



Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Τμήμα Επιστημών της Θάλασσας-Σχολή Περιβάλλοντος

Ανοικτό ακαδημαϊκό μάθημα

Μέθοδοι Προσομοίωσης και Εφαρμογές

Διδάσκοντες: Γ. Τσιρτσής, Καθηγητής

Δρ Β. Κολοβογιάννης, ΕΔΙΠ



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ  
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ  
*επένδυση στην κοινωνία της γνώσης*

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ  
2007-2013  
πρόγραμμα για την ανάπτυξη  
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

## Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αιγαίου**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Ευρωπαϊκή Ένωση  
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ  
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



## **2. ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΜΗΔΕΝΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ (0-D MODELS)**

### **2.1. Μεταβλητές κατάστασης**

Το πρώτο και ίσως το πιο σημαντικό βήμα στην ανάπτυξη ενός μοντέλου προσομοίωσης ενός συστήματος είναι η επιλογή των μεταβλητών κατάστασης (state variables). Οι μεταβλητές κατάστασης είναι σημαντικές μεταβλητές για το σύστημα και για τον τρόπο με τον οποίο αυτό προσεγγίζεται, την εξέλιξη των οποίων στον χρόνο ή και στον χώρο επιλέγει να μελετήσει ο ερευνητής. Η εξέλιξη των μεταβλητών κατάστασης στον χρόνο ορίζεται με την χρήση διαφορικών εξισώσεων, μια διαφορική εξίσωση για κάθε μεταβλητή κατάσταση σε κάθε ένα χωρικό διαμέρισμα.

Για παράδειγμα, αν αναπτύσσεται ένα μοντέλο εξέλιξης του ανθρώπινου πληθυσμού, ως μεταβλητή κατάστασης θα επιλεγεί οπωσδήποτε ο ανθρώπινος πληθυσμός. Αν η κατασκευή ενός μοντέλου γίνεται για την μελέτη των διεργασιών που αφορούν στους θαλάσσιους μικροοργανισμούς, ως μεταβλητές κατάστασης ενδεχομένως θα επιλεγούν οι βιομάζες φυτοπλαγκτού, ζωοπλαγκτού και βακτηρίων και μεταβλητές που επηρεάζουν αυτές, όπως οι συγκεντρώσεις θρεπτικών αλάτων και οργανικής ύλης. Αν ενδιαφέρει η υδροδυναμική κυκλοφορία οι παραπάνω μεταβλητές θα αγνοηθούν και ως μεταβλητές κατάστασης θα επιλεγούν η ταχύτητα του νερού, η θερμοκρασία και η αλατότητα στα σημεία ενός πλέγματος. Τέλος αν το ενδιαφέρον του ερευνητή επικεντρώνεται στην εξέλιξη ενός ιχθυοπληθυσμού, ως μεταβλητές κατάστασης θα επιλεγούν ο ίδιος ο ιχθυοπληθυσμός και μεταβλητές που σχετίζονται με την ανάπτυξή του. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η επιλογή των μεταβλητών κατάστασης δεν είναι μονοσήμαντη, δεν εξαρτάται από το φυσικό σύστημα που προσεγγίζεται αλλά από τις επιμέρους διεργασίες τις οποίες ο ερευνητής ενδιαφέρεται να μελετήσει.

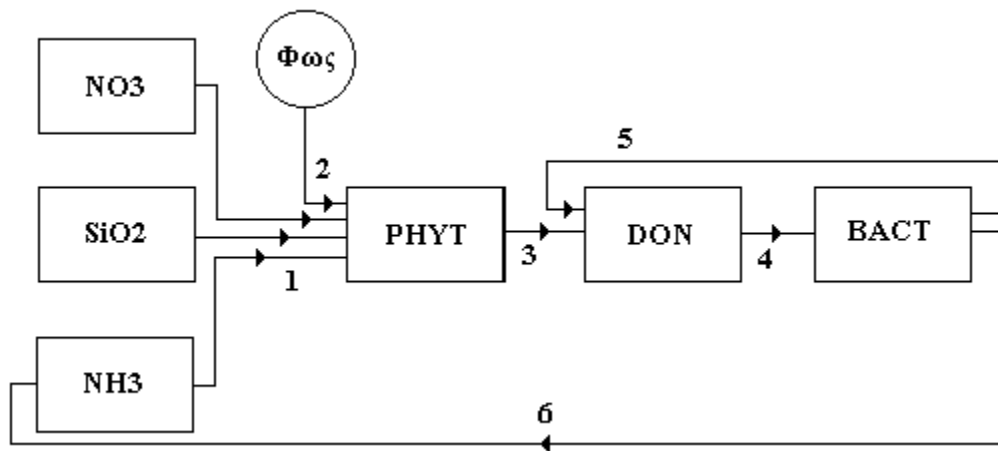
Σε ότι αφορά στον αριθμό των μεταβλητών κατάστασης, επιλέγεται ικανός αριθμός για την περιγραφή των κύριων λειτουργιών του προσομοιούμενου συστήματος, αλλά ταυτόχρονα περιορισμένος ώστε να μην αυξάνεται ιδιαίτερα η πολυπλοκότητα του μοντέλου. Μεγάλη πολυπλοκότητα οδηγεί σε μεγάλες απαιτήσεις υπολογιστικής ισχύος για την γρήγορη εκτέλεση της προσομοίωσης και ταυτόχρονα αυξάνει την αβεβαιότητα στην εκτίμηση των τιμών των μεταβλητών κατάστασης κατά την προσομοίωση.

Μεταβλητές που επηρεάζουν τις μεταβλητές κατάστασης αλλά δεν εξαρτώνται απ' αυτές, δηλαδή η εξέλιξή τους στον χρόνο είναι ανεξάρτητη της προσομοίωσης, καλούνται συναρτήσεις φόρτισης (forcing functions). Για το μοντέλο μελέτης των διεργασιών των μικροοργανισμών στην θάλασσα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως συναρτήσεις φόρτισης η ηλιακή ακτινοβολία και η θερμοκρασία. Οι μεταβλητές αυτές μεταβάλλονται στον χρόνο με ένα συγκεκριμένο τρόπο (υψηλές τιμές τους θερινούς μήνες, χαμηλές τον χειμώνα), επηρεάζουν την ανάπτυξη του φυτοπλαγκτού και του ζωοπλαγκτού αντίστοιχα, αλλά η μεταβολή τους δεν εξαρτάται από τις άλλες μεταβλητές και από την ροή του μοντέλου.

### **2.2. Διάγραμμα ροής**

Οι διεργασίες που προσομοιώνονται και στις οποίες συμμετέχουν οι μεταβλητές κατάστασης και ενδεχομένως ένας αριθμός από συναρτήσεις φόρτισης, παριστάνονται συχνά με την μορφή ενός διαγράμματος ροής. Στο διάγραμμα ροής οι μεταβλητές κατάστασης παριστάνονται με παραλληλόγραμμα σχήματα, οι συναρτήσεις φόρτισης με κύκλους και οι σχετικές διεργασίες με βέλη που συνδέουν τα παραλληλόγραμμα και τους κύκλους. Στο Σχήμα 2.1 παριστάνεται το διάγραμμα ροής ενός μοντέλου για την μελέτη των διεργασιών των μικροοργανισμών σε εργαστηριακό μικρόκοσμο. Οι μεταβλητές κατάστασης είναι έξι και παριστάνονται με τα παραλληλόγραμμα. Είναι η

φυτοπλαγκτονική (PHYT) και η βακτηριακή (BACT) βιομάζα, οι συγκεντρώσεις αμμωνιακών ( $\text{NH}_3$ ), νιτρικών ( $\text{NO}_3$ ), πυριτικών ( $\text{SiO}_2$ ) και διαλυμένου οργανικού άνθρακα (DOC). Η ένταση του προσπίπτοντος φωτός στον μικρόκοσμο χρησιμοποιείται ως συνάρτηση φόρτισης και συμβολίζεται με κύκλο. Στο Σχήμα φαίνονται επίσης οι διεργασίες που λαμβάνονται υπ' όψη στην προσομοίωση.



Σχήμα 2.1. Το διάγραμμα ροής μοντέλου εργαστηριακού μικροκόσμου. Με παραλληλόγραμμα συμβολίζονται οι μεταβλητές κατάστασης, με κύκλο η συνάρτηση φόρτισης και με αριθμούς οι διεργασίες.

Οι διεργασίες είναι η ανάπτυξη της βιομάζας φυτοπλαγκτού που εξαρτάται από την διαθεσιμότητα θρεπτικών αλάτων (Διεργασία 1) και φωτός (Διεργασία 2), η παραγωγή οργανικού αζώτου μέσω των φυτοπλαγκτονικών απεκκρίσεων και της θνησιμότητας (Διεργασία 3), η ανάπτυξη των ετερότροφων βακτηρίων με την κατανάλωση οργανικού αζώτου (Διεργασία 4), η αποδόμηση (ανοργανοποίηση) της οργανικής ύλης από τα βακτήρια προς αμμωνιακά ιόντα (Διεργασία 6) και η μετατροπή μέρους της βακτηριακής βιομάζας σε διαλυμένη οργανική ύλη (Διεργασία 5). Στην περίπτωση ενός μοντέλου που λαμβάνει υπ' όψη και χωρική μεταβλητότητα, το παραπάνω διάγραμμα ροής ισχύει σε κάθε ένα χωρικό διαμέρισμα, αφού προστεθούν και οι διεργασίες αλληλεπίδρασης με τα γειτονικά χωρικά διαμερίσματα.

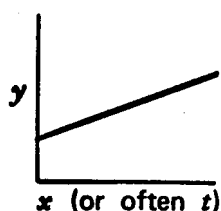
### 2.3. Διαφορικές εξισώσεις

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως για την κάθε μεταβλητή κατάσταση ενός μοντέλου γράφεται η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση. Αν το μοντέλο περιλαμβάνει χωρικά διαμερίσματα γράφεται μία διαφορική εξίσωση για κάθε μία μεταβλητή κατάσταση σε κάθε ένα χωρικό διαμέρισμα. Η διαφορική εξίσωση περιέχει στο πρώτο μέλος τον ρυθμό μεταβολής της μεταβλητής κατάσταση και στο δεύτερο μέλος αναλυτικές σχέσεις για τις διεργασίες που επηρεάζουν την μεταβολή της μεταβλητής κατάσταση. Στις σχέσεις αυτές μπορεί να περιέχονται η ίδια η μεταβλητή κατάσταση, οι άλλες μεταβλητές κατάσταση, οι συναρτήσεις φόρτισης και ένας αριθμός παραμέτρων (parameters). Οι παράμετροι είναι ποσότητες που δεν μεταβάλλονται συνήθως στον χρόνο και οι τιμές τους προέρχονται κατ' αρχήν από την σχετική βιβλιογραφία. Παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης είναι το ακόλουθο:

$$\frac{dDON}{dt} = (a_{DP} \times \varphi_{NA} + m_{DP}) \times PHYT + (m_{DB} - a_{DB} \times \varphi_D) \times BACT$$

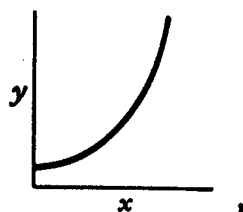
που περιγράφει τον ρυθμό μεταβολής της συγκέντρωσης διαλυμένου οργανικού αζώτου (Dissolved Organic Nitrogen, DON) σε ένα εργαστηριακό σύστημα. Στο δεύτερο μέλος της διαφορικής εξίσωσης περιγράφονται με αναλυτικές σχέσεις οι διεργασίες από τις οποίες εξαρτάται η μεταβολή της μεταβλητής κατάστασης. Η εύρεση των μαθηματικών σχέσεων που περιγράφουν τις επιμέρους διεργασίες σε ένα μαθηματικό μοντέλο είναι μία από τις σημαντικότερες εργασίες κατά την ανάπτυξη ενός μοντέλου προσομοίωσης. Συνήθως η αναζήτηση των σχέσεων αυτών γίνεται στην υπάρχουσα βιβλιογραφία. Αναφέρεται ενδεικτικά ένας αριθμός μαθηματικών σχέσεων που συχνά χρησιμοποιούνται σε μοντέλα προσομοίωσης για την περιγραφή φυσικών διεργασιών.

**Γραμμική σχέση εξάρτησης.** Διαφορική εξίσωση του τύπου  $\frac{dy}{dt} = k$ , περιγράφει την γραμμική μεταβολή μεγέθους  $y$  σε συνάρτηση με το χρόνο  $t$ , δηλαδή σχέση της μορφής  $y = a + kt$  (Σχήμα 2.2), όπου  $a$  και  $k$  σταθερές. Ως παράδειγμα αναφέρεται ο ρυθμός φωτοσύνθεσης σε σχέση με την φωτεινή ακτινοβολία σε χαμηλές εντάσεις ακτινοβολίας. Στις περισσότερες περιπτώσεις, η ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  είναι ο χρόνος.



Σχήμα 2.2. Γραμμική σχέση εξάρτησης μεγέθους  $y$  από μέγεθος  $x$  (ή συνήθως τον χρόνο  $t$ ).

**Εκθετική αύξηση.** Διαφορική εξίσωση του τύπου  $\frac{dy}{dt} = ky$ , περιγράφει την εκθετική αύξηση μεγέθους  $y$  σε συνάρτηση με μέγεθος  $t$ , δηλαδή σχέση της μορφής  $y = y_0 \times e^{kt}$  (Σχήμα 2.3), όπου  $y_0$  η τιμή του  $y$  για  $t=0$  και  $k$  σταθερά. Ως παράδειγμα αναφέρεται η αύξηση ενός πληθυσμού χωρίς κανέναν περιορισμό.

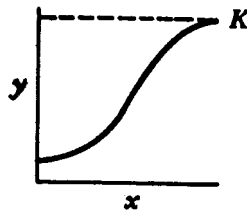


Σχήμα 2.3. Εκθετική αύξηση μεγέθους  $y$  σε συνάρτηση με μέγεθος  $x$  (συνήθως τον χρόνο  $t$ ).

**Λογιστική αύξηση.** Διαφορική εξίσωση του τύπου  $\frac{dy}{dt} = ky \left( \frac{C-y}{C} \right)$ , περιγράφει την λογιστική

αύξηση μεγέθους  $y$  σε συνάρτηση με μέγεθος  $t$ , δηλαδή σχέση της μορφής  $y = \frac{C}{1 + y_0 e^{-kt}}$  (Σχήμα

2.4), όπου  $C$ ,  $y_0$  και  $k$  σταθερές. Ως παράδειγμα αναφέρεται η αύξηση ενός πληθυσμού που περιορίζεται όμως από την πυκνότητα του ίδιου του πληθυσμού. Η σταθερά  $C$  στη διαφορική εξίσωση εκφράζει την μεγαλύτερη δυνατή τιμή του πληθυσμού και καλείται φέρουσα ικανότητα (carrying capacity) του συστήματος για τον πληθυσμό. Στην περίπτωση αυτή ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος.



Σχήμα 2.4. Λογιστική αύξηση μεγέθους  $y$  σε συνάρτηση με μέγεθος  $x$  (συνήθως τον χρόνο  $t$ ).

*Μηχανισμός Monod.* Διαφορική εξίσωση του τύπου  $\frac{dy}{dt} = \frac{kx}{x + k_h} y$ , περιγράφει την μεταβολή

μεγέθους  $y$  στον χρόνο σε εξάρτηση από περιοριστικό παράγοντα  $x$ . Η σταθερά  $k_h$  ονομάζεται σταθερά ημικορεσμού (half-saturation constant). Ως παράδειγμα αναφέρεται η ανάπτυξη οργανισμού σε εξάρτηση με έναν περιοριστικό παράγοντα της ανάπτυξής του, όπως είναι η συγκέντρωση θρεπτικών αλάτων για το φυτοπλαγκτόν ή οργανικής ύλης για τα ετερότροφα βακτήρια.

Σε ότι αφορά στις τιμές των παραμέτρων των διαφορικών εξισώσεων, προσεγγιστικές τιμές αναζητούνται στην διαθέσιμη βιβλιογραφία. Χρησιμοποιείται η λέξη 'προσεγγιστικές' γιατί μία παράμετρος που η τιμή της έχει υπολογιστεί με ακρίβεια σε ένα μοντέλο ή σε ένα πείραμα, ενδέχεται να έχει αρκετά διαφορετική τιμή σε ένα άλλο μοντέλο. Το γεγονός αυτό επιδέχεται την ακόλουθη ερμηνεία. Ένα μοντέλο αποτελεί μία απλουστευμένη έκφραση ενός πραγματικού συστήματος. Ένας αριθμός διεργασιών που δεν κρίνονται σημαντικές σε ένα μοντέλο αυτού του συστήματος, δεν συμπεριλαμβάνονται στις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις. Η λειτουργία όμως των διεργασιών αυτών λαμβάνεται υπ' όψη στο μοντέλο, με την χρήση αυξημένων τιμών στις παραμέτρους συγγενικών διεργασιών. Για παράδειγμα σε ένα μοντέλο περιγραφής των αλληλεπιδράσεων θρεπτικών αλάτων, φυτοπλαγκτού, οργανικής ύλης και βακτηρίων είναι δυνατόν να μην συμπεριληφθεί ως μεταβλητή κατάσταση το ζωοπλαγκτόν και οι διεργασίες που το αφορούν. Η βόσκηση του φυτοπλαγκτού από το ζωοπλαγκτόν είναι μια διεργασία που δεν είναι δυνατόν να αγνοηθεί πλήρως και ένας τρόπος να ληφθεί υπ' όψη είναι χρησιμοποιώντας αυξημένη τιμή στην παράμετρο που περιγράφει την φυτοπλαγκτονική θνησιμότητα. Είναι προφανές ότι σε ένα άλλο μοντέλο στο οποίο συμμετέχει το ζωοπλαγκτόν ως μεταβλητή κατάσταση και αναλυτικά περιγράφεται η διεργασία της βόσκησης, η παράμετρος της φυτοπλαγκτονικής θνησιμότητας θα έχει μικρότερη τιμή. Η παραπάνω πρακτική έκφρασης διεργασιών μέσω παραμέτρων συγγενικών διεργασιών καλείται παραμετροποίηση της διεργασίας. Όπως προαναφέρθηκε, λόγω της παραμετροποίησης οι τιμές της ίδιας παραμέτρου σε δύο διαφορετικά μοντέλα μπορεί να διαφέρουν σημαντικά. Για τον λόγο αυτό συχνά αναζητείται στην βιβλιογραφία μία περιοχή τιμών

για την κάθε παράμετρο ενός μοντέλου αντί της ακριβούς τιμής. Η δε ακριβής τιμή υπολογίζεται στην συνέχεια κατά την βαθμονόμηση με βάση τα διαθέσιμα πειραματικά δεδομένα.