματα

$$AX = 0_{3 \times 1}, \quad (A - I_3)X = 0_{3 \times 1}, \quad (A - 4I_3)X = 0_{3 \times 1}.$$

Φέρνουμε τους πίνακες συντελεστών των παραπάνω συστημάτων σε ε.κ.μ.γ.,

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - I_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - 4I_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Έχουμε

$$V_A(0) = \text{null}(A) = \{(x_2, x_2, 0) : x_2 \in \mathbb{R}\} = \text{span}\{(1, 1, 0)\},$$

$$V_A(1) = \text{null}(A - I_3) = \text{span}\{(-1, 0, 1)\},$$

$$V_A(4) = \text{null}(A - 4I_3) = \text{span}\{(1, 1, 1)\}.$$

Έστω $v_1 = (1, 1, 0) \in V_A(0)$, $v_2 = (-1, 0, 1) \in V_A(1)$, $v_3 = (1, 1, 1) \in V_A(4)$. Τότε

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{όπου } P = [v_1 | v_2 | v_3] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Έστω, τώρα, $Q = [-3v_2 | 2v_1 | v_3]$. Καθώς $-3v_2 \in V_A(1)$, $2v_1 \in V_A(0)$ και $v_3 \in V_A(4)$ έχουμε:

$$A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Ομοίως,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

ii. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Στο Παράδειγμα 10.1.1.4.i υπολογίσαμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και βρήκαμε ότι

$$P_A(x) = -(x+1)^2(x+2).$$

Επιπλέον, είδαμε ότι $\text{rank}(A + I_3) = 1$, $\text{rank}(A - 2I_3) = 2$ και

$$V_A(-1) = \text{span}\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}, \quad V_A(-2) = \text{span}\{(1, 1, 0)\},$$

Επομένως, ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος και

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{όπου } P = [v_1 | v_2 | v_3] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

iii. Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\begin{aligned} P(x) = |A - xI_3| &= \begin{vmatrix} -x & -2 & 1 \\ 1 & -3-x & 2 \\ 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (-1-x) \begin{vmatrix} -x & -2 \\ 1 & -3-x \end{vmatrix} = \\ &= -(x+1)(x^2 + 3x + 2) = -(x+1)^2(x+2). \end{aligned}$$

Ο πίνακας A δεν διαγωνιοποιείται, καθώς $\text{rank}(A + I_3) = 2$ και

$$V_A(-1) = \text{span}\{(2, 1, 0)\}.$$

Σημειώνουμε ότι $V_A(-2) = \text{span}\{(1, 1, 0)\}$ και ότι δεν μπορούμε να βρούμε τρία γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα για τον A .

10.3.3 Εφαρμογές

Στα επόμενα παραδείγματα θα υπολογίσουμε δυνάμεις πινάκων χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι πίνακες είναι διαγωνιοποιήσιμοι αξιοποιώντας την παρατήρηση 10.3.0.3.

Παραδείγματα 10.3.3.1

i. Θα διαγωνιοποιήσουμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{11}{10} \end{pmatrix}$$

και θα υπολογίσουμε προσεγγιστικά τον πίνακα A^n , όταν $n \rightarrow +\infty$. Βρίσκουμε αρχικά το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A :

$$P_A(x) = \begin{vmatrix} \frac{2}{5} - x & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{11}{10} - x \end{vmatrix} = x^2 - \frac{15}{10}x + \frac{25}{50} = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right).$$

Ο A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$, επομένως διαγωνιοποιείται. Φέρνουμε σε ε.κ.μ.γ. τους πίνακες $A - I_2$, $A - 1/2 I_2$, ώστε να βρούμε τους ιδιοχώρους $V_A(1)$, $V_A(1/2)$,

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - \frac{1}{2}I_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{6}{10} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Κατά συνέπεια,

$$V_A(1) = \text{null}(A - I_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - \frac{1}{3}y = 0\} = \text{span}\left\{\left(\frac{1}{3}, 1\right)\right\}$$

και

$$V_A\left(\frac{1}{2}\right) = \text{null}\left(A - \frac{1}{2}I_2\right) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y = 0\} = \text{span}\{(2, 1)\}.$$

Επιλέγουμε $v_1 = (1, 3) \in V_A(1)$ και $v_2 = (2, 1) \in V_A(1/2)$. Επομένως,

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{όπου } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P = [v_1 | v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

Αφού

$$P^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

έχουμε

$$A^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Όταν $n \rightarrow +\infty$, τότε $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, κατά συνέπεια ο πίνακας D^n «συγκλίνει» προς τον πίνακα

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ενώ ο A^n «συγκλίνει» προς τον πίνακα

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

ii. Θα υπολογίσουμε τον πίνακα A^{2025} , όπου

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ,

$$\begin{aligned} P_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ -6 & -3-x & 4 \\ -3 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} -3-x & 4 \\ -1 & 3-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -3 & 3-x \end{vmatrix} = \\ &= (1-x)(x^2 - 5) - 6x + 6 = (1-x)(x^2 - 5) + 6(1-x) = (1-x)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Το $P_A(x)$ έχει μία πραγματική και δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, $1, i, -i$, έτσι ο πίνακας A δεν διαγωνιοποιείται στο \mathbb{R} . Παρόλα αυτά, ο πίνακας A διαγωνιοποιείται στο \mathbb{C} και θα μπορούσαμε να αξιοποιήσουμε αυτήν την ιδιότητα. Έστω $P \in M_3(\mathbb{C})$ τέτοιος, ώστε

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Τότε

$$A^4 = P \begin{pmatrix} 1^4 & 0 & 0 \\ 0 & i^4 & 0 \\ 0 & 0 & (-i)^4 \end{pmatrix} P^{-1} = P I_3 P^{-1} = I_3 \Rightarrow A^4 = I_3.$$

Διαπιστώσαμε λοιπόν ότι $A^4 = I_3$. Αφού $2025 = 506 \cdot 4 + 1$, έχουμε

$$A^{2025} = A^{506 \cdot 4 + 1} = (A^4)^{506} A = I_3^{506} A = I_3 A = A.$$

iii. Θα υπολογίσουμε τον πίνακα A^{2025} , όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -12 & -6 & 8 \\ -6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Παρατηρούμε ότι αν

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -6 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

τότε $A = 2A_1$. Από το προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε ότι $A_1^{2025} = A_1$. Επομένως,

$$A^{2025} = (2A_1)^{2025} = 2^{2025} A_1^{2025} = 2^{2025} A_1 = 2^{2024} A.$$

iv. Έστω $(a_n)_{n \geq 0}$ μία ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια, ώστε

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Θα υπολογίσουμε τον γενικό όρο a_n της ακολουθίας.

Παρατηρούμε ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\kappa+2} = 2a_{\kappa+1} + 3a_{\kappa} \\ a_{\kappa+1} = a_{\kappa+1} \end{array} \right\}, \quad \text{συνεπώς} \quad \begin{bmatrix} a_{\kappa+2} \\ a_{\kappa+1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_{\kappa+1} \\ a_{\kappa} \end{bmatrix}, \quad \text{για } \kappa \geq 0. \quad (10.3.1)$$

Θέτουμε

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{\kappa+1} = \begin{bmatrix} a_{\kappa+2} \\ a_{\kappa+1} \end{bmatrix} \Rightarrow F_{\kappa} = \begin{bmatrix} a_{\kappa+1} \\ a_{\kappa} \end{bmatrix}.$$

Η σχέση (10.3.1) γίνεται

$$F_{\kappa+1} = AF_{\kappa}, \text{ για } \kappa \geq 0.$$

Με απλή επαγωγή στο n βρίσκουμε ότι

$$F_n = A^n F_0$$

και άρα

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Στο Παράδειγμα 10.3.1.2.i είδαμε ότι

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3^n \\ -(-1)^n \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3^{n+1} - (-1)^{n+1} \\ 3^n - (-1)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{και } a_n = \frac{3^n - (-1)^n}{4}.$$

- v. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να βρούμε τον γενικό όρο μίας πραγματικής ακολουθίας $(a_n)_{n \geq 0}$ που ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο

$$a_n = q a_{n-1} + r a_{n-2},$$

$q, r \in \mathbb{R}$, όταν γνωρίζουμε τους δύο πρώτους όρους a_0, a_1 , αρκεί να είναι διαγωνιοποιήσιμος ο πίνακας $\begin{pmatrix} q & r \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- vi. Έστω ότι ένα μοντέλο περιγράφεται από εξισώσεις

$$\begin{aligned} \alpha_{\kappa+1} &= \frac{2}{5} \alpha_{\kappa} + \frac{1}{5} \beta_{\kappa} \\ \beta_{\kappa+1} &= -\frac{3}{10} \alpha_{\kappa} + \frac{11}{10} \beta_{\kappa} \end{aligned} \tag{10.3.2}$$

Εδώ το κ παίρνει τιμή στους μη αρνητικούς ακεραίους. Υποθέτουμε επίσης ότι γνωρίζουμε τους αρχικούς όρους, έστω $\alpha_0 = 35, \beta_0 = 160$.

Αν θέσουμε

$$A = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/10 & 11/10 \end{pmatrix},$$

τότε η σχέση (10.3.2) γίνεται

$$\begin{bmatrix} \alpha_{\kappa+1} \\ \beta_{\kappa+1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/10 & 11/10 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{\kappa} \\ \beta_{\kappa} \end{bmatrix}, \quad \text{δηλαδή} \quad \begin{bmatrix} \alpha_{\kappa+1} \\ \beta_{\kappa+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \alpha_{\kappa} \\ \beta_{\kappa} \end{bmatrix}, \quad \text{για } \kappa \geq 0.$$

Με απλή επαγωγή στο n βρίσκουμε ότι

$$\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} 35 \\ 160 \end{bmatrix}.$$

Στο Παράδειγμα 10.3.3.1.i είδαμε ότι όταν το n γίνει πολύ μεγάλο, τότε ο πίνακας A^n συγκλίνει στον πίνακα

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Επομένως

$$\begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix} \text{ προσεγγίζει τον πίνακα } \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 57 \\ 171 \end{bmatrix}$$

και το μοντέλο σταθεροποιείται στην οριακή τιμή $\alpha = 57$ και $\beta = 171$.

- vii. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών $(\alpha_n)_{n \geq 0}$, $(\beta_n)_{n \geq 0}$, που ικανοποιούν τις αναγωγικές σχέσεις

$$\begin{aligned} \alpha_{\kappa+1} &= q \alpha_{\kappa} + r \beta_{\kappa} \\ \beta_{\kappa+1} &= s \alpha_{\kappa} + t \beta_{\kappa}, \end{aligned}$$

$q, r, s, t \in \mathbb{R}$, όταν ο πίνακας $\begin{pmatrix} q & r \\ s & t \end{pmatrix}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος.

10.4 Εργαστήριο με Mathematica

Θα βρούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές, αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα για κάθε ιδιοτιμή και θα διαγωνιοποιήσουμε τον 3×3 -πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 7 & 8 & 4 \\ -7 & -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

MatrixForm[A = {{-3, -4, -4}, {7, 8, 4}, {-7, -7, -3}}]

$$\begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 7 & 8 & 4 \\ -7 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

Η εντολή **CharacteristicPolynomial**[A, x] υπολογίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$.

p = CharacteristicPolynomial[A, x]

$$-12 + 11x + 2x^2 - x^3$$

Επαληθεύουμε ότι το p είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x) = |A - xI_3|$ του A :

I3 = IdentityMatrix[3]; **Det**[A - x * I3]

$$-12 + 11x + 2x^2 - x^3$$

Η εντολή **Eigenvalues**[*A*] μας δίνει τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, δηλαδή τις ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Eigenvalues[*A*]

$$\{4, -3, 1\}$$

Επαληθεύουμε χρησιμοποιώντας την εντολή **Roots** ή την εντολή **Factor**, τις οποίες συναντήσαμε στις ενότητες 8.4 και 1.1 αντίστοιχα.

Roots[*p* == 0, *x*]

$$x == -3 \parallel x == 1 \parallel x == 4$$

Factor[*p*]

$$-(-4 + x)(-1 + x)(3 + x)$$

Διαπιστώνουμε ότι $P_A(x) = -(x - 4)(x + 3)(x - 1)$, ο *A* έχει τρεις πραγματικές διακεκριμένες ιδιοτιμές, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 1$, επομένως διαγωνιοποιείται (γράψαμε τις τρεις ιδιοτιμές με τη σειρά που μας έδωσε η εντολή **Eigenvalues**[*A*]).

Η εντολή **Eigenvectors**[*A*] μας δίνει από ένα ιδιοδιάνυσμα $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ του πίνακα *A*, με τη σειρά που εμφανίστηκαν οι ιδιοτιμές στην εντολή **Eigenvalues**[*A*] και ισχύει $A \cdot v_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2, 3$.

v = **Eigenvectors**[*A*]

$$\{\{0, -1, 1\}, \{1, -1, 1\}, \{-1, 1, 0\}\}$$

Το $v_1 = (0, -1, 1)$ είναι ένα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα *A* που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 4$ και $A \cdot v_1 = 4 v_1$, ενώ ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι ο

$$V_A(4) = \text{null}(A - 4I_3) = \text{span}\{(0, -1, 1)\},$$

όπως επαληθεύουμε παρακάτω. Όμοια τα $v_2 = (1, -1, 1)$, $v_3 = (-1, 1, 0)$ είναι ιδιοδιανύσματα των ιδιοτιμών $\lambda_2 = -3$ και $\lambda_3 = 1$ αντίστοιχα και ισχύει $A \cdot v_2 = -3 v_2$, $A \cdot v_3 = v_3$. Οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι είναι οι $V_A(-3) = \text{span}\{v_2\}$, $V_A(1) = \text{span}\{v_3\}$.

{**v1** = **v**[[1]], **A.v1**, **4v1**}

$$\{\{0, -1, 1\}, \{0, -4, 4\}, \{0, -4, 4\}\}$$

NullSpace[*A* - 4I3]

$$\{\{0, -1, 1\}\}$$

Παρατήρηση 10.4.0.1 Έστω ότι ο πίνακας $A \in M_3(\mathbb{R})$ έχει δύο ίσες ιδιοτιμές, για παράδειγμα $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Στην περίπτωση που ο *A* είναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε η εντολή **Eigenvectors**[*A*] δίνει δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή λ . Όταν όμως ο *A* είναι μη διαγωνιοποιήσιμος, τότε δεν υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή λ και το δεύτερο διάνυσμα που δίνει η εντολή είναι το μηδενικό, όπως θα δούμε παρακάτω. Όμοια λειτουργεί η εντολή όταν δύο ή περισσότερες ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι ίσες μεταξύ τους.

Διαγωνιοποίηση πίνακα με το Mathematica

Έστω διαγωνιοποιήσιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ψάχνουμε διαγώνιο πίνακα d και αντιστρέψιμο πίνακα P , τέτοιους ώστε $A = P d P^{-1}$.

- Η εντολή **Eigenvalues**[A] μας δίνει τις πλήθους n ιδιοτιμές του A (όχι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους). Έτσι ο διαγώνιος πίνακας που ψάχνουμε είναι ο

$$d = \text{DiagonalMatrix}[\text{Eigenvalues}[A]].$$

- Η εντολή **Eigenvectors**[A] μας δίνει πλήθους n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του A . Ο αντιστρέψιμος πίνακας που ψάχνουμε είναι ο πίνακας συντεταγμένων τους

$$P = \text{Transpose}[\text{Eigenvectors}[A]].$$

Διαγωνιοποιούμε τον πίνακα A που συναντήσαμε παραπάνω:

$$P = \text{Transpose}[\text{Eigenvectors}[A]]; d = \text{DiagonalMatrix}[\text{Eigenvalues}[A]];$$

$$\{\text{MatrixForm}[P], \text{MatrixForm}[d], \text{MatrixForm}[P.d.\text{Inverse}[P]]\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -4 & -4 \\ 7 & 8 & 4 \\ -7 & -7 & -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Υπολογίσαμε τον αντιστρέψιμο πίνακα P , τον διαγώνιο πίνακα d και διαπιστώσαμε ότι το γινόμενο $P d P^{-1}$ ισούται με τον πίνακα A .

Με την εντολή **DiagonalizableMatrixQ**[A] μπορούμε να εξετάσουμε αν ένας πίνακας διαγωνιοποιείται ή όχι.

$$\text{DiagonalizableMatrixQ}[A]$$

True

Επίσης, η εντολή **Eigensystem**[A] μας δίνει ταυτόχρονα τη λίστα των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων του A , αντικαθιστά δηλαδή τις δύο εντολές **Eigenvalues**[A] και **Eigenvectors**[A].

$$\text{Eigensystem}[A]$$

$$\{\{4, -3, 1\}, \{\{0, -1, 1\}, \{1, -1, 1\}, \{-1, 1, 0\}\}\}$$

Υπολογίζουμε τον πίνακα

$$P_A(A) = -A^3 + 2A^2 + 11A - 12I_3 = -(A - 4I_3)(A + 3I_3)(A - I_3):$$

$$\text{MatrixForm}[-A.A.A + 2A.A + 11A - 12I_3]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{MatrixForm}[(A - 4I_3).(A + 3I_3).(A - I_3)]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι $P_A(A) = 0_3$ όπως ορίζει το Θεώρημα των Cayley-Hamilton:

Στη συνέχεια θεωρούμε τους 3×3 -πίνακες

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 10 & 6 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 14 & -6 & -14 \\ -1 & 5 & 1 \\ 11 & -7 & -11 \end{pmatrix}.$$

Θα διαπιστώσουμε ότι οι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, επομένως και ίδιες ιδιοτιμές, όμως ο B θα είναι διαγωνιοποιήσιμος, ενώ ο M δεν θα είναι.

$$B = \{\{-2, 10, 2\}, \{0, 4, 0\}, \{-6, 10, 6\}\}; \quad M = \{\{14, -6, -14\}, \{-1, 5, 1\}, \{11, -7, -11\}\};$$

{MatrixForm[B], MatrixForm[M]}

$$\left\{ \left(\begin{array}{ccc} -2 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 10 & 6 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc} 14 & -6 & -14 \\ -1 & 5 & 1 \\ 11 & -7 & -11 \end{array} \right) \right\}$$

{pB = CharacteristicPolynomial[B, x], pM = CharacteristicPolynomial[M, x]}

$$\{-16x + 8x^2 - x^3, -16x + 8x^2 - x^3\}$$

Factor[pB]

$$-(-4 + x)^2 x$$

{Eigenvalues[B], Eigenvalues[M]}

$$\{\{4, 4, 0\}, \{4, 4, 0\}\}$$

Οι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$P_B(x) = P_M(x) = -x^3 + 8x^2 - 16x = -x(x - 4)^2,$$

και δύο ίσες ιδιοτιμές, $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, η τρίτη ιδιοτιμή τους είναι το $\lambda_3 = 0$. Έτσι, για να είναι διαγωνιοποιήσιμοι θα πρέπει να υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα για την ιδιοτιμή 4.

{Eigenvectors[B], Eigenvectors[M]}

$$\{\{\{1, 0, 3\}, \{5, 3, 0\}, \{1, 0, 1\}\}, \{\{2, 1, 1\}, \{0, 0, 0\}, \{1, 0, 1\}\}\}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας B διαθέτει δυο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

$$u_1 = (1, 0, 3), \quad u_2 = (5, 3, 0)$$

για τη διπλή ιδιοτιμή 4, επομένως $\text{rank}(B - 4I_3) = 1$ και ο B διαγωνιοποιείται. Ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι ο $V_B(4) = \text{null}(B - 4I_3) = \text{span}\{u_1, u_2\}$, ένα επίπεδο του \mathbb{R}^3 . Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο για τον πίνακα M . Το $(0, 0, 0)$ εμφανίστηκε στη λίστα διανυσμάτων που έδωσε η εντολή **Eigenvectors[M]**. Δεν υπάρχουν δυο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του M για την ιδιοτιμή 4, $\text{rank}(M - 4I_3) \neq 1$ και ο πίνακας M δεν διαγωνιοποιείται, βλ. Παρατήρηση 10.4.0.1. Ο αντίστοιχος ιδιοχώρος είναι ο $V_M(4) = \text{null}(M - 4I_3) = \text{span}\{(2, 1, 1)\}$, μία ευθεία του \mathbb{R}^3 . Επαληθεύουμε:

{DiagonalizableMatrixQ[B], DiagonalizableMatrixQ[M]}

$$\{\text{True}, \text{False}\}$$

$\{\text{MatrixRank}[B - 4I_3], \text{MatrixRank}[M - 4I_3]\}$

$\{1, 2\}$

$\{\text{NullSpace}[B - 4I_3], \text{NullSpace}[M - 4I_3]\}$

$\{\{1, 0, 3\}, \{5, 3, 0\}\}, \{\{2, 1, 1\}\}$

Διαγωνιοποιούμε τον πίνακα B , δηλαδή βρίσκουμε αντιστρέψιμο πίνακα S και διαγώνιο πίνακα d' τέτοιους, ώστε $B = S d' S^{-1}$:

$S = \text{Transpose}[\text{Eigenvectors}[B]]$; $d' = \text{DiagonalMatrix}[\text{Eigenvalues}[B]]$;

$\{\text{MatrixForm}[S], \text{MatrixForm}[d'], \text{MatrixForm}[S \cdot d' \cdot \text{Inverse}[S]]\}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 10 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -6 & 10 & 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Επιβεβαιώνουμε το Θεώρημα των Cayley-Hamilton για τους πίνακες B και M . Αφού $P_B(x) = P_M(x) = -x(x - 4)^2$, θα πρέπει να ισχύει

$$B(B - 4I_3)^2 = 0_3, \quad M(M - 4I_3)^2 = 0_3,$$

όπως βλέπουμε παρακάτω:

$\{\text{MatrixForm}[B \cdot (B - 4I_3) \cdot (B - 4I_3)], \text{MatrixForm}[M \cdot (M - 4I_3) \cdot (M - 4I_3)]\}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ο διαγωνιοποιήσιμος πίνακας B ικανοποιεί επιπλέον και τη σχέση

$$B(B - 4I_3) = 0_3,$$

σε αντίθεση με τον μη διαγωνιοποιήσιμο πίνακα M , όπου $M(M - 4I_3) \neq 0_3$,

$\{\text{MatrixForm}[B \cdot (B - 4I_3)], \text{MatrixForm}[M \cdot (M - 4I_3)]\}$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 & 8 & 8 \\ -4 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Θα δείτε, ότι, η σχέση που ικανοποιεί ο πίνακας B δεν είναι τυχαία και ότι οφείλεται στο ότι ακριβώς ο πίνακας B είναι διαγωνιοποιήσιμος. Μπορείτε να διαβάσετε, εάν επιθυμείτε να εντρυφήσετε, για **ελάχιστα πολυώνυμα** πινάκων [1, Κεφάλαιο 7].

Εξάσκηση με το Mathematica

1. Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -3 & -15 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

- i) Να υπολογίσετε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους των παραπάνω πινάκων. Επίσης, να γράψετε τους πίνακες στη μορφή PdP^{-1} , όπου P αντιστρέψιμος και d διαγώνιος πίνακας.
- ii) Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους των πινάκων A , $A + I_3$, $A - I_3$, $A + 2I_3$. Τι παρατηρείτε;
- iii) Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους των πινάκων A , A^2 , A^3 . Τι παρατηρείτε; Να επαναλάβετε και για τους υπόλοιπους πίνακες.
- iv) Να βρείτε τις ιδιοτιμές και τους αντίστοιχους ιδιοχώρους των πινάκων A , A^{-1} , A^{-2} . Τι παρατηρείτε; Να επαναλάβετε και για τους υπόλοιπους πίνακες.
2. ([1, Άσκηση 6.2.12]) Δίνεται το μοντέλο

$$\begin{aligned}x_{\kappa+1} &= 1.2 x_{\kappa} - 18 y_{\kappa} \\y_{\kappa+1} &= 0.005 x_{\kappa} + 0.55 y_{\kappa},\end{aligned}$$

όπου x_{κ} είναι ο πληθυσμός των ποντικών και y_{κ} ο πληθυσμός των γερακιών μίας περιοχής, μετά από κ χρόνια. Δίνεται επίσης ότι $x_0 = 700$ και $y_0 = 14$.

- i) Να εξετάσετε αν θα επιτευχθεί μία ισορροπία με το πέρασμα του χρόνου, δηλαδή αν θα σταθεροποιηθούν οι δύο πληθυσμοί.
- ii) Οι βιολόγοι σε 5 χρόνια προσπαθούν να αυξήσουν τον πληθυσμό των γερακιών και προσθέτουν 1000 ποντικούς. Να βρείτε τον πληθυσμό των γερακιών σε 10 χρόνια από τώρα.
- iii) Μετά από 10 χρόνια ελαττώνεται ξαφνικά ο συντελεστής επιβίωσης των γερακιών από το 0.55 στο 0.50. Οι βιολόγοι έχουν σημάνει συναγεμμό και προσπαθούν να βρουν αν αυτό σημαίνει ότι θα εξαφανιστεί ο πληθυσμός των γερακιών. Να εξετάσετε αν αληθεύουν οι ανησυχίες των βιολόγων.

10.5 Ασκήσεις

Λυμένες Ασκήσεις

10.5.1 Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Να βρεθεί πίνακας $N \in M_3(\mathbb{R})$, τέτοιος ώστε $N^2 = A$.

Λύση. Στο Παράδειγμα 10.3.2.1.i είδαμε ότι ο A έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές 0, 1, 4 και είναι διαγωνιοποιήσιμος:

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{όπου } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι αν Δ είναι ένας από τους παρακάτω τέσσερις πίνακες Δ_i

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

τότε

$$D = \Delta^2 \text{ και } (P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Επομένως, ο πίνακας $N_i = P\Delta_i P^{-1}$ έχει την επιθυμητή ιδιότητα. Μένει να βρούμε τον πίνακα P^{-1} και να κάνουμε τους υπολογισμούς. Για τον P^{-1} χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο του Gauss.

$$\begin{aligned} [P \mid I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right] = [I_3 \mid P^{-1}]. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια,

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$N_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} = -N_1,$$

$$N_3 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad N_4 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} P^{-1} = -N_3. \quad \square$$

10.5.2 Έστω αντιστρέψιμος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιος, ώστε ο $A + A^{-1}$ να είναι μη αντιστρέψιμος πίνακας. Να αποδείξετε ότι ο A δεν διαγωνιοποιείται.

Λύση. Έστω αντίθετα ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$ και διαγώνιος $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in M_n(\mathbb{R})$ τέτοιοι, ώστε $A = PDP^{-1}$. Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος, έχουμε $\lambda_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$ (βλ. Πρόταση 10.3.0.2.ii) και

$$A + A^{-1} = PDP^{-1} + (PDP^{-1})^{-1} = PDP^{-1} + PD^{-1}P^{-1} = P(D + D^{-1})P^{-1},$$

όπου

$$D + D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^2 + 1}{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\lambda_n^2 + 1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Ο πίνακας $A + A^{-1}$ είναι μη αντιστρέψιμος, άρα

$$\begin{aligned} |A + A^{-1}| = 0 &\Rightarrow |P| |D + D^{-1}| \frac{1}{|P|} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda_1^2 + 1}{\lambda_1} \cdots \frac{\lambda_n^2 + 1}{\lambda_n} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lambda_j^2 + 1 = 0, \quad \text{για κάποιο } j \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο, γιατί $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Έτσι ο A δεν διαγωνιοποιείται. \square

10.5.3 i) Να βρείτε τις πιθανές ιδιοτιμές ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ για τον οποίο ισχύει $A^2 = 2A$.

ii) Να προσδιορίσετε όλους τους 2×2 -πίνακες $A \in M_2(\mathbb{R})$ για τους οποίους ισχύει $A^2 = 2A$.

Λύση. i) Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ μία ιδιοτιμή του πίνακα A . Τότε υπάρχει $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, τέτοιο, ώστε

$$A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (10.5.1)$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} (10.5.1) \Rightarrow AA \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= A(\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}) \xrightarrow{A^2=2A} 2A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda(A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}) \xrightarrow{(10.5.1)} \\ \Rightarrow 2\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} &= \lambda^2 \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow (2\lambda - \lambda^2) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{v \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \lambda(2 - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Έτσι οι πιθανές ιδιοτιμές του A είναι οι $\lambda = 0$, $\lambda = 2$. Μάλιστα, όλα τα παραπάνω ισχύουν ακόμα και αν υποθέσουμε ότι $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}^n$. Οι μόνες ιδιοτιμές που μπορεί να έχει ένας πίνακας που ικανοποιεί τη σχέση $A^2 = 2A$ είναι το 0 και το 2.

ii) Για τον πίνακα $A \in M_2(\mathbb{R})$, με $A^2 = 2A$ διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Ο A έχει δύο ίσες ιδιοτιμές $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Τότε το 2 δεν είναι ιδιοτιμή του A , επομένως

$$P_A(2) = |A - 2I_2| \neq 0 \Rightarrow \exists (A - 2I_2)^{-1}.$$

Έτσι,

$$A^2 - 2A = 0_2 \Rightarrow A(A - 2I_2)(A - 2I_2)^{-1} = 0_2(A - 2I_2)^{-1} \Rightarrow A = 0_2.$$

- Ο A έχει δύο ίσες ιδιοτιμές $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Όμοια με προηγουμένως συμπεραίνουμε ότι $A = 2I_2$.
- Ο A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Τότε ο A διαγωνιοποιείται, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad |P| = ad - bc \neq 0,$$

τέτοιος, ώστε

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{|P|} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d - b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} -2bc & 2ab \\ -2cd & 2ad \end{pmatrix}. \quad \square$$

10.5.4 Έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα $A \in M_2(\mathbb{R})$ είναι το

$$P_A(x) = x^2 - 3x + 2.$$

Να αποδείξεται ότι ο πίνακας A ικανοποιεί τη σχέση

$$A^2 - 3A + 2I_2 = 0_2.$$

Λύση. Έχουμε $P_A(x) = (x - 1)(x - 2)$, έτσι ο πίνακας A έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ και είναι διαγωνιοποιήσιμος, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_2(\mathbb{R})$ τέτοιος, ώστε $A = PDP^{-1}$, όπου $D = \text{diag}(1, 2)$. Αφού $A^2 = PD^2P^{-1}$, έχουμε

$$\begin{aligned} A^2 - 3A + 2I_2 &= PD^2P^{-1} - 3PDP^{-1} + 2PI_2P^{-1} = P(D^2 - 3D + 2I_2)P^{-1} = \\ &= P \left(\begin{pmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

Ασκήσεις για Εξάσκηση

10.5.1 Να αποδείξετε την Πρόταση 10.2.0.3.

10.5.2 Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, να αποδείξετε ότι οι πίνακες AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

10.5.3 Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ μία ιδιοτιμή του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $\mu \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι το $\lambda + \mu$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $A + \mu I_n$ και ότι οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι των δύο πινάκων είναι ίσοι, $V_A(\lambda) = V_{A+\mu I_n}(\lambda + \mu)$.

10.5.4 Αν το $\lambda = 3$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$, να βρείτε μία ιδιοτιμή του πίνακα $A^3 - 4A^2 + 5A - I_n$.

10.5.5 Να αποδείξετε ότι κάθε πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ γράφεται ως άθροισμα δύο αντιστρέψιμων πινάκων.

10.5.6 Να βρείτε τις πιθανές ιδιοτιμές του $A \in M_n(\mathbb{C})$, αν για τον πίνακα A ισχύει

$$\text{i) } A^2 = A, \quad \text{ii) } A^2 = I_n, \quad \text{iii) } A^2 - 5A + 6I_n = 0_n.$$

10.5.7 Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πίνακας $A \in M_2(\mathbb{R})$ που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$A \cdot v = v, \quad A \cdot u = 5u,$$

όπου $v = (2, 1)$, $u = (3, 2) \in \mathbb{R}^2$. Να βρείτε τον πίνακα A .

10.5.8 Να βρείτε τον πίνακα $A \in M_3(\mathbb{R})$ με ιδιοτιμές $\lambda = 2$, $\lambda = -1$, αν οι αντίστοιχοι ιδιοχώροι του είναι οι

$$V_A(2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}, \quad V_A(-1) = \text{span}\{(-1, 0, 1)\}.$$

10.5.9 Να βρείτε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, τις ιδιοτιμές και τους ιδιοχώρους των παρακάτω πινάκων

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -15 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_7 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Να γράψετε καθέναν από τους πίνακες αυτούς στη μορφή PDP^{-1} , όπου P αντιστρέψιμος και D διαγώνιος πίνακας.

10.5.10 Να αποδείξετε ότι οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, αλλά ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος, ενώ ο B είναι μη διαγωνιοποιήσιμος πίνακας.

10.5.11 Έστω

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

i) Να υπολογίσετε τους ιδιοχώρους του A και να βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα $P \in M_3(\mathbb{R})$ τέτοιον, ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος.

ii) Να βρείτε το ίχνος, την ορίζουσα και τις ιδιοτιμές του πίνακα $M = A^5 - 2A^{-5}$.

10.5.12 Να υπολογίσετε τον πίνακα A^4 , αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα $A \in M_3(\mathbb{R})$ είναι το $P_A(x) = -x^3 - x^2 - x - 1$.

10.5.13 Να υπολογίσετε τον πίνακα A^n , $n \in \mathbb{Z}$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

10.5.14 Να βρεθεί πίνακας $N \in M_3(\mathbb{R})$ τέτοιος, ώστε $N^2 = A$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10.5.15 Να βρείτε τον γενικό όρο της ακολουθίας Fibonacci, που δίνεται από τον αναδρομικό τύπο

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad n \geq 0, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Βιβλιογραφία

- [1] Θ. Θεοχάρη-Αποστολίδη, Χ. Βαβατσούλας και Χ. Χαραλάμπους. *Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2017. ISBN: 978-960-418-727-0.
- [2] Α. Φωτιάδης και Χ. Χαραλάμπους. *Μία Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. [Προπτυχιακό εγχειρίδιο]. Κάλλιπος, Ανοικτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις, 2015. ISBN: 978-960-603-273-8. URL: <http://hdl.handle.net/11419/2329>.
- [3] S. Gilbert. *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*. Κρήτη: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1993. ISBN: 978-960-730-970-9.
- [4] Αθ. Πάπιστας. *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα, 2019. ISBN: 978-960-418-841-3.

Μέρος II

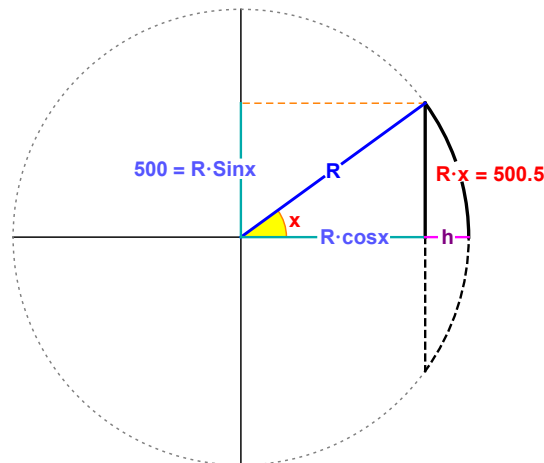
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 1

1.2.13 (σελ. 11):

Σύμφωνα με την άσκηση, η σιδηροτροχιά έχει σχήμα τόξου κύκλου. Αφού το μήκος του τόξου ενός κύκλου με ακτίνα R και κεντρική γωνία θ (μετρημένη σε ακτίνια) είναι $R \cdot \theta$, συμπεραίνουμε ότι $R \cdot \theta = 1001$. Για να διευκολύνουμε τη μελέτη μας, ας περιστρέψουμε τον κύκλο, έτσι ώστε η κεντρική γωνία να διχοτομείται από τον οριζόντιο άξονα και ας ονομάσουμε a το ήμισυ της κεντρικής γωνίας, όπως στο επόμενο σχήμα.



Έχουμε ότι $R \cdot a = 500.5$. Η πλευρά του τριγώνου απέναντι από τη γωνία a έχει μήκος $R \cdot \sin a$ και είναι ακριβώς το μισό του μήκους της ευθύγραμμης σιδηροτροχιάς. Επομένως, έχουμε ότι $R \cdot \sin a = 500$, Συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{a}{\sin a} = 1.001 \Leftrightarrow \frac{a}{\sin a} - 1.001 = 0.$$

Με άλλα λόγια, το a είναι ρίζα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} - 1.001.$$

Βρίσκουμε προσεγγιστικά μία ρίζα της συνάρτησης $f(x)$ ως εξής: κάνουμε τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)$ με την εντολή **Plot**[**f(x)**, {**x**, **a₁**, **a₂**}] πειραματιζόμενοι και διαλέγοντας κάποιες αρχικές τιμές a_1, a_2 , προσπαθώντας πάντα να βρούμε το σημείο τομής της παράστασης C_f με τον οριζόντιο άξονα. Μικραίνοντας διαδοχικά το διάστημα $[a_1, a_2]$, βλέπουμε ότι η C_f τέμνει τον οριζόντιο άξονα κοντά στο σημείο με τετμημένη 0.0775. Έτσι, το $a \simeq 0.0775$ είναι προσεγγιστική ρίζα της $f(x)$. Επομένως, $R \simeq 500.5/0.0775$ και κατά συνέπεια

$$h \simeq R - R \cos 0.0775 \simeq 19.38.$$

Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 2

2.4.1 (σελ. 33): Θέτουμε $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq \pm a$.

2.4.2 (σελ. 33): Ακολουθήστε την ίδια μεθοδολογία όπως στη λυμένη άσκηση **2.4.3**. Θα βρείτε $z = 0, 1, -1, i, -i$.

2.4.3 (σελ. 34): Γράψτε $(1 \pm i)^{20} = [(1 \pm i)^2]^{10}$.

2.4.5 (σελ. 34): Χρησιμοποιήστε τις ιδιότητες της Πρότασης 2.2.0.2.

2.4.6 (σελ. 34): $z \in i\mathbb{R}$.

2.4.7 (σελ. 34): Βλ. Πρόταση 2.2.0.2.ii.

2.4.8 (σελ. 34): Βλ. Πρόταση 2.2.0.2.xi.

Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 3

3.7.1 (σελ. 65): $w = 1/2 - i\sqrt{3}/2$.

3.7.2 (σελ. 65): $z^{12} = -1$, $z^{26} = \sqrt{3}/2 + i/2$.

3.7.3 (σελ. 65): $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 2 + i$.

3.7.3 (σελ. 65): $z = -4$ ή $z = \pm 2 + 2i\sqrt{3}$.

3.7.4 (σελ. 65): $P(X) = (3X - 2)(X^2 + 4X + 5)$.

3.7.5 (σελ. 66): $z = \pm i$ ή $z = \pm 2i$.

3.7.6 (σελ. 66): $P(X) = (X - 1)^2(X^2 + 2X + 5)$.

3.7.7 (σελ. 66): Ισχύει $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$, θα βρείτε $A = 4$.

Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 4

4.5.1 (σελ. 104): $\alpha) \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 24 & 37 \end{pmatrix}$, $\beta) \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\gamma) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 7 \\ 10 & 4 & 6 & 14 \\ 20 & 8 & 12 & 28 \end{pmatrix}$, $\delta) 0_2$, $\epsilon) 0_3$.

4.5.2 (σελ. 105): Για παράδειγμα $A = E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$,

όπου $*$ είναι τυχαίο στοιχείο του K .

4.5.3 (σελ. 105): **i**) $AB = [12], BA = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, **ii**) $AB = 0_2, BA = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$,

iii) $AB = \begin{pmatrix} 3 & -16 & 3 \\ 16 & 2 & 14 \\ -7 & -29 & -3 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 3 & -20 & -9 \\ 22 & -2 & 8 \\ 15 & -13 & 1 \end{pmatrix}$, **iv**) $AB = \begin{pmatrix} 3 & -16 \\ 16 & 2 \\ -7 & -29 \end{pmatrix}$, δεν ορίζεται το γινόμενο BA .

4.5.4 (σελ. 105): **i**) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, **ii**) 0_3 , **iii**) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

4.5.5 (σελ. 105): Ο X ικανοποιεί τη σχέση $X^2 = I_2$. Θα βρείτε $(a, b) = (1, -1)$ ή $(a, b) = (-1, 1)$.

4.5.6 (σελ. 105): **i**) $A^{-1} = A, B^{-1} = B$. **ii**) Αν $\exists (A - B)^{-1}$, τότε $A - B = 0_3$, το οποίο δεν ισχύει. **iii**) $(A + B)^{-1} = 1/4(A + B)$. **iv**) $(A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 8 \\ -2 & 2 & -2 \\ -10 & 10 & -10 \end{pmatrix} \neq 0_3$.

4.5.7 (σελ. 105): Ισχύει $A^T = A, B^T = B$. Να δείξετε ότι $M^T = M$, για $M = A + B, A - B, \kappa A, \kappa A + \lambda B, ABA, A^m$.

4.5.8 (σελ. 105): $(AB)^T = AB \Leftrightarrow BA = AB$.

4.5.9 (σελ. 105): A, A^3 αντισυμμετρικοί, A^2, A^4 συμμετρικοί πίνακες.

4.5.11 (σελ. 106): **ii**) $\forall M \in GL_n(K)$ ισχύει $(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$ και $(-M)^{-1} = -M^{-1}$. Για τον αντισυμμετρικό A ισχύει επιπλέον $A^T = -A$. Έτσι $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$.

4.5.13 (σελ. 106): Να δείξετε ότι $B^2 = I_3, B^{1000} = I_3, B^{1111} = B$.

4.5.14 (σελ. 106): **i**) $A^{-1} = A$. **ii**) $6I_2 + 5A$.

iii) $X = A^{-1}B = AB = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 - a & 1 \end{pmatrix}, Y = BA^{-1} = BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a - 1 & a \end{pmatrix}$.

4.5.15 (σελ. 106): $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.5.16 (σελ. 106): **i**) Να δείξετε ότι $A^4 = I_2$. **ii**) Δουλέψτε όπως στο Παράδειγμα 4.2.2.7. **iii**) $A^{2023} = A^{4 \cdot 505 + 3} = A^3, A^{-2023} = A^{4 \cdot (-506) + 1} = A$.

4.5.17 (σελ. 106): Να δείξετε ότι $A^{2022} = I_2, A^{2019} = -I_2$, επομένως $(4.5.4) \Leftrightarrow (x^2 - x - 2)I_2 = 0_2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$.

4.5.18 (σελ. 106): Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής, να αποδείξετε ότι $A^m = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^m = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4.5.19 (σελ. 106): Έστω $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), AB = (c_{ij})$. Έχουμε A, B άνω τριγωνικοί $\Leftrightarrow a_{pq} = b_{pq} = 0$, για κάθε $p > q$.

Αρκεί να δείξουμε ότι $c_{st} = 0$, για κάθε $s > t \geq 1$. Πράγματι,

$$c_{st} = \sum_{k=1}^n a_{sk}b_{kt} = \sum_{k=1}^t a_{sk}b_{kt} + \sum_{k=t+1}^n a_{sk}b_{kt} = \sum_{k=1}^t 0 \cdot b_{kt} + \sum_{k=t+1}^n a_{sk} \cdot 0 = 0.$$

4.5.20 (σελ. 107): Δουλέψτε όπως στο Παράδειγμα 4.3.0.3.i, $A^{-1} = A + 2I_n$, $B^{-1} = -\frac{2}{3}B^2 - \frac{4}{3}B + \frac{2}{3}I_n$.

4.5.21 (σελ. 107): $A^T = 2A \Rightarrow (A^T)^T = 2A^T = 2 \cdot 2A \Rightarrow A = 4A \Rightarrow 3A = 0_n \Rightarrow A = 0_n$.

4.5.22 (σελ. 107): Έστω $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$. Από τις ιδιότητες (iii), (iv) της Πρότασης

2.2.0.2, έχουμε $\overline{\left(\sum_{\kappa=1}^n a_{i\kappa} b_{\kappa j}\right)} = \sum_{\kappa=1}^n \overline{(a_{i\kappa} b_{\kappa j})} = \sum_{\kappa=1}^n \bar{a}_{i\kappa} \bar{b}_{\kappa j}$, επομένως $\overline{(A \cdot B)} = \bar{A} \cdot \bar{B}$.

Επίσης, αν $\exists A^{-1}$, τότε $\bar{A} \cdot \overline{(A^{-1})} = \overline{(A^{-1})} \cdot \bar{A} = \bar{I}_n = I_n$. Έτσι ο \bar{A} είναι αντιστρέψιμος, με $(\bar{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$.

4.5.23 (σελ. 107): Να αποδείξετε ότι $X = (A^{-1})^T + A^{-1} + 3(A^{-1})^T A^{-1}$, επομένως $X^T = X$.

Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 5

5.7.1 (σελ. 145): $\text{rank}(A) = 3, \text{rank}(B) = \text{rank}(C) = 4$. Και οι τρεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι.

5.7.2 (σελ. 145): **i**) $R = Q = I_3$,

$$\text{ii) } R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ iii) } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{5.7.3 (σελ. 145): i) } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ ii) } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Και για τις δύο περιπτώσεις της άσκησης, ο πίνακας E δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Καλείσθε να επαληθεύσετε τη σχέση $EA = R$.

$$\text{5.7.4 (σελ. 145): } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{5.7.5 (σελ. 145): } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ -5/3 & -2/3 & 4/3 \end{bmatrix}, C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{5.7.6 (σελ. 146): } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, X_4 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ -1 & -4 & 10 \\ -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 6

6.7.1 (σελ. 182): $|A| = -2, |B| = 3 + 3i, |M| = 90, |N| = -72$.

6.7.2 (σελ. 182): Δουλέψτε όπως στη Λυμένη Άσκηση **6.7.2**.

6.7.3 (σελ. 182): Να δουλέψτε όμοια με τη Λυμένη Άσκηση **6.7.3**.

6.7.5 (σελ. 183): Να δουλέψτε όμοια με τη Λυμένη Άσκηση **6.7.4**.

6.7.6 (σελ. 183): Παρατηρήστε ότι ο A είναι αντισυμμετρικός 5×5 -πίνακας, επομένως, $\det(A) = 0$, βλ. Παράδειγμα 6.2.0.4.ii.

6.7.7 (σελ. 183): Να δείξετε ότι $\det(A) = 0$, βλ. Παράδειγμα 6.2.0.4.ii.

6.7.8 (σελ. 183): $x = -2, 14$.

6.7.9 (σελ. 183): $\det(M) = -(x - 2)(x^2 - 2x + 5)$.

6.7.10 (σελ. 183): $A^{-1} = \frac{1}{17} B, \quad B^{-1} = \frac{1}{17} A, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 17 - \frac{17}{2} - \frac{51}{4} & \frac{51}{4} \\ 0 & \frac{17}{2} - \frac{17}{4} - \frac{51}{4} \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} - \frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{pmatrix}$.

6.7.11 (σελ. 183): Να δουλέψετε όμοια με το Παράδειγμα 6.5.0.2.iii. Θα βρείτε

$$\det(A) = (2a + 1)(1 - a)^2, \quad A^{-1} = \frac{1}{(2a + 1)(1 - a)} \begin{pmatrix} a + 1 & -a & -a \\ -a & a + 1 & -a \\ -a & -a & a + a \end{pmatrix}.$$

6.7.12 (σελ. 184): $|A| = 2$, έτσι $|\text{adj}(A)| = 2^3$ (βλ. Λυμένη Άσκηση **6.7.9**) και $(\text{adj}(A))^{-1} = \frac{1}{2} A$.

Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 7

7.8.1 (σελ. 220): **i**) $\{(-3z, 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$, **ii**) ασύμβατο, **iii**) $\{(-3z, 1 + 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

7.8.2 (σελ. 221): **i**) $\text{null}(A_1) = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, $\text{null}(A_2) = \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$, $\text{null}(A_3) = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. **ii**) Και στις τρεις περιπτώσεις πρέπει $-5a + 2b + c = 0$.

7.8.3 (σελ. 221): $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{5}, \quad b = -\frac{3}{5}, \quad c = \frac{7}{5}$.

7.8.4 (σελ. 221): $AX = B$ ασύμβατο, $\{(2 - z, 1 - 2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$ το σύνολο λύσεων του $A^T X = B$.

7.8.5 (σελ. 221): $\text{null}(A) = \{x_3 \cdot (-1/5, 2/5, 1, 0, 0) + x_4 \cdot (-1, 1, 0, 1, 0) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$, $\{(1, 0, 0, 0, 1) + (\nu_1, \dots, \nu_5) : (\nu_1, \dots, \nu_5) \in \text{null}(A)\}$ το σύνολο λύσεων του συστήματος.

7.8.6 (σελ. 221): $Ax = B$ συμβατό $\Leftrightarrow a = -2$, τότε το σύνολο λύσεων του $AX = B$ είναι το $\{(-5 + 3\kappa, -3 + 2\kappa, 5 - \kappa, \kappa) : \kappa \in \mathbb{R}\}$.

7.8.7 (σελ. 221): **i**) $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2}{7}, \frac{37}{7}, \frac{18}{7}\right)$, **ii**) $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 3, -3, 1)$.

7.8.8 (σελ. 221): Αν $\mu \neq 0, 1, 2$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, τη μηδενική.

Για $\mu = 0, 1, 2$ το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι αντίστοιχα το

$$\{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}, \quad \{(0, -z/2, z) : z \in \mathbb{R}\}, \quad \{(-4y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}.$$

7.8.9 (σελ. 221): Έστω A ο πίνακας συντελεστών του συστήματος, $\det(A) = (\kappa - 1)(\lambda - 1)$.

• $\kappa \neq 1, \lambda \neq 1, \mu \in \mathbb{R} : \text{null}(A) = \{(0, 0, 0)\}$.

• $\kappa = 1, \lambda \neq 1, \mu \in \mathbb{R} : \text{null}(A) = \left\{ \left(\frac{\mu - \lambda}{\lambda - 1} z, \frac{1 - \mu}{\lambda - 1} z, z \right) : z \in \mathbb{R} \right\}$.

• $\kappa = 1, \lambda = 1, \mu \neq 1 : \text{null}(A) = \{(-y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$.

• $\kappa = 1, \lambda = 1, \mu = 1 : \text{null}(A) = \{(-y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$.

• $\kappa \neq 1, \lambda = 1, \mu \in \mathbb{R} : \text{null}(A) = \{(-y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$.

7.8.10 (σελ. 222): **i**) • $\lambda \neq 1, 3$ μοναδική λύση $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\lambda + 2}{\lambda - 1}, -\frac{4}{\lambda - 1}, \frac{5}{\lambda - 1}\right)$.

• $\lambda = 1$ ασύμβατο. • $\lambda = 3$ άπειρες λύσεις $\{(x_3, 3 - 2x_3, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$.

ii) • $\lambda \neq 0, \pm 2$ μοναδική λύση $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{\lambda - 2}, -\frac{\lambda + 3}{\lambda - 2}, -\frac{\lambda + 2}{\lambda - 2}\right)$.

• $\lambda = 0$ άπειρες λύσεις $\{(1 - 3x_3/2, 1 + x_3/2, x_3) : x_3 \in \mathbb{R}\}$.

• $\lambda = 2$ ασύμβατο. • $\lambda = -2$ άπειρες λύσεις $\{(-x_2, x_2, 0) : x_2 \in \mathbb{R}\}$.

7.8.11 (σελ. 222): • $\lambda \neq 8, \mu \in \mathbb{R}$: μοναδική λύση. • $\lambda = 8, \mu = 0$: άπειρες λύσεις.

• $\lambda = 8, \mu \neq 0$: ασύμβατο.

7.8.12 (σελ. 222): Έστω A ο πίνακας συντελεστών του συστήματος, $\det(A) = (\mu-1)(\lambda-6)$.

• $\mu \neq 1, \lambda \neq 6, \kappa \in \mathbb{R}$: μοναδική λύση.

• $\mu = 1, \lambda \in \mathbb{R}, \kappa \neq -2/3$: ασύμβατο. • $\mu = 1, \lambda \in \mathbb{R}, \kappa = -2/3$: άπειρες λύσεις.

• $\mu \neq 1, \lambda = 6, \kappa \neq -2/3$: ασύμβατο. • $\mu \neq 1, \lambda = 6, \kappa = -2/3$: άπειρες λύσεις.

7.8.13 (σελ. 222): Έστω A ο πίνακας συντελεστών του συστήματος,

$$\det(A) = (\mu - \lambda)(\lambda - 1)(\mu - 1).$$

• $\mu \neq 1, \lambda \neq 1, \mu \neq \lambda$: μοναδική λύση,

$$(x, y, z) = \left(\frac{(\mu-2)(\lambda-2)}{(\lambda-1)(\mu-1)}, \frac{\mu-2}{(\mu-\lambda)(\lambda-1)}, \frac{2-\lambda}{(\mu-\lambda)(\mu-1)} \right).$$

• $\mu = 1, \lambda \neq 2$: ασύμβατο. • $\mu = 1, \lambda = 2$: άπειρες λύσεις $\{(-z, 1, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

• $\lambda = 1, \mu \neq 2$: ασύμβατο. • $\lambda = 1, \mu = 2$: άπειρες λύσεις $\{(-y, y, 1) : y \in \mathbb{R}\}$.

• $\mu = \lambda \neq 2$: ασύμβατο. • $\mu = \lambda = 2$: άπειρες λύσεις $\{(0z, 1 - z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

7.8.14 (σελ. 222): Πρέπει $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$.

Το σύνολο λύσεων είναι • $\{(3y, y) : y \in \mathbb{R}\}$, αν $\lambda = 1$ • $\{(y, y) : y \in \mathbb{R}\}$, αν $\lambda = -1$.

7.8.15 (σελ. 222): Τότε το ομογενές σύστημα $\begin{bmatrix} 3-\lambda & -a \\ a & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ έχει μη μηδενική

$$\text{λύση} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -a \\ a & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + (a^2 - 3) = 0.$$

Αφού υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ που επαληθεύει τη δευτεροβάθμια εξίσωση που προέκυψε, πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq a \leq 2$.

7.8.16 (σελ. 222): $-3a + b + 2c + d = 0$.

7.8.17 (σελ. 223): Όχι. Αν θέσουμε $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, προκύπτει ένα 4×4 -γραμμικό σύστημα

$MX = B$, όπου $X = [x \ y \ z \ w]^T$, με $\det(M) = 0$, έτσι το σύστημα δεν έχει μοναδική λύση, δεν υπάρχει μοναδικός πίνακας A .

7.8.18 (σελ. 223): Προκύπτει ομογενές 4×4 -γραμμικό σύστημα $MX = 0_{4 \times 1}$, όπου $X = [x \ y \ z \ w]^T$. Για να έχει το σύστημα μη μηδενική λύση πρέπει $\det(M) = 0 \Leftrightarrow a + d = 0$ ή $ac - bd = \det(A) = 0$.

7.8.19 (σελ. 223): Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 το πλήθος των φοιτητών που επέλεξαν να εξεταστούν σε 1, 2, 3, 4 μαθήματα αντίστοιχα. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100, \quad x_1 + x_4 = 50, \quad 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = 4 \cdot 70$, βρίσκουμε $x_2 = -80 + 3x_4$. Όμως $0 \leq x_2 \leq 50$, άρα $80/3 \leq x_4 \leq 130/3$. Έτσι $27 \leq x_4 \leq 43$, αφού $x_4 \in \mathbb{N}$.

7.8.20 (σελ. 223): i) $f(x) = -3 - 2x - x^2$. ii) $g(x) = 2 - x^2 + x^3$.

Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 8

8.5.1 (σελ. 261): Για $a = 1$ ισχύει $5v_1 + 4v_2 - v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$. Για $a = 4$ ισχύει $5v_1 + v_2 - v_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$.

8.5.3 (σελ. 261): $a \neq b, a \neq -2, b \neq -2$.

8.5.4 (σελ. 261): $3x + 2y - 5z = 3$.

8.5.5 (σελ. 261): Υπάρχουν άπειρα επίπεδα του \mathbb{R}^3 με εξίσωση της μορφής $(-\gamma - 2\delta/3)x + (-\gamma - \delta)y + \gamma z = \delta, \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0,$

που περιέχουν την ευθεία AB . Αν θέσουμε για παράδειγμα $\gamma = -5$ και $\delta = 3$, βρίσκουμε το

επίπεδο της προηγούμενης άσκησης.

8.5.6 (σελ. 261): **i**) Οι ευθείες σχηματίζουν τρίγωνο. **ii**) Οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.

8.5.7 (σελ. 261): **i**) Τέμνονται σε μία ευθεία. **ii**) Τέμνονται ανά δύο σε τρεις παράλληλες ευθείες. **iii**) Το p_5 τέμνει τα παράλληλα επίπεδα p_1, p_4 σχηματίζοντας δύο παράλληλες ευθείες. **iv**) Έχουν ένα κοινό σημείο.

Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 9

9.5.1 (σελ. 293): Εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 9.1.0.4.

9.5.2 (σελ. 293): $\text{Ker } f_A = \text{span}\{(1, -1, 1)\}$, $\text{Im } f_A = \text{span}\{(1, 0, 0), (2, 1, 2)\}$,
 $\text{Ker } f_B = \text{span}\{(2, -1, 1)\}$, $\text{Im } f_B = \text{span}\{(1, 1, 1), (4, 5, 7)\}$.

9.5.3 (σελ. 293): $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

9.5.4 (σελ. 293): $f_A(a-b+2c, b-c, -a+b-c) = (a, b, c)$,
 $f_A^{-1}(a, b, c) = (a-b+2c, b-c, -a+b-c)$.

9.5.5 (σελ. 294): **i**) $|A| = 2 \neq 0$. **ii**) $v_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $v_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $v_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

iii) $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ είναι η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο πίνακας

$$A^{-1} = [f_A^{-1}(e_1) | f_A^{-1}(e_2) | f_A^{-1}(e_3)] = [v_1 | v_2 | v_3].$$

9.5.6 (σελ. 294): $\text{Ker } f_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+3y=0\} = \text{span}\{(-3, 2)\}$,
 $\text{Im } f_A = \text{span}\{(1, 2)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y=2x\}$, $f_A(\varepsilon) = \text{Im } f_A$, $f_A(\zeta) = \{(2, 4)\}$.

9.5.7 (σελ. 294): **i**) $\text{Ker } f_A = \text{span}\{(-3, 2, 1)\}$. **ii**) $a+b-c=0$. **iii**) $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \eta$,
 $\eta \in \text{Ker } f_A$. **iv**) $f_A(p) = \text{span}\{(2, 3, 5), (2, 1, 3)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\} = \text{Im } f_A$,
 $f_A(q) = \{(1, 1, 2) + \kappa(0, 1, 1) : \kappa \in \mathbb{R}\}$. **v**) $f_A(y'y) = \text{span}\{(1, 2, 3)\}$, η τομή των
επιπέδων είναι η ευθεία $\varepsilon : \{(0, 1, 0) + z(-3, 2, 1) : z \in \mathbb{R}\}$, με $f_A(\varepsilon) = \{(1, 2, 3)\}$.

9.5.8 (σελ. 294): **ii**) $\text{Ker } f_A = \text{span}\{(2, 1, 1)\} \neq \{(0, 0, 0)\}$, $\text{Im } f_A = \mathbb{R}^2$.

iii) $f_A(p) = \mathbb{R}^2$, $f_A(q) = \{(-3, -9) + \kappa(1, -2) : \kappa \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+y=-15\}$.

iv) $f_A(\varepsilon_1) = \text{span}\{(-2, 5)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -5x+2y=0\}$, $f_A(\varepsilon_2) = \{(-4, 7)\}$.

9.5.9 (σελ. 294): Είναι οι γραμμικές συναρτήσεις $\phi_{\frac{2\pi}{3}}, \phi_{-\frac{2\pi}{3}} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζουν

αντίστοιχα οι πίνακες $A_{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$, $A_{-\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

9.5.10 (σελ. 294): Η προβολή και ο αντικατοπτρισμός στην ευθεία ε είναι οι γραμμικές συναρτήσεις $p_\varepsilon, \phi_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ που ορίζουν αντίστοιχα οι πίνακες

$$P_\varepsilon = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_\varepsilon = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{έτσι } M'(-\frac{9}{5}, \frac{18}{5}), \quad M''(-\frac{23}{5}, \frac{11}{5}).$$

9.5.11 (σελ. 295): Οι ζητούμενες είναι οι γραμμικές συναρτήσεις του \mathbb{R}^2 που ορίζουν οι

πίνακες **i**) $A_\zeta P_\varepsilon = \frac{1}{5^2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, **ii**) $P_\varepsilon A_\zeta = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 22 & -4 \end{pmatrix}$.

Απαντήσεις και Υποδείξεις για Κεφάλαιο 10

10.5.1 (σελ. 330): Αποδεικνύουμε την πρόταση επαγωγικά ως προς s . Η πρόταση ισχύει για $s=1$, αφού το ιδιοδιάνυσμα v_1 είναι μη μηδενικό, οπότε είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει για $s-1$ ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές, θα αποδείξουμε ότι ισχύει για s . Έστω $\kappa_1, \dots, \kappa_s \in \mathbb{R}$, με

$$\kappa_1 v_1 + \cdots + \kappa_s v_s = 0_{\mathbb{R}^n}, \quad (1)$$

τότε

$$f_A(\kappa_1 v_1 + \cdots + \kappa_s v_s) = f_A(0_{\mathbb{R}^n}) \Rightarrow \kappa_1 f_A(v_1) + \cdots + \kappa_s f_A(v_s) = 0_{\mathbb{R}^n},$$

επομένως

$$\kappa_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \kappa_s \lambda_s v_s = 0_{\mathbb{R}^n}. \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (1) επί λ_s και την αφαιρούμε από τη (2), έτσι

$$\kappa_1(\lambda_1 - \lambda_s)v_1 + \cdots + \kappa_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s)v_{s-1} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Από την υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής, τα v_1, \dots, v_{s-1} είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα

$$\kappa_1(\lambda_1 - \lambda_s) = \cdots = \kappa_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s) = 0 \xrightarrow[1 \leq j < s]{\lambda_j \neq \lambda_s} \kappa_1 = \cdots = \kappa_{s-1} = 0.$$

και η σχέση (2) γίνεται

$$\kappa_s v_s = 0_{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{v_s \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \kappa_s = 0.$$

Επομένως, τα v_1, \dots, v_s είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

10.5.2 (σελ. 331): $AB = A(BA)A^{-1}$, οι πίνακες AB και BA είναι όμοιοι, επομένως, έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

10.5.3 (σελ. 331): Εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 10.2.0.5.iii.

10.5.4 (σελ. 331): Εργαστείτε όπως στο Παράδειγμα 10.2.0.5.vi, το $3^3 - 4 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 1 = 5$ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα $A^3 - 4A^2 + 5A - I_n$.

10.5.5 (σελ. 331): Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(x) = |A - xI_n|$ έχει το πολύ n πραγματικές ρίζες. Έστω $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa \neq 0$, τέτοιο, ώστε $P_A(\kappa) = |A - \kappa I_n| \neq 0$. Ο πίνακας $A - \kappa I_n$ είναι αντιστρέψιμος και $A = (A - \kappa I_n) + \kappa I_n$.

10.5.6 (σελ. 331): Εργαστείτε όπως στη Λυμένη Άσκηση 10.5.3. Αν λ είναι μία ιδιοτιμή του πίνακα A , τότε **i)** $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$, **ii)** $\lambda = \pm 1$, **iii)** $\lambda = 2$ ή $\lambda = 3$.

10.5.7 (σελ. 331): Τα v, u είναι ιδιοδιανύσματα του A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$, έτσι

$$A = [v|u] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} [v|u]^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 24 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}.$$

10.5.8 (σελ. 331): $V_A(2) = \text{span}\{(1, 0, 0), (0, -1, 1)\}$, τα $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, -1, 1), v_3 = (-1, 0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $2, 2, -1$ και

$$A = [v_1|v_2|v_3] \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} [v_1|v_2|v_3]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

10.5.9 (σελ. 331): $V_{A_1}(2) = \text{span}\{(1, 2)\}$, $V_{A_1}(3) = \text{span}\{(1, 3)\}$,

$$V_{A_2}(2) = \text{span}\{(-3, 1)\}, \quad V_{A_2}(3) = \text{span}\{(-5, 2)\},$$

$$V_{A_3}(0) = \text{span}\{(-1, 1, 2)\}, \quad V_{A_3}(1) = \text{span}\{(0, -1, 1)\}, \quad V_{A_3}(4) = \text{span}\{(3, 1, 2)\},$$

$$V_{A_4}(-2) = \text{span}\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}, \quad V_{A_4}(1) = \text{span}\{(1, 1, 1)\},$$

$$V_{A_5}(3) = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}, \quad V_{A_5}(1) = \text{span}\{(-1, 0, 1)\},$$

$$V_{A_6}(2) = \text{span}\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}, \quad V_{A_6}(4) = \text{span}\{(-1, 0, 1)\},$$

$$V_{A_7}(-1) = \text{span}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}, \quad V_{A_7}(2) = \text{span}\{(1, 1, 1)\},$$

10.5.10 (σελ. 331): $P_A(x) = P_B(x) = -(x+1)^2(x-2)$, όμως $\text{rank}(A + I_3) = 1$, $\text{rank}(B + I_3) = 2$.

10.5.11 (σελ. 332): **i)** $V_A(-1) = \text{span}\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$, $V_A(2) = \text{span}\{(1, 0, 1)\}$,

$A = PDP^{-1}$, με

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) $M = PD^5P^{-1} - 2PD^{-5}P^{-1} = P(D^5 - 2D^{-5})P^{-1}$. Ο M είναι όμοιος με τον πίνακα

$$D^5 - 2D^{-5} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 511/16 \end{pmatrix}.$$

Έτσι ο M έχει το ίδιο ίχνος, την ίδια ορίζουσα και τις ίδιες ιδιοτιμές με τον πίνακα $D^5 - 2D^{-5}$.

10.5.12 (σελ. 332): $P_A(x) = -(x+1)(x^2+1)$. Αν θεωρήσουμε τον A ως πίνακα του $M_3(\mathbb{C})$, τότε έχει τρεις διακεκριμένες ιδιοτιμές, $-1, i, -i$, επομένως είναι διαγωνιοποιήσιμος, υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in M_3(\mathbb{C})$ τέτοιος, ώστε

$$A = P \operatorname{diag}(-1, i, -i) P^{-1} \Rightarrow A^4 = P \operatorname{diag}((-1)^4, (i)^4, (-i)^4) P^{-1} = P I_3 P^{-1} = I_3.$$

$$\mathbf{10.5.13}$$
 (σελ. 332): $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1}, \quad A^n = \begin{pmatrix} -3 + 4 \cdot 2^n & 2 - 2 \cdot 2^n \\ -6 + 6 \cdot 2^n & 4 - 3 \cdot 2^n \end{pmatrix}.$

$$\mathbf{10.5.14}$$
 (σελ. 332): $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1},$

$$N = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

$$\mathbf{10.5.15}$$
 (σελ. 332): $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi} \right)^n \right), \quad \text{όπου } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΟΡΟΛΟΓΙΑΣ

- Αλγόριθμος επίλυσης γραμμικών συστημάτων, 192
- Αλγόριθμος εύρεσης Ιδιοτιμών και Ιδιοχώρων πίνακα, 301
- Αλγόριθμος του Gauss, 117
- Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας, 55
- Θεώρημα Cayley-Hamilton, 308, 326
- Θεώρημα De Moivre, 46
- Μέθοδος Gauss για την εύρεση αντίστροφου, 125
- Φασματικό Θεώρημα, 314
- άθροισμα πινάκων, 72
- άνω τριγωνικός πίνακας, 70
- ίσοι πίνακες, 69
- ίχνος πίνακα, 69
- αδύνατο σύστημα, 187
- αλγεβρική πολλαπλότητα ρίζας πολυωνύμου, 55
- ανάστροφος πίνακα, 71
- αναλλοίωτο σύνολο, 304
- αντίθετος πίνακα, 71
- αντίστροφος πίνακας, 79
- αντιστρέψιμος πίνακας, 79
- αντισυμμετρικός πίνακας, 71
- αριστερόστροφη περιστροφή, 268
- ασύμβατο σύστημα, 187
- βαθμίδα πίνακα, 122
- βαθμωτός πολλαπλασιασμός αριθμού με πίνακα, 83
- βαθμωτός πολλαπλασιασμός σε διανυσματικό χώρο, 226
- γενική γραμμική ομάδα, 86
- γινόμενο αριθμού με πίνακα, 83
- γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο, 126, 228
- γραμμικά ανεξάρτητοι πίνακες, 132
- γραμμικά εξαρτημένο σύνολο, 126, 228
- γραμμική θήκη, 231
- γραμμική συνάρτηση, 267
- γραμμική συνάρτηση που ορίζει πίνακα, 263
- γραμμικό σύστημα, 186
- γραμμικός συνδυασμός, 126, 228
- γραμμοπράξεις, 110
- δέλτα του Kronecker, 71
- διαγωνιοποιήσιμος πίνακας, 311
- διαγώνιος πίνακας, 70
- διανυσματική ακτίνα, 17
- διανυσματικός χώρος, 226
- διανύσματα, 226
- δυνάμεις τετραγωνικού πίνακα, 81
- εικόνα γραμμικής συνάρτησης, 275
- εικόνα μιγαδικού στο μιγαδικό επίπεδο, 17
- ελάσσων πίνακας, 148
- ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών πίνακα, 122
- επαυξημένος πίνακας συστήματος, 186
- ιδιοδιάνυσμα, 297
- ιδιοτιμή, 297
- ιδιοχώρος, 298

- κάτω τριγωνικός πίνακας, 70
 κέντρο του $M_n(K)$, 103
 καθοδηγητική μονάδα, 116
 κανονική βάση, 229, 230
 κανόνας του παραλληλογράμμου, 235
 κανόνας του Sarrus, 149
 κύρια διαγώνιος πίνακα, 69
 κύρια ρίζα της μονάδας, 53
 λύση συστήματος, 187
 μέτρο μιγαδικού αριθμού, 20
 μηδενική λύση ομογενούς συστήματος, 189
 μηδενικός πίνακας, 69
 μηδενοχώρος πίνακα, 189
 μοναδιαίος πίνακας, 70
 ομογενές γραμμικό σύστημα, 186
 ορίζουσα του Vandermode, 170
 ορθογώνιος πίνακας, 182
 πίνακας, 68
 πίνακας γραμμή, 69
 πίνακας μονάδα, 84
 πίνακας σε ελαττωμένη κλιμακωτή μορφή γραμμών πίνακα, 116
 πίνακας σε κλιμακωτή μορφή γραμμών, 116
 πίνακας στήλη, 69
 πίνακας σταθερών όρων συστήματος, 186
 πίνακας συντελεστών συστήματος, 186
 πίνακας συντεταγμένων, 229, 230
 πολυωνυμική καμπύλη, 205
 πραγματικό μέρος μιγαδικού αριθμού, 17
 πραγματικός άξονας, 17
 προβολή σε ευθεία, 271
 προσαρτημένος πίνακα, 166
 πρωταρχική ρίζα της μονάδας, 53
 πρωτεύον όρισμα μιγαδικού, 38
 πρόσθεση σε διανυσματικό χώρο, 226
 πυρήνας γραμμικής συνάρτησης, 273
 ρίζα πολυωνύμου, 55
 ρίζες μιγαδικού, 48
 σκαλινός πολλαπλασιασμός, 83
 σκαλινός πολλαπλασιασμός σε διανυσματικό χώρο, 226
 στοιχεία πίνακα, 68
 στοιχειώδεις πράξεις γραμμών πίνακα, 110
 στοιχειώδεις πράξεις στηλών, 116
 στοιχειώδης πίνακας τύπου 1, 111
 στοιχειώδης πίνακας τύπου 2, 111
 στοιχειώδης πίνακας τύπου 3, 111
 συζυγής μιγαδικού, 22
 συζυγής πίνακας, 70
 συμβατό σύστημα, 187
 συμμετρικός πίνακας, 71
 συμπαράγοντας, 150
 συνήθης βάση, 230
 συντελεστής, 126, 228
 σχέση γραμμικής εξάρτησης, 126, 228
 σώμα των μιγαδικών αριθμών, 15
 ταυτοδύναμος πίνακας, 97
 ταυτότητα του Euler, 48
 τετραγωνικός πίνακας, 69
 τριμμένος γραμμικός συνδυασμός, 126, 228
 τριγωνική ανισότητα, 25
 τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού, 41
 υποορίζουσα, 163
 υποπίνακας, 94
 φανταστική μονάδα, 17
 φανταστικοί αριθμοί, 17
 φανταστικό μέρος μιγαδικού αριθμού, 17
 φανταστικός άξονας, 17
 φορέας, 234
 χαρακτηριστικό πολυώνυμο, 298
 όμοιοι πίνακες, 88
 όρισμα μιγαδικού, 38

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΩΝ

(a_{ij}) , πίνακας με στοιχεία a_{ij} , 68
 0_n , μηδενικός $n \times n$ -πίνακας, 69
 $0_{n \times m}$, μηδενικός $n \times m$ -πίνακας, 69
 $0_{\mathbb{R}^n}$, το μηδενικό στοιχείο του \mathbb{R}^n , 226
 $[v]$, ο πίνακας συντεταγμένων του $v \in \mathbb{R}^n$,
226, 230

Γ_i , i -γραμμή του πίνακα A , 68

$\prod_{i=1}^m a_i$, γινόμενο των a_1, \dots, a_m , 170

$\Gamma_i \rightarrow \lambda \Gamma_i$, 110

$\Gamma_i \rightarrow \Gamma_i + \kappa \Gamma_j$, 110

$\Gamma_i \leftrightarrow \Gamma_j$, 110

δ_{ij} , δέλτα του Kronecker, 71

Σ_j , j -στήλη του πίνακα A , 68

$\sum_{k=1}^m x_k$, άθροισμα των x_1, \dots, x_m , 74

A

$A(i, B)$, ο πίνακας που προκύπτει από τον
 A αν αντικαταστήσουμε την
 i -στήλη του A με τη στήλη B , 198

\bar{A} , συζυγής πίνακας του A , 70

A^{-1} , αντίστροφος του πίνακα A , 79

A^T , ανάστροφος του πίνακα A , 71

A_{ij} , συμπαράγοντας του a_{ij} , 150

$\text{adj}(A)$, προσαρτημένος του πίνακα A , 166

$\text{Arg}(z)$, πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού z ,
38

$\arg(z)$, όρισμα του μιγαδικού z , 38

$A \cdot v$, το στοιχείο w με $[w] = A[v]$, 263

C

\mathbb{C} , το σώμα των μιγαδικών αριθμών, 15,
16

D

$\det A$, ορίζουσα του πίνακα A , 147

$\text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$, διαγώνιος
πίνακας, 70

E

$E_{i+\kappa \cdot j}$, στοιχειώδης πίνακας τύπου 1, 111

$E_{\kappa \cdot i}$, στοιχειώδης πίνακας τύπου 3, 111

E_{ij} , πίνακας μονάδα, 84

$E_{i \leftrightarrow j}$, στοιχειώδης πίνακας τύπου 2, 111

F

$f(S)$, εικόνα του S μέσω της f , 275

f_A , η γραμμική συνάρτηση που ορίζει ο
πίνακας A , 263

G

$GL_n(K)$, το σύνολο των αντιστρέψιμων
 $n \times n$ -πινάκων με στοιχεία από το
σώμα K , 86

I

i , φανταστική μονάδα, 17

I_n , μοναδιαίος $n \times n$ -πίνακας, 70

id_S , ταυτοτική συνάρτηση, 226

$\text{Im}(z)$, φανταστικό μέρος μιγαδικού
αριθμού z , 17

$\text{Im} f$, εικόνα της f , 275

$i\mathbb{R}$, σύνολο των φανταστικών αριθμών, 17

K

K^m , το σύνολο των διατεταγμένων
 m -άδων με στοιχεία από το K ,
 187, 189

$\text{Ker } f$, πυρήνας της f , 273

M

$M(z)$, εικόνα του $z \in \mathbb{C}$ στο μιγαδικό
 επίπεδο, 17

$M_{ij}(A)$, ο (i, j) -ελάσσων πίνακας του A ,
 148

$M_n(K)$, το σύνολο των τετραγωνικών
 $n \times n$ -πινάκων με στοιχεία από το
 σύνολο K , 69

$M_{n \times m}(K)$, το σύνολο των $n \times m$ -πινάκων
 με στοιχεία από το σύνολο K , 68

N

$\text{null}(A)$, μηδενοχώρος του πίνακα A , 189

O

\vec{OA} , διάνυσμα, 233

P

$P_A(x)$, χαρακτηριστικό πολυώνυμο του
 πίνακα A , 298

R

\mathbb{R}^n , 226

$\text{rank}(A)$, βαθμίδα του πίνακα A , 122

$\text{Re}(z)$, πραγματικό μέρος μιγαδικού
 αριθμού z , 17

S

$\text{span} X$, γραμμική θήκη του συνόλου X ,
 231

T

$\text{Tr}(A)$, ίχνος του πίνακα A , 69

V

$V_A(\lambda)$, ιδιοχώρος του πίνακα A για την
 ιδιοτιμή λ , 298

Z

\bar{z} , συζυγής του μιγαδικού z , 22

Η ύλη που καλύπτεται στο βιβλίο περιλαμβάνει τους μιγαδικούς αριθμούς, με έμφαση στη γεωμετρική αναπαράσταση, τις ιδιότητές τους, με εκτεταμένη αναφορά στις ρίζες της μονάδας και στο Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας. Ακολουθεί κεφάλαιο αφιερωμένο στην άλγεβρα των πινάκων, ενώ στη συνέχεια εξετάζονται η μέθοδος απαλοιφής του Gauss και οι εφαρμογές της. Ξεχωριστό κεφάλαιο ασχολείται με τη μελέτη των ιδιοτήτων των οριζουσών των τετραγωνικών πινάκων, ενώ ακολουθεί κεφάλαιο για την επίλυση των γραμμικών συστημάτων. Οι διανυσματικοί χώροι R^n μελετώνται με έμφαση στον R^2 και στον R^3 και δίνονται προσεκτικά οι ορισμοί των ευθειών και των επιπέδων στον R^n . Οι λύσεις των γραμμικών συστημάτων ερμηνεύονται στον R^2 και στον R^3 , με έμφαση πάντα στη γεωμετρική εποπτεία. Ακολουθούν το κεφάλαιο των γραμμικών συναρτήσεων και τέλος το κεφάλαιο των ιδιοδιανυσμάτων, των ιδιοτιμών και της διαγωνιοποίησης πίνακα. Το σύγγραμμα ενσωματώνει τη χρήση του Mathematica σε ξεχωριστή ενότητα σε κάθε κεφάλαιο. Επιπλέον, σε κάθε κεφάλαιο υπάρχει ξεχωριστή ενότητα με πληθώρα λυμένων ασκήσεων, ενώ στο Παράρτημα δίνονται εκτεταμένες υποδείξεις για τις ασκήσεις. Η βιβλιογραφία στο τέλος κάθε κεφαλαίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εμπάθυνση των εννοιών. Στο τέλος του συγγράμματος έχει προστεθεί ευρετήριο όρων και συμβολισμών. Με αυτόν τον τρόπο, ο/η αναγνώστης/-ρια μπορεί να ανατρέχει σε ορισμούς και να διευκρινίζει έννοιες.

Το παρόν σύγγραμμα δημιουργήθηκε στο πλαίσιο του Έργου ΚΑΛΛΙΠΟΣ+	
Χρηματοδότης	Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων, Προγράμματα ΠΔΕ, ΕΠΑ 2020-2025
Φορέας υλοποίησης	ΕΛΚΕ ΕΜΠ
Φορέας λειτουργίας	ΣΕΑΒ/Παράρτημα ΕΜΠ/Μονάδα Εκδόσεων
Διάρκεια 2ης Φάσης	2020-2023
Σκοπός	Η δημιουργία ακαδημαϊκών ψηφιακών συγγραμμάτων ανοικτής πρόσβασης (περισσότερων από 700) <ul style="list-style-type: none"> • Προπτυχιακών και μεταπτυχιακών εγχειριδίων • Μονογραφιών • Μεταφράσεων ανοικτών textbooks • Βιβλιογραφικών Οδηγών
Επιστημονικά Υπεύθυνος	Νικόλαος Μήτρου, Καθηγητής ΣΗΜΜΥ ΕΜΠ
ISBN: 978-618-228-053-9	DOI: http://dx.doi.org/10.57713/kallipos-286

Το παρόν σύγγραμμα χρηματοδοτήθηκε από το Πρόγραμμα Δημοσίων Επενδύσεων του Υπουργείου Παιδείας.