ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ

Αναπλ. Καθ. Στέλιος Ζήμερας

Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικών – Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών

2020

Μοντελοποίηση επιδράσεων

Y_{ijk} = Η k-στή παρατήρηση (k=1,2,...,r) της αντικειμενικής συνάρτησης στην i (i=1,2,...,p) στάθμη του παράγοντα Α και στην j (j=1,2,...,q) στάθμη του παράγοντα Β

		Παράγοντας Β			
		B_1	B_2		B_q
Παράγοντας Α	A_1	$Y_{111}, \ldots, Y_{11r}$	$Y_{121}, \ldots, Y_{12r}$	…	$Y_{1q1}, \ldots, Y_{1qr}$
	A_2	$Y_{211}, \ldots, Y_{21r}$	$Y_{221}, \ldots, Y_{22r}$	…	$Y_{2q1}, \ldots, Y_{2qr}$
	…	…	…	…	…
	A_p	$Y_{p11}, \ldots, Y_{p1r}$	$Y_{p21}, \ldots, Y_{p2r}$	…	$Y_{pq1}, \ldots, Y_{pqr}$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

$$\boxed{Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}} \quad \text{με} \quad \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{ijk} = 0, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, p \\ j = 1, 2, \ldots, q \end{array}$$

γενικός μέσος

κύριες επιδράσεις

αλληλεπιδράσεις

σφάλματα

Υποθέσεις

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$ ο παράγων Α είναι ασήμαντος

$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_q = 0$ ο παράγων Β είναι ασήμαντος

$(\alpha\beta)_{11} = (\alpha\beta)_{12} = \ldots = (\alpha\beta)_{pq} = 0$ οι αλληλεπιδράσεις των παραγόντων Α και Β είναι ασήμαντες

Μοντελοποίηση επιδράσεων

αθροίσματα γραμμών

		Παράγοντας B				
		B_1	B_2	…	B_q	
Παράγοντας A	A_1	$Y_{11.}$	$Y_{12.}$	…	$Y_{1q.}$	$Y_{1..}$
	A_2	$Y_{21.}$	$Y_{22.}$	…	$Y_{2q.}$	$Y_{2..}$
	…	…	…	…	…	…
	A_p	$Y_{p1.}$	$Y_{p2.}$	…	$Y_{pq.}$	$Y_{p..}$
		$Y_{.1.}$	$Y_{.2.}$	…	$Y_{.q.}$	$Y_{...}$

αθροίσματα στα κελιά

γενικό άθροισμα

αθροίσματα στηλών

Μοντελοποίηση επιδράσεων

Πηγή	Αθροίσμ. Τετραγ.	β.ε.	Μέσα τετρ.	F
Παράγοντας Α (γραμμές)	$SSA = \frac{1}{qr}\sum_{i=1}^{p} Y_{i\cdot\cdot}{}^2 - \frac{Y_{\cdots}{}^2}{n}$	p-1	$MSA = \frac{SSA}{p-1}$	$F = \frac{MSA}{MSE}$
Παράγοντας Β (γραμμές)	$SSB = \frac{1}{pr}\sum_{j=1}^{q} Y_{\cdot j\cdot}{}^2 - \frac{Y_{\cdots}{}^2}{n}$	q-1	$MSB = \frac{SSB}{q-1}$	$F = \frac{MSB}{MSE}$
Αλληλεπίδραση Α - Β	$SSAB = \frac{1}{r}\sum_{i,j=1}^{p,q} Y_{ij\cdot}{}^2 - \frac{1}{qr}\sum_{i=1}^{p} Y_{i\cdot\cdot}{}^2 - \frac{1}{pr}\sum_{j=1}^{q} Y_{\cdot j\cdot}{}^2 + \frac{Y_{\cdots}{}^2}{n}$	(p-1)(q-1)	$MSAB = \frac{SSAB}{(p-1)(q-1)}$	$F = \frac{MSAB}{MSE}$
Υπόλοιπα	$SSE = SST - SSA - SSB - SSAB$	pq(r-1)	$MSE = \frac{SSE}{n-p}$	
Σύνολο	$SST = \sum_{i,j,k=1}^{p,q,r} Y_{ijk}{}^2 - \frac{Y_{\cdots}{}^2}{n}$	n-1= pqr-1		

Μοντελοποίηση επιδράσεων

1. Είναι οι κύριες επιδράσεις του παράγοντα Α διαφορετικές;

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_p=0 \\ H_1 : \text{όχι η } H_0 \end{array}}$$

Συγκρίνουμε το λόγο $F = \dfrac{MSA}{MSE}$

με την κρίσιμη τιμή $F_{p-1,pq(r-1);\alpha}$

2. Είναι οι κύριες επιδράσεις του παράγοντα Β διαφορετικές;

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_q=0 \\ H_1 : \text{όχι η } H_0 \end{array}}$$

Συγκρίνουμε το λόγο $F = \dfrac{MSB}{MSE}$

με την κρίσιμη τιμή $F_{q-1,pq(r-1);\alpha}$

3. Είναι οι αλληλεπιδράσεις των παραγόντων Α, Β διαφορετικές;

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : (\alpha\beta)_{11}=(\alpha\beta)_{12}=\ldots=0 \\ H_1 : \text{όχι η } H_0 \end{array}}$$

Συγκρίνουμε το λόγο $F = \dfrac{MSAB}{MSE}$

με την κρίσιμη τιμή $F_{(p-1)(q-1),pq(r-1);\alpha}$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

Δύο κατηγορίες ασθενών εξετάσθηκαν ως προς την αντίδρασή τους σε τρία φάρμακα. Για κάθε φάρμακο και κάθε κατηγορία επελέγησαν τυχαία τρεις ασθενείς. Πριν και μετά τη χορήγηση μετρήθηκε με κάποιο κριτήριο η αντίδραση των ασθενών και η διαφορά δίνεται παρακάτω.

Y_{ijk}	Φάρμακο 1 B_1	Φάρμακο 2 B_2	Φάρμακο 3 B_3
Κατηγορία 1 A_1	8 4 0	10 8 6	8 6 4
Κατηγορία 2 A_2	14 10 6	4 2 0	15 12 9

Διαφέρουν τα φάρμακα μεταξύ τους;, οι δύο κατηγορίες ασθενών;
Υπάρχει διαφορά της επίδρασης στις δύο κατηγορίες;

Μοντελοποίηση επιδράσεων

Αθροίσματα

$Y_{ij.}$	B_1	B_2	B_3	$Y_{i..}$
A_1	12	24	18	54
A_2	30	6	36	72
$Y_{.j.}$	42	30	54	126

$Y_{...}$

Μέσες τιμές

$\overline{Y}_{ij.}$	B_1	B_2	B_3	$\overline{Y}_{i..}$
A_1	4	8	6	6
A_2	10	2	12	8
$\overline{Y}_{.j.}$	7	5	9	7

$\overline{Y}_{...}$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

$$(1) = \frac{1}{4} Y_{\bullet\bullet\bullet}^2 = 126^2 / 18 = 882$$

$$(2) = \sum Y_{ijk}^2 = 8^2 + \ldots + 9^2 = 1198$$

$$(3) = \frac{1}{qr} \sum Y_{i\bullet\bullet}^2 = (54^2 + 72^2)/9 = 900$$

$$(4) = \frac{1}{pr} \sum Y_{\bullet j \bullet}^2 = (42^2 + 30^2 + 54^2)/6 = 930$$

$$(5) = \frac{1}{r} \sum Y_{ij\bullet}^2 = (12^2 + \ldots + 36^2)/3 = 1092$$

SSA=(3)-(1)=18

SSB=(4)-(1)=48

SSAB=(5)-(3)-(4)+(1)=144

SSE=(2)-(5)=106

SST=(2)-(1)=316

Μοντελοποίηση επιδράσεων

Πηγή	Αθροίσμ. Τετραγ.	β.ε.	Μέσα τετρ.	F
A	18	1	18	2.04
B	48	2	24	2.72
AB	144	2	72	8.15
Υπόλοιπα	106	12	8.83	
Σύνολο	316	17		

Κύριες επιδράσεις του παράγοντα ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΣΘΕΝΩΝ Είναι ΜΗ ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ
Κύριες επιδράσεις του παράγοντα ΦΑΡΜΑΚΑ Είναι ΜΗ ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ
Αλληλεπιδράσεις ΚΑΤΗΓΟΡΙΩΝ-ΦΑΡΜΑΚΩΝ Είναι ΣΗΜΑΝΤΙΚΕΣ

Μοντελοποίηση επιδράσεων

$$\hat{\alpha}_1 = \bar{Y}_{1\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = -1$$

$$\hat{\alpha}_2 = \bar{Y}_{2\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = 1$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{Y}_{\bullet 1\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = 0$$

$$\hat{\beta}_2 = \bar{Y}_{\bullet 2\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = -2$$

$$\hat{\beta}_3 = \bar{Y}_{\bullet 3\bullet} - \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet} = 2$$

$$\widehat{(\alpha\beta)}_{ij} = \bar{Y}_{ij\bullet} - \bar{Y}_{i\bullet\bullet} - \bar{Y}_{\bullet j\bullet} + \bar{Y}_{\bullet\bullet\bullet}$$

	B_1	B_2	B_3
A_1	-2	4	-2
A_2	2	-4	2

$$\eta_A^{\ 2} = \frac{SSA}{SST} = \frac{18}{316} = 0.0569$$

Ο παράγων ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΑΣΘΕΝΩΝ εξηγεί μόνο το 5.7% της διασποράς

$$\eta_B^{\ 2} = \frac{SSB}{SST} = \frac{48}{316} = 0.1518$$

Ο παράγων ΦΑΡΜΑΚΑ εξηγεί μόνο το 15.2% της διασποράς

Μοντελοποίηση επιδράσεων

	Παράγοντας Β					
Παράγοντας Α	Επίπεδο 1	Επίπεδο 2	…	Επίπεδο j	…	Επίπεδο β
Επίπεδο 1	μ_{11}	μ_{12}	…	μ_{1j}	…	$\mu_{1\beta}$
Επίπεδο 2	μ_{21}	μ_{22}	…	μ_{2j}	…	$\mu_{2\beta}$
…	…	…	…	…	…	…
Επίπεδο i	μ_{i1}	μ_{i2}	…	μ_{ij}	…	$\mu_{i\beta}$
…	…	…	…	…	…	…
Επίπεδο α	$\mu_{\alpha 1}$	$\mu_{\alpha 2}$	…	$\mu_{\alpha j}$	…	$\mu_{\alpha\beta}$

Ο παραπάνω πίνακας δείχνει τους μέσους κάθε συνδυασμού μεταξύ ενός επιπέδου του παράγοντα Α και ενός του Β .

Μοντελοποίηση επιδράσεων

μέσος

$$\mu_{.j} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \mu_{ij}}{a}$$

$$\mu_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_{ij}}{\beta}$$

ολικός μέσος

$$\mu_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{\beta} \mu_{ij}}{a\beta}$$

$$\mu_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \mu_{i.}}{a}$$

$$\mu_{..} = \frac{\sum_{j=1}^{\beta} \mu_{.j}}{\beta}$$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

Στην περίπτωση που όλοι οι μέσοι μ_{ij} των επιπέδων μπορούν να αναλυθούν στην παρακάτω μορφή:

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$$

οι παράγοντες δεν αλληλεπιδρούν

$$\mu_{ij} = \mu_{i.} + \mu_{.j} - \mu_{..}$$

κύρια επίδραση του παράγοντα Β

$$\beta_{j(i)} = \mu_{ij} - \mu_{i.}$$

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=1}^{a} \beta_{j(i)}}{a} = \mu_{.j} - \mu_{..}$$

κύρια επίδραση του παράγοντα Α

$$a_{i(j)} = \mu_{ij} - \mu_{.j}$$

$$a_i = \frac{\sum_{j=1}^{\beta} a_{i(j)}}{\beta} = \mu_{i.} - \mu_{..}$$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

Δύο παράγοντες δεν αλληλεπιδρούν όταν όλοι οι μέσοι των μεταχειρίσεων μπορούν να εκφραστούν σύμφωνα με την

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$$

Υπάρχει ένα πλήθος άλλων μεθόδων για τον εντοπισμό της ύπαρξης ή όχι αλληλεπίδρασης. Αυτές είναι:

1. Η διαφορά μεταξύ των μέσων απόκρισης για οποιαδήποτε επίπεδα του Β είναι η ίδια για όλα τα επίπεδα του Α.

2. Η διαφορά μεταξύ των μέσων απόκρισης για οποιαδήποτε επίπεδα του Α είναι ίδια για όλα τα επίπεδα του Β.

Μοντελοποίηση επιδράσεων

Η διαφορά μεταξύ του μέσου μ_{ij} και της τιμής $\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$ που θα αναμενόταν εάν οι δύο παράγοντες είναι αθροιστικοί καλείται αλληλεπίδραση του i επιπέδου του A με το j επίπεδο του B και δηλώνεται με $(\alpha\beta)_{ij}$. Οπότε ορίζουμε την $(\alpha\beta)_{ij}$ ως εξής :

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - (\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j)$$

Αντικαθιστώντας του ορισμούς

$$(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_{i.} - \mu_{.j} + \mu_{..}$$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

1. Υπάρχει πιθανότητα κάποιες αλληλεπιδράσεις να είναι μηδέν παρόλο που οι δύο παράγοντες αλληλεπιδρούν . Για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι οι παράγοντες είναι αθροιστικοί πρέπει όλες οι αλληλεπιδράσεις $(\alpha\beta)_{ij}$ να είναι μηδέν .

Οι $(\alpha\beta)_{ij}$ όταν αθροίζονται ως προς τις στήλες ή γραμμές είναι μηδέν:

$$\sum_{i=1}^{a}(\alpha\beta)_{ij}=0$$

$$\sum_{j=1}^{\beta}(\alpha\beta)_{ij}=0$$

Επομένως το άθροισμα όλων των αλληλεπιδράσεων είναι μηδέν :

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}(\alpha\beta)_{ij}=0$$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

$$\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$$

$i = 1, \ldots, a; j = 1, \ldots, \beta; k = 1, \ldots, n$

$$Y_{ijk} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

$\mu_{..}$ είναι σταθερά

α_i είναι σταθερές που υπόκεινται στον περιορισμό $\sum_{i=1}^{a} a_i = 0$

β_j είναι σταθερές που υπόκεινται στον περιορισμό $\sum_{i=1}^{\beta} \beta_j = 0$

$(\alpha\beta)_{ij}$ είναι σταθερές που υπόκεινται στους περιορισμούς $\sum_{i=1}^{a} (\alpha\beta)_{ij} = 0$

ε_{ijk} είναι ανεξάρτητες μεταβλητές $\mathrm{N}(0,\sigma^2)$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

$$E\left(Y_{ijk}\right) = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + \left(\alpha\beta\right)_{ij}$$

$$\sigma^2\left(Y_{ijk}\right) = \sigma^2$$

$$\Downarrow$$

Y_{ijk} είναι ανεξάρτητες $N\left(\mu_{..} + \alpha_i + \beta_j + \left(\alpha\beta\right)_{ij}, \sigma^2\right)$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

το άθροισμα των παρατηρήσεων για μια μεταχείριση που αντιστοιχεί στο i επίπεδο του A και στο j επίπεδο του B είναι

$$Y_{ij.} = \sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \Rightarrow \overline{Y}_{ij.} = \frac{Y_{ij.}}{n}$$

$$Y_{i..} = \sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \Rightarrow \overline{Y}_{i..} = \frac{Y_{i..}}{\beta n}$$

$$Y_{.j.} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \Rightarrow \overline{Y}_{.j.} = \frac{Y_{.j.}}{an}$$

$$Y_{...} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk} \Rightarrow \overline{Y}_{...} = \frac{Y_{...}}{na\beta}$$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

Τα υπόλοιπα ε_{ijk} είναι, ως συνήθως η απόκλιση μεταξύ των παρατηρήσεων και της αναμενόμενης εκτιμώμενης τιμής:

$$\varepsilon_{ijk} = Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.}$$

$$\underbrace{Y_{ijk} - \bar{Y}_{...}}_{\text{ολική απόκλιση}} = \underbrace{\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...}}_{\text{Απόκλιση του μέσου της μεταχείρισης γύρω από τον γενικό μέσο}} + \underbrace{Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.}}_{\text{Απόκλιση γύρω από το μέσο μεταχείρισης}}$$

$$\underbrace{\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...}}_{\text{Απόκλιση του μέσου της μεταχείρισης γύρω από τον γενικό μέσο}} = \underbrace{\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}}_{\text{Κύρια επίδραση A}} + \underbrace{\bar{Y}_{.j.} - \bar{Y}_{...}}_{\text{Κύρια επίδραση B}} + \underbrace{\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{.j.} + \bar{Y}_{...}}_{\text{Αλληλεπίδραση AB}}$$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

SSTO= SSTR + SSE

$$SSTO = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{\beta} \sum_{k=1}^{n} \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...} \right)^2$$

$$SSTR = n \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{\beta} \left(Y_{ij.} - \overline{Y}_{...} \right)^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{\beta} \sum_{k=1}^{n} \left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.} \right)^2$$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

$$SSTR = SSA + SSB + SSAB$$

$$SSA = n\beta \sum_{i=1}^{a} \left(Y_{i..} - \overline{Y}_{...} \right)^2$$

$$SSB = na \sum_{j=1}^{\beta} \left(\overline{Y}_{.j.} - \overline{Y}_{...} \right)^2$$

$$SSAB = n \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{\beta} \left(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{.j.} + \overline{Y}_{...} \right)^2$$

Ο SSA, καλείται άθροισμα τετραγώνων του A $(Y_{i..})$ και μετρά την διακύμανση των εκτιμώμενων μέσων των επιπέδων του παράγοντα A .

Μοντελοποίηση επιδράσεων

Υπολογιστικοί τύποι

$$SSTO = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^{\ 2} - \frac{Y^2_{...}}{na\beta}$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n} Y_{ijk}^{\ 2} - \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta} Y^2_{ij.}}{n}$$

$$SSA = \frac{\sum_{i=1}^{a} Y_{i..}^{\ 2}}{n\beta} - \frac{\sum_{i=1}^{a} Y_{...}^{\ 2}}{na\beta}$$

$$SSB = \frac{\sum_{j=1}^{\beta} \overline{Y}^2_{.j.}}{na} - \frac{\overline{Y}^2_{...}}{na\beta}$$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

- Τα μέσα τετραγώνων, ως συνήθως, λαμβάνονται διαιρώντας κάθε άθροισμα τετραγώνων με τους συνδεόμενους σε αυτό βαθμούς ελευθερίας.

$$MSA = \frac{SSA}{a-1}$$

$$MSB = \frac{SSB}{\beta-1}$$

$$MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(\beta-1)}$$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

τα μέσα τετραγώνων για το μοντέλο των δύο παραγόντων έχουν τις ακόλουθες μαθηματικές ελπίδες

$$E\left(MSE\right)=\sigma^2$$

$$E\left(MSA\right)=\sigma^2+n\beta\frac{\sum_{i=1}^{a}a_i^2}{a-1}$$

$$E\left(MSB\right)=\sigma^2+na\frac{\sum_{j=1}^{\beta}\beta_j^2}{\beta-1}$$

$$E\left(MSAB\right)=\sigma^2+n\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\left(a\beta\right)_{ij}^2}{\left(a-1\right)\left(\beta-1\right)}$$

Μοντελοποίηση επιδράσεων

Αυτές οι μαθηματικές ελπίδες δείχνουν ότι εάν δεν υπάρχουν κύριες επιδράσεις του Α (δηλαδή αν όλοι οι $\mu_{i..}$ είναι ίσοι ή αν όλα τα $a_i^2 = 0$) τα MSA και MSE έχουν την ίδια αναμενόμενη τιμή · αλλιώς συνήθως το MSA είναι μεγαλύτερο του MSE. Ομοίως, εάν δεν υπάρχουν κύριες επιδράσεις του B, τα MSB και MSE έχουν την ίδια αναμενόμενη τιμή αλλιώς συνήθως το MSB είναι μεγαλύτερο του MSE .

Μοντελοποίηση επιδράσεων

- Αυτό δηλώνει πως οι λόγοι MSA/MSE , MSB/MSE θα προσφέρουν πληροφορίες σχετικά με τις κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις των δύο παραγόντων αντίστοιχα, με μεγάλες τιμές αυτών να δηλώνουν την παρουσία παραγοντικών επιδράσεων

Μοντελοποίηση επιδράσεων

Πηγή απόκλισης	SS	Βαθμοί ελευθερίας	MS	E(MS)
Μεταξύ μεταχειρίσεων	$n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\left(Y_{ij.}-\overline{Y}_{...}\right)^2$	αβ-1	$\frac{SSTR}{a\beta-1}$	$\sigma^2+\frac{1}{a\beta-1}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\left(\mu_{ij}-\mu_{..}\right)^2$
Παράγοντας Α	$n\beta\sum_{i=1}^{a}\left(Y_{i..}-\overline{Y}_{...}\right)^2$	α-1	$\frac{SSA}{a-1}$	$\sigma^2+n\beta\frac{\sum_{i=1}^{a}a_i^2}{a-1}$
Παράγοντας Β	$na\sum_{j=1}^{\beta}\left(\overline{Y}_{.j.}-\overline{Y}_{...}\right)^2$	β-1	$\frac{SSB}{\beta-1}$	$\sigma^2+na\frac{\sum_{j=1}^{\beta}\beta_j^2}{\beta-1}$
Αλληλεπιδράσεις	$n\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\left(\overline{Y}_{ij.}-\overline{Y}_{i..}-\overline{Y}_{.j.}+\overline{Y}_{...}\right)^2$	$(a-1)(\beta-1)$	$\frac{SSAB}{(a-1)(\beta-1)}$	$\sigma^2+n\frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}(a\beta)_{ij}^2}{(a-1)(\beta-1)}$
Υπόλοιπο	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk}-\overline{Y}_{ij.}\right)^2$	$a\beta(n-1)$	$\frac{SSE}{a\beta(n-1)}$	σ^2
Σύνολο	$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{\beta}\sum_{k=1}^{n}\left(Y_{ijk}-\overline{Y}_{...}\right)^2$	$na\beta-1$		

Μοντελοποίηση επιδράσεων

H_0: $\mu_{ij} = \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$ για όλα τα i,j

H_1: $\mu_{ij} \neq \mu_{..} + \alpha_i + \beta_j$ για κάποια i,j

H_0:όλα τα $(\alpha\beta)_{ij} = 0$

H_1: όχι όλα τα $(\alpha\beta)_{ij} = 0$

$$F^* = \frac{MSAB}{MSE}$$

Μεγάλες τιμές του F^* υποδηλώνουν την ύπαρξη αλληλεπιδράσεων.

Μοντελοποίηση επιδράσεων

$$H_0: \mu_{1.} = \mu_{2.} = \ldots = \mu_{a.}$$

H_1: όχι όλα τα $\mu_{i.}$ ίσα

$$H_0: a_1 = a_2 = \ldots = a_a = 0$$

H_1: όχι όλα τα a_i ίσα με μηδέν

$$F^* = \frac{MSA}{MSE}$$

Μεγάλες τιμές του F^* υποδηλώνουν την ύπαρξη αλληλεπιδράσεων.

Μοντελοποίηση επιδράσεων

H$_0$: $\mu_{.1} = \mu_{.2} = \ldots = \mu_{.\beta}$

H$_1$: όχι όλα τα $\mu_{.j}$ ίσα

H$_0$: $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\beta = 0$

H$_1$:όχι όλα τα β_j ίσα με μηδέν

$$F^* = \frac{MSB}{MSE}$$

Μεγάλες τιμές του F* υποδηλώνουν την ύπαρξη αλληλεπιδράσεων.