

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ

I. Μυριτζής

2021

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	3
1 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ	5
1.1 Ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^3	5
1.2 Εσωτερικό γινόμενο	8
1.2.1 Ασκήσεις	14
1.3 Εξωτερικό γινόμενο	15
1.3.1 Ασκήσεις	18
1.4 Διανυσματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής	20
1.4.1 Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης	22
1.4.2 Μήκος καμπύλης	26
1.4.3 Ασκήσεις	27
1.5 Ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^n	29
1.6 Πίνακες, Ορίζουσες	32
1.6.1 Ασκήσεις	41
1.7 Διανυσματικοί χώροι	43
1.7.1 Υπόχωροι	45
1.7.2 Γραμμική ανεξαρτησία	46
1.7.3 Διάσταση και βάση ενός διανυσματικού χώρου	47
1.7.4 Εφαρμογή στη λύση γραμμικών συστημάτων	49
1.7.5 Γεωμετρική ερμηνεία των γραμμικών συστημάτων	51
1.7.6 Ασκήσεις	55
1.8 Γραμμικές απεικονίσεις	57
1.8.1 Ασκήσεις	60
2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	63
2.1 Βαθμωτά πεδία	64
2.1.1 Γράφημα και σύνολο στάθμης	65
2.1.2 Μερική παράγωγος	72

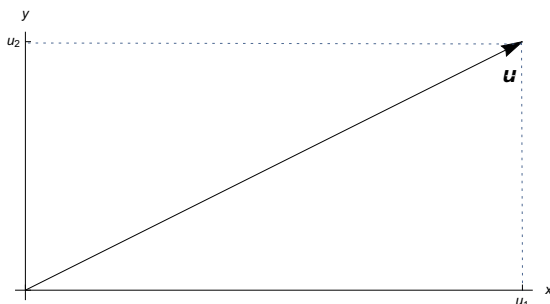
2.1.3	Βαθμίδα ή gradient	76
2.1.4	Παράγωγος κατά μήκος καμπύλης και κατευθυνόμενη παράγωγος	78
2.1.5	Ασκήσεις	83
2.2	Διανυσματικά πεδία	85
2.2.1	Ο τελεστής ανάδελτα. Απόκλιση και στροβιλισμός	88
2.2.2	Ασκήσεις	91
2.3	Ακρότατα βαθμωτών πεδίων	95
2.3.1	Εφαρμογή: Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων	97
2.4	Το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων	99
2.4.1	Ασκήσεις	101
2.5	Παραγωγή ολοκληρωμάτων	103
2.5.1	Ασκήσεις	107
3	ΣΕΙΡΕΣ	109
3.1	Σειρές Taylor	109
3.1.1	Ασκήσεις	112
3.2	Δυναμοσειρές	113
3.2.1	Εφαρμογές στη Φυσική.	117
3.2.2	Ελλειπτικά ολοκληρώματα	119
3.3	Το Θεώρημα Taylor σε πολλές διαστάσεις	120
4	ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ	125
4.1	Λύσεις των ΜΔΕ	128
4.1.1	Ασκήσεις	131
4.2	Η ροή ενός διανυσματικού πεδίου	133
4.2.1	Η γεωμετρική σημασία της απόκλισης	136
4.2.2	Η εξίσωση συνέχειας	138
4.3	Οι εξισώσεις κίνησης των ρευστών	139
4.3.1	Ιδανικά ρευστά	140
4.3.2	Πραγματικά ρευστά	145
4.3.3	Συνοριακές συνθήκες	147
4.3.4	Καταστατικές εξισώσεις	148
4.3.5	Σύνοψη	149
4.3.6	Ασκήσεις	149
	Βιβλιογραφία	153

Κεφάλαιο 1

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

1.1 Ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^3

Είναι γνωστό ότι τα σημεία του επιπέδου μπορούν να παρασταθούν ως διατεταγμένα ζεύγη αριθμών. Σημειώνουμε με (u_1, u_2) ένα τέτοιο σημείο. Θεωρούμε τώρα ένα διάνυσμα \mathbf{u} με αρχή την αρχή O των αξόνων και τέλος το σημείο (u_1, u_2) . Με τον τρόπο αυτό σε κάθε σημείο (u_1, u_2) του επιπέδου, αντιστοιχίζουμε ένα διάνυσμα \mathbf{u} , Σχήμα 1.1. Στο εξής θα ταυτοποιούμε το διάνυσμα \mathbf{u} και το σημείο (u_1, u_2) . Θα λέμε ότι οι συντεταγμένες του διανύσματος \mathbf{u} είναι οι αριθμοί u_1 και u_2 και θα γράφουμε $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$. Ιδιαίτερης σημασίας είναι τα μοναδιαία διανύσματα κατά μήκος των αξόνων x και y αντίστοιχα που συμβολίζονται ως $\mathbf{i} = (1, 0)$ και $\mathbf{j} = (0, 1)$. Έτσι μπορούμε να γράφουμε το διάνυσμα $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, ως $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$.



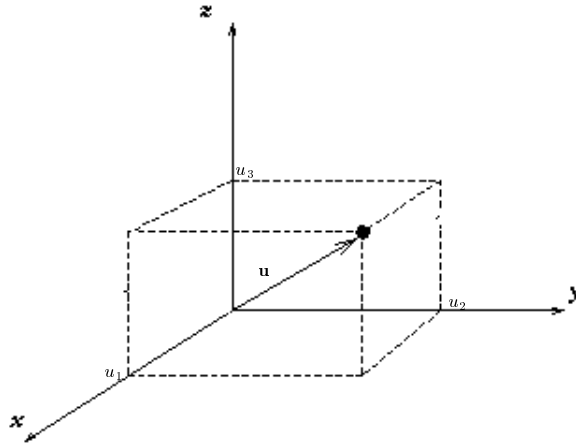
Σχήμα 1.1: Συντεταγμένες ενός διανύσματος του επιπέδου, \mathbf{u} .

Με όμοιο τρόπο τα σημεία του χώρου παριστάνονται από διατεταγμένες τριάδες αριθμών (u_1, u_2, u_3) . Το διάνυσμα \mathbf{u} με αρχή την αρχή O των αξόνων

και τέλος το σημείο (u_1, u_2, u_3) γράφεται ως

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \text{ή ως} \quad \mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k},$$

όπου $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Οι αριθμοί u_1, u_2, u_3 λέγονται *συντεταγμένες του διανύσματος \mathbf{u}* , Σχήμα 1.2



Σχήμα 1.2: Συντεταγμένες του \mathbf{u} .

Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (u_1, u_2) με $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, είναι το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ και συμβολίζεται με \mathbb{R}^2 , δηλαδή

$$\mathbb{R}^2 = \{(u_1, u_2) : u_1, u_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Σύμφωνα με την παραπάνω ταυτοποίηση, το σύνολο των διανυσμάτων του επιπέδου με αρχή την αρχή των αξόνων $(0, 0)$, ταυτίζεται με το σύνολο των σημείων του επιπέδου, \mathbb{R}^2 . Όμοια το σύνολο των διατεταγμένων τριάδων (u_1, u_2, u_3) πραγματικών αριθμών, δηλαδή το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, συμβολίζεται με \mathbb{R}^3 , δηλαδή

$$\mathbb{R}^3 = \{(u_1, u_2, u_3) : u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Κατ' αναλογία με το επίπεδο, το σύνολο των διανυσμάτων του Ευκλείδειου χώρου με αρχή την αρχή των αξόνων $(0, 0, 0)$, ταυτίζεται με το σύνολο των σημείων του \mathbb{R}^3 .

Δυό λόγια για το συμβολισμό. Τα διανύσματα συμβολίζονται με παχείς (bold) χαρακτήρες, π.χ. \mathbf{u} . Σε χειρόγραφο αυτό προφανώς δεν είναι εφικτό, οπότε χρησιμοποιείται το σύμβολο \vec{u} .

Εύλογοι είναι οι παρακάτω ορισμοί.

Ορισμός 1.1. Δύο διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ είναι ίσα, αν έχουν ίσες συντεταγμένες. Το μηδενικό διάνυσμα, $\mathbf{0}$, έχει μηδενικές συντεταγμένες, $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Ήθροισμα των διανυσμάτων $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, ορίζεται ως

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$

Πολλαπλασιασμός με βαθμωτό $\lambda \in \mathbb{R}$, ορίζεται ως

$$\lambda \mathbf{u} = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3).$$

Για παράδειγμα, αν $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$ και $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$, τότε $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (0, -1, 3)$ και $5\mathbf{u} = (5, -10, 0)$

Παρατηρούμε ότι οι πράξεις πρόσθεση διανυσμάτων και πολλαπλασιασμός με βαθμωτό παράγουν νέες διατεταγμένες τριάδες, δηλαδή $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$. Με τις δύο αυτές πράξεις, το σύνολο \mathbb{R}^3 αποκτά την αλγεβρική δομή ενός διανυσματικού χώρου, έχει δηλαδή τις ακόλουθες ιδιότητες. (Με $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ συμβολίζουμε στοιχεία του \mathbb{R}^3 και με λ, μ πραγματικούς αριθμούς).

1. ΔX 1 Αν \mathbf{x} και \mathbf{y} ανήκουν στο \mathbb{R}^3 τότε και $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ανήκει επίσης στο \mathbb{R}^3 .
2. ΔX 2 Για όλα τα στοιχεία \mathbf{x}, \mathbf{y} του \mathbb{R}^3 ισχύει $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
3. ΔX 3 $\lambda \mathbf{x}$ ανήκει στο \mathbb{R}^3 .
4. ΔX 4 $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.
5. ΔX 5 Υπάρχει ένα στοιχείο του \mathbb{R}^3 που συμβολίζεται με $\mathbf{0}$ τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο \mathbf{x} του \mathbb{R}^3 να ισχύει $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.
6. ΔX 6 Για κάθε \mathbf{x} στο \mathbb{R}^3 υπάρχει ένα στοιχείο $-\mathbf{x}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
7. ΔX 7 $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$.
8. ΔX 8 $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}$.
9. ΔX 9 $(\lambda \mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu \mathbf{x})$.
10. ΔX 10 $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$. (1 είναι ο αριθμός 1).

Ασκήσεις

1. Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 0, 3)$ και $\mathbf{c} = (3, -2, 4)$. Βρείτε τα $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$.
2. Για τα διανύσματα $\mathbf{a} = (1, 2)$, $\mathbf{b} = (3, 1)$, βρείτε και σχεδιάστε το $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ για τις τιμές $t = 0, 1/3, 1/2, 1, 2, 3$. Ποιό είναι κατά τη γνώμη σας το σύνολο των σημείων της μορφής $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$, $t \in \mathbb{R}$;
3. Για τα διανύσματα $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 1)$, θεωρήστε όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$, όπου λ, μ διατρέχουν όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Ποιό είναι κατά τη γνώμη σας το σύνολο των σημείων αυτών;

1.2 Εσωτερικό γινόμενο

Η έννοια του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων του επιπέδου είναι γνωστή από τη μέση εκπαίδευση, πλην όμως αυτή δεν μεταφέρεται αβίαστα και σε διανύσματα του χώρου. Ο λόγος είναι ότι δεν μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ως “μέτρο του πρώτου επί μέτρο του δεύτερου και επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας”, διότι δεν γνωρίζουμε τί είναι “μέτρο” διανύσματος και δεν έχουμε τρόπο προσδιορισμού της μεταξύ τους γωνίας. Υιοθετούμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό, που έχει το πλεονέκτημα να επεκτείνεται σε Ευκλείδειους χώρους οποιασδήποτε διάστασης.

Ορισμός 1.2. Για δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ του \mathbb{R}^3 , το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, είναι ο πραγματικός αριθμός

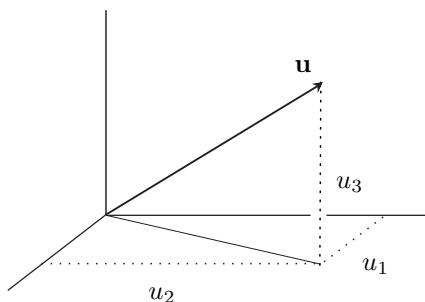
$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

Για παράδειγμα, αν $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$ και $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$, τότε $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot 3 = -3$, και $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 5$.

Από τον ορισμό, προκύπτουν αμέσως οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου (κάνετε έλεγχο):

Αν $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ είναι στοιχεία του \mathbb{R}^3 και λ είναι πραγματικός αριθμός τότε

- ΕΓ 1 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, και $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- ΕΓ 2 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.
- ΕΓ 3 $(\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.



Σχήμα 1.3: Το μήκος του διανύσματος \mathbf{u} είναι $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

• ΕΓ 4 $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$

Το εσωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με τον εαυτό του, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ έχει άμεση γεωμετρική ερμηνεία γιατί σχετίζεται με το μήκος (ή μέτρο) του διανύσματος \mathbf{u} . Πράγματι, αν εφαρμόσουμε διαδοχικά το Πυθαγόρειο θεώρημα σε ένα από τα ορθογώνια τρίγωνα του επιπέδου u_1, u_2 και στη συνέχεια στο ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα το διάνυσμα \mathbf{u} , βρίσκουμε ότι το μήκος του διανύσματος \mathbf{u} είναι $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$, Σχήμα 1.3. Θα συμβολίζουμε με $|\mathbf{u}|$ το μήκος ενός διανύσματος \mathbf{u} .

Ορισμός 1.3. Ο μή αρνητικός αριθμός $|\mathbf{u}|$ που ορίζεται ως

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2},$$

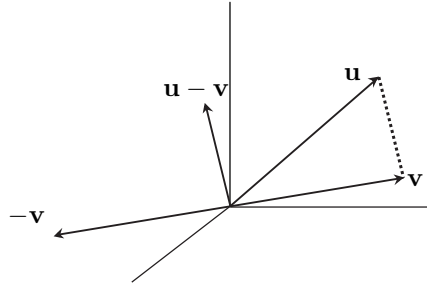
ονομάζεται *norm*, ή μήκος, ή μέτρο του διανύσματος \mathbf{u} .

Για παράδειγμα, αν $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$, τότε $|\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5}$. Οι μαθηματικοί συμβολίζουν συχνά με $\|\mathbf{u}\|$ τη *norm* του \mathbf{u} , και οι φυσικοί απλά με u .

Παρατήρηση 1.1. Στο Σχήμα 1.4 φαίνεται ότι το διάνυσμα $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ είναι παράλληλο και ίσου μήκους με το ευθύγραμμο τμήμα από το άκρο του \mathbf{u} στο άκρο του \mathbf{v} . Κατά συνέπεια, η απόσταση του άκρου του \mathbf{u} από το άκρο του \mathbf{v} είναι $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$. Ορίζουμε λοιπόν ως απόσταση του σημείου $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ από το σημείο $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ τον μή αρνητικό αριθμό

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}.$$

Συμπέρασμα: Η *norm* της διαφοράς των \mathbf{u} και \mathbf{v} είναι η απόσταση του σημείου $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ από το σημείο $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.



Σχήμα 1.4: Το ευθύγραμμο τμήμα με τη διακεκομμένη γραμμή παριστάνει την απόσταση του \mathbf{u} από το \mathbf{v} .

Για παράδειγμα, η απόσταση του $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ από το $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ είναι $\sqrt{2}$, και η απόσταση του $(1, 1, 1)$ από το $(1, 1, 0)$ είναι 1.

Θεώρημα 1.1. Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα \mathbf{u} και \mathbf{v} του \mathbb{R}^3 ($0 \leq \theta \leq \pi$), τότε

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το νόμο του συνημιτόνου στο τρίγωνο του σχήματος 1.4 που σχηματίζεται από τα διανύσματα \mathbf{u} , \mathbf{v} και το ευθύγραμμο τμήμα που παριστάνει την απόστασή τους, θα έχουμε

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta.$$

Το πρώτο μέλος γράφεται

$$(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

οπότε προκύπτει αμέσως η αποδεικτέα. \square

Για παράδειγμα, για να βρούμε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ και $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, χρησιμοποιούμε τον τύπο του θεωρήματος λύνοντας ως προς το συνημίτονο

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|} = \frac{1 + 1 - 1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3},$$

άρα $\theta = 1.23 \text{ rad} = 1.23 \times 180/\pi = 70.5^\circ$.

Όπως προαναφέρθηκε, στη μέση εκπαίδευση, ή σε βιβλία Φυσικής, ως εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων ορίζεται το γινόμενο του μέτρου του πρώτου, επί το μέτρο του δεύτερου και επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας. Το

Θεώρημα 1.1 συνδέει τον στοιχειώδη αυτό ορισμό του εσωτερικού γινομένου με τον δικό μας ορισμό. Παρατηρήστε ότι για την απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου και το θεώρημα του συνημιτόνου. Ακόμα, το θεώρημα αυτό καθιστά εύλογο τον ορισμό:

Ορισμός 1.4. Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται κάθετα ή ορθογώνια, αν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν. Θα γράφουμε $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ αν $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

- Δείξτε ότι $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ και $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$. Κατά συνέπεια τα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι αμοιβαίως κάθετα και έχουν norm 1, γι' αυτό λέγονται ορθοκανονικά διανύσματα.

Θεώρημα 1.2 (Θεώρημα του Πυθαγόρα). Αν \mathbf{u} και \mathbf{v} είναι κάθετα, τότε

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2.$$

Απόδειξη. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2$, διότι $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. \square

Θεώρημα 1.3 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). Για όλα τα διανύσματα \mathbf{u} και \mathbf{v} του \mathbb{R}^3 ισχύει

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|,$$

με ισότητα μόνο αν ένα από αυτά είναι μηδέν, ή αν το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Παρατηρήστε ότι εδώ συμβολίσαμε με $\|\cdot\|$ τη norm, δοθέντος ότι στο πρώτο μέλος εμφανίζεται η απόλυτη τιμή του εσωτερικού γινομένου.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.1 έχουμε

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\cos \theta|.$$

Αν ένα από τα διανύσματα είναι μηδέν, τότε ισχύει η ισότητα $0 = 0$. Αν $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$ τότε $\theta = 0$ ή π , οπότε ισχύει πάλι ισότητα διότι $|\cos \theta| = 1$. Αν το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου, τότε $|\cos \theta| < 1$. \square

Για παράδειγμα, αν $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$ και $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$, τότε $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -3$, $|\mathbf{u}| = \sqrt{5}$, $|\mathbf{v}| = \sqrt{11}$, επομένως η απόλυτη τιμή του εσωτερικού γινομένου $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |-3| = 3$ είναι μικρότερη από το γινόμενο των μέτρων $|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| = \sqrt{55}$.

Πόρισμα 1.4 (Τριγωνική ανισότητα). Για όλα τα διανύσματα \mathbf{u} και \mathbf{v} του \mathbb{R}^3 ισχύει

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|.$$

Προς ελάφρυνση του συμβολισμού αποφεύγουμε να συμβολίσουμε με $\| \cdot \|$ τη norm. Σημειώνουμε πάλι τη διαφορετική σημασία του συμβόλου $| \cdot |$ στις παραστάσεις $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$ και $|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|$.

Απόδειξη. Ισχύει

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \leq |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$$

και από την ανισότητα Schwarz έχουμε ότι

$$|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| = (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2,$$

επομένως

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 \leq (|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|)^2.$$

Επειδή και οι δύο παραστάσεις που είναι υψωμένες στο τετράγωνο είναι μη αρνητικές, προκύπτει αμέσως η τριγωνική ανισότητα. \square

Η αλγεβρική μορφή των ανισοτήτων Cauchy-Schwarz και τριγωνικής, είναι σαφώς πιο πολύπλοκη:

$$\begin{aligned} |a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3| &\leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{1/2}, \\ ((a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2)^{1/2} &\leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^{1/2} + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

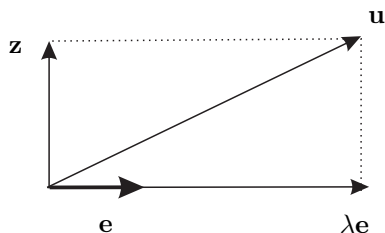
Όπως θα δούμε στην παράγραφο 1.5, γενικεύονται στις

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}, \\ \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^2 \right)^{1/2} &\leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Στην παρακάτω πρόταση περιγράφεται η διαδικασία ανάλυσης διανύσματος σε δύο κάθετα διανύσματα.

Πρόταση 1.5. Έστω \mathbf{e} μή μηδενικό διάνυσμα. Τότε κάθε διάνυσμα \mathbf{u} γράφεται ως άθροισμα ενός διανύσματος κατά τη διεύθυνση του \mathbf{e} και ενός κάθετου σ' αυτό, βλ. Σχήμα 1.5.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει κατάλληλο $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{e} + \mathbf{z}$, με $\mathbf{z} \perp \mathbf{e}$. Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά με \mathbf{e} προκύπτει, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e} = \lambda |\mathbf{e}|^2 + \mathbf{z} \cdot \mathbf{e} = \lambda |\mathbf{e}|^2$, επομένως αρκεί να πάρουμε $\lambda = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e} / |\mathbf{e}|^2$. Ως \mathbf{z} αρκεί να πάρουμε $\mathbf{z} = \mathbf{u} - \lambda \mathbf{e}$. \square



Σχήμα 1.5: Η προβολή του \mathbf{u} πάνω στο \mathbf{e} είναι το διάνυσμα $\lambda \mathbf{e}$.

Από την παραπάνω πρόταση, καθίσταται εύλογος ο ορισμός:

Ορισμός 1.5. Για τυχόντα διανύσματα \mathbf{u} και \mathbf{e} , ο αριθμός

$$\lambda = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}}{|\mathbf{e}|^2},$$

λέγεται συνιστώσα του \mathbf{u} κατά μήκος του \mathbf{e} και το διάνυσμα $\lambda \mathbf{e}$, λέγεται προβολή του \mathbf{u} πάνω στο \mathbf{e} , (Σχήμα 1.5).

Για παράδειγμα, η συνιστώσα του $\mathbf{u} = (2, 1, 2)$ κατά μήκος του $\mathbf{e} = (1, 0, 0)$ είναι $\mathbf{u} \cdot \mathbf{e} / |\mathbf{e}|^2 = 2/1^2 = 2$ και η προβολή του \mathbf{u} πάνω στο \mathbf{e} είναι $2\mathbf{e}$. Το διάνυσμα \mathbf{u} αναλύεται σε ένα διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του \mathbf{e} (δηλαδή την προβολή $2\mathbf{e}$), και ένα διάνυσμα \mathbf{z} κάθετο σ' αυτό, με $\mathbf{z} = \mathbf{u} - 2\mathbf{e} = (0, 1, 2)$.

Το μήκος της προβολής του \mathbf{u} πάνω στο \mathbf{e} είναι $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}| / |\mathbf{e}|$ (γιατί;) Ειδικώς, αν το \mathbf{e} είναι μοναδιαίο, τότε το μήκος της προβολής του \mathbf{u} πάνω στο \mathbf{e} ισούται με τη συνιστώσα του \mathbf{u} κατά μήκος του \mathbf{e} , που είναι απλά $\lambda = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}$. Για παράδειγμα, αν $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, τότε οι συνιστώσες του διανύσματος \mathbf{u} κατά μήκος των διανυσμάτων $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι απλώς οι συντεταγμένες u_1, u_2, u_3 . Πράγματι,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{i} = (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = u_1$$

διότι $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$ και όμοια $u_2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{j}$, $u_3 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{k}$. Οι προβολές του \mathbf{u} πάνω στα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ είναι $u_1\mathbf{i}$, $u_2\mathbf{j}$, $u_3\mathbf{k}$.

Παρατήρηση 1.2. Τα ορθοκανονικά διανύσματα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ παράγουν το χώρο \mathbb{R}^3 , με την έννοια ότι κάθε διάνυσμα \mathbf{u} γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, δηλαδή

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}.$$

Όπως θα δούμε στην παράγραφο των διανυσματικών χώρων, το τυχόν διάνυσμα \mathbf{u} γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Λέμε ότι τα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του χώρου. Όπως είδαμε στο

παραπάνω παράδειγμα, οι συντεταγμένες u_1, u_2, u_3 του διανύσματος \mathbf{u} είναι οι συνιστώσες του \mathbf{u} κατά μήκος των διανυσμάτων της βάσης.

Γενικότερα, λέμε ότι τρία (μη μηδενικά) αμοιβαίως κάθετα διανύσματα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ παράγουν το χώρο \mathbb{R}^3 , αν κάθε διάνυσμα \mathbf{u} γράφεται (με μοναδικό τρόπο όπως θα δούμε), ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, δηλαδή

$$\mathbf{u} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

Λέμε ότι τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ αποτελούν μία *ορθογώνια βάση* του χώρου (όχι ορθοκανονική, εκτός αν τα $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ έχουν norm ίση με 1). Οι συνιστώσες a_1, a_2, a_3 κατά μήκος των διανυσμάτων $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ εκφράζονται και πάλι με τη βοήθεια του εσωτερικού γινομένου του διανύσματος \mathbf{u} με τα στοιχεία της βάσης. Πράγματι, παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο του \mathbf{u} με το \mathbf{e}_1 π.χ. θα έχουμε

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1 = (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = a_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 + a_3\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = a_1\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = a_1|\mathbf{e}_1|^2,$$

άρα

$$a_1 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|^2}, \quad a_2 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_2|^2}, \quad a_3 = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_3}{|\mathbf{e}_3|^2}.$$

1.2.1 Ασκήσεις

- Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a} = (2 - 1, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, -2, 3)$, $\mathbf{c} = (1, -1, 1)$. Βρείτε τις γωνίες που σχηματίζουν ανά δύο. Βρείτε τη norm των διανυσμάτων $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.
- Δυο διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ του επιπέδου ορίζονται με πολικές συντεταγμένες ως (θ_1, r_1) και (θ_2, r_2) . Αν το $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}$ ορίζεται ως (θ, r) , πως συνδέονται τα (θ, r) με τα $(\theta_1, r_1), (\theta_2, r_2)$;
- Δίνονται τα διανύσματα $\mathbf{a} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 0, 3)$ και $\mathbf{c} = (3, -2, 4)$. Στις παρακάτω παραστάσεις μπορούν να τοποθετηθούν παρενθέσεις κατά ένα μόνο τρόπο ούτως ώστε αυτές να αποκτήσουν νόημα. Τοποθετείστε παρενθέσεις και υπολογίστε τις παραστάσεις.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc}, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \quad \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c}.$$

- Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς.

(α) Αν για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0$, τότε $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

(β) Αν $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ συνεπάγεται $\mathbf{b} = \mathbf{c}$.

5. Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα, ορθογώνιο προς τα διανύσματα $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ και $\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
6. Βρείτε και σχεδιάστε την προβολή του $\mathbf{a} = (1, 2)$, πάνω στο $\mathbf{b} = (3, 1)$. Βρείτε τα συνημίτονα των γωνιών που σχηματίζει το \mathbf{a} με τους άξονες.
7. Το $\mathbf{u} = (6, 3, -2)$ σχηματίζει με τους άξονες x, y, z γωνίες α, β, γ αντίστοιχα. Βρείτε τα συνημίτονα των α, β, γ (κατευθύνοντα συνημίτονα).
8. Για δύο πραγματικούς αριθμούς $a, b \in [0, 2\pi]$, ποιά γωνία σχηματίζουν τα διανύσματα του επιπέδου $(\cos a, \sin a)$ και $(\cos b, \sin b)$; Από την απάντησή σας προκύπτει η ταυτότητα $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
9. Δείξτε ότι για δύο μή μηδενικά διανύσματα του Ευκλείδειου χώρου ισχύει

$$-1 \leq \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \leq 1.$$

10. Δείξτε ότι η norm έχει τις εξής ιδιότητες:

- N1 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει $|\mathbf{x}| \geq 0$ και $|\mathbf{x}| = 0$ ανν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- N2 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda| |\mathbf{x}|$
- N3 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$

1.3 Εξωτερικό γινόμενο

Το εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο δύο διανυσμάτων του \mathbb{R}^3 , $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, ορίζεται ως

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{k},$$

ή συμβολικά

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Για παράδειγμα, αν $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$ και $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$, τότε

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Από τον ορισμό προκύπτουν αμέσως οι ακόλουθες ιδιότητες. (Ως συνήθως $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ συμβολίζουν διανύσματα του \mathbb{R}^3 και λ, μ πραγματικούς αριθμούς).

$$(1) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$$

$$(2) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}, \quad (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Συνεπώς έχουμε $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$, για κάθε διάνυσμα \mathbf{a} λόγω της (1). Ακόμα,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}.$$

Ας εξετάσουμε τώρα το εσωτερικό γινόμενο του \mathbf{c} με το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Εύκολα βρίσκουμε

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Από τις ιδιότητες των οριζουσών συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ και $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$, πράγμα που σημαίνει ότι το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι κάθετο και στο \mathbf{a} και στο \mathbf{b} , άρα είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα \mathbf{a} και \mathbf{b} .

Θα υπολογίσουμε τώρα το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων \mathbf{a} και \mathbf{b} . Έχουμε

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2.$$

Εκτελούμε τις πράξεις και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

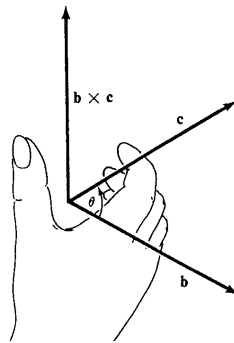
άρα

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta,$$

όπου θ είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα και φυσικά θεωρούμε ότι $0 \leq \theta \leq \pi$.

Για παράδειγμα, η γωνία μεταξύ των $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$ και $\mathbf{v} = (-1, 1, 3)$ δίνεται από την $\cos \theta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} / |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| = -3/\sqrt{55}$, επομένως $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - (-3/\sqrt{55})^2}$, οπότε $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \sin \theta = \sqrt{46}$ (συγκρίνετε με το μέτρο του $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-6, -3, -1)$).

Συνοψίζοντας: Το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα \mathbf{a} και \mathbf{b} και το μέτρο του είναι $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta$. Η φορά του βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, Σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6: Φορά του εξωτερικού γινομένου (από το βιβλίο των Marsden and Tromba, [3]).

Παραδείγματα από τη Φυσική

Πολλά μεγέθη της Φυσικής εκφράζονται ως εξωτερικά γινόμενα διανυσμάτων.

- Ένα σωματίδιο μάζας m κινείται σε μία καμπύλη με διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)$. Αν $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ είναι η ταχύτητά του και $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ η ορμή του, τότε η *στροφορμή* του σωματιδίου \mathbf{L} , ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος θέσης επί την ορμή, δηλαδή

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

- Η ροπή $\boldsymbol{\tau}$ μιάς δύναμης \mathbf{F} ως προς κάποιο σημείο που ορίζεται ως αρχή των αξόνων, ορίζεται ως γνωστόν από τη σχέση

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

όπου \mathbf{r} είναι το διάνυσμα θέσης του σημείου εφαρμογής της δύναμης.

- Η δύναμη Laplace που ασκείται σε φορτίο q που κινείται με ταχύτητα \mathbf{v} μέσα μαγνητικό πεδίο \mathbf{B} δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

- Η δύναμη Coriolis που ασκείται σε σωματίδιο μάζας m που κινείται με ταχύτητα \mathbf{v} στην επιφάνεια της γης δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{F} = 2m\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega},$$

όπου $\boldsymbol{\omega}$ είναι το διάνυσμα *γωνιακή ταχύτητα* της γης, δηλαδή $|\boldsymbol{\omega}| = \omega = 2\pi/T$, όπου T είναι η περίοδος περιστροφής της γης.

1.3.1 Ασκήσεις

1. Εξηγήστε γιατί οι παρακάτω παραστάσεις είναι ασαφείς ή εσφαλμένες

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{ab}, \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}.$$

2. Έστω $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. Βρείτε τις προβολές των \mathbf{a} και \mathbf{b} πάνω στο \mathbf{c} . Βρείτε τα $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$.

3. Δείξτε ότι αν $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$, τότε $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$.

4. Δείξτε ότι το γινόμενο $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ παραμένει αναλλοίωτο σε κυκλική εναλλαγή των $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

5. Δείξτε τις παρακάτω ιδιότητες του τριπλού διανυσματικού γινομένου:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c},$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

6. Δείξτε ότι $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$.

7. Δείξτε ότι το μέτρο του εξωτερικού γινομένου, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, παριστάνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα \mathbf{a} και \mathbf{b} . Η απόλυτη τιμή του $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ παριστάνει τον όγκο του παραλληλεπίπεδου που προσδιορίζεται από τα διανύσματα \mathbf{a}, \mathbf{b} και \mathbf{c} .

8. Για δύο μή μηδενικά διανύσματα \mathbf{a}, \mathbf{b} , ισχύει $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$, αν και μόνο αν τα \mathbf{a}, \mathbf{b} είναι ορθογώνια.

Για δύο μή μηδενικά διανύσματα \mathbf{a}, \mathbf{b} , ισχύει $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|$, αν και μόνο αν τα \mathbf{a}, \mathbf{b} είναι ...

9. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ και $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, τότε $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Αν $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ και $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, τότε ένα τουλάχιστον από τα \mathbf{a}, \mathbf{b} είναι μηδέν.

11. Έστω $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$ και $\mathbf{b} = (3, 4, -1)$. Βρείτε διάνυσμα \mathbf{c} ώστε $\mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}$.

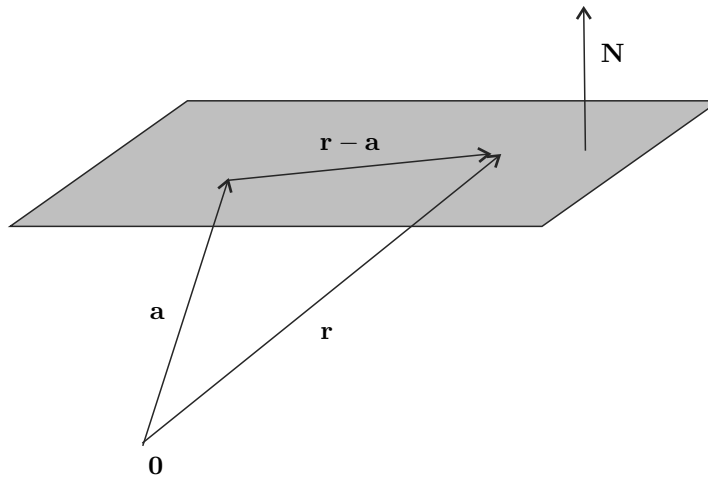
12. Αν $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ και αντίστροφα.

13. Βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στα $(1, 1, 1)$ και $(2, 3, -1)$.

14. Βρείτε δυο κάθετα διανύσματα και κάθετα στο $(2, 3, -1)$.
15. Αποδείξτε την ταυτότητα $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Για ποιά διάσταση ισχύει;
16. Θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο που προσδιορίζεται από τα διανύσματα $(2, 1, 1)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 2, 3)$. Επομένως τέσσερις κορυφές του παραλληλεπίπεδου είναι τα σημεία $(0, 0, 0)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 3, 4)$, $(2, 2, 3)$. Προσδιορίστε τις υπόλοιπες κορυφές του παραλληλεπίπεδου και υπολογίστε τον όγκο του.

Εξίσωση επιπέδου

Η εξίσωση ευθείας στο επίπεδο είναι $Ax + By + D = 0$. Γενικεύοντας, σε τρεις διαστάσεις, η εξίσωση $Ax + By + Cz + D = 0$ θα παριστάνει επίπεδο. Για να το δείξουμε, ας θεωρήσουμε ένα επίπεδο Π που περνά από το σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και έστω $\mathbf{N} = (A, B, C)$ ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο Π . Ένα σημείο $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ανήκει στο επίπεδο, αν το διάνυσμα $\mathbf{r} - \mathbf{a}$ είναι κάθετο



Σχήμα 1.7: Τα διανύσματα $\mathbf{r} - \mathbf{a}$ και \mathbf{N} έχουν μεταφερθεί στο επίπεδο για εικονογραφικούς λόγους

στο \mathbf{N} , Σχήμα 1.7, δηλαδή αν

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{N} = 0, \quad (1.3.1)$$

ή $\mathbf{r} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}$, ισοδύναμα αν

$$Ax + By + Cz = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3.$$

Επειδή το δεύτερο μέλος της εξίσωσης αυτής είναι σταθερό, έστω D , καταλήγουμε στην εξίσωση του επιπέδου

$$Ax + By + Cz = D. \quad (1.3.2)$$

Παράδειγμα 1. Η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει το σημείο $(1, 0, 0)$ και είναι κάθετο στο $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ είναι $x + y + z = 1$. Πράγματι, η εξίσωση του επιπέδου έχει τη μορφή $Ax + By + Cz = D$, όπου οι αριθμοί A, B, C είναι οι συντεταγμένες του κάθετου διανύσματος $\mathbf{N} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, επομένως $A = B = C = 1$, άρα η εξίσωση του επιπέδου γράφεται $x + y + z = D$. Επειδή περιέχει το σημείο $(1, 0, 0)$, θέτοντας στην εξίσωση του επιπέδου $x = 1, y = 0, z = 0$, προκύπτει $D = 1$.

Παράδειγμα 2. Αν θεωρήσουμε το σύστημα συντεταγμένων των ωκεανογράφων (δηλαδή άξονας $x'x$ κατά τη διεύθυνση W-E, άξονας $y'y$ κατά τη διεύθυνση S-N, άξονας $z'z$ κατακόρυφος), περιγράψτε τα σύνολα (α) το σύνολο των $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ με $z = 1$ και (β) W το σύνολο των $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ που είναι κάθετα στο διάνυσμα $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$. Απάντηση. (α) Πρόκειται για οριζόντιο επίπεδο (δηλαδή παράλληλο προς το επίπεδο x, y) που τέμνει τον άξονα z στο σημείο 1. (β) Αν $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ είναι κάθετο στο διάνυσμα \mathbf{u} , δηλαδή $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0$, τότε από την γενική εξίσωση (1.3.1) συμπεραίνουμε ότι W είναι ένα επίπεδο που περνά από την αρχή $(0, 0, 0)$ και είναι κάθετο στο $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$. Από την $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0$ θα έχουμε $x - y + 0z = 0 \Rightarrow x = y$. Άρα τα στοιχεία του W έχουν πρώτη συνιστώσα ίση με τη δεύτερη. Συμπεραίνουμε ότι W είναι ένα κατακόρυφο επίπεδο που τέμνει το επίπεδο x, y σε μια ευθεία που σχηματίζει γωνία 45 μοιρών με τους θετικούς ημιάξονες x, y .

1.4 Διανυσματικές συναρτήσεις μιάς μεταβλητής (καμπύλες)

Θεωρούμε ένα σωματίδιο που κινείται στο επίπεδο όπου έχουμε ορίσει ένα σύστημα συντεταγμένων. Τη στιγμή t , έστω $x(t)$ και $y(t)$ οι απομακρύνσεις του σωματιδίου από την αρχή $(0, 0)$ στους αντίστοιχους άξονες. Το ζεύγος των συναρτήσεων $(x(t), y(t))$ αποτελεί την *παραμετρική αναπαράσταση της τροχιάς* του σωματιδίου. Λέμε ότι η θέση του σωματιδίου $(x(t), y(t))$ προσδιορίζεται από το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)$, του κινητού τη στιγμή t που γράφεται

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad \text{ή} \quad \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad t \in [t_1, t_2].$$

Γενικώς συναρτήσεις του τύπου $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ όπου I είναι κάποιο διάστημα πραγματικών αριθμών και $n = 2, 3$ ονομάζονται *καμπύλες* στο επίπεδο ή στον τριδιάστατο χώρο.

Παράδειγμα 3. Αν $t \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{a}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ σταθερά διανύσματα, τότε $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ έχει ως εικόνα την ευθεία που περνά από το σημείο \mathbf{a} και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος \mathbf{v} .

Παράδειγμα 4. Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = a \cos t$ και $y(t) = a \sin t$ όπου $a > 0$ και $t \in [0, 2\pi]$, είναι παραμετρική παράσταση κύκλου κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας a . (Υψώστε στο τετράγωνο και προσθέστε κατά μέλη για να πεισθείτε).

Παράδειγμα 5. Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = a \cos \omega t$ και $y(t) = a \sin \omega t$ όπου $a > 0$, $\omega > 0$ και $t \in [0, 2\pi/\omega]$, είναι παραμετρική παράσταση του ίδιου κύκλου, αλλά το διάνυσμα θέσης “κινείται” με διαφορετική γωνιακή ταχύτητα. Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = a \cos(-\omega t) = a \cos \omega t$ και $y(t) = a \sin(-\omega t) = -a \sin \omega t$ όπου $a > 0$, $\omega > 0$ και $t \in [0, 2\pi/\omega]$, είναι παραμετρική παράσταση του ίδιου κύκλου, αλλά το διάνυσμα θέσης “κινείται” με αντίθετο προσανατολισμό.

Απαλείφοντας το χρόνο στα δύο τελευταία παραδείγματα, προκύπτει η αλγεβρική αναπαράσταση του κύκλου αυτού, $x^2 + y^2 = a^2$. Συμπεραίνουμε ότι ενώ η αλγεβρική αναπαράσταση είναι μοναδική, μία καμπύλη μπορεί να έχει πολλές παραμετρικές αναπαραστάσεις, π.χ. οι

$$\begin{aligned} x(t) &= t, \quad y(t) = t, \quad z(t) = t, \quad t \in [0, \infty), \\ x(t) &= t^2 - 1, \quad y(t) = t^2 - 1, \quad z(t) = t^2 - 1, \quad t \in [1, \infty), \end{aligned}$$

παριστούν την ίδια καμπύλη (ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $(1, 1, 1)$). Τι παριστάνει η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (\cos t^2, \sin t^2)$, $t \in [0, \sqrt{2\pi}]$;

Παράδειγμα 6. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνάρτηση μιας μεταβλητής. Το γράφημα της είναι μία καμπύλη C που αλγεβρικά παρίσταται από την $y = f(x)$, δηλαδή

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$

Η C έχει ως παραμετρική αναπαράσταση, $x(t) = t$ και $y(t) = f(t)$.

Παράδειγμα 7. Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ με $x(t) = (v_0 \cos \theta)t$ και $y(t) = (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2$ όπου $v_0, g > 0$ και $\theta \in [0, \pi/2]$, είναι παραμετρική αναπαράσταση της τροχιάς βλήματος που βάλλεται υπό γωνία ως προς τον ορίζοντα. Απαλείφοντας το χρόνο από τις $x(t)$ και $y(t)$ προκύπτει η αλγεβρική αναπαράσταση της τροχιάς

$$y = \tan \theta x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2,$$

που είναι παραβολή.

Παράδειγμα 8. Η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, vt)$, όπου $a, v, \omega > 0$, $t \in [0, 6\pi/\omega]$ είναι παραμετρική αναπαράσταση έλικας με σταθερό βήμα $2\pi v/\omega$.

1.4.1 Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης

Ορισμός 1.6. Παράγωγος ή ταχύτητα μιας διανυσματικής συνάρτησης $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ στο σημείο t είναι το διάνυσμα

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t},$$

αρκεί φυσικά να υπάρχει το όριο. Αν η ταχύτητα ορίζεται στο πεδίο ορισμού της καμπύλης, τότε έχουμε μια νέα διανυσματική συνάρτηση που συμβολίζεται με $\dot{\mathbf{r}}(t)$ ή $d\mathbf{r}/dt$.

Εύκολα προκύπτει ότι στην περίπτωση αυτή οι πραγματικές συναρτήσεις $x(t), y(t), z(t)$ είναι παραγωγίσιμες και μάλιστα

$$\dot{\mathbf{r}}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)).$$

Για παράδειγμα, η παράγωγος της καμπύλης στο επίπεδο με παραμετρική αναπαράσταση $x(t) = t^2 - 1$, $y(t) = t^3 - t$ είναι $\dot{\mathbf{r}}(t) = (2t, 3t^2 - 1)$. Όμοια, ένα σωματίδιο που κινείται στην ελικοειδή τροχιά $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in \mathbb{R}$, έχει ταχύτητα $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ που το μέτρο της είναι $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2}$.

Το διάνυσμα της ταχύτητας $\dot{\mathbf{r}}(t)$ είναι παράλληλο στην ευθεία που εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο $\mathbf{r}(t)$. Για να το κατανοήσετε, κάνετε σχήμα μεταφέροντας για εικονογραφικούς λόγους όλα τα διανύσματα στη θέση του σωματιδίου. Παρατηρήστε ότι το διάνυσμα

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t))$$

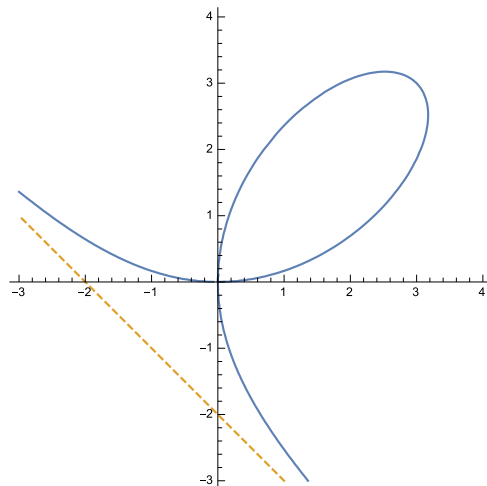
είναι πολλαπλάσιο της διανυσματικής “χορδής” $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ που συνδέει την αρχική θέση του σωματιδίου $\mathbf{r}(t)$ με την τελική $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Στο όριο όταν $\Delta t \rightarrow 0$, το διάνυσμα της ταχύτητας γίνεται εφαπτόμενο της τροχιάς.

Μία καμπύλη λέγεται απλή καμπύλη αν δεν αυτοτέμνεται. Η παραμετρική αναπαράσταση μιας απλής καμπύλης είναι μία ένα προς ένα απεικόνιση

$$\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

όπου I κάποιο διάστημα και \mathbf{r} το διάνυσμα θέσης ενός σημείου της καμπύλης. Δώστε δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα μή απλής καμπύλης είναι το φύλλο του Καρτέσιου (folium of Descartes), με αλγεβρική αναπαράσταση $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, βλ. Σχήμα 1.8. Μία παραμετρική αναπαράσταση του φύλλου του Καρτέσιου όταν $a = 2$, δίνεται από το ζεύγος $x(t) = 6t(1 + t^3)$, $y(t) = 6t^2(1 + t^3)$.



Σχήμα 1.8: Το φύλλο του Καρτέσιου με ασύμπτωτη την ευθεία $x + y + a = 0$ όταν $a = 2$.

Μία καμπύλη λέγεται λεία αν είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και η ταχύτητα της δεν μηδενίζεται πουθενά στο πεδίο ορισμού της,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \neq (0, 0, 0) \quad t \in I.$$

Για να κατανοήσετε τον ορισμό, θεωρήστε την καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2, 0) \quad t \in [-1, 2]$, που η ταχύτητά της μηδενίζεται στο $t = 0$, (κάνετε γράφημα στη Mathematica). Παράδειγμα μή λείας καμπύλης είναι η αστροειδής με παραμετρική αναπαράσταση $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, Σχήμα 1.9. Όπως μπορείτε εύκολα να δείτε, η ταχύτητα της αστροειδούς καμπύλης μηδενίζεται τις στιγμές $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. Συνήθως θεωρούμε λείες καμπύλες.

Η δεύτερη παράγωγος (επιτάχυνση), ορίζεται με προφανή τρόπο:

$$\ddot{\mathbf{r}} = d^2\mathbf{r}/dt^2 = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$$

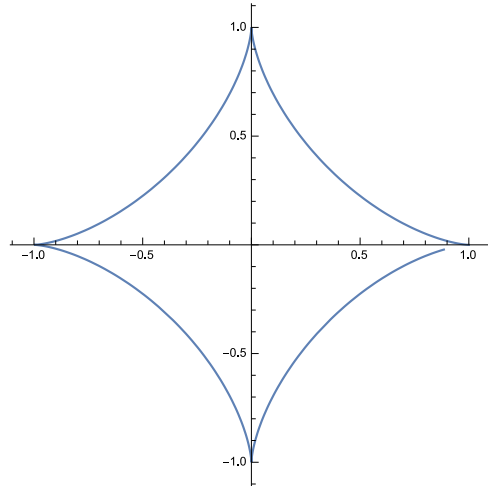
(υποτίθεται φυσικά ότι οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμες).

Ως παράδειγμα, το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου που εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση (διαλέγουμε σύστημα αξόνων ώστε το κέντρο του κύκλου να είναι το σημείο $(0, 0)$), γράφεται

$$\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j}, \quad a, \omega > 0.$$

Η ταχύτητα θα είναι λοιπόν

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = -\omega a \sin \omega t \mathbf{i} + \omega a \cos \omega t \mathbf{j}.$$



Σχήμα 1.9: Η αστροειδής καμπύλη στο διάστημα $[0, 6]$. Η ίδια καμπύλη στο διάστημα $[0, 2\pi]$ είναι κλειστή καμπύλη.

Το μέτρο της είναι σταθερό, $|\mathbf{v}(t)| = a\omega$. Παρατηρήστε ακόμα ότι το διάνυσμα της ταχύτητας είναι κάθε στιγμή κάθετο στο διάνυσμα θέσης. Η ιδιότητα αυτή είναι χαρακτηριστική της κυκλικής κίνησης, όχι μόνο της ομαλής. Η επιτάχυνση

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 a \cos \omega t \mathbf{i} - \omega^2 a \sin \omega t \mathbf{j} = -\omega^2 \mathbf{r}(t),$$

είναι αντίρροπη της διανυσματικής ακτίνας, κατά συνέπεια είναι κάθετη στην ταχύτητα, έχει λοιπόν τα γενικά χαρακτηριστικά της κεντρομόλου επιτάχυνσης. (Γενικά, αν μία διανυσματική συνάρτηση \mathbf{v} έχει σταθερή *norm*, τότε είναι ορθογώνια στην παράγωγο της, $\dot{\mathbf{v}}$. Απόδειξη: Παραγωγίζοντας την $|\mathbf{v}(t)|^2 = \mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = \text{const}$, έχουμε $2\dot{\mathbf{v}}(t) \cdot \mathbf{v}(t) = 0$, ο.ε.δ.)

Το γινόμενο πραγματικής συνάρτησης λ επί διανυσματική συνάρτηση \mathbf{r} είναι μία νέα διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{q} = \lambda\mathbf{r}$ που ορίζεται ως, $\mathbf{q}(t) = \lambda(t)\mathbf{r}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Η παράγωγος της \mathbf{q} δίνεται από τον τύπο $\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\lambda}(t)\mathbf{r}(t) + \lambda(t)\dot{\mathbf{r}}(t)$, (κانونας Leibniz για την παράγωγο γινομένου). Ανάλογο είναι και το περιεχόμενο του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 1.6. Για δύο (λείες) διανυσματικές συναρτήσεις \mathbf{r} και \mathbf{p} ισχύει

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}.$$

Απόδειξη. Οι δύο αυτές σχέσεις εκφράζουν ουσιαδώς την ιδιότητα Leibniz για την παράγωγο γινομένου, εν προκειμένω εσωτερικού και εξωτερικού γινομένου. Αν δεν σας αρκεί ως απόδειξη, γράψετε $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ και $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$, όπου

r_i και p_i είναι πραγματικές συναρτήσεις, οπότε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) &= \frac{d}{dt}(r_1 p_1 + r_2 p_2 + r_3 p_3) = \dot{r}_1 p_1 + r_1 \dot{p}_1 + \dot{r}_2 p_2 + r_2 \dot{p}_2 + \dot{r}_3 p_3 + r_3 \dot{p}_3 \\ &= (\dot{r}_1 p_1 + \dot{r}_2 p_2 + \dot{r}_3 p_3) + (r_1 \dot{p}_1 + r_2 \dot{p}_2 + r_3 \dot{p}_3) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}.\end{aligned}$$

Όμοια αποδεικνύεται και η δεύτερη. \square

Ως εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος, θα υπολογίσουμε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ενός σωματιδίου. Υπενθυμίζουμε ότι ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής (Newton) για ένα υλικό σημείο μάζας m , γράφεται

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F},$$

όπου \mathbf{F} είναι η συνολική δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο. Αν $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου και $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ είναι η ορμή του, τότε ο θεμελιώδης νόμος γράφεται και ως $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$.

Θεώρημα 1.7. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός σωματιδίου ισούται με την ροπή της συνολικής δύναμης \mathbf{F} που ασκείται στο σωματίδιο,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Απόδειξη. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ γράφεται ως

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

όπου ο όρος $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}$ είναι μηδέν διότι $\dot{\mathbf{r}}$ και \mathbf{p} είναι συγγραμμικά και $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ είναι η ροπή της δύναμης. \square

Ως δεύτερη εφαρμογή θα δείξουμε ότι η στροφορμή ενός υλικού σημείου που κινείται στο πεδίο βαρύτητας μιας σημειακής μάζας διατηρείται σταθερή. Υπενθυμίζουμε ότι ο νόμος της παγκόσμιας έλξης γράφεται

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -GMm \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

M και m είναι οι μάζες π.χ. του ήλιου και κάποιου πλανήτη. Στον τύπο αυτό θεωρούμε ότι ο ήλιος και ο πλανήτης είναι σημειακές μάζες και έχουμε ορίσει σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε ο ήλιος να βρίσκεται στην αρχή $(0, 0, 0)$. $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ είναι το διάνυσμα θέσης του πλανήτη τη στιγμή t και $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Παίρνοντας τη ποσμ στον παραπάνω τύπο θα έχουμε το γνωστό νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου

$$|\mathbf{F}| = GMm \frac{|\mathbf{r}|}{r^3} = \frac{GMm}{r^2}.$$

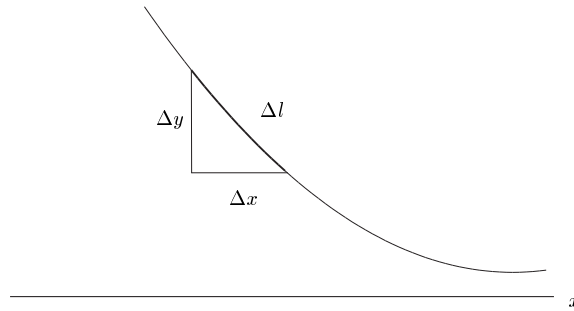
Θεώρημα 1.8. Οι τροχιές των πλανητών είναι επίπεδες.

Απόδειξη. Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ενός πλανήτη γράφεται ως

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0} + \mathbf{r} \times \mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0},$$

άρα \mathbf{L} είναι σταθερή (κατά μέτρο και κατά διεύθυνση), άρα η διανυσματική συνάρτηση \mathbf{r} κείται σε σταθερό επίπεδο. \square

1.4.2 Μήκος καμπύλης



Σχήμα 1.10: Το στοιχειώδες μήκος καμπύλης Δl .

Το μήκος μίας καμπύλης $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, υπολογίζεται ως εξής: Το στοιχειώδες μήκος Δl στο Σχήμα 1.10 δίνεται προσεγγιστικά από την

$$\Delta l \simeq \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \simeq \sqrt{\Delta x^2 + (f'(x) \Delta x)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \Delta x.$$

Το άθροισμα των στοιχειωδών αυτών μηκών είναι κατά προσέγγιση το μήκος της καμπύλης. Σχηματίζοντας το άθροισμα Riemann, θα καταλήξουμε στον τύπο

$$\text{Μήκος καμπύλης} = L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Παράδειγμα 9. Θα υπολογίσουμε το μήκος της αλυσσοειδούς καμπύλης (catenary)

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

μεταξύ $x = -1$ και $x = 1$ (είναι το σχήμα που παίρνει μία αλυσίδα ή ένα καλώδιο που κρέμεται από δύο πύργους, G. Leibniz, C. Huygens and Johann Bernoulli 1691). Η δοθείσα συνάρτηση είναι το υπερβολικό συνημίτονο, επομένως το υπόριζο στον τύπο

του μήκους της καμπύλης είναι $1 + (f'(x))^2 = 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$. Επομένως το μήκος της αλυσοειδούς είναι

$$L = \int_{-1}^1 \cosh x \, dx = [\sinh x]_{-1}^1 = e - 1/e \simeq 2.35.$$

- Υπολογίστε τα μήκη των καμπυλών: (α) $y = \ln x$, $1 \leq x \leq e$ (β) $y = \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \pi/6$.

Θεωρούμε τώρα μία παραμετρική παράσταση μιάς καμπύλης, δηλαδή ένα ζεύγος παραγωγίσιμων συναρτήσεων $(x(t), y(t))$ με $t \in [a, b]$. Επειδή $dx = \dot{x}(t)dt$ και $dy = \dot{y}(t)dt$, επομένως $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$, συμπεραίνουμε ότι το μήκος της καμπύλης θα δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

Ελέγχουμε τον τύπο υπολογίζοντας το μήκος του κύκλου $x(t) = r \cos t$, $y(t) = r \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = r \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r.$$

1.4.3 Ασκήσεις

1. Γράψτε την εξίσωση ευθείας που περνά από το σημείο $(0, 1, 2)$ και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v} = (1, 1, 3)$.
2. Ένα επίπεδο έχει εξίσωση $x + 2y - 2z + 7 = 0$. Βρείτε: α) ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα β) τα σημεία τομής με τους άξονες γ) την απόσταση του επιπέδου από την αρχή δ) τις συντεταγμένες του σημείου του επιπέδου που έχει την ελάχιστη απόσταση από τη αρχή.
3. Υπενθυμίζουμε ότι η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο \mathbf{a} και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος \mathbf{u} γράφεται $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{u} + \mathbf{a}$. Δείξτε ότι αυτή μπορεί εν γένει να γραφεί ως

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}. \quad (1.4.1)$$

Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $(1, 1, 1)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο με εξίσωση $4x - 3y + z = 5$.

4. Βρείτε ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που περνά από τα σημεία $(0, 2, 2)$, $(2, 0, -1)$ και $(3, 4, 0)$.

5. Βρείτε τη διανυσματική ταχύτητα και το μέτρο της στις παρακάτω καμπύλες

$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{u} + \mathbf{a},$$

όπου \mathbf{u}, \mathbf{a} σταθερά διανύσματα.

6. Βρείτε παραμετρικές αναπαράστασεις $\mathbf{r}(t)$ των παρακάτω καμπυλών: ευθεία που περνά από τα σημεία $(1, 1, 1)$ και $(2, 3, 2)$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x\}$, έλικα ακτίνας 2 και βήματος $1/3$.
7. Περιγράψετε τη λογαριθμική σπείρα (spira mirabilis) με παραμετρική αναπαράσταση $x(t) = ae^{-\lambda t} \cos \omega t$, $y(t) = ae^{-\lambda t} \sin \omega t$, με $a, \omega, \lambda > 0$. Περιγράψετε τη σπείρα του Αρχιμήδη με παραμετρική αναπαράσταση $x(t) = at \cos \omega t$, $y(t) = at \sin \omega t$, $a, \omega > 0$. Κάνετε γραφήματα στη Mathematica.
8. Δείξτε ότι μία παραμετρική αναπαράσταση της έλλειψης $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ δίνεται από την $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$, δηλαδή $x(t) = a \cos t$, $y(t) = b \sin t$. Υπολογίστε την ταχύτητα και την επιτάχυνση. Είναι κάθε στιγμή η ταχύτητα κάθετη στο διάνυσμα θέσης; Βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας τις χρονικές στιγμές $0, \pi/6, \pi/2, \pi$.
9. Δείξτε ότι η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = \cosh t \mathbf{i} + \sinh t \mathbf{j}$, $t \in [-2, 2]$ παριστά υπερβολή. Βρείτε την ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}(t)$ τις στιγμές $t = 0, 1$. Κάνετε σκίτσο της τροχιάς.
10. Υπολογίστε τα μήκη των καμπυλών: (α) Κυκλοειδούς, με

$$x(t) = a(t - \sin t), \quad y(t) = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

(β) Αστροειδούς

$$x(t) = \cos^3 t, \quad y(t) = \sin^3 t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

(γ) $x(t) = t - \tanh t$, $y(t) = 1/\cosh t$, $t \in [-\ln 2, \ln 2]$. δ) Σπείρας του Αρχιμήδη.

11. Υπολογίστε τα μήκη των καμπυλών

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \left(2 \cos t, 2 \sin t, \sqrt{3}t \right), \quad t \in [0, 3\pi], \\ \mathbf{r}(t) &= (t - \sin t, 1 - \cos t, 0), \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Υπόμνηση:

$$l(\mathbf{r}) = \int_a^b |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

12. Για λείες διανυσματικές συναρτήσεις \mathbf{r} , \mathbf{p} , \mathbf{q} ισχύει

$$\frac{d}{dt} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \dot{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{q}) + \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{p}} \times \mathbf{q}) + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{p} \times \dot{\mathbf{q}}).$$

13. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

(α) Σε μία καμπύλη το διάνυσμα της ταχύτητας $\dot{\mathbf{r}}(t)$ είναι πάντα κάθετο στο διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}(t)$.

(β) Σε μία καμπύλη η επιτάχυνση είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα.

(γ) Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων του τριδιάστατου Ευκλείδειου χώρου είναι μή αρνητικός αριθμός.

(δ) Αν $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, τότε τουλάχιστον ένα από τα \mathbf{a}, \mathbf{b} είναι το μηδενικό διάνυσμα.

(ε) Αν $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$, τότε ένα από τα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των δύο άλλων.

1.5 Ο διανυσματικός χώρος \mathbb{R}^n

Το σύνολο των διατεταγμένων n -άδων πραγματικών αριθμών (x_1, x_2, \dots, x_n) συμβολίζεται με \mathbb{R}^n και λέγεται n -διάστατος Ευκλείδειος χώρος. Τα στοιχεία του $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ λέγονται σημεία του \mathbb{R}^n , ή n -διανύσματα. Όπως και στην περίπτωση του τριδιάστατου Ευκλείδειου χώρου, ορίζουμε άθροισμα των διανυσμάτων $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

και πολλαπλασιασμό με βαθμωτό λ

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Με τις δύο αυτές πράξεις, το σύνολο \mathbb{R}^n αποκτά την αλγεβρική δομή ενός διανυσματικού χώρου, έχει δηλαδή τις ιδιότητες ΔΧ1 έως ΔΧ10. Τα n διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$, λέγονται *συνήθη διανύσματα βάσης*, και κάθε διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους,

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n.$$

Η έννοια του εσωτερικού γινομένου διανυσμάτων επεκτείνεται αβίαστα και στον n -διάστατο Ευκλείδειο χώρο. Έτσι, αν $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$

είναι στοιχεία του \mathbb{R}^n , το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ (ή $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$) είναι ο πραγματικός αριθμός

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Από τον ορισμό, προκύπτουν αμέσως οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ΕΓ1 – ΕΓ4 (κάνετε έλεγχο).

Το εσωτερικό γινόμενο επιτρέπει να ορίσουμε norm ενός n -διανύσματος \mathbf{x}

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}. \quad (1.5.1)$$

Θεώρημα 1.9 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz). Για όλα τα διανύσματα \mathbf{x} και \mathbf{y} του \mathbb{R}^n ισχύει

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|,$$

με ισότητα μόνο αν ένα από αυτά είναι μηδέν, ή αν το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Απόδειξη. * Αν $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, το θεώρημα είναι προφανές. Στο εξής λοιπόν υποθέτουμε ότι $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε το \mathbf{y} με οποιονδήποτε αριθμό λ η ανισότητα δεν αλλάζει, επομένως μπορούμε να εξετάσουμε μόνο την περίπτωση που το \mathbf{y} είναι μοναδιαίο, $\|\mathbf{y}\| = 1$, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\|$. Όπως κάθε διάνυσμα, το \mathbf{x} μπορεί να αναλυθεί σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη με το \mathbf{y} και μία κάθετη σ' αυτό ως εξής: $\mathbf{x} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{y} + \mathbf{z}$, όπου το \mathbf{z} είναι κάθετο στο \mathbf{y} . Πράγματι, το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ γράφεται $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = ((\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) \mathbf{y} + \mathbf{z}) \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + \mathbf{z} \cdot \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{z} \cdot \mathbf{y} = 0$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα θα έχουμε

$$\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 \|\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{z}\|^2 = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2 + \|\mathbf{z}\|^2 \geq (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$$

με ισότητα μόνο αν $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, δηλαδή μόνο αν το \mathbf{x} είναι πολλαπλάσιο του \mathbf{y} . Παίρνοντας ριζικά προκύπτει η ζητούμενη ανισότητα. \square

Συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι η τριγωνική ανισότητα, επομένως μπορούμε να δείξουμε ότι η norm, έχει τις εξής ιδιότητες:

- N1 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει $|\mathbf{x}| \geq 0$ και $|\mathbf{x}| = 0$ ανν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- N2 $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\lambda \mathbf{x}| = |\lambda| |\mathbf{x}|$
- N3 $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ ισχύει $|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$

Η σημασία της norm έγκειται στο ότι εφοδιάζει τον \mathbb{R}^n με μία απόσταση: Η απόσταση των σημείων $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι ο αριθμός $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Η απόσταση με τη σειρά της, επιτρέπει να πούμε πότε δύο σημεία \mathbf{x}, \mathbf{y} είναι “κοντά”, με άλλα λόγια επιτρέπει να ορίσουμε όριο, συνέχεια, παράγωγο κλπ. Έτσι οι αλγεβρικές ιδιότητες του \mathbb{R}^n (ιδιότητες διανυσματικού χώρου) σε συνδυασμό με την έννοια της απόστασης, επιτρέπουν να αναπτύξουμε τον απειροστικό λογισμό του \mathbb{R}^n .

Παρατήρηση 1.3. Η norm που ορίσαμε στην (1.5.1) λέγεται *Ευκλείδεια* norm και η αντίστοιχη απόσταση

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2},$$

λέγεται *Ευκλείδεια* απόσταση. Μπορούν να ορισθούν και άλλες norm στον \mathbb{R}^n που ικανοποιούν τις ιδιότητες N1, N2, N3. Για παράδειγμα μπορεί να ορισθεί η λεγόμενη max-norm που θα συμβολίσουμε με $\|\cdot\|$ ως εξής: Για $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ στον \mathbb{R}^n ,

$$\|\mathbf{x}\| = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|,$$

δηλαδή $\|\mathbf{x}\|$ είναι η μέγιστη κατ' απόλυτη τιμή συντεταγμένη του \mathbf{x} . Μπορεί να δειχθεί ότι η $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τις ιδιότητες N1, N2, N3. Σημειώνουμε ότι η max-norm δεν προκύπτει από εσωτερικό γινόμενο. Η αντίστοιχη απόσταση δύο σημείων $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι ο αριθμός $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \max |x_i - y_i|, i = 1, \dots, n$. Μία άλλη norm που δεν προκύπτει από εσωτερικό γινόμενο και θα συμβολίσουμε με $\|\cdot\|_1$ είναι η εξής: Για $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ στον \mathbb{R}^n , ορίζουμε

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

δηλαδή $\|\mathbf{x}\|_1$ είναι το άθροισμα των απολύτων τιμών των συντεταγμένων του \mathbf{x} , (Manhattan norm, βλ. σχετικό άρθρο στη Wikipedia). Δείξτε ότι η $\|\cdot\|_1$ ικανοποιεί τις ιδιότητες N1, N2, N3, επομένως είναι πράγματι norm . Η αντίστοιχη απόσταση δύο σημείων $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι ο αριθμός

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|.$$

Μπορείτε να παριγράψετε στον \mathbb{R}^2 το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ικανοποιούν την $\|\mathbf{x}\|_1 \leq 1$, δηλαδή $|x_1| + |x_2| \leq 1$;

- Αν $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ είναι στοιχεία του \mathbb{R}^2 , ως εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, ορίσαμε τον πραγματικό αριθμό

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Στη μέση εκπαίδευση, εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων \mathbf{u} και \mathbf{v} ορίζεται ως “μέτρο του πρώτου επί μέτρο του δεύτερου και επί το συνημίτονο της μεταξύ τους γωνίας, δηλαδή $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$.” Σε τί πλεονεκτεί ο ορισμός μας έναντι του ορισμού που παρέχεται στη μέση εκπαίδευση;

1.6 Πίνακες, Ορίζουσες

Πίνακες, ορισμοί

Ένας $m \times n$ πίνακας A , είναι μία ορθογώνια διάταξη αριθμών με m γραμμές και n στήλες

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Το στοιχείο της i γραμμής και j στήλης είναι το a_{ij} . Πολλές φορές για λόγους οικονομίας γράφουμε τον πίνακα A ως

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Η j -στήλη συμβολίζεται με \mathbf{A}^j και συνήθως λέγεται διάνυσμα j -στήλης (θεωρούμενη ως μία m -άδα αριθμών, είναι ένα στοιχείο του \mathbb{R}^m),

$$\mathbf{A}^j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Όμοια η i -γραμμή συμβολίζεται με \mathbf{A}_i και συνήθως λέγεται διάνυσμα i -γραμμής (θεωρούμενη ως μία n -άδα αριθμών, είναι ένα στοιχείο του \mathbb{R}^n),

$$\mathbf{A}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}).$$

Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

έχει ως στήλες τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Έτσι, το διάνυσμα γραμμής (x_1, x_2, \dots, x_n) είναι ένας $1 \times n$ πίνακας και το διάνυσμα στήλης

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

είναι ένας $m \times 1$ πίνακας.

Προφανείς έννοιες είναι οι ακόλουθες. Ένας πίνακας λέγεται *τετραγωνικός* αν $m = n$. Ένας πίνακας λέγεται *μηδενικός* αν όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν. Συμβολίζεται με O . *Διαγώνιος* είναι ένας τετραγωνικός πίνακας που όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν εκτός από αυτά που βρίσκονται στην διαγώνιό του,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Συμβολίζουμε τον διαγώνιο πίνακα ως $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Πράξεις μεταξύ πινάκων

Ορίζουμε άθροισμα πινάκων που έχουν ίδιο μέγεθος με τον ακόλουθο τρόπο.

Αν $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ είναι δύο $m \times n$ πίνακες, τότε

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Για παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Προφανώς $A + O = A$, για οποιοδήποτε πίνακα A ίδιου μεγέθους με τον O .

Ορίζουμε πολλαπλασιασμό του πίνακα με βαθμωτό $\lambda \in \mathbb{R}$ ως εξής. Ο πίνακας λA έχει ως στοιχεία του τα στοιχεία του A πολλαπλασιασμένα με λ ,

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Για παράδειγμα αν A είναι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, τότε

$$(-1)A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ονομάζουμε *ανάστροφο* του $m \times n$ πίνακα και τον συμβολίζουμε με $A^T = (b_{ij})$, τον $n \times m$ πίνακα που έχει ως γραμμές τις στήλες του A , δηλαδή

$$A^T = (b_{ij}) = (a_{ji}).$$

Για παράδειγμα αν A είναι όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, τότε

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας λέγεται *συμμετρικός* αν

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Για παράδειγμα ένας 3×3 συμμετρικός πίνακας έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & a & b \\ a & \lambda_2 & c \\ b & c & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Προφανώς ένας συμμετρικός πίνακας είναι ίσος με τον ανάστροφο του, $A = A^T$.

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας λέγεται *αντισυμμετρικός* αν

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Για παράδειγμα ένας 3×3 αντισυμμετρικός πίνακας έχει τη μορφή

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

Προφανώς ένας αντισυμμετρικός πίνακας είναι αντίθετος του αναστρόφου του, $A = -A^T$.

Τέλος, ο *μοναδιαίος πίνακας*, ή *πίνακας μονάδα* I , είναι ένας διαγώνιος πίνακας που όλα τα διαγώνια στοιχεία του είναι 1,

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας και $B = (b_{ij})$ ένας $n \times r$ πίνακας. Ορίζουμε ως γινόμενο των AB ένα $m \times r$ πίνακα $C = (c_{ij})$ που τα στοιχεία του είναι

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, r.$$

Σχηματικά, το στοιχείο c_{ij} προκύπτει ως εσωτερικό γινόμενο της i -γραμμής του πίνακα A με την j -στήλη του πίνακα B . Για παράδειγμα,

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}.$$

Ο λόγος που ορίζεται έτσι το γινόμενο πινάκων θα γίνει αντιληπτός όταν θα δούμε τη γεωμετρική σημασία τους στη Γραμμική Άλγεβρα.

Ιδιότητες του γινομένου

1. *Εν γένει το γινόμενο πινάκων δεν είναι μεταθετικό, δηλαδή*

$$AB \neq BA.$$

2. *Το γινόμενο είναι προσεταιριστικό*

$$A(BC) = (AB)C.$$

3. *Ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση*

$$A(B + C) = AB + AC$$

Οίκοθεν νοείται ότι στις παραπάνω ισότητες, οι πράξεις ορίζονται. Για παράδειγμα στην (2) A, B μπορούν να πολλαπλασιαστούν και B, C μπορούν να πολλαπλασιαστούν. Έτσι, αν A είναι κάποιος $m \times n$ πίνακας, ο B πρέπει να έχει τη μορφή ενός $n \times r$ πίνακα και ο C πρέπει να είναι ένας $r \times s$ πίνακας.

Αντίστροφος πίνακας

Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A λέγεται *αντιστρέψιμος*, αν υπάρχει ένας $n \times n$ πίνακας B τέτοιος ώστε

$$AB = BA = I_n.$$

Ο πίνακας B λέγεται *αντίστροφος* του A και συμβολίζεται με A^{-1} . Ο αντίστροφος ενός πίνακα, αν υπάρχει, είναι μοναδικός. Ένας απλός τρόπος προσδιορισμού του αντιστρόφου πίνακα, είναι η λύση του συστήματος $AA^{-1} = I$. Για παράδειγμα, αν

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

αρκεί να προσδιορίσουμε ένα πίνακα

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

τέτοιο ώστε

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Αρκεί λοιπόν να λύσουμε το σύστημα

$$2x - z = 1,$$

$$2y - w = 0,$$

$$5x + 3y = 0,$$

$$5y + 3w = 1.$$

Από τη λύση του συστήματος προκύπτει ότι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}.$$

Παρατήρηση 1.4. Η γεωμετρική ερμηνεία που μπορούμε να δώσουμε στους πίνακες είναι η εξής. Ένας τυχών $m \times n$ πίνακας A , δρα πάνω σε ένα διάνυσμα \mathbf{x} του \mathbb{R}^n και παράγει ένα διάνυσμα \mathbf{y} του \mathbb{R}^m , $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Λέμε ότι ο πίνακας A είναι μία *γραμμική απεικόνιση* από τον \mathbb{R}^n στον \mathbb{R}^m , διότι:

(α) Για οποιαδήποτε διανύσματα \mathbf{x}_1 και \mathbf{x}_2 ,

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2.$$

(β) Για κάθε πραγματικό αριθμό λ και κάθε διάνυσμα \mathbf{x} ,

$$A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}.$$

Ειδικώς, ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A , δρα πάνω σε ένα διάνυσμα \mathbf{x} του \mathbb{R}^n και παράγει ένα νέο διάνυσμα \mathbf{y} του \mathbb{R}^n , $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Εν γένει, το νέο

διάνυσμα διαφέρει από το παλιό και στο μέτρο και στην κατεύθυνση. Π.χ. όταν ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

δράσει πάνω στο διάνυσμα $\mathbf{x} = (1, 1)^T$, παράγει το διάνυσμα

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ορίζουσες

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Η ορίζουσα του είναι ο αριθμός $ad - bc$ και συμβολίζεται με $\det A$. Γράφουμε

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Αν \mathbf{A}^1 και \mathbf{A}^2 είναι οι δύο στήλες του A , χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\det A = D(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2)$ για την ορίζουσα του. Οι παρακάτω ιδιότητες προκύπτουν με απλό υπολογισμό.

- Ο1 Ως συνάρτηση των διανυσμάτων στήλης \mathbf{A}^j , η ορίζουσα είναι γραμμική. Τούτο σημαίνει ότι για $\lambda \in \mathbb{R}$ και οποιαδήποτε διανύσματα στήλης

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

ισχύει

$$\begin{aligned} D(\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{A}^2) &= D(\mathbf{A}, \mathbf{A}^2) + D(\mathbf{B}, \mathbf{A}^2), \\ D(\mathbf{A}^1, \mathbf{A} + \mathbf{B}) &= D(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}) + D(\mathbf{A}^1, \mathbf{B}), \\ D(\lambda \mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2) &= \lambda D(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2) = D(\mathbf{A}^1, \lambda \mathbf{A}^2), \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

για παράδειγμα

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a + a' & b \\ c + c' & d \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a' & b \\ c' & d \end{bmatrix}, \\ \det \begin{bmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{bmatrix} &= \lambda \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- O2 Αν δύο στήλες είναι ίσες, η ορίζουσα είναι μηδέν.
- O3 Η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα είναι 1.
- O4 Η ορίζουσα μπορεί να αναπτυχθεί κατά στήλες ή γραμμές, άρα $\det A = \det A^T$.
- O5 Αν εναλλάξουμε τις δυο στήλες, η ορίζουσα αλλάζει πρόσημο.
- O6 Αν προσθέσουμε ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο μίας στήλης σε μια άλλη στήλη, η ορίζουσα δεν αλλάζει.

Η ορίζουσα ενός 3×3 πίνακα A ορίζεται ως

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Αν \mathbf{A}^1 , \mathbf{A}^2 , και \mathbf{A}^3 είναι οι στήλες του A , χρησιμοποιούμε πάλι το συμβολισμό $\det A = D(\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3)$ για την ορίζουσα του. Μπορούμε πάλι να δείξουμε ότι ισχύουν οι ιδιότητες O1-O6. Για παράδειγμα, το πρώτο μέρος της O1 σημαίνει ότι για $\lambda \in \mathbb{R}$ και οποιαδήποτε διανύσματα στήλης

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

ισχύουν οι ανάλογες της (1.6.1) στις τρεις διαστάσεις.

Όπως είδαμε, στην ανάπτυξη της 3×3 ορίζουσας, το στοιχείο a_{11} πολλαπλασιάζεται με την 2×2 ορίζουσα που προκύπτει αν διαγράψουμε από την αρχική ορίζουσα την γραμμή και τη στήλη που ανήκει το a_{11} , το στοιχείο a_{12} πολλαπλασιάζεται με την 2×2 ορίζουσα που προκύπτει αν διαγράψουμε από την αρχική ορίζουσα την γραμμή και τη στήλη που ανήκει το a_{12} , κ.ο.κ. Τα πρόσημα στο ανάπτυγμα εναλλάσσονται. Γενικεύοντας, η ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα A μπορεί να αναπτυχθεί π.χ. κατά την πρώτη γραμμή ως εξής:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} a_{11}A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12}A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}A_{1n} = \\ &= a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - \dots + (-1)^{1+n} a_{1n}A_{1n}, \end{aligned}$$

όπου A_{ij} είναι η ελάσσων ορίζουσα που αντιστοιχεί στο στοιχείο a_{ij} : είναι η $(n-1) \times (n-1)$ ορίζουσα που προκύπτει από τον A αν διαγραφεί η i γραμμή

και η j στήλη. Επί παραδείγματι, για τον παραπάνω 3×3 πίνακα A , μερικές ελάχιστονες ορίζουσες είναι:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Η ανάπτυξη κατά την i -γραμμή γράφεται

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} A_{i2} + \dots + (-1)^{i+n} a_{in} A_{in}.$$

Η ανάπτυξη κατά την j -στήλη γράφεται

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} A_{2j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj} A_{nj},$$

όπου A_{ij} είναι πάντα η ελάχιστων ορίζουσα. Ένας μνημονικός κανόνας για τα εναλλασσόμενα πρόσημα $(-1)^{i+j}$ δίνεται σχηματικά στην περίπτωση μιας 4×4 ορίζουσας:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Εύρεση του αντιστρόφου ενός τετραγωνικού πίνακα

Η εύρεση του αντιστρόφου ενός 2×2 πίνακα, ανάγεται όπως είδαμε στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους. Αν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία για να βρούμε τον αντίστροφο ενός 3×3 πίνακα, θα χρειαστεί να λύσουμε ένα γραμμικό σύστημα εννέα εξισώσεων με εννέα αγνώστους. Στη Γραμμική Άλγεβρα αποδεικνύεται ένας σχετικά απλός τύπος που δίνει τον αντίστροφο ενός τετραγωνικού πίνακα. Αρχίζουμε με κάποιες προκαταρκτικές έννοιες. Αν A_{ij} είναι μία ελάχιστων ορίζουσα ενός $n \times n$ πίνακα A , τότε ο αριθμός $(-1)^{i+j} A_{ij}$ λέγεται *αλγεβρικό συμπλήρωμα (cofactor)* του στοιχείου a_{ij} . Θεωρούμε τον πίνακα C με στοιχεία τα αλγεβρικά συμπληρώματα των a_{ij} , δηλαδή

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}.$$

Τότε ο αντίστροφος του A δίνεται από τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T. \quad (1.6.2)$$

Επομένως για να βρούμε τον αντίστροφο ενός τετραγωνικού πίνακα A ακολουθούμε τα εξής βήματα:

1. Βρίσκουμε την ορίζουσα του A , (αν $\det A = 0$, ο πίνακας δεν αντιστρέφεται).
2. Βρίσκουμε τις ελάχιστονες ορίζουσες A_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$.
3. Βρίσκουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα, $c_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$.
4. Γράφουμε τον πίνακα $C = (c_{ij})$ και σχηματίζουμε τον ανάστροφό του, C^T .
5. Εφαρμόζουμε τον τύπο (1.6.2).

Παράδειγμα 10. Για τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

έχουμε

$$\det A = 2 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 6.$$

Οι ελάχιστονες είναι

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, & A_{12} &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, & A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \\ A_{21} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, & A_{23} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2, \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -3, & A_{32} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6, & A_{33} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 6. \end{aligned}$$

Επομένως ο πίνακας των αλγεβρικών συμπληρωμάτων (και ο ανάστροφός του) είναι

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow C^T = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -4 & 4 & 6 \\ -2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Με εφαρμογή του τύπου (1.6.2) προκύπτει τελικά

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

1.6.1 Ασκήσεις

1. Έστω I ο $n \times n$ πίνακας μονάδα και A ένας $n \times r$ πίνακας. Βρείτε τον IA .
2. Αν A, B τετραγωνικοί πίνακες ισχύει ότι $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;
3. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τους A^2, A^3 . Γενικεύσετε για 4×4 πίνακες.

4. Έστω

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τους A^2, A^3 .

5. Έστω $R(\theta)$ ο πίνακας στροφής

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι

$$R(\theta)^2 = R(\theta)R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι $R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_1 + \theta_2)$. Δείξτε ότι ο $R(\theta)$ έχει αντίστροφο και βρείτε τον. Αν το διάνυσμα $\mathbf{x} = (1, 2)^T$ στραφεί κατά $\pi/6$, ποιές είναι οι νέες συντεταγμένες του; Για $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, έστω $\mathbf{y} = R(\theta)\mathbf{x}$. Δείξτε ότι $|\mathbf{y}| = |\mathbf{x}|$. Δείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα του επιπέδου \mathbf{u} και \mathbf{v} , ισχύει $(R(\theta)\mathbf{u}) \cdot (R(\theta)\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. Επομένως ο $R(\theta)$ διατηρεί τα μήκη των διανυσμάτων και τις γωνίες μεταξύ τους. Τι παριστάνουν οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

6. Έστω A ένας 4×4 πίνακας με στοιχεία a_{ij} (γράψτε τον!). Έστω U ένας από τους παρακάτω πίνακες. Βρείτε σε κάθε περίπτωση τους UA και AU .

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Όμοια βρείτε σε κάθε περίπτωση τους EA και AE για E έναν από τους

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Αν A είναι ένας 3×3 πίνακας και $\lambda \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $\det(\lambda A) = \lambda^3 \det A$.
8. Βρείτε τον αντίστροφο του

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Αν

$$A = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

δείξτε ότι ο $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος και ότι ο A ικανοποιεί την εξίσωση

$$A^3 - 2A^2 - A + 2I = O$$

10. Προϋποτίθεται η γνώση των σειρών Taylor. Αν $i = \sqrt{-1}$, δείξτε ότι οι πίνακες του Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I, \\ \sigma_j \sigma_k = i \sigma_l, \quad j, k, l \text{ κυκλικά.}$$

Υπολογίστε όλες τις δυνάμεις των $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_2$. Δείξτε ακόμα ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$e^{ix\sigma_1} \equiv I + ix\sigma_1 + \frac{(ix\sigma_1)^2}{2!} + \frac{(ix\sigma_1)^3}{3!} + \dots = I \cos x + i\sigma_1 \sin x.$$

11. Βρείτε τους αντίστροφους (αν υπάρχουν) των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Δείξτε ότι η ορίζουσα του γινομένου δύο 2×2 πινάκων ισούται με το γινόμενο των ορίζουσών. Όπως θα δούμε στη Γραμμική Άλγεβρα, για δύο οποιουσδήποτε τετραγωνικούς πίνακες A και B ισχύει ότι, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

1.7 Διανυσματικοί χώροι

Ένα σύνολο V λέγεται διανυσματικός χώρος (ΔX) ή γραμμικός χώρος υπεράνω του \mathbb{R} , αν τα στοιχεία του μπορούν να προστεθούν μεταξύ τους και να πολλαπλασιαστούν με πραγματικούς αριθμούς κατά τρόπο που να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες: (Με $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ συμβολίζουμε στοιχεία του V και με λ, μ πραγματικούς αριθμούς. Τα στοιχεία του V λέγονται διανύσματα και οι αριθμοί συχνά λέγονται βαθμωτά).

1. ΔX 1 Αν \mathbf{x} και \mathbf{y} ανήκουν στο V τότε και $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ανήκει επίσης στο V .
2. ΔX 2 Για όλα τα στοιχεία \mathbf{x}, \mathbf{y} του V ισχύει $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$.
3. ΔX 3 $\lambda \mathbf{x}$ ανήκει στο V .
4. ΔX 4 $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$.
5. ΔX 5 Υπάρχει ένα στοιχείο του V που συμβολίζεται με $\mathbf{0}$ τέτοιο ώστε για κάθε στοιχείο \mathbf{x} του V να ισχύει $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.
6. ΔX 6 Για κάθε \mathbf{x} στο V υπάρχει ένα στοιχείο $-\mathbf{x}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.
7. ΔX 7 $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$.
8. ΔX 8 $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$.

$$9. \Delta X 9 \quad (\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x}).$$

$$10. \Delta X 10 \quad 1\mathbf{x} = \mathbf{x}. \quad (1 \text{ είναι ο αριθμός } 1).$$

Το πρότυπο μας είναι φυσικά ο \mathbb{R}^3 , του οποίου οι αλγεβρικές ιδιότητες τίθενται ως ορισμός του διανυσματικού χώρου. Τα πιο ενδιαφέροντα σύνολα στα μαθηματικά, καθίστανται διανυσματικοί χώροι αν οριστούν κατάλληλα οι πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και ο πολλαπλασιασμός με βαθμωτό.

Παράδειγμα 11. Το σύνολο \mathbb{R}^n , δηλαδή το σύνολο των διατεταγμένων n -άδων (x_1, \dots, x_n) πραγματικών αριθμών είναι ο γνωστός μας n -διάστατος Ευκλείδειος χώρος. Τα στοιχεία του ικανοποιούν τις ιδιότητες $\Delta X1$ έως $\Delta X10$, αν ορίζουμε άθροισμα διανυσμάτων

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

και πολλαπλασιασμό με βαθμωτό λ

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Συχνά, οι περισσότερες ιδιότητες ικανοποιούνται κατά τετριμμένο τρόπο και για να δείξουμε ότι ένα σύνολο V είναι διανυσματικός χώρος, αρκεί να ελέγξουμε ότι:

Τα στοιχεία του μπορούν να προστεθούν μεταξύ τους και να πολλαπλασιαστούν με πραγματικούς αριθμούς κατά τρόπο που να ικανοποιούνται οι ακόλουθες ιδιότητες:

A. Αν \mathbf{x} και \mathbf{y} ανήκουν στο V τότε και $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ανήκει επίσης στο V .

B. Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} \in V$, τότε $\lambda\mathbf{x}$ ανήκει στο V .

Παράδειγμα 12. Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (συμβολίζεται με $C[a, b]$) με πράξεις την πρόσθεση συναρτήσεων

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

και πολλαπλασιασμό με βαθμωτό $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

είναι ΔX διότι ικανοποιεί τις ιδιότητες $\Delta X1$ έως $\Delta X10$. Η απόδειξη αφήνεται στον αναγνώστη. Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, ελέγχουμε μόνο ότι αν f και g ανήκουν στο $C[a, b]$, τότε και $f + g$ και λf ανήκουν επίσης στο $C[a, b]$. Η απλουστευμένη αυτή διαδικασία είναι εφικτή διότι το μηδενικό στοιχείο του χώρου ορίζεται με προφανή τρόπο (στην περίπτωση μας είναι η μηδενική συνάρτηση) και οι ιδιότητες $\Delta X2$, $\Delta X4$ και $\Delta X6$ έως $\Delta X10$, είναι συνέπειες γνωστών ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών.

Παράδειγμα 13. Το σύνολο $\mathcal{M}^{m \times n}$ των $m \times n$ πινάκων, με πράξεις την πρόσθεση πινάκων και πολλαπλασιασμό με πραγματικό αριθμό, είναι διανυσματικός χώρος.

1.7.1 Υπόχωροι

Ορισμός 1.7. Ένα υποσύνολο W ενός διανυσματικού χώρου V λέγεται διανυσματικός υπόχωρος, αν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

- Αν \mathbf{x} και \mathbf{y} ανήκουν στο W τότε και $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ανήκει επίσης στο W .
- Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} \in W$, τότε $\lambda\mathbf{x}$ ανήκει στο W .
- Το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ του V ανήκει επίσης στο W .

Για παράδειγμα, το σύνολο των στοιχείων του \mathbb{R}^3 που έχουν μηδενική z -συντεταγμένη, δηλαδή στοιχεία της μορφής $(x, y, 0)$ με $x, y \in \mathbb{R}$, είναι ένας διανυσματικός υπόχωρος του \mathbb{R}^3 . (Αργότερα θα δούμε ένα τρόπο να τον ταυτοποιήσουμε με τον \mathbb{R}^2). Αν V είναι το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι V είναι διανυσματικός χώρος και $C[a, b]$ είναι ένας υπόχωρος του. Αν $\mathcal{M}^{n \times n}$ είναι ο ΔX των $n \times n$ πινάκων και W το σύνολο των $n \times n$ συμμετρικών πινάκων A (δηλαδή $a_{ij} = a_{ji}$) τότε W είναι υπόχωρος του $\mathcal{M}^{n \times n}$.

- Η τομή δύο υποχώρων είναι υπόχωρος. Βρείτε δύο υπόχωρους του \mathbb{R}^3 . Ποιοί είναι οι υπόχωροι του \mathbb{R} ;

Ορισμός 1.8. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ στοιχεία του V . Αν a_1, \dots, a_n είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε το διάνυσμα

$$a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n$$

λέγεται γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$.

Για παράδειγμα, από τα στοιχεία $\sin t, \cos t$ του δ.χ. $C[0, \pi]$ παράγεται ο γραμμικός συνδυασμός $a \sin t + b \cos t$.

Θεώρημα 1.10. Το σύνολο W όλων των γραμμικών συνδυασμών των $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

Απόδειξη. Αν a_1, \dots, a_n και b_1, \dots, b_n είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$(a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n) + (b_1\mathbf{x}_1 + \dots + b_n\mathbf{x}_n) = (a_1 + b_1)\mathbf{x}_1 + \dots + (a_n + b_n)\mathbf{x}_n$$

δηλαδή το άθροισμα δύο στοιχείων του W είναι πάλι στοιχείο του W . Αν c είναι αριθμός, τότε

$$c(a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n) = ca_1\mathbf{x}_1 + \dots + ca_n\mathbf{x}_n$$

είναι επίσης γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, άρα στοιχείο του W . Τέλος, το W περιέχει το $\mathbf{0}$, διότι

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{x}_1 + \dots + 0\mathbf{x}_n. \quad \square$$

Λέμε ότι ο υπόχωρος W παράγεται από τα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Ειδικώς αν τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ παράγουν τον V , δηλαδή κάθε στοιχείο του V γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός τους, τότε λέμε ότι ο διανυσματικός χώρος V παράγεται από τα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Για παράδειγμα, ο \mathbb{R}^2 παράγεται από τα \mathbf{i}, \mathbf{j} , αλλά όπως μπορείτε να ελέγξετε, παράγεται και από τα $\mathbf{i}, \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{j}$, και από τα $\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{j}$. Τίθεται λοιπόν το ερώτημα, αν υπάρχει πάντα τέτοιο σύνολο που παράγει ένα ΔX και αν ναι, ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός των διανυσμάτων που απαιτούνται ώστε κάθε στοιχείο του V να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός τους. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα, θα χρειαστούμε την έννοια της γραμμικής ανεξαρτησίας.

1.7.2 Γραμμική ανεξαρτησία

Ορισμός 1.9. Τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ λέγονται γραμμικώς ανεξάρτητα αν η ισότητα

$$a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

συνεπάγεται ότι όλοι οι αριθμοί a_1, \dots, a_n είναι μηδέν.

Τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα αν υπάρχουν αριθμοί a_1, \dots, a_n , όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$a_1\mathbf{x}_1 + \dots + a_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Για παράδειγμα, τα στοιχεία $\sin t, \cos t$ του δ.χ. $C[0, \pi]$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, για να είναι ένας γραμμικός συνδυασμός τους ίσος με μηδέν για κάθε $t \in [0, \pi]$, δηλαδή $a \sin t + b \cos t = 0, t \in [0, \pi]$, θα πρέπει $a = 0, b = 0$, π.χ. για $t = 0$ προκύπτει $b = 0$ και για $t = \pi/2$ προκύπτει $a = 0$.

- Δείξτε ότι στον \mathbb{R}^2 τα \mathbf{i}, \mathbf{j} , είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, το ίδιο και τα $\mathbf{i}, \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Τα $\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{j}$, είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Έστω $C^1(a, b)$ ο χώρος των παραγωγισίμων συναρτήσεων στο διάστημα (a, b) . Δείξτε ότι οι συναρτήσεις e^t, e^{2t} είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Θεώρημα 1.11. Αν τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε ένα από αυτά μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Αντίστροφα, αν ένα από τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη. Έστω ότι τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν αριθμοί a_1, a_2, \dots, a_n , όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \dots + a_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Έστω π.χ. ότι $a_1 \neq 0$, οπότε

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{a_2}{a_1}\mathbf{x}_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1}\mathbf{x}_n.$$

Αντίστροφα, αν ένα από τα διανύσματα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, π.χ. το \mathbf{x}_1 μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, τότε

$$\mathbf{x}_1 = \lambda_2\mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{x}_n,$$

συνεπώς

$$(-1)\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

δηλαδή τα $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. □

1.7.3 Διάσταση και βάση ενός διανυσματικού χώρου

Ορισμός 1.10. Ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου V λέγεται διάσταση του V , και συμβολίζεται με $\dim V$.

Παράδειγμα 14. Στο επίπεδο υπάρχουν δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα (βρείτε δύο!), αλλά οποιαδήποτε τρία διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Έρα η διάσταση του επιπέδου είναι δύο ($\dim \mathbb{R}^2 = 2$). Στο χώρο που ζούμε υπάρχουν 3 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα (βρείτε τρία!), αλλά οποιαδήποτε τέσσερα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Έρα η διάσταση του ευκλείδειου χώρου είναι τρία ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$).

Θεώρημα 1.12. Αν $\dim V = n$, τότε οποιοδήποτε σύνολο m διανυσμάτων του V με $m > n$, είναι γραμμικώς εξαρτημένο.

Η απόδειξη βρίσκεται σε οποιοδήποτε βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας. Το θεώρημα αυτό εξασφαλίζει ότι αν έχουμε m διανύσματα $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ που παράγουν το χώρο και n μόνο από αυτά είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε μπορούμε να πετάξουμε $m - n$ διανύσματα ούτως ώστε τα απομένοντα n (γραμμικώς ανεξάρτητα) διανύσματα να είναι εξ' ίσου αποτελεσματικά για να παράγουν τον χώρο.

Θεώρημα 1.13. Αν $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα ενός n -διάστατου διανυσματικού χώρου V , τότε κάθε στοιχείο του V γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$.

Απόδειξη. Τα διανύσματα $\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα διότι είναι περισσότερα από n , δηλαδή περισσότερα από τη διάσταση του χώρου. Έρα, υπάρχουν αριθμοί a, a_1, \dots, a_n , όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$a\mathbf{x} + a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

με $a \neq 0$, αλλιώς τα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ θα ήταν γραμμικώς εξαρτημένα. Όπως ακριβώς στο θεώρημα 1.11, το \mathbf{x} γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων,

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_n\mathbf{v}_n, \quad c_k = -a_k/a, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Πρέπει τώρα να δείξουμε ότι αν το \mathbf{x} μπορεί να γραφεί και ως

$$\mathbf{x} = b_1\mathbf{v}_1 + \dots + b_n\mathbf{v}_n,$$

τότε $c_k = b_k$ για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$. Πράγματι, αφαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες, βρίσκουμε

$$(c_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + \dots + (c_n - b_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

και επειδή τα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, προκύπτει ότι $c_k = b_k$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$. \square

Ορισμός 1.11. Το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ λέγεται *βάση* του χώρου V αν τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και επί πλέον παράγουν τον χώρο V .

Ανακεφαλαιώνουμε: Αν $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ είναι μιά βάση του χώρου V και \mathbf{x} τυχαίο διάνυσμα του V , τότε το \mathbf{x} γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, δηλαδή

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_n\mathbf{v}_n.$$

Οι αριθμοί a_1, \dots, a_n λέγονται *συντεταγμένες* του \mathbf{x} ως προς την δοθείσα βάση και πολλές φορές γράφουμε το \mathbf{x} ως n -άδα αριθμών, $\mathbf{x} = (a_1, \dots, a_n)$. Έτσι, δείξαμε ότι οποιαδήποτε n γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα, μπορούν να επιλεγούν ως βάση του V . Επομένως όλες οι βάσεις ενός διανυσματικού χώρου έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων, ίσο με τη διάσταση του χώρου.

Παράδειγμα 15. Τα $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ αποτελούν βάση του \mathbb{R}^3 . Όμοια, τα n διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$, αποτελούν βάση του \mathbb{R}^n , άρα $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Παράδειγμα 16. Το σύνολο των πολυωνύμων n -βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, είναι γραμμικός χώρος με πράξεις την πρόσθεση πολυωνύμων και πολλαπλασιασμό με αριθμό. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$ αποτελούν βάση του χώρου.

Παράδειγμα 17. Το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ΔX διάστασης 1. Ο υπόχωρος του \mathbb{R}^3 που αποτελείται από διανύσματα με μηδενική z -συντεταγμένη, δηλαδή στοιχεία της μορφής $(x, y, 0)$, $x, y \in \mathbb{R}$, έχει διάσταση 2. Κάθε ευθεία γραμμή του \mathbb{R}^3 που περνά από το σημείο $(0, 0, 0)$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του \mathbb{R}^3 διάστασης 1.

Παράδειγμα 18. Το επίπεδο με εξίσωση $2x - 3y + 7z = 0$, περνά από την αρχή των αξόνων και περιέχει τα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = \mathbf{i} + 2/3\mathbf{j}$, $\mathbf{u}_2 = 7/2\mathbf{i} - \mathbf{k}$. Κάθε γραμμικός συνδυασμός των \mathbf{u}_1 και \mathbf{u}_2 , ανήκει επίσης στο επίπεδο. Το επίπεδο λοιπόν είναι διδιάστατος υπόχωρος του \mathbb{R}^3 , και τα (γραμμικώς ανεξάρτητα) διανύσματα \mathbf{u}_1 και \mathbf{u}_2 , αποτελούν μία βάση του.

1.7.4 Εφαρμογή στη λύση γραμμικών συστημάτων

- Έστω ένας 2×2 πίνακας A . Αν τα δύο διανύσματα στήλης του είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε $\det A \neq 0$. (Ισοδύναμα, αν $\det A = 0$, τότε τα δύο διανύσματα στήλης του είναι γραμμικώς εξαρτημένα). Γενικεύσετε στις τρεις διαστάσεις. Στη Γραμμική Άλγεβρα αποδεικνύεται το θεώρημα:

Θεώρημα 1.14. Τα διανύσματα στήλης ενός $n \times n$ πίνακα A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.

Ας θεωρήσουμε τώρα το ομογενές σύστημα m εξισώσεων

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned}$$

για τους n αγνώστους x_1, \dots, x_n .

Μία λύση είναι η τετριμμένη, $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. Αναζητούμε μη τετριμμένες λύσεις. Το σύστημα μπορεί να γραφεί ως

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

ή $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ή ως

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

και τέλος, χρησιμοποιώντας τα διανύσματα στήλης \mathbf{A}^j , ως

$$x_1 \mathbf{A}^1 + x_2 \mathbf{A}^2 + \dots + x_n \mathbf{A}^n = \mathbf{0} \quad (1.7.1)$$

Αυτή η τελευταία μορφή με την οποία γράψαμε το σύστημα, δεν είναι παρά μία σχέση γραμμικής εξάρτησης n διανυσμάτων (των \mathbf{A}^j), του \mathbb{R}^m . Αν λοιπόν $n > m = \dim \mathbb{R}^m$, από το Θεώρημα 1.12 προκύπτει ότι τα \mathbf{A}^j είναι γραμμικώς εξαρτημένα, δηλαδή υπάρχουν αριθμοί x_1, \dots, x_n , όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε να ισχύει η (1.7.1). Κατά συνέπεια:

Θεώρημα 1.15. Ένα ομογενές σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους, $n > m$, έχει μη τετριμμένη λύση.

Η περίπτωση $n = m$, αντιμετωπίζεται με όποιο τρόπο ως εξής. Αν τα διανύσματα στήλης \mathbf{A}^j είναι γραμμικώς εξαρτημένα, υπάρχουν αριθμοί x_1, \dots, x_n , όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε να ισχύει η (1.7.1). Επομένως, το ομογενές σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση. Από το Θεώρημα 1.14 προκύπτει ότι αν $\det A = 0$, το σύστημα (1.7.1) έχει λύσεις πλην της τετριμμένης. Από την άλλη, αν τα διανύσματα στήλης \mathbf{A}^j είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε η (1.7.1) συνεπάγεται ότι όλοι οι αριθμοί x_1, \dots, x_n είναι μηδέν, επομένως μοναδική λύση του συστήματος είναι η τετριμμένη. Από το Θεώρημα 1.14 προκύπτει ότι αν $\det A \neq 0$, το σύστημα (1.7.1) έχει μοναδική λύση την τετριμμένη. Ανακεφαλαιώνοντας:

Θεώρημα 1.16. Ένα ομογενές σύστημα με $n = m$, έχει μοναδική λύση την τετριμμένη αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.

Ας έλθουμε τώρα στην πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση, ενός μη ομογενούς συστήματος m εξισώσεων με n αγνώστους, x_1, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

που γράφεται και ως ή $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ή χρησιμοποιώντας τα διανύσματα στήλης \mathbf{A}^j , ως

$$x_1 \mathbf{A}^1 + x_2 \mathbf{A}^2 + \dots + x_n \mathbf{A}^n = \mathbf{b}. \quad (1.7.2)$$

Ας υποθέσουμε ότι $m = n$ και ότι τα διανύσματα στήλης \mathbf{A}^j , $j = 1, 2, \dots, n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Συνεπώς αποτελούν βάση του \mathbb{R}^n , οπότε οποιοδήποτε διάνυσμα \mathbf{b} , γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός τους. Δηλαδή υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί x_1, \dots, x_n , τέτοιοι ώστε να ισχύει η (1.7.2). Αναδιατυπώνουμε το συμπέρασμα μας ως εξής.

Θεώρημα 1.17. *Αν $m = n$ και τα διανύσματα \mathbf{A}^j , $j = 1, 2, \dots, n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε το σύστημα (1.7.2) έχει μοναδική λύση.*

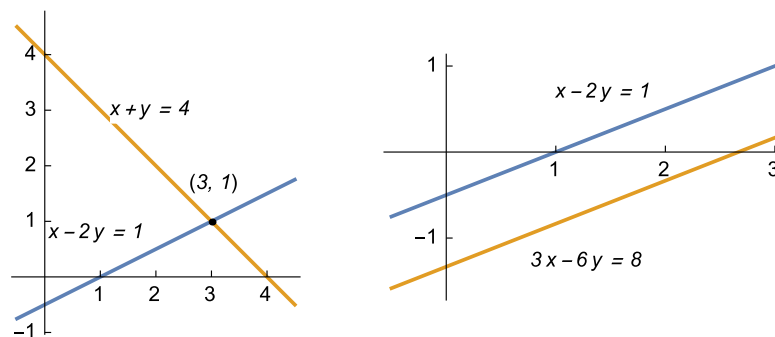
Συνδυάζοντας το Θεώρημα 1.17 και το Θεώρημα 1.14 προκύπτει ότι το σύστημα (1.7.2) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\det A \neq 0$.

1.7.5 Γεωμετρική ερμηνεία των γραμμικών συστημάτων

Θεωρούμε ένα 2×2 γραμμικό σύστημα

$$x - 2y = 1, \quad x + y = 4,$$

που έχει μοναδική λύση ($x = 3, y = 1$). Κάθε εξίσωση του συστήματος παριστάνει μια ευθεία στο επίπεδο, επομένως οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $(3, 1)$, βλ. Σχήμα 1.11. Από την γεωμετρική αυτή εικόνα, συμπεραίνουμε ότι



Σχήμα 1.11: Μοναδική λύση και καμμία λύση.

ένα 2×2 γραμμικό μή ομογενές σύστημα δεν έχει λύση αν οι σχετικές ευθείες δεν τέμνονται, με άλλα λόγια είναι παράλληλες. Τέτοιο σύστημα είναι π.χ. το

$$x - 2y = 1, \quad 3x - 6y = 8,$$

βλ. Σχήμα 1.11. Σημειώστε ότι το σύστημα γράφεται και ως

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Μπορείτε να εξηγήσετε σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, γιατί το σύστημα δεν έχει λύση; Από την γεωμετρική εικόνα του ζεύγους ευθειών που παριστούν τις εξισώσεις του συστήματος, συμπεραίνουμε ότι ένα 2×2 γραμμικό μή ομογενές σύστημα έχει άπειρες λύσεις αν οι δύο ευθείες ταυτίζονται, π.χ.

$$x - 2y = 1, \quad 3x - 6y = 3,$$

(κάνετε σχήμα).

Θεωρούμε τώρα ένα 3×3 γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= d_1, \\ b_1x + b_2y + b_3z &= d_2, \\ c_1x + c_2y + c_3z &= d_3. \end{aligned} \tag{1.7.3}$$

Κάθε εξίσωση του συστήματος παριστάνει ένα επίπεδο, επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση αν τα τρία επίπεδα τέμνονται σε ένα σημείο. Επειδή τα επίπεδα ανά δύο τέμνονται σε μια ευθεία, ισοδύναμα το σύστημα έχει μοναδική λύση αν οι τρεις ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο. Από την γεωμετρική αυτή εικόνα, συμπεραίνουμε ότι ένα 3×3 γραμμικό μή ομογενές σύστημα δεν έχει λύση αν (α) τα τρία επίπεδα είναι παράλληλα (β) δύο από αυτά είναι παράλληλα (γ) ένα από αυτά είναι παράλληλο με την ευθεία τομής των δύο άλλων. Τέλος, ένα 3×3 γραμμικό μή ομογενές σύστημα έχει άπειρες λύσεις αν τα τρία επίπεδα τέμνονται στην ίδια ευθεία.

Υπενθυμίζουμε ότι η εξίσωση του επιπέδου που περνά από το σημείο \mathbf{p} και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\mathbf{u} = (A, B, C)$ γράφεται ως

$$(\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \text{ή} \quad Ax + By + Cz = D. \tag{1.7.4}$$

Επομένως, η πρώτη π.χ. εξίσωση του συστήματος (1.7.3), μπορεί να ερμηνευθεί γεωμετρικά ότι περιγράφει ένα επίπεδο που είναι κάθετο στο διάνυσμα (a_1, a_2, a_3) .

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι το επίπεδο $a_1x + a_2y + a_3z = 0$ που περνά από την αρχή των αξόνων είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{R}^3 .

Παράδειγμα 19. Έστω W το σύνολο των $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ που είναι κάθετα στο διάνυσμα $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$. Δείξτε ότι W είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^3 και βρείτε τη διάσταση του. Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο W .

Αν $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ είναι κάθετο στο διάνυσμα \mathbf{u} , δηλαδή $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0$, θα έχουμε $x_1 - x_2 + 0x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$. 'ρα τα στοιχεία του W έχουν πρώτη συνιστώσα

ιση με τη δεύτερη, συνεπώς κάθε στοιχείο $\mathbf{w} \in W$ είναι της μορφής $\mathbf{w} = (w_1, w_1, w_3)$. Προφανώς $\mathbf{0} \in W$ και $\lambda\mathbf{w} = (\lambda w_1, \lambda w_1, \lambda w_3) \in W$. Αν $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in W$, τότε $\mathbf{w} + \mathbf{v} = (w_1, w_1, w_3) + (v_1, v_1, v_3) = (w_1 + v_1, w_1 + v_1, w_3 + v_3)$, δηλαδή το $\mathbf{w} + \mathbf{v}$ έχει πρώτη συνιστώσα ίση με τη δεύτερη, άρα $\mathbf{w} + \mathbf{v} \in W$. Συμπεραίνουμε ότι W είναι υπόχωρος. Μία βάση του W αποτελείται από τα διανύσματα $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, άρα η διάσταση του υποχώρου W είναι 2. Από την γενική εξίσωση (1.7.4) συμπεραίνουμε ότι W είναι ένα επίπεδο που περνά από την αρχή $(0, 0, 0)$ και είναι κάθετο στο $\mathbf{u} = (1, -1, 0)$.

Γενικεύοντας, το σύνολο των $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ που είναι κάθετα στο διάνυσμα $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^3 διάστασης δύο. Όλοι οι υπόχωροι του \mathbb{R}^3 διάστασης δύο, είναι επίπεδα που περνούν από την αρχή των αξόνων και περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής

$$a_1x + a_2y + a_3z = 0.$$

(Προσοχή! το επίπεδο $x + y + z = 1$, δεν είναι υπόχωρος).

Παράδειγμα 20. Βρείτε την τομή των επιπέδων $x - y - 2z = 0$ και $2x + y - 2z = 0$.

Πρώτη λύση. Λύνουμε το σύστημα (π.χ. προσθέτοντας και στη συνέχεια αφαιρώντας τις εξισώσεις κατά μέλη) και βρίσκουμε $z = 3x/4$, $y = -x/2$, δηλαδή έχουμε άπειρες λύσεις. Επομένως, η γενική λύση του συστήματος είναι $x = t$, $y = -t/2$, $z = 3t/4$, $t \in \mathbb{R}$. Η λύση αυτή είναι παραμετρική αναπαράσταση ευθείας και σύμφωνα με τον γνωστό τύπο (1.4.1) μπορεί να γραφεί ως

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-1/2} = \frac{4z}{3}.$$

Δεύτερη λύση. Τα επίπεδα τέμνονται σε μία ευθεία παράλληλη προς κάποιο διάνυσμα \mathbf{v} που είναι κάθετο και στο $\mathbf{u}_1 = (1, -1, -2)$ και στο $\mathbf{u}_2 = (2, 1, -2)$. Επομένως ως \mathbf{v} μπορούμε να πάρουμε το

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Βρίσκουμε ένα κοινό σημείο των επιπέδων, λύνοντας τις εξισώσεις των επιπέδων. Ένα τέτοιο σημείο είναι (προφανώς) το $(0, 0, 0)$. Με βάση τον τύπο (1.4.1) η εξίσωση ευθείας είναι

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3},$$

προφανώς ίδια με αυτήν που βρήκαμε στην πρώτη λύση.

Γενικεύοντας, θεωρούμε δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Τότε τα επίπεδα $a_1x + a_2y + a_3z = 0$ και $b_1x + b_2y + b_3z = 0$ τέμνονται εν γένει σε μία ευθεία που περνά από την αρχή $\mathbf{0}$. Πράγματι, λύνοντας (με τον κανόνα του Cramer) ως προς x και y το σύστημα

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y &= -a_3z, \\ b_1x + b_2y &= -b_3z, \end{aligned}$$

βρίσκουμε

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}},$$

δηλαδή έχουμε την εξίσωση ευθείας που περνά από την αρχή $(0, 0, 0) = \mathbf{0}$ και έχει τη διεύθυνση του $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Επομένως η τομή δύο διδιάστατων υποχώρων είναι εν γένει ένας μονοδιάστατος υπόχωρος.

Παρατήρηση 1.5. Αν το επίπεδο δεν περνά από την αρχή των αξόνων, θα έχει εξίσωση της μορφής (1.7.4) με $D \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή δέν είναι υπόχωρος, αφού δεν περιέχει το $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Παράδειγμα 21. Θεωρούμε τρία επίπεδα που περνούν από την αρχή $\mathbf{0}$. Βρείτε συνθήκες ώστε η τομή τους να είναι το μονοσύνολο $\{\mathbf{0}\}$.

Τα τρία επίπεδα, περιγράφονται από τρεις εξισώσεις της μορφής

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z &= 0, \\ c_1x + c_2y + c_3z &= 0. \end{aligned}$$

Για να έχει το σύστημα αυτό λύση μόνο την τετριμμένη, $(0, 0, 0)$, πρέπει κατά το Θεώρημα 1.16, η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων να είναι μη μηδενική. Ισοδύναμα, τα διανύσματα $(a_1, a_2, a_3)^T$, $(b_1, b_2, b_3)^T$ και $(c_1, c_2, c_3)^T$, πρέπει να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Η γεωμετρική ερμηνεία της τελευταίας αυτής συνθήκης, είναι ότι ανά δύο τα επίπεδα δεν ταυτίζονται.

Γενίκευση στον \mathbb{R}^n

Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Τότε το σύνολο των $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0$ είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{R}^n διάστασης $n - 1$. Λέμε ότι $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0$, ή

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0,$$

είναι η εξίσωση ενός υπερεπιπέδου P_1 του \mathbb{R}^n . Αν P_2 είναι το υπερεπίπεδο $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0$, τότε η τομή των P_1 και P_2 είναι εν γένει ένας υπόχωρος διάστασης $n - 2$. Γενικεύοντας, οι m εξισώσεις ($m \leq n$)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

παριστάνουν m υπερεπίπεδα που η τομή τους είναι υπόχωρος διάστασης $\leq n - m$. Αποδεικνύεται ότι υπόχωρος αυτός έχει τη μέγιστη διάσταση $n - m$ αν m στήλες του πίνακα A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, ή ισοδύναμα αν κάποια $m \times m$ υποορίζουσα του πίνακα A είναι μη μηδενική (βλέπε άρθρο περί τάξης (rank) πίνακα στην Wikipedia).

1.7.6 Ασκήσεις

- Τα παρακάτω υποσύνολα του \mathbb{R}^3 είναι υπόχωροι
 - Το σύνολο των (x, y, z) για τα οποία $x + y + z = 0$.
 - Το σύνολο των (x, y, z) για τα οποία $x = y$.
- Αν \mathbf{u}, \mathbf{v} είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του \mathbb{R}^3 , ο υπόχωρος που παράγεται από αυτά είναι ένα επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων.
- Δείξτε ότι τα σύνολα $\{\mathbf{a} = (1, 1, 1), \mathbf{b} = (-1, 0, 1), \mathbf{c} = (0, 0, 1)\}$, $\{\mathbf{a} = (0, 1, 1), \mathbf{b} = (1, 0, 2), \mathbf{c} = (2, 0, 1)\}$ και $\{\mathbf{a} = (1, 1, 0), \mathbf{b} = (-1, 2, -1), \mathbf{c} = (0, 0, 1)\}$ αποτελούν βάσεις του \mathbb{R}^3 και βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$ και $\mathbf{y} = (1, 1, 1)$ ως προς τις βάσεις αυτές.
- Δυο στοιχεία \mathbf{u}, \mathbf{v} ενός δ.χ. V , είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνο αν υπάρχει αριθμός λ τέτοιος ώστε $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$ ή $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$.
- Όπως είδαμε το σύνολο των $m \times n$ πινάκων είναι ΔX . Βρείτε μία βάση στο χώρο των 2×2 πινάκων. Το ίδιο και στο σύνολο των αντισυμμετρικών 3×3 πινάκων. Το ίδιο και στο σύνολο των 3×3 συμμετρικών πινάκων. Ποια είναι η διάσταση του χώρου των $m \times n$ πινάκων;
- Αν V είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^2 ποια μπορεί να είναι η διάσταση του V ; Αν V είναι γνήσιος υπόχωρος του \mathbb{R}^2 (δηλαδή δεν ταυτίζεται με τον \mathbb{R}^2), τότε είτε $V = \{\mathbf{0}\}$, είτε V είναι μία ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων.

7. Αν V είναι υπόχωρος του \mathbb{R}^3 ποια μπορεί να είναι η διάσταση του V ; Αν V είναι γνήσιος υπόχωρος του \mathbb{R}^3 , τότε είτε $V = \{\mathbf{0}\}$, είτε V είναι μία ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων, είτε V είναι ένα επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων.
8. Ποια είναι η διάσταση του υποχώρου του \mathbb{R}^n που συνίσταται από όλα τα διανύσματα (x_1, \dots, x_n) για τα οποία $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$;
9. Πότε η τομή δύο διδιάστατων υποχώρων του \mathbb{R}^3 δεν είναι μοναδιάστατος υπόχωρος;
10. Ποιά είναι η τομή των επιπέδων $x - y - 2z = 0$, $-3x + 3y + 6z = 0$ και $2x + y - 2z = 0$;
11. Έστω δύο γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα \mathbf{u} και \mathbf{v} . Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.10, τα \mathbf{u} και \mathbf{v} παράγουν ένα υπόχωρο W . Βρείτε τη διάσταση του W . Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο W .
12. Θεωρούμε τρία επίπεδα τέτοια ώστε τουλάχιστον ένα από αυτά δεν περνά από την αρχή $\mathbf{0}$, οπότε περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής (1.7.3), d_i όχι όλοι μηδέν. Ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν τα a_i, b_i, c_i ούτως ώστε: (α) τα επίπεδα τέμνονται σε ένα μόνο σημείο (β) η τομή τους είναι μία ευθεία (γ) δεν τέμνονται (η τομή τους είναι το κενό σύνολο).
13. Θεωρούμε το σύνολο W των $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ με $x_1 + 2x_2 = 0$ και $x_3 - x_4 = 0$. Δείξτε ότι W είναι υπόχωρος και βρείτε τη διάσταση του.
14. Περιγράψτε το υπερεπίπεδο $x_1 = 0$ του \mathbb{R}^4 .
15. Κατασκευάστε δύο 3×3 γραμμικά μη ομογενή συστήματα έτσι ώστε το ένα να έχει μοναδική λύση και το άλλο να μην έχει λύση.
16. Κατασκευάστε δύο 3×3 γραμμικά ομογενή συστήματα έτσι ώστε το ένα να έχει μοναδική λύση και το άλλο να έχει άπειρες λύσεις.
17. Η ανισότητα Hadamard

Θεώρημα 1.18 (Ανισότητα Hadamard). Έστω ένας $n \times n$ πίνακας A , με στήλες τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ του \mathbb{R}^n . Αν τα διανύσματα \mathbf{u}_i , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ισχύει

$$|\det A| \leq \|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{u}_2\| \dots \|\mathbf{u}_n\| := \prod_{i=1}^n \|\mathbf{u}_i\|,$$

με ισότητα μόνο αν τα \mathbf{u}_i είναι ορθογώνια.

Επομένως η ανισότητα Hadamard μας λέει ότι, η απόλυτη τιμή μιάς ορίζουσας είναι μικρότερη από το γινόμενο των μηκών των στηλών της. Το θεώρημα αυτό διατυπώνεται συνήθως ως εξής.

Για κάθε $n \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ με μή μηδενική ορίζουσα $|A|$, ισχύει η ανισότητα

$$|A|^2 \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right).$$

Για να κατανοήσουμε την ανισότητα ας περιοριστούμε σε 3×3 πίνακες. Θεωρούμε την ορίζουσα ενός πίνακα A με στήλες τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ του \mathbb{R}^3 . Δείξτε ότι

$$|\det A| \leq \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\|,$$

με ισότητα μόνο αν τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ είναι ορθογώνια. (Υπόδειξη: η ορίζουσα ισούται με το μεικτό γινόμενο των διανυσμάτων). Ποιά είναι η γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω ανισότητας; Διατυπώστε την ανισότητα στις δύο διαστάσεις και σχολιάστε τη γεωμετρική της ερμηνεία.

1.8 Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός 1.12. Μία απεικόνιση

$$\mathbf{F} : V \rightarrow W$$

από ένα διανυσματικό χώρο V σε ένα άλλο διανυσματικό χώρο W , λέγεται γραμμική απεικόνιση, αν για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ ισχύουν

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{y}),$$

$$\mathbf{F}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

Συνήθως παραλείπεται η παρένθεση στο όρισμα της απεικόνισης \mathbf{F} και γράφουμε απλώς $\mathbf{F}\mathbf{x}$. Μία γραμμική απεικόνιση πάνω σ' ένα διανυσματικό χώρο V με εικόνα μέσα στον V ,

$$\mathbf{F} : V \rightarrow V,$$

λέγεται γραμμικός τελεστής στον V .

Το υπόδειγμα των γραμμικών απεικονίσεων είναι η απεικόνιση

$$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$$

στον \mathbb{R}^2 . Πρόκειται δηλαδή για την απεικόνιση $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, με τύπο

$$\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{F} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}. \quad (1.8.1)$$

Παρατηρούμε αμέσως ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= \begin{bmatrix} a(x_1 + y_1) + b(x_2 + y_2) \\ c(x_1 + y_1) + d(x_2 + y_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ay_1 + by_2 \\ cy_1 + dy_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{F}\mathbf{x} + \mathbf{F}\mathbf{y}, \end{aligned}$$

και

$$\mathbf{F}(\lambda\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a\lambda x_1 + b\lambda x_2 \\ c\lambda x_1 + d\lambda x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{F}\mathbf{x}.$$

Σημαντική παρατήρηση. Η απεικόνιση \mathbf{F} παρίσταται από τον 2×2 πίνακα A , που έχει ως στοιχεία του τους αριθμούς a, b, c, d :

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 22. Έστω $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, ο τελεστής που δρά στο διάνυσμα $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$ και παράγει το διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$, με: (α) $y_1 = u_1, y_2 = \lambda u_2, \lambda > 1$. (β) $y_1 = \lambda u_1, y_2 = \lambda u_2, \lambda < 0$. (γ) $y_1 = 0, y_2 = u_2$. (δ) $y_1 = u_1 \cos \theta - u_2 \sin \theta, y_2 = u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi/2$. Γράψτε τον πίνακα A που αναπαριστά τον \mathbf{F} σε κάθε περίπτωση και κάνετε σχήμα.

Παράδειγμα 23. Έστω ένας 3×3 πίνακας A . Αν $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ένα διάνυσμα του \mathbb{R}^3 , τότε $A\mathbf{x}$ είναι επίσης ένα διάνυσμα του \mathbb{R}^3 . Εύκολα προκύπτει ότι ο πίνακας A είναι ένας γραμμικός τελεστής στον \mathbb{R}^3 , δηλαδή $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$ και $A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x}, \lambda \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 24. Έστω V ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στο (a, b) , που έχουν παραγώγους κάθε τάξης (συμβολίζεται με $C^\infty(a, b)$). Ο τελεστής της παραγώγισης, $D = d/dt$, ορίζεται ως

$$Df = f',$$

δηλαδή για κάθε στοιχείο f του V ,

$$(Df)(t) = f'(t), \quad t \in (a, b).$$

Τότε ο D είναι ένας γραμμικός τελεστής στον V . Πράγματι, $D(f + g) = Df + Dg$, διότι

$$(D(f + g))(t) = (f(t) + g(t))' = f'(t) + g'(t) = (Df)(t) + (Dg)(t), \quad t \in (a, b),$$

και όμοια αποδεικνύεται ότι $D(\lambda f) = \lambda Df$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 25. Έστω V ένας ΔX διάστασης n και $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ μία βάση του, δηλαδή κάθε στοιχείο \mathbf{x} του V γράφεται ως

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n.$$

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\mathbf{L} : V \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

με τύπο

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = (x_1, \dots, x_n)$$

δηλαδή η \mathbf{L} , απεικονίζει κάθε στοιχείο του V , στη n -άδα των συντεταγμένων του ως προς τη δοθείσα βάση. Η απεικόνιση \mathbf{L} είναι γραμμική.

Παράδειγμα 26. Έστω $V = C[a, b]$, ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a, b]$ και $W = \mathbb{R}$. Η απεικόνιση $I : V \rightarrow W$, που σε κάθε συνεχή συνάρτηση f αντιστοιχίζει τον αριθμό $\int_a^b f$, δηλαδή

$$I(f) = \int_a^b f(t) dt,$$

είναι γραμμική.

Παράδειγμα 27. Ας θεωρήσουμε το σύνολο $\mathcal{L}(V, V)$ όλων των γραμμικών τελεστών στον V . Ορίζουμε πρόσθεση τελεστών και πολλαπλασιασμό με βαθμωτό όπως στις πραγματικές συναρτήσεις: Αν \mathbf{F} και \mathbf{T} είναι δύο τελεστές και c ένας πραγματικός αριθμός, τότε $\forall \mathbf{x} \in V$

$$\begin{aligned} (\mathbf{F} + \mathbf{T})(\mathbf{x}) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{x}), \\ (c\mathbf{F})(\mathbf{x}) &= c\mathbf{F}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Με τις πράξεις αυτές, το σύνολο $\mathcal{L}(V, V)$ γίνεται γραμμικός χώρος. Μπορούμε να γενικεύσουμε, καθιστώντας το σύνολο $\mathcal{L}(V, W)$ όλων των γραμμικών απεικονίσεων από τον V στον W , γραμμικό χώρο.

1.8.1 Ασκήσεις

1. Ποιες από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές;

(α) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y)$.

(β) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ με τύπο $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$.

(γ) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = u + (1, 1, 1)$.

(δ) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $\mathbf{F}(x, y) = (2x, y - x)$.

(ε) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $\mathbf{F}(x, y, z) = xy$.

2. Θεωρούμε μία οποιαδήποτε συνάρτηση που ορίζεται σε κάποιο διάστημα που περιέχει το 0, π.χ. $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ με $a > 0$. Από αυτήν προκύπτουν πάντα μία άρτια συνάρτηση A , και μία περιττή, Π . Πράγματι, η συνάρτηση με τύπο

$$A(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

είναι άρτια και η συνάρτηση με τύπο

$$\Pi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

είναι περιττή. Προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει $f(x) = A(x) + \Pi(x)$. Επομένως κάθε συνάρτηση $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, γράφεται ως άθροισμα μιάς άρτιας συνάρτησης A και μιάς περιττής Π , δηλαδή $f = A + \Pi$. Πειραματισθείτε με την εκθετική συνάρτηση από την οποία προκύπτουν οι συναρτήσεις υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο. Έστω V ο χώρος όλων των πραγματικών συναρτήσεων που ορίζονται σε κάποιο διάστημα $[-a, a]$ με $a > 0$. Ορίζουμε την απεικόνιση $\mathbf{P} : V \rightarrow V$ με τύπο

$$(\mathbf{P}f)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

Δείξτε ότι η \mathbf{P} είναι γραμμική.

3. Υπενθυμίζουμε ότι ένας τετραγωνικός πίνακας S λέγεται συμμετρικός αν $S = S^T$ και ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται αντισυμμετρικός αν $A = -A^T$. Αν γράψουμε τα στοιχεία του S ως s_{ij} , θα έχουμε

$$s_{ij} = s_{ji}.$$

Οι δείκτες i, j τρέχουν από 1 έως κάποιο φυσικό αριθμό n . Όμοια για τον αντισυμμετρικό πίνακα, $A = (a_{ij})$, θα έχουμε

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

Από ένα τυχόντα $n \times n$ πίνακα $M = (m_{ij})$ προκύπτει πάντα ένας συμμετρικός πίνακας $S = (s_{ij})$, με στοιχεία

$$s_{ij} = \frac{m_{ij} + m_{ji}}{2},$$

και ένας αντισυμμετρικός πίνακας $A = (a_{ij})$, με στοιχεία

$$a_{ij} = \frac{m_{ij} - m_{ji}}{2}.$$

Με άλλα λόγια

$$S = \frac{M + M^T}{2}, \quad A = \frac{M - M^T}{2}.$$

Προσθέτωντας κατά μέλη τα στοιχεία s_{ij} και a_{ij} , προκύπτει, $m_{ij} = s_{ij} + a_{ij}$. Επομένως κάθε τετραγωνικός πίνακας M γράφεται ως άθροισμα ενός συμμετρικού S , και ενός αντισυμμετρικού πίνακα A , δηλαδή $M = S + A$. Έστω $V = \mathcal{M}^{n \times n}$, ο χώρος των $n \times n$ πινάκων και $\mathbf{P} : V \rightarrow V$ η απεικόνιση με τύπο,

$$\mathbf{P}M = \frac{M + M^T}{2}, \quad M \in V.$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση \mathbf{P} είναι γραμμική. Ποιά είναι η εικόνα της \mathbf{P} ; Βρείτε τη διάσταση του χώρου των $n \times n$ συμμετρικών πινάκων. Έστω τώρα, $\mathbf{Q} : V \rightarrow V$ η απεικόνιση με τύπο ,

$$\mathbf{Q}M = \frac{M - M^T}{2}, \quad M \in V.$$

Δείξτε ότι η απεικόνιση \mathbf{Q} είναι γραμμική. Ποιά είναι η εικόνα της \mathbf{Q} ; Βρείτε τη διάσταση του χώρου των $n \times n$ αντισυμμετρικών πινάκων.

4. Βρείτε τον πίνακα που αναπαριστά κάθε απεικόνιση;

α) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y)$ (προβολή).

β) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $\mathbf{F}(x, y) = (3x, 3y)$.

γ) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$.

δ) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{F}(\mathbf{e}_1) = (1, -3)^T$, $\mathbf{F}(\mathbf{e}_2) = (-4, 2)^T$, $\mathbf{F}(\mathbf{e}_3) = (3, 1)^T$ Απάντηση.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Κεφάλαιο 2

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Το αντικείμενο του Απειροστικού Λογισμού είναι οι πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής, δηλαδή συναρτήσεις του τύπου

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Αυτές απεικονίζουν τον αριθμό x στον αριθμό $f(x)$, συμβολικά $x \mapsto f(x)$. Στις εφαρμοσμένες επιστήμες εμφανίζονται συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Για παράδειγμα, για να περιγράψουμε τη θερμοκρασία μιάς θαλάσσιας περιοχής $U \subset \mathbb{R}^3$, χρειαζόμαστε μία συνάρτηση

$$T : U \rightarrow \mathbb{R},$$

δηλαδή $T(x, y, z)$ είναι η θερμοκρασία στο σημείο (x, y, z) του U . Μια τέτοια συνάρτηση απεικονίζει τη διατεταγμένη τριάδα (x, y, z) στον αριθμό $T(x, y, z)$, συμβολικά $(x, y, z) \mapsto T(x, y, z)$. Οι πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών (λέγονται και βαθμωτά πεδία) είναι λοιπόν απεικονίσεις της μορφής

$$\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad n = 2, 3, 4.$$

Στις εφαρμοσμένες επιστήμες εμφανίζονται και διανυσματικά πεδία. Για παράδειγμα, ένα στατικό μαγνητικό πεδίο περιγράφεται από την έντασή του \mathbf{B} , που σε κάθε σημείο του χώρου (x, y, z) αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $\mathbf{B}(x, y, z) = (B_1, B_2, B_3)$. Μια τέτοια συνάρτηση απεικονίζει τη διατεταγμένη τριάδα (x, y, z) στη διατεταγμένη τριάδα $(B_1, B_2, B_3) = \mathbf{B}(x, y, z)$, συμβολικά $(x, y, z) \mapsto (B_1, B_2, B_3)$. Οι συναρτήσεις αυτού του τύπου λέγονται διανυσματικά πεδία και είναι απεικονίσεις της μορφής

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Το διανυσματικό πεδίο μπορεί να εξαρτάται και από το χρόνο και ως παράδειγμα αναφέρουμε την ταχύτητα $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ενός ρευστού που εξαρτάται από τη θέση και από το χρόνο: $\mathbf{v}(t, x, y, z) = (v_1(t, x, y, z), v_2(t, x, y, z), v_3(t, x, y, z))$ είναι η ταχύτητα του ρευστού στο σημείο (x, y, z) τη στιγμή t . Επομένως μια τέτοια συνάρτηση απεικονίζει τη διατεταγμένη τετράδα (t, x, y, z) στη διατεταγμένη τριάδα (v_1, v_2, v_3) , δηλαδή $(t, x, y, z) \mapsto (v_1, v_2, v_3)$, επομένως είναι μία απεικόνιση της μορφής

$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Διανυσματικές συναρτήσεις μίας μεταβλητής (καμπύλες), έχουμε ήδη μελετήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο. Αυτές απεικονίζουν τον αριθμό t στη διατεταγμένη τριάδα $(x(t), y(t), z(t)) = \mathbf{r}(t)$, συμβολικά $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$. Επομένως οι καμπύλες στο επίπεδο ή στον τριδιάστατο χώρο είναι απεικονίσεις της μορφής

$$\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad n = 2, 3.$$

Γενικότερα, ο Λογισμός Πολλών Μεταβλητών (ή Διανυσματικός Λογισμός) έχει ως αντικείμενο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του \mathbb{R}^n και τιμές μέσα στο \mathbb{R}^m ,

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m. \quad (2.0.1)$$

Επομένως μια τέτοια συνάρτηση απεικονίζει τη διατεταγμένη n -άδα (x_1, x_2, \dots, x_n) στη διατεταγμένη m -άδα (F_1, F_2, \dots, F_m) . Αναλόγως της διάστασης n ή m έχουμε μια από τις παραπάνω ειδικές περιπτώσεις.

2.1 Βαθμωτά πεδία

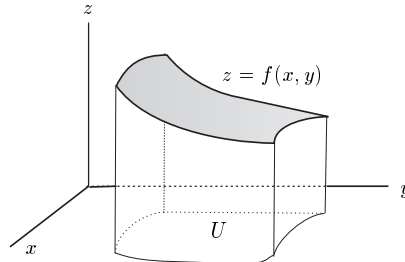
Αρχίζουμε με κάποια παραδείγματα συναρτήσεων δύο ή τριών μεταβλητών: $\phi(x, y) = x^2 + y^2$, $\psi(x, y) = \sin(xy^2) - x^3$, $f(x, t) = A \sin(kx - ct)$ είναι συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Όμοια, $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, $\psi(x, y, z) = \sin(xy^2) - zx^3$, $f(x, y, t) = e^{-y} \sin(kx - ct)$ είναι συναρτήσεις τριών μεταβλητών. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται και βαθμωτά πεδία. Όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου, πρόκειται για απεικονίσεις της μορφής $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ή $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Επομένως μια συνάρτηση ϕ δύο μεταβλητών απεικονίζει κάθε ζεύγος (x, y) του πεδίου ορισμού της σε κάποιον αριθμό $\phi(x, y)$. Όμοια, μια συνάρτηση ϕ τριών μεταβλητών απεικονίζει κάθε διατεταγμένη τριάδα (x, y, z) του πεδίου ορισμού της σε κάποιον αριθμό $\phi(x, y, z)$.

Πώς μπορούμε να συλλάβουμε παραστατικά τη συμπεριφορά μίας τέτοιας συνάρτησης; Υπενθυμίζουμε ότι η κατανόηση της συμπεριφοράς μίας πραγματικής συνάρτησης μίας μεταβλητής, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γίνεται με τη βοήθεια του

γραφήματος της,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\},$$

που είναι μια καμπύλη στο επίπεδο.



Σχήμα 2.1: Εν γένει, το γράφημα μίας βαθμωτής συνάρτησης δύο μεταβλητών είναι μία επιφάνεια.

2.1.1 Γράφημα και σύνολο στάθμης

Για να αποκτήσουμε μία οπτική παράσταση ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση δύο μεταβλητών ορισμένη σε ένα χωρίο U του επιπέδου, $U \subset \mathbb{R}^2$

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}$$

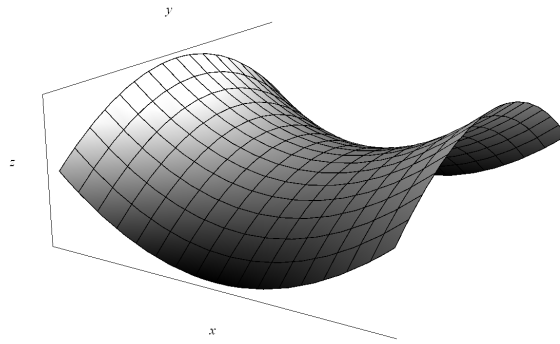
Γράφοντας $z = f(x, y)$, το γράφημα Γ της f είναι όλα τα σημεία (x, y, z) του \mathbb{R}^3 με $(x, y) \in U$, συμβολικά,

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in U\}.$$

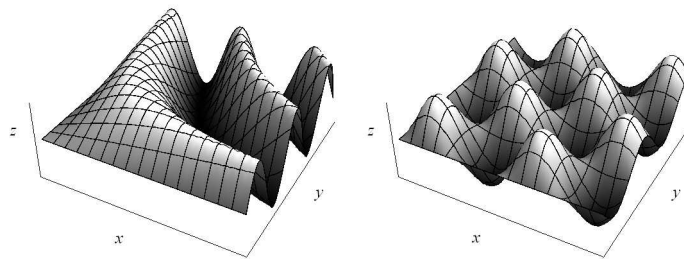
Το σύνολο αυτό είναι μία επιφάνεια στον \mathbb{R}^3 , Σχήμα 2.1. Επομένως στις δύο διαστάσεις μπορούμε να γενικεύσουμε την έννοια του γραφήματος και να αποκτήσουμε μία αίσθηση της συμπεριφοράς ενός βαθμωτού πεδίου ϕ στο \mathbb{R}^2 , αλλά στις περισσότερες διαστάσεις η γεωμετρική αυτή προσέγγιση δεν είναι πάντα δυνατή.

- Μελετήστε τα γραφήματα των παραδειγμάτων των Marsden and Tromba [3], και πειραματιστείτε στη Mathematica με συναρτήσεις δύο μεταβλητών, π.χ. `Plot3D[Sin[x * y], {x, 0, 4}, {y, 0, 4}]`

Μία άλλη χρήσιμη έννοια είναι αυτή του συνόλου στάθμης (*level set*) ενός βαθμωτού πεδίου. Όπως θα δούμε στον ορισμό 2.1, με τον όρο σύνολο στάθμης εννοούμε το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού της ϕ , στα οποία η ϕ



Σχήμα 2.2: Γράφημα της $\phi(x, y) = x^2 - y^2$, (σάγμα).



Σχήμα 2.3: Γράφημα των $\sin xy$ και $\sin x \sin y$.

είναι σταθερή. Ειδικά για μία συνάρτηση δύο μεταβλητών $\phi(x, y)$, το σύνολο στάθμης k ορίζεται ως

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \phi(x, y) = k\}.$$

Επομένως C_k είναι εν γένει μία καμπύλη που λέγεται *ισοσταθμική καμπύλη στάθμης k* .

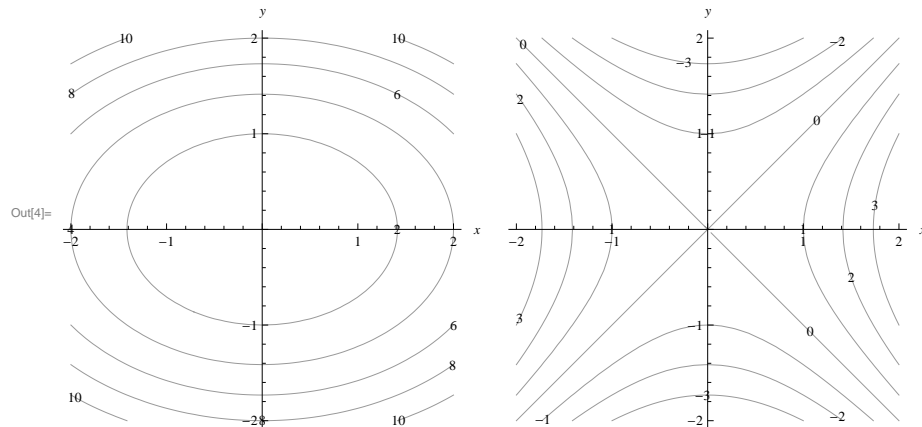
Παράδειγμα 1. Για την $\phi(x, y) = x^2 + y^2$ οι ισοσταθμικές καμπύλες ορίζονται ως

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\}$$

και για $k > 0$ είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα \sqrt{k} . Το γράφημα της ϕ είναι παραβολοειδές εκ περιστροφής.

Παράδειγμα 2. Για την $\phi(x, y) = x^2 + 2y^2$ οι ισοσταθμικές καμπύλες ορίζονται ως

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = k\}$$



Σχήμα 2.4: Αριστερά, οι ισοσταθμικές καμπύλες 2, 4, 6, 8, 10, της $x^2 + 2y^2$, (ελλείψεις). Δεξιά, μερικές ισοσταθμικές καμπύλες από -3 έως 3 της $x^2 - y^2$, (υπερβολές).

και για $k > 0$ είναι ελλείψεις με ημιάξονες \sqrt{k} και $\sqrt{k/2}$, βλ. Σχήμα 2.4. Το γράφημα της ϕ είναι παραβολοειδές και οι τομές του με επίπεδα $z = \text{constant}$ είναι ελλείψεις.

Παράδειγμα 3. Για την $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ οι ισοσταθμικές καμπύλες ορίζονται ως

$$C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = k\}$$

και είναι υπερβολές, βλ. Σχήμα 2.4. Το γράφημα της ϕ είναι σάγμα, Σχήμα 2.2.

Παράδειγμα 4. Αν θεωρήσουμε την ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας ως συνάρτηση της θέσης, $p(x, y)$, τότε οι ισοσταθμικές καμπύλες $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y) = c\}$ είναι οι ισοβαρείς που απεικονίζονται σ' ένα χάρτη βαρομετρικών συστημάτων. Ανάλογα ορίζονται οι ισόθερμες, οι ισοβαθείς κλπ.

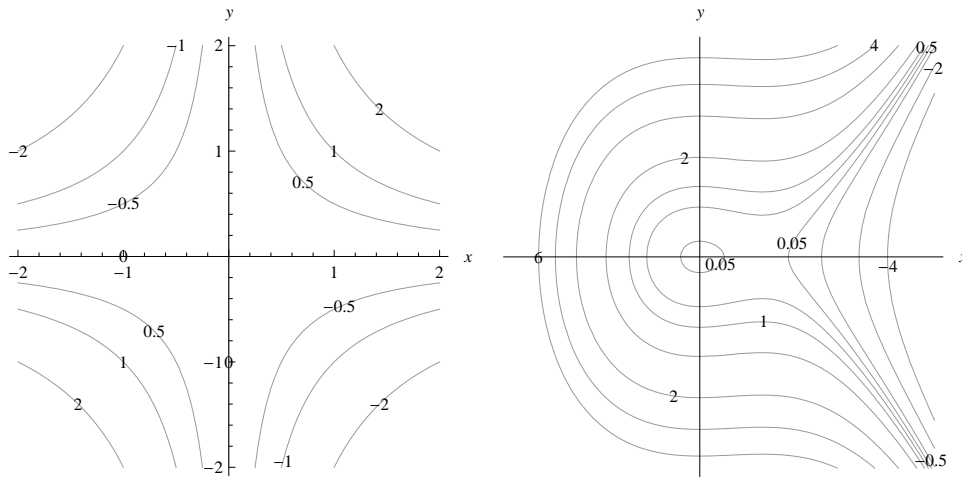
Ειδικά για μία συνάρτηση τριών μεταβλητών το σύνολο στάθμης είναι εν γένει μία επιφάνεια που λέγεται *ισοσταθμική επιφάνεια*. Έτσι, αν $\phi(x, y, z)$ είναι μία συνάρτηση τριών μεταβλητών, οι ισοσταθμικές επιφάνειες της ορίζονται ως

$$S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x, y, z) = k\}.$$

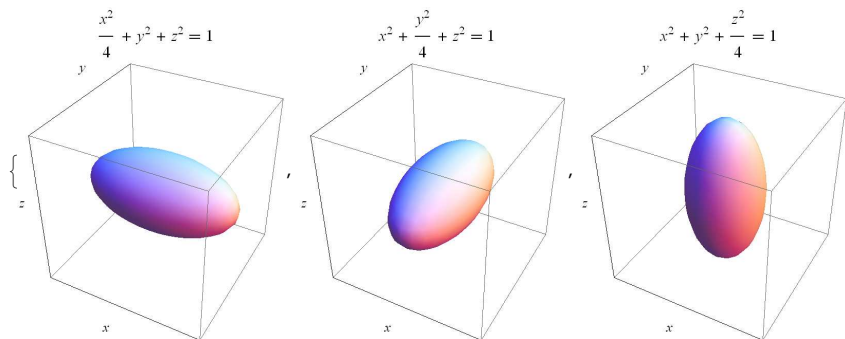
Παράδειγμα 5. Για την $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, οι ισοσταθμικές επιφάνειες ορίζονται ως

$$S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\} \quad (2.1.1)$$

και για $k > 0$ είναι ομόκεντρες σφαίρες με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα \sqrt{k} .



Σχήμα 2.5: Αριστερά, μερικές υπερβολές από -2 έως 2 της xy . Δεξιά, οι ισοσταθμικές της $x^2 + y^2 - x^3$.



Σχήμα 2.6: Ελλειψοειδή εκ περιστροφής.

Παράδειγμα 6. Για την $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, η μηδενική ισοσταθμική επιφάνεια,

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

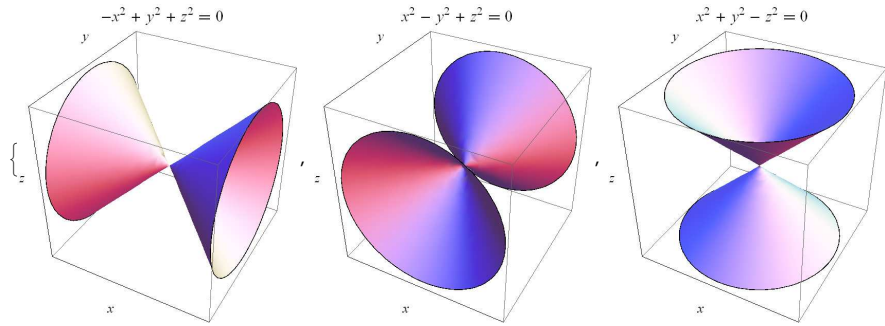
είναι κώνος. Η ισοσταθμική επιφάνεια με τιμή -1 είναι ένα δίχωνο υπερβολοειδές και με τιμή $+1$ είναι ένα μονόχωνο υπερβολοειδές. Βλ. Σχήματα 2.7 και 2.8.

- Περιγράψτε τις παρακάτω επιφάνειες.

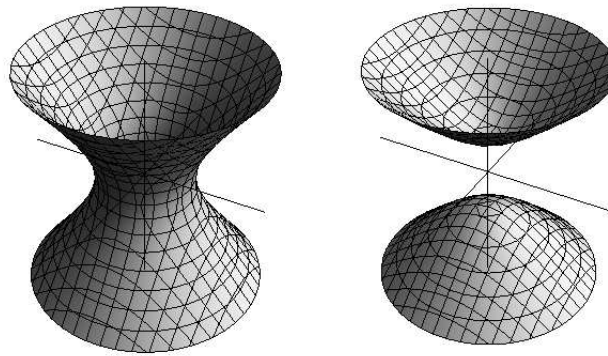
α) Ελλειπτικός κύλινδρος $y^2 + 4x^2 = 4$, $-2 \leq z \leq 2$

- β) Ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Σχήμα 2.7: Κώνοι.



Σχήμα 2.8: Μονόχωνο, $x^2 + y^2 - z^2 = 0.8$, και δίχωνο $x^2 + y^2 - z^2 = -0.5$, υπερβολοειδές.

γ) Ελλειπτικό παραβολοειδές $z = a^2x^2 + b^2y^2$

δ) Ελλειπτικός κώνος $z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$

ε) Μονόχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

στ) Δίχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

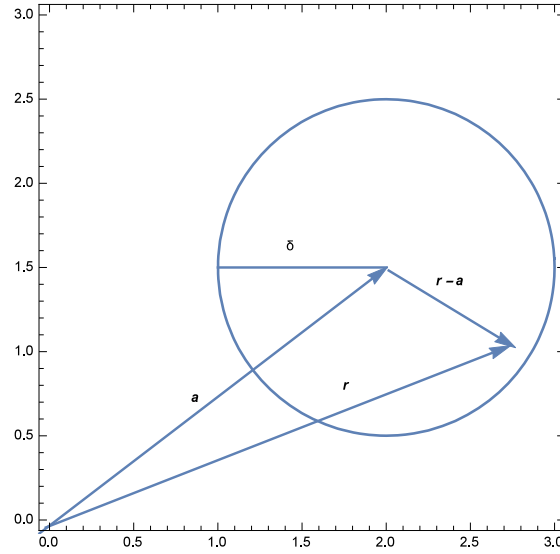
ζ) Υπερβολικό παραβολοειδές $z = a^2x^2 - b^2y^2$

Στη γενική περίπτωση βαθμωτού πεδίου στον \mathbb{R}^n , θα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1. Έστω ϕ ένα βαθμωτό πεδίο που ορίζεται σε μία περιοχή U του \mathbb{R}^n , $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ και k μία σταθερά. Τότε το σύνολο στάθμης S_k της ϕ με τιμή k , αποτελείται από τα σημεία $(x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ για τα οποία $\phi(x_1, \dots, x_n) = k$, συμβολικά,

$$S_k = \{(x_1, \dots, x_n) \in U : \phi(x_1, \dots, x_n) = k\}.$$

Συνεχείς συναρτήσεις πολλών μεταβλητών



Σχήμα 2.9: Δίσκος κέντρου $\mathbf{a} = (2, 1.5)$ και ακτίνας $\delta = 1$.

Αρχίζουμε με την έννοια της περιοχής ενός σημείου \mathbf{a} . Στην περίπτωση των δύο διαστάσεων, θεωρούμε ένα δίσκο, δηλαδή το εσωτερικό ενός κύκλου με κέντρο το σημείο \mathbf{a} . Ακριβέστερα, το σύνολο των σημείων $\mathbf{r} = (x, y)$ με $\|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| < \delta$, είναι κυκλικός δίσκος (χωρίς το σύνορο του), κέντρου $\mathbf{a} = (a, b)$ και ακτίνας δ . Αν συμβολίσουμε τον δίσκο αυτόν με $D_\delta(\mathbf{a})$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} D_\delta(\mathbf{a}) &= \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| < \delta\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \right\}. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Συχνά, το σύνολο $D_\delta(\mathbf{a})$ λέγεται ανοιχτός δίσκος, κέντρου \mathbf{a} και ακτίνας δ . Αν θέλουμε να περιγράψουμε δίσκο που περιλαμβάνει το σύνορό του, δηλαδή τον κύκλο, θα έχουμε το σύνολο

$$\begin{aligned} \bar{D}_\delta(\mathbf{a}) &= \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| \leq \delta\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq \delta \right\}. \end{aligned}$$

Το σύνολο $\bar{D}_\delta(\mathbf{a})$ λέγεται *κλειστός δίσκος*, κέντρου \mathbf{a} και ακτίνας δ .

Στις τρεις διαστάσεις, μία (ανοιχτή) μπάλα είναι το εσωτερικό μιάς σφαίρας. Ακριβέστερα, το σύνολο των σημείων $\mathbf{r} = (x, y, z)$ με $\|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| < \delta$, είναι μία μπάλα (χωρίς το σύνορο της), κέντρου $\mathbf{a} = (a, b, c)$ και ακτίνας δ . Αν συμβολίσουμε την μπάλα αυτή με $B_\delta(\mathbf{a})$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} B_\delta(\mathbf{a}) &= \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| < \delta\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta \right\} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Συχνά, το σύνολο $B_\delta(\mathbf{a})$ λέγεται *ανοιχτή μπάλα*, κέντρου \mathbf{a} και ακτίνας δ . Χρησιμοποιούμε τον όρο μπάλα, διότι σφαίρα κέντρου $\mathbf{a} = (a, b, c)$ και ακτίνας δ είναι η επιφάνεια

$$S_\delta(\mathbf{a}) = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| = \delta\}.$$

Αν θέλουμε να περιγράψουμε μπάλα που περιλαμβάνει το σύνορό της, δηλαδή τη σφαίρα, θα έχουμε το σύνολο

$$\begin{aligned} \bar{B}_\delta(\mathbf{a}) &= \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| \leq \delta\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \leq \delta \right\}. \end{aligned}$$

Το σύνολο $\bar{B}_\delta(\mathbf{a})$ λέγεται *κλειστή μπάλα*, κέντρου \mathbf{a} και ακτίνας δ . Σε κάθε περίπτωση, λέμε ότι μία ανοιχτή μπάλα, κέντρου \mathbf{a} και ακτίνας δ , είναι μία περιοχή του σημείου \mathbf{a} . Μία περιοχή ενός σημείου, δεν είναι κατ' ανάγκην δίσκος (στις δύο διαστάσεις), ή μπάλα (στις τρεις διαστάσεις). Μπορούμε να φανταστούμε περιοχές που είναι τετράγωνα (στις δύο διαστάσεις), ή κύβοι (στις τρεις διαστάσεις). Για παράδειγμα για $\varepsilon, \delta > 0$, το σύνολο

$$R(\mathbf{a}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - a| < \varepsilon, |y - b| < \delta\},$$

είναι ορθογώνιο (χωρίς το σύνορό του), κέντρου $\mathbf{a} = (a, b)$ με πλευρές 2ε και 2δ . Το $R(\mathbf{a})$ είναι μία περιοχή του $\mathbf{a} = (a, b)$.

Η έννοια της συνέχειας για βαθμωτά πεδία είναι ανάλογη αυτής που γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό. Υπενθυμίζουμε ότι μία πραγματική συνάρτηση f είναι συνεχής αν γειτονικά σημεία του πεδίου ορισμού της έχουν γειτονικές εικόνες (μέσω της f). Στην περίπτωση του Λογισμού πολλών μεταβλητών, δύο σημεία \mathbf{a} και \mathbf{r} στο \mathbb{R}^n είναι γειτονικά, αν η ποσότητα της διαφοράς τους είναι μικρή. Ποσοτικά, η παραπάνω ιδέα εκφράζεται με τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 2.2. Μία συνάρτηση $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{a} \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $\mathbf{r} \in U$

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{a})| < \varepsilon.$$

Ο παραπάνω ορισμός μας λέει ότι όταν τα πρότυπα \mathbf{r} και \mathbf{a} απέχουν λιγότερο από δ , τότε οι εικόνες τους $\phi(\mathbf{r})$ και $\phi(\mathbf{a})$ απέχουν λιγότερο από ε . Διαισθητικά λοιπόν η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής αν “κοντινά” πρότυπα απεικονίζονται μέσω της ϕ σε “κοντινές” εικόνες.

Σύμφωνα με όσα σχολιάσαμε για την έννοια της περιοχής ενός σημείου, μία αναδιατύπωση του παραπάνω ορισμού στην περίπτωση των τριών διαστάσεων είναι η εξής.

Μία συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει περιοχή του \mathbf{a} τέτοια ώστε για κάθε \mathbf{r} στην περιοχή αυτή να ισχύει $|\phi(\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{a})| < \varepsilon$.

2.1.2 Μερική παράγωγος

Η μερική παράγωγος ως προς x , μιάς “ομαλής” συνάρτησης τριών μεταβλητών, $\phi(x, y, z)$, είναι η συνήθης παράγωγος της ως προς x , θεωρώντας τις υπόλοιπες μεταβλητές y και z ως σταθερές. Η παράγωγος $d\phi/dx$, της ϕ ως προς x , συμβολίζεται με $\partial\phi/\partial x$.

Παράδειγμα 7. Για την $\phi(x, y, z) = x^2 + zxy^5$, θα έχουμε $\partial\phi/\partial x = 2x + zy^5$. Η μερική παράγωγος ως προς y είναι $\partial\phi/\partial y = 5zxy^4$ και η μερική παράγωγος ως προς z είναι $\partial\phi/\partial z = xy^5$.

Επομένως μπορούμε να παραγωγίσουμε την ϕ ως προς x , όπως ακριβώς και στην περίπτωση συνάρτησης μιάς μεταβλητής, τό ίδιο και ως προς τις μεταβλητές y και z . Συμπερασματικά, η μερική παράγωγος της ϕ ως προς x ορίζεται ως το όριο (αν υπάρχει),

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{(y,z)=\text{constant}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x+h, y, z) - \phi(x, y, z)}{h}.$$

Παράδειγμα 8. Θεωρούμε τη norm r , του $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, δηλαδή $r = |\mathbf{r}|$. Αυτή είναι συνάρτηση της θέσης, δηλαδή $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Τότε σε κάθε

σημείο (εκτός της αρχής των αξόνων) θα έχουμε,

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r}, \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}.\end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο ορίζεται η μερική παράγωγος για βαθμωτά πεδία περισσότερων μεταβλητών, $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, αν u παριστάνει το πλάτος ενός κύματος στο χώρο, τότε u εξαρτάται και από τη θέση, (x, y, z) , και από το χρόνο t , δηλαδή $u = u(x, y, z, t)$. Τότε οι μερικές παράγωγοι θα είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} \Big|_{(t,y,z)=\text{constant}}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt} \Big|_{(x,y,z)=\text{constant}},$$

κ.λπ.

Η μερική παράγωγος έχει τις γνωστές ιδιότητες: Η δράση της είναι γραμμική

$$\frac{\partial}{\partial x} (\phi + \psi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \phi) = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

όπου λ είναι αριθμός, και ακολουθεί τον κανόνα του Leibniz,

$$\frac{\partial}{\partial x} (\phi \psi) = \frac{\partial \phi}{\partial x} \psi + \phi \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Ίδιοι κανόνες μπρούν να γραφούν και για τις μεταβλητές y και z . Συνεπώς ισχύουν οι κανόνες παραγωγίσης που είναι γνωστοί από το λογισμό συναρτήσεων μίας μεταβλητής.

Παράδειγμα 9. Γεωμετρική και φυσική σημασία της μερικής παραγωγού. Η μερική παράγωγος ως προς x , εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της ϕ όταν μεταβαίνουμε από το σημείο (x, y, z) , σε ένα γειτονικό σημείο που βρίσκεται στην ευθεία που περνά από το (x, y, z) και είναι παράλληλη με τον άξονα x . Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση ύψους, που για μια περιοχή της γης μας δείχνει το ύψος h στη θέση (x, y) , δηλαδή $h = h(x, y)$. Είμαστε εξοικειωμένοι με τις ισοσταθμικές καμπύλες $h(x, y) = \text{const.}$ της h , πρόκειται για τις ισοϋψείς που εμφανίζονται σε ένα υψομετρικό χάρτη. Το γράφημα της h αποτυπώνει τη μορφολογία του εδάφους, επομένως η μερική παράγωγος $\partial h / \partial x$ εκφράζει την κλίση της ανωφέρειας (ή κατωφέρειας) όταν μεταβαίνουμε παράλληλα με τον άξονα x από το σημείο (x, y) σε ένα γειτονικό σημείο (γεωμετρική ερμηνεία). Ως δεύτερο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την επιφάνεια μιας θαλάσσιας περιοχής που η θερμοκρασία της T είναι συνάρτηση της θέσης (x, y) ,

δηλαδή $T = T(x, y)$. Η μερική παράγωγος $\partial T/\partial x$ εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της θερμοκρασίας όταν μεταβαίνουμε παράλληλα με τον άξονα x από το σημείο (x, y) σε ένα γειτονικό σημείο (φυσική ερμηνεία).

Ορισμός 2.3. Μία συνάρτηση $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται παραγωγίσιμη στο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ αν όλες οι μερικές παράγωγοι της ϕ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο U . Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το βαθμωτό πεδίο ϕ είναι τάξης $C^1(U)$.

Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι ορίζονται ως

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right), & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, για την $\phi(x, y) = x^2 + xy^5$, προκύπτει $\partial^2 \phi/\partial x^2 = 2$, $\partial^2 \phi/\partial y^2 = 20xy^3$, $\partial^2 \phi/\partial x \partial y = 5y^4$, $\partial^2 \phi/\partial y \partial x = 5y^4$. Παρατηρούμε ότι οι μικτές παράγωγοι $\partial^2 \phi/\partial x \partial y$ και $\partial^2 \phi/\partial y \partial x$ είναι ίσες και όπως θα δούμε αυτό ισχύει για όλες τις “καλές” συναρτήσεις.

Άλλοι συμβολισμοί για την μερική παράγωγο είναι $\partial_x \phi$ ή $D_x \phi$, αντί του $\partial \phi/\partial x$. Για βαθμωτά πεδία $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, δηλαδή $\phi = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, χρησιμοποιούνται ακόμα οι συμβολισμοί,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \partial_i \phi = \phi_{,i}.$$

Συχνά η μερική παράγωγος της ϕ ως προς x συμβολίζεται και ως ϕ_x , δηλαδή $\phi_x = \partial \phi/\partial x$. Έτσι θα έχουμε

$$\phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \phi_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \phi_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \phi_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x}, \quad \phi_{xxx} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}, \dots$$

- Γράψτε με αυτό το συμβολισμό τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος $\partial^2 u/\partial t^2 = c^2 \partial^2 u/\partial x^2$ και την εξίσωση διάχυσης $\partial u/\partial t = D \partial^2 u/\partial x^2$ σε μία διάσταση.

Όπως προαναφέρθηκε, οι μικτές παράγωγοι $\partial^2 \phi/\partial x \partial y$ και $\partial^2 \phi/\partial y \partial x$ είναι ίσες για όλες τις “καλές” συναρτήσεις. Ακριβέστερα, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα, που αποδίδεται στον Schwarz.

Θεώρημα 2.1 (Ισότητα των μικτών παραγώγων). Αν ϕ_x , ϕ_y , ϕ_{xy} και ϕ_{yx} είναι συνεχείς σε μία περιοχή του (x, y) , τότε οι μικτές παράγωγοι είναι ίσες στο σημείο (x, y) ,

$$\phi_{xy} = \phi_{yx}, \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}.$$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία, π.χ., Finney et al [2]. Στο εξής, θα υποθέτουμε ότι όλα τα βαθμωτά πεδία έχουν συνεχείς παραγώγους (τάξης C^1). Αν χρειαζόμαστε δεύτερες ή τρίτες μερικές παραγώγους, θα υποθέτουμε ότι τα βαθμωτά πεδία είναι τάξης C^2 ή C^3 , ακόμα και C^∞ .

Κανόνας της αλυσίδας

Στο λογισμό μιας μεταβλητής, αν f είναι συνάρτηση του x και x είναι συνάρτηση του t (αμφότερες παραγωγίσιμες), τότε η σύνθετη συνάρτηση $f(x(t))$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Αντίστοιχα για ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(x, y)$ όπου x και y και x είναι συναρτήσεις του t , ο κανόνας της αλυσίδας γενικεύεται με προφανή τρόπο, δηλαδή

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Ανάλογη γενίκευση έχουμε στη σύνθεση βαθμωτών πεδίων, δηλαδή αν $\phi = \phi(u, v)$ με $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$, τότε

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$$

και αντίστοιχη σχέση για τη μερική παράγωγο $\partial\phi/\partial y$.

Παράδειγμα 10. Αν $z = f(u)$, και $u = x^2 + y^2$ δείξτε ότι

$$\frac{1}{2x} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2y} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Έχουμε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \frac{\partial z}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2x} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Όμοια,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \frac{\partial z}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2y} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη προκύπτει η ζητούμενη.

Παράδειγμα 11. Δείξτε ότι η συνάρτηση $u(t, x) = A \sin(x - ct)$, $A > 0$, ικανοποιεί την εξίσωση του κύματος σε μια διάσταση, $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (c είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος). Έχουμε διαδοχικά

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos(x - ct), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin(x - ct),$$

και όμοια

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \cos(x - ct), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \sin(x - ct) \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\sin(x - ct),$$

επομένως $\partial^2 u / \partial t^2 = c^2 \partial^2 u / \partial x^2$.

Ασκήσεις

1. Βρείτε τα $\partial z/\partial u$, $\partial z/\partial \theta$ αν $z = x^2 + 2xy$, $x = u \cos \theta$, $y = u \sin \theta$. Βρείτε τα $\partial z/\partial u$, $\partial z/\partial \theta$ αν $z = e^x + xy^2$, $x = u + \theta$, $y = e^{u+\theta}$. Βρείτε την dw/dt αν $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$, $z(t) = e^t$.
2. Αν $z = f(u)$, $u = (x + y)/xy$, δείξτε ότι

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{\partial z}{\partial y}.$$

3. Αν $w = x^2 + y - z + \sin t$ και $x + y = t$, βρείτε τα

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,t}, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{z,t}, \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}, \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,z}, \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,t}.$$

4. Η εξίσωση Kordeveg-deVries, $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$, περιγράφει την κίνηση των κυμάτων του νερού σε ρηγά κανάλια. Δείξτε ότι για $c > 0$ η συνάρτηση u με τύπο

$$u(t, x) = 3c \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right),$$

είναι λύση της εξίσωσης KdV. (Υπενθυμίζουμε το συμβολισμό $u_x = \partial u/\partial x$ και $\operatorname{sech} x = 1/\cosh x$). Κάνετε γράφημα της λύσης στη Mathematica για διάφορες τιμές του χρόνου (solitons).

2.1.3 Βαθμίδα ή gradient

Όπως γωρίζουμε, σε μία διάσταση η παράγωγος df/dx εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της f . Σε τρεις διαστάσεις, μπορούμε να θεωρήσουμε τρεις ρυθμούς μεταβολής μιάς συνάρτησης $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, που αντιστοιχούν στις τρεις μερικές παραγώγους. Σε κάθε σημείο $\mathbf{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, η τριάδα των μερικών παραγώγων $(\partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z)$ ορίζει ένα διάνυσμα του \mathbb{R}^3 , άρα είναι ένα διανυσματικό πεδίο από το \mathbb{R}^3 στο \mathbb{R}^3 . Το διανυσματικό αυτό πεδίο λέγεται κλίση, ή βαθμίδα, ή gradient του ϕ , και συμβολίζεται με $\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r})$ ή $\nabla \phi(\mathbf{r})$. Θα γράφουμε λοιπόν

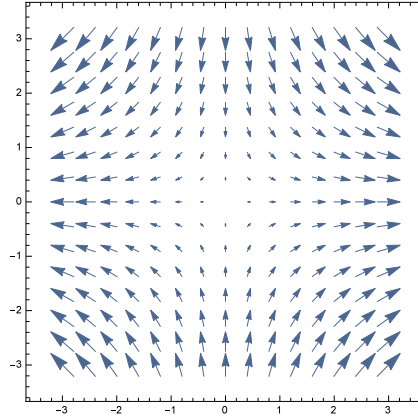
$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right), \quad \text{ή} \quad \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Για παράδειγμα, το gradient της πίεσης λέγεται βαροβαθμίδα, το gradient της θερμοκρασίας λέγεται θερμοβαθμίδα κ.ο.κ.

Παράδειγμα 12. Για την $\phi(x, y) = x^2 - y^2$ η βαθμίδα είναι

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} \quad \text{ή} \quad \nabla\phi = (2x, -2y),$$

δηλαδή ένα διανυσματικό πεδίο σε δύο διαστάσεις, βλ. Σχήμα 2.10. Για την $\phi(x, y, z) = xe^{-y} + z$, προκύπτει $\nabla\phi = (e^{-y}, -xe^{-y}, 1)$ δηλαδή ένα διανυσματικό πεδίο σε τρεις διαστάσεις.



Σχήμα 2.10: Το gradient $2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ του Παραδείγματος 12 δεν είναι διάνυσμα, είναι διανυσματικό πεδίο.

Σε μία διάσταση, το διαφορικό $df = f'(x)dx$ εκφράζει την “απειροστή μεταβολή” της συνάρτησης (προσεγγιστικά, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή μεταβάλλεται κατά Δx , η μεταβολή της συνάρτησης είναι $\Delta f \simeq f'(x)\Delta x$, βλ. ΘΜΤ). Σε τρεις διαστάσεις, το διαφορικό της ϕ γράφεται

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz. \quad (2.1.4)$$

Το διαφορικό $d\phi$ εκφράζει την “απειροστή μεταβολή” της ϕ , με την εξής έννοια: όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές μεταβάλλονται κατά Δx , Δy , Δz , η μεταβολή της συνάρτησης ϕ δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση

$$\Delta\phi \simeq \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z. \quad (2.1.5)$$

Η αυστηρή σημασία της (2.1.5) θα γίνει κατανοητή σε επόμενο κεφάλαιο (βλ. Θεώρημα Taylor). Σημειώνουμε ότι το διαφορικό (2.1.4) μπορεί να γραφεί και ως εσωτερικό γινόμενο του $\nabla\phi$ με το $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$,

$$d\phi = \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (2.1.6)$$

- Βρείτε το gradient της $\phi(x, y, z) = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Παρατηρείστε ότι είναι κάθετο στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας r .

Η ιδιότητα αυτή του $\text{grad } \phi$ είναι γενική: $\nabla \phi$ είναι ορθογώνιο στις ισοσταθμικές επιφάνειες S του ϕ . Αυστηρή απόδειξη θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, αλλά μπορούμε να πεισθούμε από το ακόλουθο επιχειρήμα. Θεωρούμε μία “απειροστή” μετατόπιση $d\mathbf{r} = \mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy + \mathbf{k} dz$ πάνω σε μία ισοσταθμική επιφάνεια S ,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x, y, z) = \text{constant}\},$$

δηλαδή τα διαφορικά dx, dy, dz στην (2.1.4) υπολογίζονται πάνω στην επιφάνεια S . Όμως η συνάρτηση ϕ είναι σταθερή πάνω στην S , άρα $d\phi = 0$, και επομένως από την (2.1.6) προκύπτει ότι το εσωτερικό γινόμενο $\nabla \phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ είναι μηδέν, άρα $\nabla \phi$ είναι κάθετο στο $d\mathbf{r}$. Επειδή θεωρήσαμε τυχαίο $d\mathbf{r}$ στην επιφάνεια S , προκύπτει ότι $\nabla \phi$ είναι κάθετο στην S .¹

- Στην ηλεκτροστατική, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου \mathbf{E} συνδέεται με το δυναμικό ϕ μέσω της $\mathbf{E} = -\nabla \phi$. Ελέγξτε τη σχέση αυτή για την περίπτωση $\phi(r) = kQ/r$.

Συνέπειες του ορισμού είναι οι παρακάτω ιδιότητες.

1. Αν $\phi = \text{constant}$, τότε $\nabla \phi = 0$
2. $\nabla(\phi + \psi) = \nabla \phi + \nabla \psi$ και $\nabla(\lambda \phi) = \lambda \nabla \phi$, $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\nabla(\phi \psi) = \psi \nabla \phi + \phi \nabla \psi$
4. $\nabla(\phi/\psi) = (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) / \psi^2$, εκεί όπου $\psi \neq 0$.

Παρατηρούμε ότι όπως κάθε τελεστής παραγωγίσης, ο τελεστής ∇ είναι γραμμικός (ιδιότητα 2) και ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz (ιδιότητα 3).

2.1.4 Παράγωγος κατά μήκος καμπύλης και κατευθυνόμενη παράγωγος

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε το ρυθμό μεταβολής ενός βαθμωτού πεδίου ϕ κατά μήκος μιάς καμπύλης $\mathbf{r}(t)$. Θεωρούμε τη σύνθεση του βαθμωτού πεδίου $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με την καμπύλη $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ουσιωδώς πρόκειται για τον περιορισμό

¹Η αδυναμία του επιχειρήματος είναι ότι δεν ορίσαμε αυστηρά την πρόταση “τα διαφορικά dx, dy, dz στην (2.1.4) υπολογίζονται πάνω στην επιφάνεια S ”.

της ϕ στην καμπύλη $C = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)\}$. Τότε η σύνθεση τους, $\phi \circ \mathbf{r}$, είναι μία πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής με τύπο

$$\phi(\mathbf{r}(t)) = \phi(x(t), y(t), z(t)),$$

όπου $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ο κανόνας της αλυσίδας μας δίνει

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \frac{dz}{dt}, \quad (2.1.7)$$

ή, συντομογραφικά

$$\frac{d\phi}{dt} = \nabla\phi \cdot \dot{\mathbf{r}}, \quad (2.1.8)$$

όπου εννοείται ότι $\nabla\phi = \nabla\phi(\mathbf{r}(t))$ και $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$. Ο τύπος (2.1.8) παρέχει την παράγωγο της ϕ κατά μήκος της καμπύλης $\mathbf{r}(t)$ και παριστάνει το ρυθμό μεταβολής της ϕ κατά μήκος της καμπύλης $\mathbf{r}(t)$.

Παράδειγμα 13. Για την $\phi(x, y) = x^2 + y^2$, η παράγωγός της κατά μήκος της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}$ είναι

$$\frac{d\phi}{dt} = \nabla\phi \cdot \dot{\mathbf{r}} = (2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}) \cdot (-3 \sin t \mathbf{i} + 3 \cos t \mathbf{j}),$$

όπου $x = x(t) = 3 \cos t$ και $y = y(t) = 3 \sin t$. Εκτελώντας το εσωτερικό γινόμενο, προκύπτει $d\phi/dt = 0$, πράγμα αναμενόμενο αφού η κλίση $\nabla\phi$ είναι κάθετη στην ισοσταθμική καμπύλη $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}$, (κύκλος ακτίνας 3).

Στην ειδική περίπτωση που η $\mathbf{r}(t)$ είναι η ευθεία που περνά από το σημείο \mathbf{a} και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος \mathbf{v} , με παραμετρική αναπαράσταση, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, τότε $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v}$ για κάθε t , επομένως το δεύτερο μέλος της (2.1.8) στο σημείο \mathbf{a} είναι $\mathbf{v} \cdot \nabla\phi(\mathbf{a})$. Συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{v} \cdot \nabla\phi(\mathbf{a})$ εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της ϕ κατά την κατεύθυνση \mathbf{v} , οπότε θα έχουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 2.4. Παράγωγος κατά την κατεύθυνση \mathbf{v} , ή κατευθυνόμενη παράγωγος, (συμβολίζεται με $D_{\mathbf{v}}\phi$), στο σημείο \mathbf{a} , ονομάζεται το $\mathbf{v} \cdot \nabla\phi(\mathbf{a})$, δηλαδή

$$D_{\mathbf{v}}\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{v} \cdot \nabla\phi(\mathbf{a}). \quad (2.1.9)$$

Παρατηρείστε πάλι ότι ο τελεστής της κατευθυνόμενης παραγώγου, $D_{\mathbf{v}}$, είναι γραμμικός,

$$D_{\mathbf{v}}(\phi + \psi) = D_{\mathbf{v}}\phi + D_{\mathbf{v}}\psi \quad \text{και} \quad D_{\mathbf{v}}(\lambda\phi) = \lambda D_{\mathbf{v}}\phi,$$

και ικανοποιεί τον κανόνα του Leibniz,

$$D_{\mathbf{v}}(\phi\psi) = \psi D_{\mathbf{v}}\phi + \phi D_{\mathbf{v}}\psi.$$

Από την (2.1.8) προκύπτει λοιπόν ότι για τυχούσα καμπύλη $\mathbf{r}(t)$, το εσωτερικό γινόμενο $\nabla\phi \cdot \dot{\mathbf{r}}$ είναι η παράγωγος της ϕ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\dot{\mathbf{r}}$.

Παράδειγμα 14. Για την $\phi(x, y) = x^2 + y^2$, η κατευθυνόμενη παράγωγός της κατά μήκος του διανύσματος $\mathbf{v} = (1, 1)$ στο σημείο $\mathbf{a} = (2, 2)$ είναι

$$D_{\mathbf{v}}\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{v} \cdot \nabla\phi(\mathbf{a}) = (1, 1) \cdot (2x, 2y)_{x=2, y=2} = 8.$$

Η κατευθυνόμενη παράγωγος της ϕ κατά μήκος του διανύσματος $\mathbf{u} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ στο σημείο $\mathbf{a} = (2, 2)$ είναι $D_{\mathbf{u}}\phi(\mathbf{a}) = 0$ (κάνετε σχήμα).

Παρατήρηση 2.1. Συνήθως για τον υπολογισμό της παραγωγού κατά κατεύθυνση επιλέγουμε μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{v} . Ο λόγος είναι ότι για $\lambda > 0$, το διάνυσμα $\lambda\mathbf{v}$ έχει μεν την ίδια κατεύθυνση με το \mathbf{v} , αλλά η παράγωγος της ϕ στο \mathbf{a} κατά την “κατεύθυνση” $\lambda\mathbf{v}$ είναι $(\lambda\mathbf{v}) \cdot \nabla\phi(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{v} \cdot \nabla\phi(\mathbf{a})$, δηλαδή λ φορές μεγαλύτερη από την παράγωγο κατά την κατεύθυνση \mathbf{v} . Επομένως, αν θέλουμε η κατευθυνόμενη παράγωγος να εξαρτάται μόνο από το σημείο και την κατεύθυνση, επιλέγουμε μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{v} . Αυτό γίνεται ορίζοντας το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ και υπολογίζουμε την $D_{\mathbf{u}}\phi(\mathbf{a})$. Σημειώνουμε πάντως ότι η επιλογή μοναδιαίου διανύσματος δεν είναι υποχρεωτική.

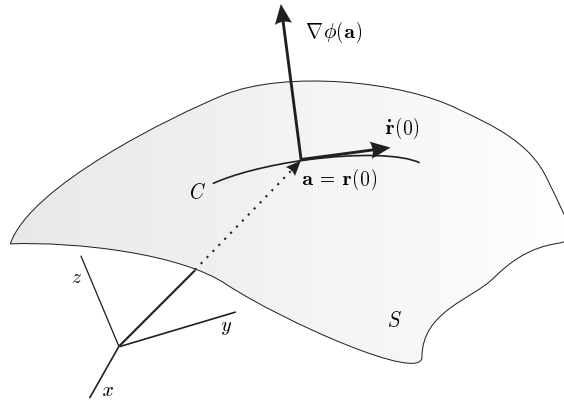
Ιδιότητες του $\nabla\phi$

Είμαστε τώρα σε θέση να δούμε τη γεωμετρική σημασία της κλίσης (gradient).

Θεώρημα 2.2. Αν $\nabla\phi(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$, τότε η κλίση $\nabla\phi(\mathbf{r})$ δείχνει προς εκείνη την κατεύθυνση κατά την οποία η ϕ αυξάνει γρηγορότερα.

Απόδειξη. Έστω \mathbf{n} ένα μοναδιαίο διάνυσμα. Τότε ο ρυθμός μεταβολής της ϕ κατά μήκος του \mathbf{n} είναι $\mathbf{n} \cdot \nabla\phi(\mathbf{r}) = |\nabla\phi(\mathbf{r})| \cos\theta$, όπου θ είναι η γωνία μεταξύ \mathbf{n} και $\nabla\phi(\mathbf{r})$. Έρα ο ρυθμός γίνεται μέγιστος όταν \mathbf{n} είναι ομόρροπο του $\nabla\phi(\mathbf{r})$, ($\theta = 0$). \square

Η άλλη ιδιότητα της κλίσης ενός βαθμωτού ϕ , είναι ότι $\nabla\phi$ είναι κάθετο στις επιφάνειες στάθμης της συνάρτησης. Ακριβέστερα, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.



Σχήμα 2.11: Το $\nabla\phi(\mathbf{a})$ είναι κάθετο σε κάθε καμπύλη της επιφάνειας στάθμης που περνά από το \mathbf{a} .

Θεώρημα 2.3. Έστω ϕ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση τριών μεταβλητών και S_k η επιφάνεια στάθμης με τιμή k , $S_k = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \phi(\mathbf{r}) = k\}$. Έστω ένα σημείο \mathbf{a} της S_k και μία οποιαδήποτε καμπύλη επί της επιφάνειας S_k , $\mathbf{r}(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, που τη στιγμή $t = 0$ περνά από το \mathbf{a} , Σχήμα 2.11. Τότε $\nabla\phi(\mathbf{a}) \cdot \dot{\mathbf{r}}(0) = 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\mathbf{r}(t)$ περιέχεται στην S_k και $\mathbf{r}(0) = \mathbf{a}$. Τότε $\dot{\mathbf{r}}(0)$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα στην S_k στο σημείο \mathbf{a} . Η συνάρτηση ϕ είναι σταθερή επί της S_k , άρα $\phi(\mathbf{r}(t)) = k$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$0 = \left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{t=0} = \nabla\phi(\mathbf{a}) \cdot \dot{\mathbf{r}}(0),$$

δηλαδή $\nabla\phi(\mathbf{a}) \perp \dot{\mathbf{r}}(0)$. □

Επειδή η καμπύλη \mathbf{r} είναι τυχούσα, το αποτέλεσμα ισχύει για κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα στην S_k στο σημείο \mathbf{a} , επομένως το $\nabla\phi$ είναι κάθετο στην επιφάνεια S_k στο σημείο \mathbf{a} (ακριβέστερα, $\nabla\phi$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο της S_k στο σημείο \mathbf{a}).

Σημασία της κατευθυνόμενης παραγώγου

Όπως είδαμε οι μερικές παράγωγοι της ϕ ως προς x, y, z , εκφράζουν τους ρυθμούς μεταβολής της ϕ κατά τις διευθύνσεις x, y, z . Με τον ορισμό (2.1.9), επιτύχαμε να περιγράψουμε το ρυθμό μεταβολής της ϕ κατά μία οποιαδήποτε διεύθυνση \mathbf{v} .

Παράδειγμα 15. Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων των ωκεανογράφων, δηλαδή άξονας $x'x$ κατά τη διεύθυνση W-E, άξονας $y'y$ κατά τη διεύθυνση S-N. Αν $\phi = \phi(x, y)$ είναι η θερμοκρασία στην επιφάνεια της θάλασσας, τότε $\partial\phi/\partial x$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας όταν κινούμαστε προς τα ανατολικά και $-\partial\phi/\partial y$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας όταν κινούμαστε προς τα νότια. Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας όταν κινούμαστε κατά την “βορειο-βορειοανατολική” κατεύθυνση $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι

$$D_{\mathbf{v}}\phi = \mathbf{v} \cdot \nabla\phi = \frac{1}{2} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial\phi}{\partial y} \simeq 0.5 \frac{\partial\phi}{\partial x} + 0.87 \frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

Επομένως οι συντεταγμένες 0.5 και 0.87 του \mathbf{v} μπορούν να θεωρηθούν ως συντελεστές βαρύτητας για τις αντίστοιχες κατευθύνσεις.

Σημειώνουμε ότι ο ορισμός της κατευθυνόμενης παραγώγου εμπεριέχει την έννοια της μερικής παραγώγου. Πράγματι, για ένα βαθμωτό πεδίο ϕ , π.χ. τριών μεταβλητών, θα έχουμε

$$D_{\mathbf{i}}\phi = \mathbf{i} \cdot \nabla\phi = \mathbf{i} \cdot \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

Με άλλα λόγια, η μερική παράγωγος ως προς x , δεν είναι παρά η κατευθυνόμενη παράγωγος κατά την διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ και γενικά,

$$D_{\mathbf{i}}\phi(\mathbf{a}) = \frac{\partial\phi(\mathbf{a})}{\partial x}, \quad D_{\mathbf{j}}\phi(\mathbf{a}) = \frac{\partial\phi(\mathbf{a})}{\partial y}, \quad D_{\mathbf{k}}\phi(\mathbf{a}) = \frac{\partial\phi(\mathbf{a})}{\partial z}.$$

Σε βιβλία Φυσικής, για την κατευθυνόμενη παράγωγο $D_{\mathbf{n}}\phi$ ενός παραγωγίσιμου βαθμωτού πεδίου ϕ κατά τη διεύθυνση του μοναδιαίου \mathbf{n} , χρησιμοποιείται και το σύμβολο $\partial\phi/\partial\mathbf{n}$. Άλλο σύμβολο για την κατευθυνόμενη παράγωγο είναι το $\nabla_{\mathbf{n}}\phi$.

Παρατήρηση 2.2 (Προαιρετική ανάγνωση). Στον ορισμό (2.1.9) καταλήξαμε αφού πρώτα εισάγαμε την έννοια της μερικής παραγώγου. Στη Μαθηματική Ανάλυση δίνεται ένας γενικός ορισμός της παραγώγου που εμπεριέχει και την έννοια της μερικής παραγώγου και αυτήν της κατευθυνόμενης παραγώγου. Ο γενικός αυτός ορισμός προκύπτει από την ακόλουθη επιχειρηματολογία. Ενδιαφερόμαστε να ορίσουμε την παράγωγο ενός βαθμωτού πεδίου ϕ που ορίζεται σε μία περιοχή $U \subset \mathbb{R}^n$, σε ένα σημείο \mathbf{a} του U . Η παράγωγος εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της ϕ όταν μεταβαίνουμε από το \mathbf{a} σε ένα γειτονικό του σημείο. Ο ρυθμός αυτός εξαρτάται και από τη διεύθυνση που κινούμαστε ξεκινώντας από το \mathbf{a} . Θεωρούμε λοιπόν ένα γειτονικό σημείο \mathbf{r} του \mathbf{a} που βρίσκεται στην ευθεία που περνά από το σημείο \mathbf{a} και έχει τη διεύθυνση του διανύσματος \mathbf{v} , δηλαδή

αυτό θα γράφεται, $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, με $t \in \mathbb{R}$. Ένας εύλογος ορισμός της παραγώγου της ϕ στο σημείο \mathbf{a} , είναι το όριο (αν υπάρχει)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) - \phi(\mathbf{a})}{t}. \quad (2.1.10)$$

Ενός λεπτού σκέψη αρκεί για να δούμε ότι το όριο αυτό, εκφράζει την παράγωγο της ϕ στο \mathbf{a} κατά μήκος της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Πρόκειται λοιπόν για την *κατευθυνόμενη παράγωγο* της ϕ στο σημείο \mathbf{a} στην κατεύθυνση του διανύσματος \mathbf{v} , επομένως μπορούμε να την συμβολίσουμε με $D_{\mathbf{v}}\phi(\mathbf{a})$. Ανακεφαλαιώνοντας, η (2.1.10) μπορεί να θεωρηθεί ως ορισμός της κατευθυνόμενης παραγώγου, $D_{\mathbf{v}}\phi(\mathbf{a})$, ενώ η (2.1.9) αποτελεί τον τύπο υπολογισμού της $D_{\mathbf{v}}\phi(\mathbf{a})$. Σημειώνουμε ότι ο γενικός ορισμός (2.1.10) εμπεριέχει την έννοια της μερικής παραγώγου διότι για ένα βαθμωτό πεδίο ϕ , π.χ. τριών μεταβλητών, θα έχουμε στο σημείο $\mathbf{a} = (a, b, c)$

$$D_{\mathbf{i}}\phi(\mathbf{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(\mathbf{a} + t\mathbf{i}) - \phi(\mathbf{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi(a + t, b, c) - \phi(a, b, c)}{t} = \frac{\partial \phi(\mathbf{a})}{\partial x}.$$

Καταλήγουμε λοιπόν πάλι στο ότι, η μερική παράγωγος ως προς x , δεν είναι παρά η κατευθυνόμενη παράγωγος κατά την διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ και γενικά,

$$D_{\mathbf{i}}\phi(\mathbf{a}) = \frac{\partial \phi(\mathbf{a})}{\partial x}, \quad D_{\mathbf{j}}\phi(\mathbf{a}) = \frac{\partial \phi(\mathbf{a})}{\partial y}, \quad D_{\mathbf{k}}\phi(\mathbf{a}) = \frac{\partial \phi(\mathbf{a})}{\partial z}.$$

Παρατήρηση 2.3. Τελειώνουμε με μία τεχνικής φύσεως παρατήρηση. Υπενθυμίζουμε ότι η παράγωγος μίας πραγματικής συνάρτησης μίας μεταβλητής, ορίζεται στο εσωτερικό κάποιου διαστήματος $[a, b]$. Αν επιθυμούμε να επεκτείνουμε την παράγωγο στο ένα άκρο του διαστήματος, το πολύ να ορίζεται η πλευρική παράγωγος. Στην περίπτωση του βαθμωτού πεδίου ϕ , για να ορίζεται η παράγωγος στο σημείο \mathbf{a} του U , πρέπει $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$ να παραμένει στο U (για “πολύ μικρό” t). Με άλλα λόγια, πρέπει το \mathbf{a} να είναι *εσωτερικό σημείο* του U , με την έννοια ότι μία μικρή μπάλα με κέντρο το \mathbf{a} πρέπει να κείται εξ’ ολοκλήρου μέσα στο U . Ακριβέστερα, θα λέμε ότι το $\mathbf{a} \in U$ είναι *εσωτερικό σημείο* του U αν υπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ώστε το σύνολο των σημείων \mathbf{r} με $\|\mathbf{r} - \mathbf{a}\| < \varepsilon$, να περιέχεται στο U .

2.1.5 Ασκήσεις

1. Σχεδιάστε μερικές ισοσταθμικές και μερικές ισοϋψείς καμπύλες της $\phi(x, y) = x^2 + 2y^2$.

2. Σχεδιάστε μερικές ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης με τύπο

$$\phi(x, y) = 2x^2 + y^2.$$

Βρείτε το gradient $\nabla\phi$ στα σημεία $(1, 1)$, $(-1, 1)$. Σχεδιάστε το $\nabla\phi$ υπό κλίμακα (κατ' εκτίμηση) σε τρία σημεία του σχήματος. Υπολογίστε την παράγωγο της ϕ κατά μήκος της καμπύλης

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} \text{ με } x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \text{ και } y(t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Εξηγείστε γιατί το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο.

3. Έστω ένα βαθμωτό πεδίο $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και μία καμπύλη $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Ο ρυθμός μεταβολής του ϕ κατά μήκος της καμπύλης θα δίνεται από τον τύπο (2.1.7), προσαρμοσμένο στις δύο διαστάσεις. Δείξτε ότι η δεύτερη παράγωγος της ϕ κατά μήκος της καμπύλης είναι

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{d^2y}{dt^2}.$$

4. Δείξτε ότι, αν $\phi(x, y) = 0$, τότε

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y}$$

αρκεί $\partial\phi/\partial y \neq 0$. Αν $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, βρείτε τις $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$.

5. Δείξτε ότι $D_{-\mathbf{n}}\phi = -D_{\mathbf{n}}\phi$. Αν $\nabla\phi \perp \mathbf{n}$, τότε $D_{\mathbf{n}}\phi = 0$.
6. Κατά πόσο θα μεταβληθεί η $\phi(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ αν το σημείο $(3, 4, 12)$ μετακινηθεί κατά $\Delta s = 0.1$ κατά μήκος του $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$;
7. Γνωρίζουμε ότι αν $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x, y, z) = c\}$ είναι μια ισοσταθμική επιφάνεια της ϕ , τότε το $\nabla\phi$ στο σημείο \mathbf{a} της S είναι κάθετο σε κάθε καμπύλη επί της S που περνά από το \mathbf{a} . Γράψτε την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στην S στο σημείο (x_0, y_0, z_0) . Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο και την κάθετη στην επιφάνεια $x^2 - xy + z^3 = 1$ στο σημείο $(1, 1, 1)$.
8. Το υπερβολοειδές $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ και το επίπεδο $x + y + z = 5$ τέμνονται σε μια καμπύλη C . Βρείτε την εφαπτομένη της C στο σημείο $(1, 2, 2)$.
9. Ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος της καμπύλης $\mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + (\sqrt{t} - 2) \mathbf{j} + \ln \frac{2}{t} \mathbf{k}$. Δείξτε ότι τη στιγμή $t = 1$ χτυπάει κάθετα την επιφάνεια $z = \ln(-y + 2x^2 - y^2)$.

2.2 Διανυσματικά πεδία

Όπως είδαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου, ένα διανυσματικό πεδίο (δ.π.) στον \mathbb{R}^n είναι μία απεικόνιση $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (ακριβέστερα θεωρούμε μία απεικόνιση $\mathbf{F} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, όπου U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n). Επομένως, σε κάθε σημείο \mathbf{r} του $U \subseteq \mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ του \mathbb{R}^m . Συνήθως αντιμετωπίζουμε διανυσματικά πεδία σε τρεις διαστάσεις, $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, π.χ. στατικό ηλεκτρικό, ή βαρυτικό ή μαγνητικό πεδίο. Στην περίπτωση αυτή, γράφουμε συντομογραφικά, $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$, ή $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, ή $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ και εννοούμε φυσικά ότι οι συνιστώσες F_i είναι βαθμωτές συναρτήσεις,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Το απλούστερο παράδειγμα δ.π. είναι μία γραμμική απεικόνιση, π.χ. το δ.π. $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο (βλ. (1.8.1) και την παρατήρηση που ακολουθεί)

$$\mathbf{F}(x, y) = (ax + by, cx + dy).$$

- Μία οπτική παράσταση για διανυσματικά πεδία σε δύο διαστάσεις μπορούμε να πάρουμε από τη Mathematica. Δοκιμάστε τα διανυσματικά πεδία

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}, \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}, \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

- Στο εξής, θα υποθέτουμε ότι όλα τα διανυσματικά πεδία είναι παραγωγίσιμα τάξης τουλάχιστον $C^1(U)$, δηλαδή θα υποθέτουμε ότι αν \mathbf{F} είναι ένα διανυσματικό πεδίο, όλες οι μερικές παράγωγοι των συνιστωσών F_i του \mathbf{F} , υπάρχουν και είναι συνεχείς στο U . Στα παραπάνω παραδείγματα προσδιορίστε το μέγιστο υποσύνολο του \mathbb{R}^2 στο οποίο τα διανυσματικά πεδία είναι τάξης C^1 . Ποια από αυτά μπορούν να γραφούν ως $\text{grad } \phi$, κάποιας βαθμωτής συνάρτησης $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$;

Δύο γνωστά πεδία είναι το πεδίο βαρύτητας και το ηλεκτροστατικό πεδίο. Το απλούστερο πεδίο βαρύτητας είναι αυτό που παράγεται από σημειακή μάζα M . Όπως έχουμε ήδη σχολιάσει στην Παράγραφο των καμπυλών 1.4, για το πεδίο βαρύτητας της γής π.χ., ο νόμος της παγκόσμιας έλξης γράφεται

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (2.2.1)$$

Στον τύπο αυτό M και m είναι οι μάζες γής και κάποιου σώματος. Θεωρούμε ότι η γη και το σώμα είναι σημειακές μάζες και έχουμε ορίσει σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε το κέντρο της γής να βρίσκεται στην αρχή $(0, 0, 0)$, οπότε

\mathbf{r} είναι το διάνυσμα θέσης του σώματος. Συμβολίζουμε ως συνήθως με r το μέτρο του \mathbf{r} , δηλαδή $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Επομένως παίρνοντας τη norm στον παραπάνω τύπο θα έχουμε το γνωστό νόμο του αντιστρόφου τετραγώνου

$$|\mathbf{F}| = GMm \frac{|\mathbf{r}|}{r^3} = \frac{GMm}{r^2}.$$

Σημειώνουμε ότι σε καρτεσιανές συντεταγμένες το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} γράφεται ως

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -GMm \left(\frac{x \mathbf{i}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{y \mathbf{j}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{z \mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right).$$

- Εντελώς όμοια είναι η μορφή του ηλεκτροστατικού πεδίου, π.χ. η δύναμη Coulomb μεταξύ σημειακών φορτίων γράφεται ως

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \Rightarrow |\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}.$$

Εξηγείστε τι παριστάνουν τα σύμβολα. Κατ' αναλογία με το πεδίο βαρύτητας, το πεδίο Coulomb γράφεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες ως

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}),$$

Μία καμπύλη που σε κάθε σημείο της \mathbf{r} , το διάνυσμα $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη, λέγεται *ολοκληρωτική καμπύλη* του \mathbf{F} . Ακριβέστερα:

Ορισμός 2.5. Μία καμπύλη $\mathbf{r}(t)$ λέγεται *ολοκληρωτική καμπύλη ενός διανυσματικού πεδίου \mathbf{F}* , αν ισχύει

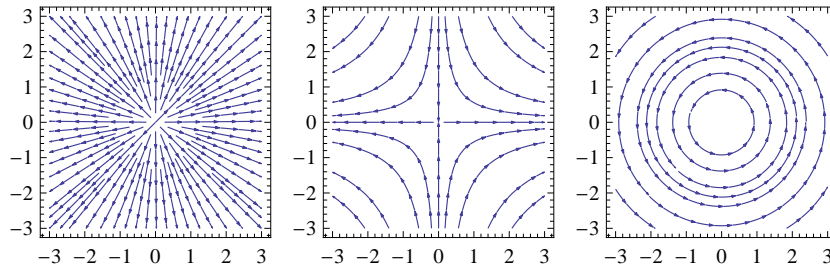
$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)).$$

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες λέγονται ακόμα *πεδιακές γραμμές (field lines)*, ή *δυναμικές γραμμές* και στην περίπτωση πεδίου ταχυτήτων λέγονται *ρευματικές γραμμές*.

Για παράδειγμα, οι ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{r} = (x, y)$ είναι ευθείες που περνούν από την αρχή των αξόνων (Σχήμα 2.12). Όμοια, οι ολοκληρωτικές καμπύλες του πεδίου Coulomb

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

με $Q \in \mathbb{R}$, είναι ευθείες που περνούν από την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 2.12: Ολοκληρωτικές καμπύλες των πεδίων (x, y) , $(x, -y)$, $(-y, x)$.

Για να βρούμε την ολοκληρωτική καμπύλη του \mathbf{F} που περνά από το σημείο \mathbf{r}_0 τη στιγμή $t = 0$, πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)), \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0. \quad (2.2.2)$$

Με άλλα λόγια, το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x} = F_1(x, y, z), \quad \dot{y} = F_2(x, y, z), \quad \dot{z} = F_3(x, y, z),$$

με αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$.

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες ενός διανυσματικού πεδίου έχουν δύο βασικές ιδιότητες.

- Από κάθε σημείο \mathbf{r}_0 (μέσα στο πεδίο ορισμού ενός διανυσματικού πεδίου \mathbf{F}), περνά μία ολοκληρωτική καμπύλη.
- Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του \mathbf{F} δεν τέμνονται.

Οι παραπάνω ισχυρισμοί είναι συνέπειες του θεωρήματος ύπαρξης λύσης και μοναδικότητας της λύσης για συστήματα διαφορικών εξισώσεων:

Το πρόβλημα αρχικών τιμών (2.2.2) έχει μοναδική λύση.

Παράδειγμα 16. Βρείτε τις ολοκληρωτικές καμπύλες των (γραμμικών) διανυσματικών πεδίων \mathbf{F} με τύπους

$$\mathbf{F}(x, y) = (y, -x), \quad \mathbf{F}(x, y) = (x, -y).$$

Για το πρώτο δ.π., οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x.$$

Μία λύση είναι $x(t) = \sin t$, επομένως $y(t) = \cos t$. Αλλά και ο γραμμικός συνδυασμός ημιτόνου και συνημιτόνου είναι επίσης λύση, επομένως η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\y(t) &= -c_1 \sin t + c_2 \cos t.\end{aligned}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας κατά μέλη, προκύπτει

$$x^2 + y^2 = c_1^2 + c_2^2,$$

επομένως οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο την αρχή των αξόνων, βλ. Σχήμα 2.12. Η φορά τους είναι αυτή των δεικτών του ρολογιού (γιατί;) Για το δεύτερο δ.π., οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = -y,$$

που έχει ως γενική λύση

$$x(t) = c_1 e^t, \quad y(t) = c_2 e^{-t}.$$

Απαλείφοντας το χρόνο μεταξύ των $x(t)$, $y(t)$ βρίσκουμε $yx = \text{const}$, επομένως οι ολοκληρωτικές καμπύλες είναι υπερβολές, βλ. Σχήμα 2.12.

2.2.1 Ο τελεστής ανάδελτα. Απόκλιση και στροβιλισμός

Ορισμός 2.6. Ο διανυσματικός τελεστής

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

λέγεται τελεστής ανάδελτα.

Έχουμε δει ότι όταν ο τελεστής ανάδελτα ∇ , δρά πάνω σε ένα βαθμωτό πεδίο ϕ , παράγει το διανυσματικό πεδίο $\text{grad } \phi = \nabla \phi = \mathbf{i} \partial \phi / \partial x + \mathbf{j} \partial \phi / \partial y + \mathbf{k} \partial \phi / \partial z$. Μπορούμε να θεωρήσουμε τη δράση του τελεστή ∇ πάνω σε διανυσματικά πεδία. Το αποτέλεσμα εξαρτάται από το αν ο τελεστής δρα “εσωτερικά” ή “εξωτερικά” πάνω στο δ.π. Έτσι για ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ορίζουμε

Απόκλιση (divergence):

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Στροβιλισμό (curl):

$$\operatorname{curl} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Σημειώνουμε ότι η απόκλιση είναι βαθμωτό πεδίο ενώ ο στροβιλισμός είναι διανυσματικό πεδίο.

Παράδειγμα 17. Για το δ.π $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, xy, yz)$ είναι

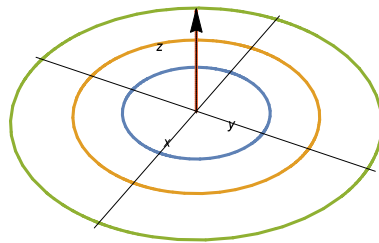
$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial xy}{\partial y} + \frac{\partial yz}{\partial z} = 2x + x + y = 3x + y,$$

(βαθμωτό πεδίο) και

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xy & yz \end{vmatrix} = (z, 0, y),$$

(διανυσματικό πεδίο).

Παράδειγμα 18. Για το δ.π. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{r}$, $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$ και $\operatorname{curl} \mathbf{r} = \mathbf{0}$. Για το δ.π. $\mathbf{F}(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0)$, $\omega > 0$, είναι $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ και $\operatorname{curl} \mathbf{F} = 2\omega \mathbf{k}$, βλ. Σχήμα 2.13.



Σχήμα 2.13: Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}(x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0)$, και ο στροβιλισμός του, $\operatorname{curl} \mathbf{F} = 2\omega \mathbf{k}$.

Για οποιαδήποτε παραγωγίσιμα δ.π. \mathbf{F} και \mathbf{G} και οποιονδήποτε αριθμό λ , ισχύουν,

$$\operatorname{div} (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G}, \quad \text{και} \quad \operatorname{div} (\lambda \mathbf{F}) = \lambda \operatorname{div} \mathbf{F},$$

$$\operatorname{curl}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{curl} \mathbf{F} + \operatorname{curl} \mathbf{G} \quad \text{και} \quad \operatorname{curl}(\lambda \mathbf{F}) = \lambda \operatorname{curl} \mathbf{F}.$$

Οι παραπάνω ιδιότητες μπορούν ναδειχθούν απλούστατα με εκτέλεση των πράξεων. Εκφράζουν τη γραμμικότητα του τελεστή παραγωγίσης ∇ όταν αυτός δρα σε διανυσματικά πεδία.

Ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} λέγεται *αστρόβιλο* αν $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Το παρακάτω θεώρημα δείχνει ότι το gradient οποιασδήποτε βαθμωτής συνάρτησης είναι αστρόβιλο δ.π.

Θεώρημα 2.4. Για κάθε βαθμωτό πεδίο ϕ (που είναι τουλάχιστον τάξης C^2) ισχύει

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} \phi) = \nabla \times \nabla \phi = \mathbf{0}.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό του στροβιλισμού θα έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \phi &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right), \end{aligned}$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει από την ισότητα των μικτών παραγώγων. \square

Θα δούμε σε άλλο μάθημα ότι ισχύει και η αντίστροφη πρόταση:

Αν $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, τότε το \mathbf{F} προκύπτει ως *gradient* βαθμωτού πεδίου, δηλαδή υπάρχει συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{F} = \nabla \phi.$$

Αστρόβιλα πεδία είναι το βαρυτικό και το ηλεκτροστατικό πεδίο, βλ. τις ασκήσεις 5 και 6 στην επόμενη παράγραφο.

Σε αντίθεση με τον στροβιλισμό του gradient ενός βαθμωτού πεδίου ϕ που είναι πάντα μηδέν, η απόκλιση του gradient είναι ένα νέο βαθμωτό πεδίο $\nabla \cdot \nabla \phi$ που συμβολίζεται με $\nabla^2 \phi$, και διαβάζεται *Laplacian* ϕ . Επομένως η Laplacian του ϕ γράφεται

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

Παράδειγμα 19. Για το βαθμωτό πεδίο $\phi(x, y) = x^3 + y^2$, είναι $\nabla^2 \phi = 6x + 2$, ενώ για το $\psi(x, y) = x^2 - y^2$, είναι $\nabla^2 \psi = 0$.

Ο τελεστής

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

λέγεται *τελεστής Laplace*. Τέλος η διαφορική εξίσωση

$$\nabla^2 u = 0, \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

λέγεται *εξίσωση Laplace*. Όπως θα δούμε σε άλλο κεφάλαιο, η εξίσωση Laplace είναι μιά από τις σπουδαιότερες διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Προφανώς σε δύο διαστάσεις η εξίσωση Laplace γράφεται

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Παράδειγμα 20. Επιβεβαιώστε ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι λύσεις της εξίσωσης Laplace σε δύο διαστάσεις:

$$u(x, y) = 2x - 3y, \quad v(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right), \quad w(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Ο τελεστής Laplace είναι γραμμικός, δηλαδή αν ϕ και ψ είναι βαθμωτά πεδία (δύο φορές παραγωγίσιμα) και c αριθμός, τότε

$$\nabla^2(\phi + \psi) = \nabla^2\phi + \nabla^2\psi, \quad \text{και} \quad \nabla^2(c\phi) = c\nabla^2\phi.$$

Τούτο σημαίνει ότι η εξίσωση Laplace είναι γραμμική ΔΕ, δηλαδή αν u και v είναι λύσεις της εξίσωσης Laplace, τότε και $u + v$ είναι λύση.

Ένα διανυσματικό πεδίο \mathbf{A} λέγεται *ασυμπίεστο* αν $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Το παρακάτω θεώρημα δείχνει ότι ο στροβιλισμός οποιουδήποτε δ.π. είναι ασυμπίεστο δ.π.

Θεώρημα 2.5. Για κάθε διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} (που είναι τουλάχιστον τάξης C^2) ισχύει

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του Θεωρήματος 2.4. \square

2.2.2 Ασκήσεις

1. Οι παρακάτω ταυτότητες μπορούν ναδειχθούν με εκτέλεση των πράξεων. Εκφράζουν την ιδιότητα Leibniz του τελεστή ανάδελτα. Η τρίτη και τέταρτη, προφανώς ισχύουν στα σημεία που $\phi \neq 0$.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \mathbf{F}) &= \nabla \phi \cdot \mathbf{F} + \phi \nabla \cdot \mathbf{F}, \\ \nabla \times (\phi \mathbf{F}) &= \nabla \phi \times \mathbf{F} + \phi \nabla \times \mathbf{F}, \\ \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{F}}{\phi} \right) &= \frac{\phi \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla \phi \cdot \mathbf{F}}{\phi^2}, \\ \nabla \times \left(\frac{\mathbf{F}}{\phi} \right) &= \frac{\phi \nabla \times \mathbf{F} - \nabla \phi \times \mathbf{F}}{\phi^2}. \end{aligned}$$

2. Έστω ϕ βαθμωτή συνάρτηση και \mathbf{a} σταθερό διάνυσμα. Βρείτε τα $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\phi$ και $(\mathbf{a} \times \nabla)\phi$. Έστω \mathbf{F} και \mathbf{G} διανυσματικά πεδία. Γιατί $(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{F}$ δεν είναι ίσο με $\mathbf{F}(\mathbf{a} \cdot \nabla)$; Δείξτε ότι $(\mathbf{G} \times \nabla) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$.
3. Δείξτε την ταυτότητα που θα χρησιμοποιήσουμε στις εξισώσεις κίνησης των ρευστών

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \frac{1}{2}\nabla |\mathbf{u}|^2.$$

4. Μια άλλη χρήσιμη ταυτότητα:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

5. Δείξτε ότι το βαρυτικό πεδίο (2.2.1) είναι αστρόβιλο, δηλαδή $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Δείξτε ακόμα ότι $\mathbf{F} = -\nabla U$, όπου U είναι η συνάρτηση δυναμική ενέργεια

$$U(x, y, z) = -\frac{GMm}{r}, \quad r = |\mathbf{r}|. \quad (2.2.3)$$

Το δυναμικό του βαρυτικού πεδίου που παράγεται από σημειακή μάζα M , δίνεται από τον τύπο

$$\phi(x, y, z) = -\frac{GM}{r}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

Δείξτε ότι η ένταση του βαρυτικού πεδίου δίνεται από τη σχέση $\mathbf{g} = -\nabla\phi$. Βρείτε το $\operatorname{div} \mathbf{g}$ και το $\operatorname{curl} \mathbf{g}$. Αποδείξτε ότι το δυναμικό ϕ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

6. Κατ' αναλογία με το πεδίο βαρύτητας, το πεδίο Coulomb είναι αστρόβιλο και προέρχεται ως gradient της βαθμωτής συνάρτησης (δυναμική ενέργεια)

$$U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}. \quad (2.2.4)$$

Το δυναμικό του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από σημειακό φορτίο Q , δίνεται από τον τύπο

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad r = |\mathbf{r}|.$$

Δείξτε ότι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από τη σχέση $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Βρείτε το $\operatorname{div} \mathbf{E}$ και το $\operatorname{curl} \mathbf{E}$. Αποδείξτε ότι το δυναμικό ϕ ικανοποιεί την εξίσωση Laplace.

7. Η ταχύτητα ενός ρευστού παρίσταται από το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{u}(x, y, z) = (-\omega y^2, \omega x^2, 0), \quad \omega > 0.$$

Βρείτε το $\operatorname{div} \mathbf{u}$ και το $\operatorname{curl} \mathbf{u}$. Είναι δυνατόν το διανυσματικό αυτό πεδίο να είναι gradient (δηλ να υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση ϕ τέτοια ώστε $\mathbf{u} = \nabla \phi$); Σχεδιάστε τις πεδιακές γραμμές (ολοκληρωτικές καμπύλες) του \mathbf{u} .

8. Για το πεδίο ταχυτήτων $\mathbf{u}(x, y, z) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, όπου $\boldsymbol{\omega}$ είναι σταθερό διάνυσμα, υπολογίστε το $\operatorname{div} \mathbf{u}$ και το $\operatorname{curl} \mathbf{u}$.
9. Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ βαθμωτό πεδίο τάξης C^3 . Ποιές από τις παρακάτω παραστάσεις είναι λανθασμένες; Εξηγείστε.

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(\operatorname{curl}(\operatorname{grad} \phi)), \quad \operatorname{curl}(\operatorname{div}(\operatorname{grad} \phi)), \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\operatorname{curl} \phi)), \\ & \operatorname{grad}(\operatorname{curl}(\operatorname{div} \phi)), \quad \operatorname{curl}(\operatorname{grad}(\operatorname{div} \phi)), \quad \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\operatorname{curl} \phi)). \end{aligned}$$

10. Έστω $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ διανυσματικό πεδίο τάξης C^3 . Ποιές από τις παρακάτω παραστάσεις είναι λανθασμένες; Εξηγείστε.

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(\operatorname{curl}(\operatorname{grad} \mathbf{F})), \quad \operatorname{curl}(\operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{F})), \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\operatorname{curl} \mathbf{F})), \\ & \operatorname{grad}(\operatorname{curl}(\operatorname{div} \mathbf{F})), \quad \operatorname{curl}(\operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{F})), \quad \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{F})). \end{aligned}$$

11. Κάνετε πρόχειρο σκίτσο των δ.π.

$$y\mathbf{i} - x\mathbf{j}, \quad x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \frac{y}{r}\mathbf{i} - \frac{x}{r}\mathbf{j}, \quad \frac{y}{r^3}\mathbf{i} + \frac{x}{r^3}\mathbf{j}, \quad \text{με } r = |\mathbf{r}|.$$

Ποιά από αυτά είναι αστρόβιλα;

12. Υπενθυμίζουμε ότι η ολοκληρωτική καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ενός δ.π. $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ικανοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{dx}{dt} = F_1(x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = F_2(x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = F_3(x, y, z).$$

Δείξτε ότι

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3},$$

όπου εννοείται ότι αν $\text{πχ } F_1 = 0$ τότε $dx = 0$. Βρείτε τις ολοκληρωτικές καμπύλες των δ.π.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2 \cosh x, 2y \sinh x, -\sinh x),$$

$$\mathbf{G}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}.$$

13. Θεωρούμε τρεις απεικονίσεις: (α) από το \mathbb{R} στο \mathbb{R}^2 , (β) από το \mathbb{R}^2 στο \mathbb{R} και, (γ) από το \mathbb{R}^3 στο \mathbb{R}^3 . Δώστε από ένα παράδειγμα. Πώς ονομάζονται συνήθως οι απεικονίσεις αυτές; Μπορεί να ορισθεί η σύνθεση κάποιων από αυτές;
14. Η Laplacian ενός βαθμωτού πεδίου $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, σε πολικές συντεταγμένες $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ δίνεται από τον τύπο

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Λύση. Η Laplacian βρίσκεται με διαδοχικές παραγωγίσεις:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \cos \theta \sin \theta + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \sin^2 \theta,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \theta,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (-r^2 \cos \theta \sin \theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \theta + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x} (-r \cos \theta) + \frac{\partial f}{\partial y} (-r \sin \theta). \end{aligned}$$

Από την πρώτη, τη δεύτερη και την τέταρτη των παραπάνω ισοτήτων, προκύπτει,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Σημειώνουμε ότι η Laplacian σε πολικές συντεταγμένες μπορεί να γραφεί και ως

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Παρατήρηση 2.4. Από τις $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ προκύπτει

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \quad dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta,$$

και λύνοντας ως προς dr , $d\theta$, θα έχουμε

$$dr = \cos \theta dx + \sin \theta dy, \quad d\theta = -\frac{1}{r} \sin \theta dx + \frac{1}{r} \cos \theta dy.$$

Από τη μοναδικότητα του διαφορικού² συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} &= \sin \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{1}{r} \sin \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{r} \cos \theta.\end{aligned}\quad (2.2.5)$$

Η Laplacian ενός βαθμωτού πεδίου $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, σε σφαιρικές συντεταγμένες βρίσκεται ως εξής. Θέτουμε $x = u \cos \varphi$, $y = u \sin \varphi$, οπότε

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{u} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.\quad (2.2.6)$$

Θέτουμε τώρα $z = r \cos \theta$, $u = r \sin \theta$ και με παρόμοιους υπολογισμούς καταλήγουμε στους τύπους

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r},$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις (2.2.5). Αντικαθιστώντας στην (2.2.6) προκύπτει τελικά,

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}.$$

15. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι αρμονικές (δηλ. ικανοποιούν την εξίσωση Laplace)

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2, \quad \psi(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \chi(x, y) = \tan^{-1}(y/x).$$

2.3 Ακρότατα βαθμωτών πεδίων

Θεωρούμε μία συνάρτηση ϕ δύο μεταβλητών ορισμένη σε ένα χωρίο U του επιπέδου, $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Το $\mathbf{a} = (a, b) \in U$ λέγεται σημείο τοπικού μεγίστου για την ϕ , αν υπάρχει δίσκος $D_\varepsilon(\mathbf{a})$, κέντρου \mathbf{a} και ακτίνας ε τέτοιος ώστε

$$\forall \mathbf{x} \in D_\varepsilon(\mathbf{a}) \quad \text{ισχύει} \quad \phi(\mathbf{x}) \leq \phi(\mathbf{a}).$$

²Αν για μιά βαθμωτή συνάρτηση ϕ δύο μεταβλητών ισχύει

$$d\phi = f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy,$$

τότε $f_1(x, y) = \partial\phi/\partial x$ και $f_2(x, y) = \partial\phi/\partial y$.

Για τον ορισμό του ανοιχτού δίσκου και της ανοιχτής μπάλας βλ. τις (2.1.2) και (2.1.3). Ανάλογα ορίζεται το σημείο τοπικού ελαχίστου.

Εντελώς όμοια ορίζονται τα τοπικά ακρότατα βαθμωτών πεδίων τριών ή περισσότερων μεταβλητών: Έστω $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ένα βαθμωτό πεδίο ορισμένο σε ένα χωρίο U του Ευκλείδειου χώρου, $U \subseteq \mathbb{R}^3$. Το $\mathbf{a} = (a, b, c) \in U$ λέγεται σημείο τοπικού μεγίστου για την ϕ , αν υπάρχει μπάλα, $B_\varepsilon(\mathbf{a})$, κέντρου \mathbf{a} και ακτίνας ε τέτοια ώστε

$$\forall \mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{a}) \quad \text{ισχύει} \quad \phi(\mathbf{x}) \leq \phi(\mathbf{a}).$$

Ανάλογα ορίζεται το σημείο τοπικού ελαχίστου.

Στο Λογισμό συναρτήσεων μιάς μεταβλητής, η παράγωγος μηδενίζεται στα σημεία τοπικού ακροτάτου. Το ανάλογο θεώρημα στην περίπτωση περισσότερων διαστάσεων διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 2.6. Έστω ϕ ένα διαφορίσιμο βαθμωτό πεδίο n μεταβλητών, $\phi = \phi(x_1, \dots, x_n)$. Αν \mathbf{a} είναι σημείο τοπικού ακροτάτου για την ϕ , τότε όλες οι μερικές παράγωγοι της ϕ στο \mathbf{a} μηδενίζονται,

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Αν $\partial\phi/\partial x_i|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, τότε λέμε ότι το \mathbf{a} είναι κρίσιμο σημείο για την ϕ .

Παράδειγμα 21. (α) Για την $\phi(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ το $(0, 0)$ είναι σημείο τοπικού (και ολικού) μεγίστου διότι $\phi(x, y) \leq 2 = \phi(0, 0) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(β) Η συνάρτηση $\phi(x, y) = x^2 + y^2$ έχει (ολικό) ελάχιστο στο $(0, 0)$.

(γ) Για την $\phi(x, y) = xy$ το $(0, 0)$ δεν είναι σημείο ούτε μεγίστου ούτε ελαχίστου διότι στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο είναι $\phi(x, y) > \phi(0, 0) = 0$ ενώ στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο είναι $\phi(x, y) < \phi(0, 0) = 0$. Το $(0, 0)$ χαρακτηρίζεται ως σαγματοειδές σημείο.

(δ) Για την $\phi(x, y) = x^2 y^2$ το $(0, 0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

Στο Λογισμό μιάς μεταβλητής ένα κρίσιμο σημείο χαρακτηρίζεται από το πρόσημο της δεύτερης παραγωγού. Το ανάλογο θεώρημα στην περίπτωση των δύο διαστάσεων διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 2.7. Έστω ϕ μία συνάρτηση δύο μεταβλητών ορισμένη σε ένα χωρίο U του επιπέδου, που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και $\mathbf{a} = (a, b) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ ένα κρίσιμο σημείο για την ϕ , δηλαδή

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{(a,b)} = 0, \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{(a,b)} = 0.$$

Θεωρούμε τον πίνακα των δευτέρων παραγώγων της ϕ (Hessian matrix), υπολογισμένο στο (a, b) ,

$$H(\phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(a,b)}$$

Αν $\det H(\phi) > 0$ και $\partial^2 \phi / \partial x^2|_{(a,b)} > 0$, τότε το (a, b) είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

Αν $\det H(\phi) > 0$ και $\partial^2 \phi / \partial x^2|_{(a,b)} < 0$, τότε το (a, b) είναι σημείο τοπικού μεγίστου.

Αν $\det H(\phi) < 0$, τότε το (a, b) είναι σαγματοειδές σημείο.

Αν $\det H(\phi) = 0$, τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Παράδειγμα 22. Για την συνάρτηση $\ln(x^2 + y^2 + 1)$, μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0, 0)$. Εφαρμογή του Θεωρήματος 2.7 δείχνει ότι το $(0, 0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

Παράδειγμα 23. (προς αποφυγήν του Θεωρήματος 2.7). Συχνά οι μερικές παράγωγοι δίνονται από πολύπλοκες εκφράσεις με συνέπεια ακόμα και ο εντοπισμός των κρίσιμων σημείων να είναι δυσχερέστατος. Προσπαθούμε τότε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα με πιο έξυπνη προσέγγιση. Έτσι, για την συνάρτηση

$$\phi(x, y) = \exp\left(\frac{1}{x^2 + 2 + \cos^2 y - 2 \cos y}\right)$$

μπορούμε πολύ απλά να μελετήσουμε την $g(x, y) = x^2 + 2 + \cos^2 y - 2 \cos y$ που γράφεται ως $g(x, y) = x^2 + 1 + (1 - \cos y)^2$. Η g παίρνει ελάχιστη τιμή όταν $x^2 + (1 - \cos y)^2 = 0$, δηλαδή στα σημεία $(0, 2k\pi)$. Έρα στα σημεία αυτά η ϕ έχει μέγιστο.

2.3.1 Εφαρμογή: Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων

Συχνά στις επιστημονικές εφαρμογές προκύπτει σειρά πειραματικών σημείων $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ που αναφέρονται σε μεταβλητές x και y για τις οποίες υποθέτουμε ότι συνδέονται με γραμμική σχέση της μορφής $f(x) = ax + b$. Οι αριθμοί x_1, x_2, \dots, x_n είναι διαφορετικοί, ενώ κάποιοι από τους αριθμούς y_1, y_2, \dots, y_n μπορεί να είναι ίσοι. Οι αποκλίσεις $f(x_i) - y_i$ είναι θετικές, αρνητικές ή μηδέν. Ένα μέτρο της “μέσης απόκλισης”, είναι το άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων, $(f(x_1) - y_1)^2 + (f(x_2) - y_2)^2 + \dots + (f(x_n) - y_n)^2$. Ζητείται λοιπόν η ευθεία $ax + b$ που ελαχιστοποιεί αυτό το άθροισμα. Με άλλα

λόγια ζητούνται οι αριθμοί a και b που προσδιορίζουν την βέλτιστη ευθεία που αναπαριστά τα δεδομένα. Γράφοντας το παραπάνω άθροισμα ως

$$(ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2,$$

παρατηρούμε ότι αυτό εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους a και b , επομένως ορίζει μία συνάρτηση δύο μεταβλητών ϕ , με τύπο

$$\phi(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2.$$

Το μαθηματικό πρόβλημα έγκειται στην ελαχιστοποίηση της ϕ . Τα κρίσιμα σημεία της ϕ , προσδιορίζονται από τον μηδενισμό των παραγώγων της,

$$\frac{\partial \phi}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial b} = 0.$$

Προκύπτουν λοιπόν δύο εξισώσεις,

$$\begin{aligned} a \sum x_i^2 + b \sum x_i &= \sum x_i y_i, \\ a \sum x_i + nb &= \sum y_i, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

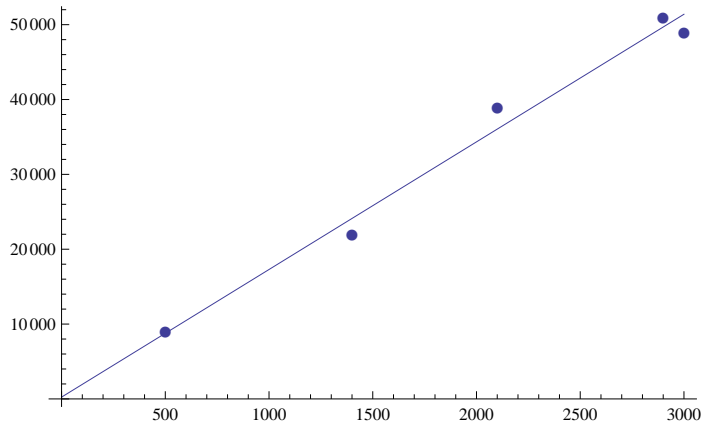
όπου εννοείται ότι τα αθροίσματα τρέχουν από $i = 1$ έως $i = n$. Λύνοντας το σύστημα, βρίσκουμε τα a και b . Για τις τιμές αυτές των a και b , η ϕ έχει όντως ολικό ελάχιστο: μπορείτε να δείξετε ότι οι δεύτερες παράγωγοι της ϕ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.7.

- Δείξτε ότι η λύση του συστήματος (2.3.1) είναι,

$$a = \frac{(\sum x_i)(\sum y_i) - n \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2}, \quad b = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{n}.$$

Εφαρμογή: Νόμος του Hubble. Οι αποστάσεις πέντε γαλαξιών από τη γη και οι ταχύτητες απομάκρυνσής τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Οι αποστάσεις δίνονται σε εκατομύρια έτη φωτός και οι ταχύτητες σε km/s.

Γαλαξίας	Απόσταση	Ταχύτητα απομάκρυνσης
1	500	9.000
2	1.400	22.000
3	2.100	39.000
4	2.900	51.000
5	3.000	49.000



Σχήμα 2.14: Νόμος του Hubble: $v = Hd$. Το γράφημα της ευθείας έγινε με την εντολή FindFit στη Mathematica.

Από το γράφημα της ταχύτητας v σε συνάρτηση με την απόσταση d , Σχήμα 2.14, φαίνεται ότι υπάρχει γραμμική σχέση

$$v = Hd, \quad H = \text{const.}$$

Προσδιορίστε τη σταθερά H (σταθερά Hubble). Οι πίο πρόσφατες μετρήσεις της σταθεράς του Hubble δίνουν την τιμή

$$H \simeq 70 \text{ (km/s) / Mpc,}$$

όπου $1 \text{ megaparsec} = 3.26 \times 10^6 \text{ έτη φωτός} = 3.09 \times 10^{19} \text{ km}$.

2.4 Το θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων

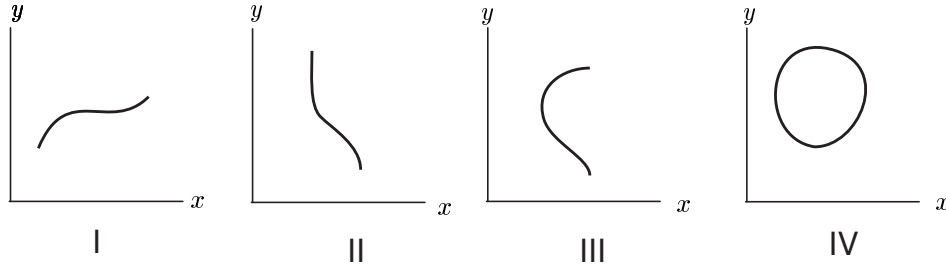
Σε μία διάσταση, αν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση f ικανοποιεί την συνθήκη $f'(a) \neq 0$ σε κάποιο σημείο a , τότε υπάρχει η αντίστροφη f^{-1} , δηλαδή τοπικά κοντά στο a , μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x ,

$$x = f^{-1}(y).$$

Σε δύο διαστάσεις, το C σύνολο στάθμης μιάς συνάρτησης $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι εν γένει μία καμπύλη που παριστάνεται από την εξίσωση

$$\phi(x, y) = C. \tag{2.4.1}$$

(Υποθέτουμε στο εξής ότι όλες οι συναρτήσεις έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους). Τίθεται το ερώτημα αν μπορούμε να λύσουμε την (2.4.1) ως προς y (ή ως προς x), δηλαδή να βρούμε μία συνάρτηση $g : y = g(x)$ (ή αντίστοιχα $x = h(y)$) που το γράφημα της να ταυτίζεται με το σύνολο στάθμης της ϕ . Στο Σχήμα 2.15 φαίνονται μερικά παραδείγματα.



Σχήμα 2.15: (I) Υπάρχει λύση $y = g(x)$. (II) Υπάρχει λύση $x = h(y)$. (III) και (IV) Μόνο τοπικά υπάρχει λύση $y = g(x)$ ή $x = h(y)$.

Άλλο παράδειγμα: Στην $x^2 + y^2 = 1$, μπορούμε να λύσουμε ως προς y (για $y > 0$) και να έχουμε τοπικά, δηλαδή στο διάστημα $(-1, 1)$, $y = \sqrt{1 - x^2}$. Όμοια, μπορούμε να λύσουμε ως προς x και να έχουμε για $y \in (-1, 1)$, $x = \sqrt{1 - y^2}$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρούμε το μηδενικό σύνολο στάθμης ενός βαθμωτού πεδίου, δεδομένου ότι η $\phi(x, y) = C$ μπορεί πάντα να γραφεί ως $\phi(x, y) - C = 0$.

Θεώρημα 2.8. Έστω $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ και ένα σημείο $(a, b) \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε

$$(1) \quad \phi(a, b) = 0,$$

$$(2) \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{(a,b)} \neq 0.$$

Τότε υπάρχουν περιοχές των a και b τέτοιες ώστε να υπάρχει λύση ως προς y της εξίσωσης $\phi(x, y) = 0$, δηλαδή υπάρχει μοναδική συνάρτηση g τέτοια ώστε το γράφημα της $y = g(x)$ ταυτίζεται με το μηδενικό σύνολο στάθμης της ϕ . Ακριβέστερα,

$$g(a) = b \quad \text{και} \quad \phi(x, g(x)) = 0$$

στην περιοχή του a . Επί πλέον, η παράγωγος $dy/dx = g'(x)$ μπορεί να βρεθεί με έμμεση παραγωγή της $\phi(x, y) = 0$. Πράγματι, παραγωγίζοντας ως προς x την $\phi(x, y) = 0$, παίρνουμε

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \phi / \partial y}.$$

Το θεώρημα γενικεύεται και σε περισσότερες διαστάσεις. Π.χ. αν η εξίσωση

$$\phi(x, y, z) = C \quad (2.4.2)$$

παριστάνει επιφάνεια S , είναι δυνατόν να βρούμε μία συνάρτηση δύο μεταβλητών ψ έτσι ώστε

$$z = \psi(x, y)$$

να παριστάνει αυτή την επιφάνεια; (ουσιωδώς να λύσουμε την (2.4.2) ως προς z).

Απάντηση: Αν σε κάποιο σημείο $(a, b, c) \in S$ ισχύει

$$\partial\phi/\partial z \neq 0,$$

τότε τοπικά υπάρχει μοναδική συνάρτηση ψ τέτοια ώστε η (2.4.2) να μπορεί να λυθεί ως προς z ,

$$z = \psi(x, y).$$

Επί πλέον, οι παράγωγοι $\partial\psi/\partial x$ και $\partial\psi/\partial y$ μπορούν να βρεθούν με έμμεση παραγωγή της $\phi(x, y, z) = C$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial\phi/\partial y}{\partial\phi/\partial z}$$

Παράδειγμα 24. Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, ως μία ισοσταθμική επιφάνεια της $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Στο σημείο $(0, 0, 1)$ είναι $\phi_z \neq 0$, άρα μπορούμε να λύσουμε ως προς z και να έχουμε κοντά στο βόρειο πόλο $(0, 0, 1)$, $z = \psi_1(x, y) \equiv \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ με $x^2 + y^2 < 1$. Όμοια, κοντά στο νότιο πόλο $(0, 0, -1)$, $z = \psi_2(x, y) \equiv -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ με $x^2 + y^2 < 1$. Στο σημείο $(1, 0, 0)$ είναι $\phi_z = 0$, άρα δεν μπορούμε να λύσουμε ως προς z κοντά στο σημείο αυτό.

2.4.1 Ασκήσεις

1. Βρείτε τα ακρότατα της $\phi(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ στο δίσκο $D : x^2 + y^2 \leq 1$.

Λύση. Κρίσιμα σημεία: $\partial\phi/\partial x = 0 = \partial\phi/\partial y$, άρα $2x - 1 = 0 = 2y - 1$.

Επομένως ένα κρίσιμο σημείο είναι το $(1/2, 1/2)$. Η Hessian είναι

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \partial^2\phi/\partial x^2 & \partial^2\phi/\partial x\partial y \\ \partial^2\phi/\partial x\partial y & \partial^2\phi/\partial y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

άρα $\partial^2\phi/\partial x^2|_{(1/2, 1/2)} > 0$ και $\det H(1/2, 1/2) = 4 > 0$, επομένως το $(1/2, 1/2)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Εξετάζουμε τώρα τι γίνεται

στο σύνορο $\partial D : x^2 + y^2 = 1$ που παραμετροποιείται από την $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Τότε

$$\phi(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t - \cos t - \sin t + 1 = 2 - \cos t - \sin t \equiv g(t).$$

Παρατηρούμε ότι αρκεί να βρούμε τα ακρότατα της g . Έχουμε $g'(t) = 0$ μόνο όταν $\sin t = \cos t \Rightarrow t = \pi/4, 5\pi/4$. Άρα υποψήφια κρίσιμα σημεία είναι τα $\mathbf{r}(\pi/4)$, $\mathbf{r}(5\pi/4)$ και τα άκρα $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(2\pi)$. Βρίσκουμε τις τιμές της ϕ στα σημεία αυτά και συμπεραίνουμε (ελέγξτε!) ότι το $(1/2, 1/2)$ είναι σημείο ελαχίστου και το $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ είναι σημείο μεγίστου.

2. Εξετάστε αν η καμπύλη $\phi(x, y) = 0$ με $\phi(x, y) = e^{\cos(xy)} + x^2 + y - e$ περιγράφεται κοντά στο $(0, 0)$ από κάποια συνάρτηση $y = f(x)$.

Έχουμε $\phi(0, 0) = 0$ και $\partial\phi/\partial x(0, 0) = 0$, $\partial\phi/\partial y(0, 0) = 1$. Άρα κατά το θεώρημα πεπλεγμένων συναρτήσεων υπάρχει περιοχή $(-\varepsilon, \varepsilon)$ του 0 και μοναδική συνάρτηση $y = f(x)$:

$$f(0) = 0, \quad \phi(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Επιπροσθέτως η κλίση της $y = f(x)$ στο 0 είναι 0 :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{\partial\phi/\partial x}{\partial\phi/\partial y} = \frac{-y \sin(xy) e^{\cos(xy)} + 2x}{-x \sin(xy) e^{\cos(xy)} + 1},$$

άρα $f'(0) = 0$.

3. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\phi(x, y, z) = 0$ με

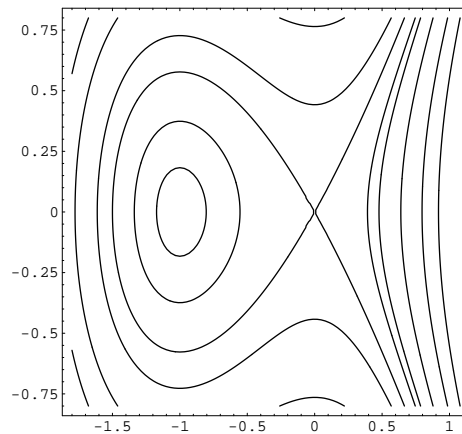
$$\phi(x, y, z) = \ln(x + y + z - 2) e^{x+y} - 2x + y + z$$

ορίζει μια επιφάνεια στην περιοχή του $(1, 1)$ που περνά από το $(1, 1, 1)$ και περιγράφεται από μια συνάρτηση $z = f(x, y)$. Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο στο $(1, 1, 1)$.

4. Το Σχήμα 2.16 παριστάνει τις ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης

$$\phi(x, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}, \quad x \in [-1.8, 1.2], \quad y \in [-0.8, 0.8].$$

Δείξτε ότι το $(-1, 0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της ϕ . Δικαιολογήστε τη μορφή των ισοσταθμικών καμπυλών. Βρείτε το gradient $\nabla\phi$ στα σημεία $(-\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0)$. Στο πρώτο σημείο θεωρούμε τις κατευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{n}_1 = (1, 0)$ και $\mathbf{n}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Κατά



Σχήμα 2.16: Σημείο ελαχίστου και σάγμα.

μήκος ποιας από τις δύο κατευθύνσεις μεταβάλλεται ταχύτερα η ϕ ; Σχεδιάστε το $\nabla\phi$ υπό κλίμακα (κατ' εκτίμηση) σε τρία σημεία του σχήματος. Αποδείξτε ότι η ϕ παραμένει σταθερή κατά μήκος των τροχιών του δυναμικού συστήματος $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x + x^2$.

5. Έστω $\phi(x, y, z) = x^3y + x/y - z$ και P το σημείο $(2, 1, -1)$. Υπολογίστε το gradient $\nabla\phi$ στο σημείο P . Υπολογίστε την (κατευθυνόμενη) παράγωγο της ϕ στο σημείο P κατά τη διεύθυνση του $-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Προσεγγίστε γραμμικά την τιμή του ϕ στο σημείο $Q : (2.1, 0.9, -0.9)$ (παρατηρείστε ότι το σημείο Q απέχει $\Delta l = 0.1\sqrt{3}$ από το P κατά τη διεύθυνση $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$). Θεωρούμε την ισοσταθμική επιφάνεια S της ϕ που περιέχει το σημείο P . Αυτή τέμνει το επίπεδο $z = -1$ σε μία καμπύλη C . Βρείτε ένα μοναδιαίο εφαπτόμενο της C στο σημείο P .

2.5 Παραγωγή ολοκληρωμάτων

Έστω μια “καλή” συνάρτηση δυο μεταβλητών $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (καλή σημαίνει ότι αρκεί οι $f(x, t)$ και $\partial f/\partial t$ να είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους). Τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

είναι μια συνάρτηση του t . Αποδεικνύεται σχετικά εύκολα το παρακάτω θεώρημα (Leibniz integral rule):

Η παράγωγος του $I(t)$ δίνεται από τον τύπο

$$\frac{dI}{dt} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) dx.$$

Το αποτέλεσμα αυτό διατυπώνεται και ως: ο τελεστής παραγωγίσης μετατίθεται με τον τελεστή ολοκλήρωσης,

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(t, x) dx = \int_a^b \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} dx, \quad (2.5.1)$$

με άλλα λόγια ο τελεστής d/dt “περνάει μέσα στο ολοκλήρωμα”.

Παράδειγμα 25. Για την συνάρτηση $f(x, a) = e^{ax}$, το ολοκλήρωμα ως προς x , είναι συνάρτηση του a ,

$$I(a) = \int_0^1 e^{ax} dx = \frac{1}{a} (e^a - 1),$$

και η παράγωγος του είναι

$$\frac{d}{da} I(a) = \frac{d}{da} \frac{1}{a} (e^a - 1) = \frac{1 + e^a (a - 1)}{a^2}.$$

Από την άλλη, εφαρμόζοντας τον τύπο (2.5.1) προκύπτει,

$$\frac{d}{da} I(a) = \int_0^1 \frac{\partial e^{ax}}{\partial a} dx = \int_0^1 x e^{ax} dx = \frac{1 + e^a (a - 1)}{a^2}.$$

Παράδειγμα 26. Παραγωγίζοντας ως προς a το

$$I(a) = \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a}, \quad a > 0,$$

θα έχουμε

$$I_1(a) = \int_0^\infty x e^{-ax} dx = -\frac{d}{da} \int_0^\infty e^{-ax} dx = -\frac{d}{da} \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}.$$

Όμοια

$$I_2(a) = \int_0^\infty x^2 e^{-ax} dx = \frac{d^2}{da^2} \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{d^2}{da^2} \frac{1}{a} = \frac{2}{a^3}$$

και γενικώς

$$I_n(a) = \int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \int_0^\infty e^{-ax} dx = (-1)^n \frac{d^n}{da^n} \left(\frac{1}{a} \right) = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

Παράδειγμα 27. Το άριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{\sin ax}{x} dx$$

δεν υπολογίζεται συναρτήσει στοιχειωδών συναρτήσεων. Η παράγωγος όμως αντίστοιχων ορισμένων, υπολογίζεται:

$$I(a) = \int_1^2 \frac{\sin ax}{x} dx, \quad \frac{dI}{da} = \int_1^2 \cos ax dx = \sin a \frac{2 \cos a - 1}{a}.$$

Παράδειγμα 28. Παρόλο που το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα δεν υπολογίζεται, θα δείξουμε με τέχνασμα ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα το παρακάτω ολοκλήρωμα

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \sin x}{x} dx, \quad a > 0, \quad (2.5.2)$$

και στη συνέχεια θα πάρουμε το όριο όταν $a \rightarrow 0$. Κατ' αρχάς το ολοκλήρωμα (2.5.2) συγχλίνει (γιατί;). Εφαρμόζοντας τον τύπο (2.5.1) προκύπτει,

$$\frac{dI}{da} = - \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin x dx = -\frac{1}{1+a^2} \quad (2.5.3)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς a την (2.5.3) παίρνουμε,

$$I(a) = -\tan^{-1} a + C \Rightarrow \lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = -\pi/2 + C$$

Από την (2.5.2) προκύπτει $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a) = 0$, άρα $C = \pi/2$, συνεπώς

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} \sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} a.$$

Παίρνοντας το όριο όταν $a \rightarrow 0$, βρίσκουμε,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Η κανονική κατανομή

Η κανονική κατανομή

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

έχει μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση σ . Το γράφημά της είναι η γνωστή καμπάνα Gauss μετατοπισμένη δεξιά κατά $\mu > 0$. Παρ' όλο που το αόριστο ολοκλήρωμα της e^{-x^2} δεν υπολογίζεται, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ υπολογίζεται με τέχνασμα που θα δούμε στην ολοκλήρωση πολλών μεταβλητών και έχει την τιμή

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Από το δεδομένο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις ροπές άρτιας τάξης $\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$, $n \in \mathbb{N}$ της κανονικής κατανομής. Προς το σκοπό αυτό θέτουμε

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx, \quad a > 0,$$

και με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής βρίσκουμε

$$I(a) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Έτσι μπορούμε με παραγωγή να υπολογίσουμε τις ροπές άρτιας τάξης, π.χ. το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx$ προκύπτει με παραγωγή ως προς a του ολοκληρώματος $I(a)$:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-ax^2} dx = -\frac{d}{da} I(a) = -\frac{d}{da} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} a^{-3/2}.$$

Όμοια υπολογίστε το $\int_0^\infty x^4 e^{-ax^2} dx$. Υπολογίστε το $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ (δεν χρειάζεται σκληρή δουλειά). Υπολογίστε τις ροπές περιττής τάξης

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2} dx, \quad \int_{-\infty}^\infty x e^{-ax^2} dx, \quad \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2} dx.$$

Δείξτε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1, \quad \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} e^{bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Όλες οι παράμετροι θεωρούνται θετικές. Υπόδειξη: Για το πρώτο, αλλαγή μεταβλητής $x - \mu = u$. Για το δεύτερο, συμπληρώστε τον εκθέτη για να γίνει τέλειο τετράγωνο, $ax^2 - bx = (\sqrt{a}x - b/(2\sqrt{a}))^2 - b^2/(4a)$, και στη συνέχεια κάνετε την προφανή αλλαγή μεταβλητής, $u = \sqrt{a}x - b/(2\sqrt{a})$.

Παρατήρηση 2.5. Το θεώρημα που εκφράζεται από την (2.5.1) γενικεύεται και για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ως εξής. Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών, $\rho : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, $\rho = \rho(x, y, z, t)$, μπορεί να είναι η πυκνότητα ενός ρευστού. Υποθέτουμε ότι ρ και $\partial\rho/\partial t$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους. Αν $dV = dx dy dz$ είναι ένας στοιχειώδης όγκος, τότε ρdV είναι η στοιχειώδης μάζα dm που περιέχεται μέσα στον dV . Επομένως το ολοκλήρωμα της $\rho(x, y, z, t)$ σε ένα όγκο V , είναι η μάζα του ρευστού μέσα στον όγκο V ,

$$m(t) = \iiint_V \rho dV = \iiint_V \rho(x, y, z, t) dx dy dz. \quad (2.5.4)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου. Αποδεικνύεται ότι η παράγωγος ως προς χρόνο, περνάει μέσα στο ολοκλήρωμα όπως στην (2.5.1), οπότε θα έχουμε

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho(x, y, z, t) dx dy dz = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

2.5.1 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos ax dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2/4}.$$

Υπόδειξη. Δείξτε ότι $I'(a) = -aI(a)/2$.

2. Ορίζουμε τη συνάρτηση I με τύπο

$$I(t) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx} \sin x}{x} dx, \quad t > 0.$$

Δείξτε ότι $dI/dt = -1/(1+t^2)$.

Κεφάλαιο 3

ΣΕΙΡΕΣ

3.1 Σειρές Taylor

Στη μαθηματική ανάλυση αποδεικνύεται το παρακάτω εκπληκτικό αποτέλεσμα: Μία συνάρτηση f μπορεί να παρασταθεί ως σειρά με όρους μονώνυμα δυνάμεων του x ως εξής:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \dots \quad (3.1.1)$$

Το αποτέλεσμα αυτό που οφείλεται στον Taylor (1712) διατυπώνεται ακριβέστερα ως εξής.

Θεώρημα 3.1. Έστω f μία συνάρτηση με παραγώγους κάθε τάξης που είναι φραγμένες σε μία περιοχή του μηδενός¹. Τότε η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \quad (3.1.2)$$

συγκλίνει στον αριθμό $f(x)$, όπου x ανήκει σε κάποιο διάστημα $(-R, R)$.

Η σειρά (3.1.2) λέγεται σειρά Taylor της f γύρω από το μηδέν. Λέμε ότι η σειρά (3.1.2) συγκλίνει στη συνάρτηση f στο διάστημα $(-R, R)$. Το συμπέρασμα γράφουμε με διάφορους τρόπους, π.χ.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots,$$

ή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

¹Υποθέτουμε δηλαδή ότι σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I με κέντρο το μηδέν, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $x \in I$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ή

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

Είναι εύκολο να βρούμε τις σειρές Taylor κάποιων γνωστών συναρτήσεων (κάνετε έλεγχο)

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

- Βρείτε τις σειρές Taylor των συναρτήσεων e^{-x} , e^{x^2} , $\sin x^2$ περί το 0. Προσεγγίστε με πολυώνυμο 3ου βαθμού κοντά στο 0 τις

$$\frac{1}{1+x}, \frac{1}{1-x}, \ln(1+x), \sqrt{1+x}.$$

Το μηδέν δεν έχει κάποια ιδιαιτερότητα. Αν μία συνάρτηση f έχει παραγώγους κάθε τάξης σε μιά περιοχή του $a \in \mathbb{R}$, τότε έχουμε τη σειρά

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots,$$

που συγκλίνει στην $f(x)$ σε κάποιο διάστημα $(a-R, a+R)$.

Παράδειγμα 1. Αναπτύσσουμε τη συνάρτηση λογάριθμος ($f(x) = \ln x$) περί το σημείο 1. Είναι $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$, $f''(1) = -1$, $f'''(1) = 2$, $f^{(4)}(1) = -2.3$ κ.λπ. οπότε

$$\ln(1+x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$$

Παρατήρηση 3.1. Άλλοι τρόποι γραφής του Θεωρήματος Taylor είναι οι εξής:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x. \quad (3.1.3)$$

Πρόκειται ουσιαστικά για την προσεγγιστική μορφή του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής. Ισότητα θα έχουμε αν συμπεριλάβουμε τους όρους ανώτερης τάξης που γράφονται ως $\mathcal{O}(2)$ ή $\mathcal{O}(\Delta x^2)$,

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + f'(x) \Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2), \\ f(x + \Delta x) &= f(x) + f'(x) \Delta x + \mathcal{O}(2). \end{aligned}$$

Οι όροι ανώτερης τάξης περιέχουν δυνάμεις Δx^2 , Δx^3 , ... κ.ο.κ. Σε δεύτερης τάξης προσέγγιση θα έχουμε

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x + \frac{1}{2!} f''(x) \Delta x^2 + \mathcal{O}(3).$$

όπου οι όροι ανώτερης τάξης $\mathcal{O}(3)$ συνιστούν το υπόλοιπο, δηλαδή όρους που περιέχουν δυνάμεις $\Delta x^3, \Delta x^4, \dots$ κ.ο.κ. Αν το υπόλοιπο τείνει στο μηδέν καθώς $n \rightarrow \infty$, τότε η σειρά Taylor συγκλίνει και μπορούμε να γράψουμε το ισοδύναμο της (3.1.1) ως

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x + \frac{1}{2!} f''(x) \Delta x^2 + \dots$$

Παράδειγμα 2. Θα υπολογίσουμε κατά πόσον περίπου θα αυξηθεί ο όγκος μιας σφαίρας αν η ακτίνα της αυξηθεί κατά 10%. Αν με x συμβολίσουμε την ακτίνα της σφαίρας και με Δx την αύξησή της, τότε σύμφωνα με την (3.1.3) ο όγκος $V(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$ θα μεταβληθεί κατά

$$\Delta V = V(x + \Delta x) - V(x) \simeq V'(x) \Delta x = \frac{4}{3}\pi 3x^2 \Delta x.$$

Με $\Delta x = 0.1x$, θα έχουμε $\Delta V/V \simeq 0.3$, επομένως η αύξηση του όγκου είναι περίπου 30%.

Εκ νέου επίσκεψη στον τύπο του Euler

Ιδού μία διαφορετική προσέγγιση στον τύπο του Euler. Αν ορίσουμε ως e^{ix} το άθροισμα της σειράς Taylor

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots,$$

παρατηρούμε ότι η σειρά μπορεί να γραφεί

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots,$$

και διαχωρίζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right).$$

Καταλήγουμε λοιπόν στον τύπο του Euler,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

- Από τις σχέσεις $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ και $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, προκύπτουν οι τύποι

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}), \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}).$$

Δείξτε ότι οι τύποι αυτοί ορίζουν πραγματικές συναρτήσεις (ως θα όφειλαν). Συγκρίνετε με τους τύπους που ορίζουν το υπερβολικό ημίτονο και το υπερβολικό συνημίτονο.

3.1.1 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε με προσέγγιση $1/100$ το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt.$$

2. Υπολογίστε με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sin(t^2) dt$.

3. Υπολογίστε με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{0.5} \frac{\cos x - 1}{x} dx.$$

4. Βρείτε το ανάπτυγμα Taylor περί το 0 της $f(x) = 1/(1-x)$.

5. Δείξτε ότι

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Αποδεικνύεται ότι σειρά αυτή συγκλίνει για $x \in (0, 1)$.

6. Η γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο το 1 και λόγο $x > 0$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

επιτρέπει να πάρουμε ένα χρήσιμο τύπο:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x},$$

(ουσιωδώς πρόκειται για τη διαίρεση του πολυωνύμου 1 με το $1-x$). Αν στον τύπο θέσουμε όπου x το $-t$, παίρνουμε

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}.$$

Ολοκληρώστε αυτήν την ταυτότητα από 0 μέχρι x για να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της $\ln(1+x)$. Θέσετε στην παραπάνω ταυτότητα όπου t το u^2 , ολοκληρώστε από 0 μέχρι x για να βρείτε το ανάπτυγμα Taylor της $\arctan x$.

7. Η δυναμική ενέργεια ενός σώματος σε ύψος h από την επιφάνεια της γης δίνεται από τη σχέση

$$U(h) = -G \frac{Mm}{R+h}$$

όπου m η μάζα του σώματος και M η μάζα της γης (βλ. 2.2.3). Για μικρά ύψη (δηλ. $h \ll R = 6400\text{km}$), γράφουμε $U(h) = mgh + C$, όπου C είναι σταθερά που συνήθως παραλείπουμε. Εξηγείστε γιατί ο τύπος $U = mgh$, θεωρείται καλή προσέγγιση.

3.2 Δυναμοσειρές

Οι σειρές Taylor έχουν τη μορφή $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ και μας υποβάλουν την έννοια της δυναμοσειράς.

Ορισμός 3.1. Δυναμοσειρά με κέντρο το 0, λέγεται κάθε σειρά της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε μία δυναμοσειρά $\sum a_n x^n$, που συγκλίνει για κάθε x σε κάποιο διάστημα $(-R, R)$. Μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε x στο διάστημα $(-R, R)$, τον αριθμό $\sum a_n x^n$, με άλλα λόγια, η δυναμοσειρά ορίζει μία συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \sum a_n x^n, \quad x \in (-R, R).$$

Πόσο καλές ιδιότητες έχει μία συνάρτηση ορισμένη μέσω δυναμοσειράς; Αποδεικνύεται ότι στο διάστημα $(-R, R)$, η συνάρτηση αυτή είναι ολοκληρώσιμη, συνεχής και παραγωγίσιμη. Ακριβέστερα αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 3.2. Αν $f(x) = \sum a_n x^n$, $x \in (-R, R)$, τότε μπορούμε να παραγωγίσουμε και να ολοκληρώσουμε τη δυναμοσειρά όρο προς όρο στο διάστημα $(-R, R)$. Επομένως, για x στο διάστημα $(-R, R)$ ισχύουν:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \sum \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + C, \\ f'(x) &= \sum n a_n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3. Η σειρά

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \cos x,$$

είναι η παράγωγος της σειράς

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sin x,$$

ενώ η $\sum x^n/n!$ είναι η παράγωγος του εαυτού της.

Το παραπάνω θεώρημα επιτρέπει να βρούμε τη σειρά Taylor μιάς συνάρτησης με απλή ολοκλήρωση ή παραγωγή της σειράς μιάς άλλης γνωστής συνάρτησης. Ας δούμε μερικές εφαρμογές.

Παράδειγμα 4. Για την $f(t) = 1/(1+t)$, $t \in (-1, 1)$, γνωρίζουμε ότι η σειρά Taylor είναι

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε για $x \in (-1, 1)$,

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots) dt \Rightarrow \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Παράδειγμα 5. Όμοια, με ολοκλήρωση της

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots, \quad t \in (-1, 1)$$

παίρνουμε την σειρά Taylor της \arctan ,

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad x \in (-1, 1).$$

Παράδειγμα 6. Θεωρούμε τη συνάρτηση f που για $x \in (-1, 1)$ ορίζεται ως

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{x^5}{5 \cdot 4} + \dots$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$f'(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

άρα $f(x) = (x+1)\ln(1+x) - x$.

Παράδειγμα 7. Ιδού μία ερώτηση που θα τρώμαζε και τον πιό χαλκέντερο λάτρη των πράξεων: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

Ποια είναι η 7η παράγωγος της στο 0; Γράφοντας τη σειρά Taylor της f ,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \dots$$

βλέπουμε αμέσως ότι $f^{(7)}(0) = 0$.

- Δείξτε ότι

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

- Υπολογίστε το άθροισμα $f(x)$ της σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n x^{n-1}$$

(Υπόδειξη. Η μορφή κάθε όρου δηλώνει ότι η f έχει προέλθει από παραγωγή κάποιας δυναμοσειράς. Ολοκληρώστε λοιπόν την f από 0 μέχρι x).

Η διωνυμική σειρά

Μία από τις σημαντικότερες σειρές Taylor είναι η διωνυμική σειρά. Για τη συνάρτηση

$$f(x) = (1+x)^p$$

όπου $p \in \mathbb{R}$ και $x \in (-1, 1)$, έχουμε διαδοχικά

$$f'(x) = p(1+x)^{p-1} \quad \text{άρα} \quad f'(0) = p$$

$$f''(x) = p(p-1)(1+x)^{p-2} \quad \text{άρα} \quad f''(0) = p(p-1)$$

$$f'''(x) = p(p-1)(p-2)(1+x)^{p-3} \quad \text{άρα} \quad f'''(0) = p(p-1)(p-2), \text{ κλπ.}$$

Αποδεικνύεται ότι η σειρά Taylor της f είναι πράγματι

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n,$$

και λέγεται διωνυμική σειρά. Ο διωνυμικός συντελεστής ορίζεται για κάθε $p \in \mathbb{R}$ ως

$$\binom{p}{n} = \frac{p(p-1)(p-2)\dots(p-n+1)}{n!}, \quad \binom{p}{0} = 1$$

Αν p είναι θετικός ακέραιος, τότε παίρνουμε το διωνυμικό θεώρημα της άλγεβρας. (Όταν το n φτάσει στην τιμή $p+1$, ο διωνυμικός συντελεστής μηδενίζεται, οπότε η σειρά “τερματίζεται”. Στη συνέχεια, θέτοντας $x = b/a$, έχουμε το διωνυμικό θεώρημα στην οικεία του μορφή).

- Αναλόγως της τιμής του p μπορούμε να πάρουμε διάφορες σειρές Taylor. Για παράδειγμα, θέσετε $p = -1$ και θα βρείτε αμέσως το ανάπτυγμα σε σειρά της $1/(1+x)$ (γεωμετρική). Με παρόμοιο τρόπο βρείτε τη σειρά Taylor της $\sqrt{1+x}$.
- Υπενθυμίζουμε ότι η διωνυμική σειρά συγκλίνει για $x \in (-1, 1)$.

Η αξία της διωνυμικής σειράς δεν έγκειται μόνο στο ότι παρέχει τις σειρές Taylor γνωστών συναρτήσεων με κατάλληλη εκλογή του p . Υπάρχουν περιπτώσεις που ο υπολογισμός των παραγώγων στο 0 είναι επίπονος και η εύρεση του γενικού τύπου για τη n -οστή παράγωγο στο 0 σχεδόν αδύνατος.

Παράδειγμα 8. Αν θέσουμε $x = -t^2$ και $p = -1/2$, θα έχουμε για $t \in (-1, 1)$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1.3}{2.4}t^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}t^6 + \dots$$

και ολοκληρώνοντας

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

Από τέτοιου τύπου σειρές προκύπτουν εντυπωσιακοί τύποι, όπως π.χ.

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} + \dots$$

Όμοια, από τη σειρά της συνάρτησης τόξο εφαπτομένης προκύπτει (γιατί;)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

- Γράψτε τους τρεις πρώτους όρους των σειρών Taylor των συναρτήσεων

$$\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \frac{1}{(1+x)^3}$$

(Περιπτώσεις διωνυμικής ή παραγωγίστε την $1/(1+x)$). Όμοια για τις

$$\sqrt{1-x}, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Παρατήρηση 3.2. (Προαιρετική ανάγνωση). Όπως είδαμε, οι δυναμοσειρές συγκλίνουν σε κάποιο διάστημα $(-R, R)$. Το R λέγεται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Σε κάποιες δυναμοσειρές όπως π.χ. η σειρά Taylor της εκθετικής συνάρτησης είναι $R = \infty$, δηλαδή η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$. Σε κάποιες, όπως η σειρά Taylor της $1/(1+x)$ είναι $R = 1$, δηλαδή η σειρά συγκλίνει μόνο στο διάστημα $(-1, 1)$. Στη Μαθηματική Ανάλυση αποδεικνύεται ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum a_n x^n$ υπολογίζεται από τον εξής απλό τύπο:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Η δυναμοσειρά συγκλίνει για $-R < x < R$ και αποκλίνει για $|x| > R$. Η περίπτωση $x = R$, πρέπει να εξεταστεί ιδιαίτερα. Ας δούμε μερικά παραδείγματα. Για την σειρά Taylor της εκθετικής συνάρτησης, $\sum x^n/n!$, βρίσκουμε

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

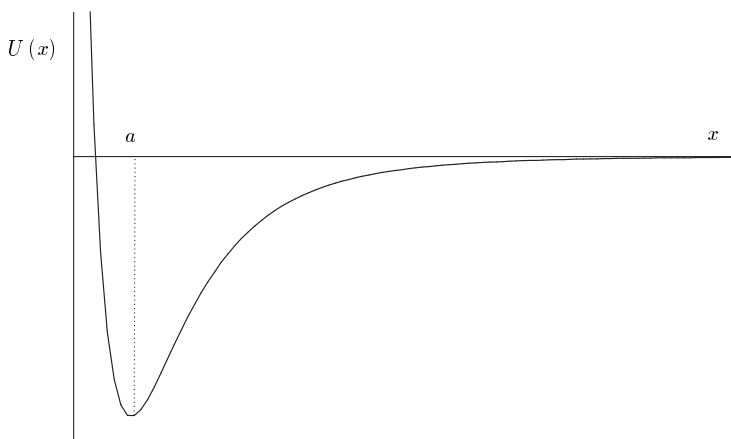
δηλαδή η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$. Όμοια μπορούμε να δείξουμε ότι οι δυναμοσειρές του ημιτόνου και συνημιτόνου

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

συγκλίνουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για τη σειρά $\sum x^n$ Taylor της $1/(1-x)$ βρίσκουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/a_{n+1}) = 1$, επομένως $R = 1$, άρα η σειρά συγκλίνει μόνο στο διάστημα $(-1, 1)$. Για εξάσκηση, δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της διωνυμικής σειράς είναι 1. Όπως είδαμε στο Θεώρημα 3.2, η ακτίνα σύγκλισης κληρονομείται στην παράγωγο σειρά και στη σειρά ολοκλήρωμα. Συμπεραίνουμε ότι οι σειρές που προέρχονται από την διωνυμική σειρά, όπως οι $\ln(1+x)$, $\tan^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, $1/(1-x)$ κ.λπ. συγκλίνουν επίσης στο διάστημα $(-1, 1)$.

3.2.1 Εφαρμογές στη Φυσική.

1. Η αλληλεπίδραση δύο ατόμων περιγράφεται από το διάγραμμα ενέργειας σε συνάρτηση με την απόσταση. Όταν τα άτομα είναι απομακρυσμένα η δυναμι-



Σχήμα 3.1: Δυναμική ενέργεια μεταξύ δύο μορίων.

κή τους ενέργεια είναι αμελητέα. Όταν όμως πλησιάσουν πολύ, η απωστική δύναμη των ηλεκτρονικών τους νεφών κάνει τη μεταξύ τους ενέργεια πολύ μεγάλη, Σχήμα 3.1. Σε κάποια ορισμένη απόσταση a , η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη, και αν το πηγάδι του δυναμικού είναι βαθύ, είναι δυνατός ο σχηματισμός μορίου. Ανάλογο είναι και το διάγραμμα ενέργειας μεταξύ δύο μορίων που αλληλεπιδρούν με δυνάμεις van-der Waals. Αναπτύσσοντας την δυναμική ενέργεια U σε σειρά Taylor γύρω στο a , θα έχουμε

$$U(x) = U(a) + U'(a)(x-a) + \frac{U''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots$$

Ο όρος $U(a)$ είναι σταθερή ποσότητα και καθορίζει το επίπεδο αναφοράς για τη μέτρηση της δυναμικής ενέργειας. Μπορεί λοιπόν να ληφθεί ίσος με 0 (όπως για παράδειγμα θεωρούμε ότι η δυναμική ενέργεια ενός σώματος στην

επιφάνεια της γης είναι 0). Ο δεύτερος όρος είναι 0 διότι το a είναι σημείο ακροτάτου της συνάρτησης, άρα $U'(a) = 0$. Ο επόμενος όρος, δείχνει ότι η δυναμική ενέργεια κοντά στο a , είναι προσεγγιστικά η ενέργεια ενός αρμονικού ταλαντωτή, δηλαδή

$$U(x) \simeq \frac{1}{2}k(x-a)^2$$

με το κέντρο της δύναμης στο σημείο a . Το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικό για δύο λόγους: Πρώτον, η μορφή της συνάρτησης $U(x)$ είναι ποιοτικά ίδια για όλα τα άτομα, κατά συνέπεια η συμπεριφορά της κοντά στο σημείο ελαχίστου, είναι ίδια για όλα τα άτομα. Δεύτερον, η προσέγγιση του δυναμικού κοντά στο a με τετραγωνικό δυναμικό, δείχνει ότι τα άτομα ενός διατομικού μορίου ταλαντεύονται με συχνότητα που εξαρτάται από την δεύτερη παράγωγο $U''(a)$, δηλαδή τη “σταθερή k του ελατηρίου”. Αν γνωρίζουμε το φάσμα απορρόφησης του αερίου, βγάζουμε χρήσιμες πληροφορίες για τη μορφή της συνάρτησης $U(x)$ κοντά στο a .

2. Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δύο φορτία Q και $-Q$ που απέχουν απόσταση d . Η ένταση E του ηλεκτρικού πεδίου στην ευθεία του διπόλου και σε απόσταση $r \gg d$, είναι αντιστρόφως ανάλογη του κύβου της απόστασης r .

Πράγματι, η ένταση (σε κατάλληλο σύστημα μονάδων) δίνεται από τη σχέση

$$E = \frac{Q}{r^2} + \frac{-Q}{(r+d)^2}.$$

Επειδή $d/r < 1$, έχουμε (διωνυμική)

$$\frac{1}{(r+d)^2} = \frac{1}{r^2(1+d/r)^2} = \frac{1}{r^2} \left(1 - 2\frac{d}{r} + 3\frac{d^2}{r^2} - 4\frac{d^3}{r^3} + \dots \right)$$

’ρα η ένταση E γράφεται

$$E = \frac{Q}{r^2} \left[1 - \left(1 - 2\frac{d}{r} + 3\frac{d^2}{r^2} - 4\frac{d^3}{r^3} + \dots \right) \right] = \frac{Q}{r^2} \left(2\frac{d}{r} - 3\frac{d^2}{r^2} + 4\frac{d^3}{r^3} - \dots \right).$$

Παραλείποντας ανώτερες δυνάμεις του d/r , έχουμε

$$E \simeq \frac{2Qd}{r^3}.$$

Σε βιβλίο Φυσικής, θα βλέπατε την εξής παρουσίαση: “Σε προσέγγιση πρώτης τάξης ισχύει”, ή “Επειδή d/r είναι μικρό, οι όροι με δυνάμεις του d/r είναι αμελητέοι, άρα”

$$\frac{1}{r^2} \left(1 + \frac{d}{r} \right)^{-2} = \frac{1}{r^2} \left(1 - 2\frac{d}{r} + \text{terms in } \frac{d^2}{r^2} \right).$$

Σε βιβλίο Μαθηματικών θα βλέπατε

$$E = \frac{2Q}{r^2} \left(\frac{d}{r} + \mathcal{O} \left(\frac{d^2}{r^2} \right) \right).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι παλιρροϊκές δυνάμεις στην επιφάνεια της Γης λόγω του πεδίου βαρύτητας της Σελήνης, είναι αντιστρόφως ανάλογες του κύβου της απόστασης Γης - Σελήνης, βλ. σχετικό άρθρο στη Wikipedia.

3.2.2 Ελλειπτικά ολοκληρώματα

Το μήκος της έλλειψης με παραμετρική αναπαράσταση

$$x(t) = a \cos t, \quad y(t) = b \sin t, \quad b > a$$

δίνεται ως γνωστόν από τον τύπο

$$l = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

Το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο

$$l = 4b \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin^2 t} dt.$$

Δυστυχώς το ολοκλήρωμα αυτό δεν υπολογίζεται αναλυτικά. Είναι ειδική περίπτωση του ελλειπτικού ολοκληρώματος δευτέρου είδους,

$$E(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt, \quad 0 < k < 1$$

το οποίο ασυμπτωτικά δίνεται από την σχέση

$$E(k, \pi/2) = \frac{\pi}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 - \left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right)^2 \frac{k^6}{5} - \dots \right].$$

Υπόδειξη: Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση αναπτύσσεται ως διωνυμική σειρά

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \mathcal{O}(x^5),$$

(όπου θέσαμε $x = k^2 \sin^2 t$), οπότε ολοκληρώνοντας όρο προς όρο προκύπτει ο τύπος της $E(k, \pi/2)$. Θα χρειαστείτε τα ολοκληρώματα των $\sin^2 t, \sin^4 t$ κ.λπ. (βλ. κάποιο πίνακα ολοκληρωμάτων ή χρησιμοποιείστε τη Mathematica). Δώστε τις σχετικές λεπτομέρειες.

Το ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους

$$K(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, \quad 0 < k < 1$$

δεν υπολογίζεται αναλυτικά, αλλά ασυμπτωτικά δίνεται από την σχέση

$$K(k, \pi/2) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{k^4}{3} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{k^6}{5} + \dots \right].$$

Δώστε τις σχετικές λεπτομέρειες. Γράψτε `Series[EllipticK[m], {m, 0, 6}]` στη Mathematica.

- Υπολογίστε με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων το μήκος έλλειψης με ημι-άξονες $a = 3$ και $b = 4$.
- Υπολογίστε το μήκος της τροχιάς της γης περί τον ήλιο θεωρώντας ότι είναι κύκλος ακτίνας ίσης με το αφήλιο. Στη συνέχεια λάβετε υπόψη ότι η εκκεντρότητα της γης είναι $e = 0.0167$ (βλ. σχετικό άρθρο στην Wikipedia) και υπολογίστε το μήκος της ελλειπτικής τροχιάς με όση ακρίβεια κρίνετε ως απαραίτητη. Πόσο είναι το επί τοις εκατό σφάλμα;

3.3 Το Θεώρημα Taylor σε πολλές διαστάσεις

Σε δύο διαστάσεις, το Θεώρημα Taylor διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 3.3. Έστω $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ ένα βαθμωτό πεδίο με συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης στο πεδίο ορισμού του $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Αν $\mathbf{a} = (a, b)$ και $\mathbf{r} = (x, y)$ είναι δύο γειτονικά σημεία στο U , τότε,

$$\phi(x, y) = \phi(a, b) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y - b) + \mathcal{O}(2),$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο (a, b) και οι όροι ανώτερης τάξης $\mathcal{O}(2)$ συνιστούν το υπόλοιπο.

Οι όροι ανώτερης τάξης $\mathcal{O}(2)$ είναι ανάλογοι γινομένων $\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta x \Delta y$, και $\Delta x^3, \Delta y^3, \Delta x^2 \Delta y, \Delta x \Delta y^2, \dots$ κ.ο.κ.

Σε δεύτερης τάξης προσέγγιση θα έχουμε

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & \phi(a, b) + \frac{\partial \phi}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y - b) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x - a)^2 + \\ & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(y - b)^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(x - a)(y - b) + \mathcal{O}(3), \end{aligned}$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο (a, b) και οι όροι ανώτερης τάξης $\mathcal{O}(3)$ συνιστούν το υπόλοιπο, δηλαδή όρους ανάλογους των γινομένων $\Delta x^3, \Delta y^3, \Delta x^2 \Delta y, \Delta x \Delta y^2, \dots$ κ.ο.κ.

Σε τρίτης τάξης προσέγγιση θα έχουμε κατ' αναλογία,

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \phi(a, b) + \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right] \phi(x, y) + \\ &\quad \frac{1}{2!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 \phi(x, y) + \\ &\quad \frac{1}{3!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^3 \phi(x, y) + \mathcal{O}(4). \end{aligned}$$

Αν το υπόλοιπο τείνει στο μηδέν καθώς $n \rightarrow \infty$, τότε η σειρά *Taylor* συγκλίνει και μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \phi(a, b) + \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right] \phi(x, y) + \\ &\quad \frac{1}{2!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 \phi(x, y) + \dots \end{aligned}$$

Άλλος τρόπος γραφής είναι ο ακόλουθος:

$$\phi(x + \Delta x, y + \Delta y) = \phi(x, y) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2!} \left[\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 \phi(x, y) + \dots$$

ή ακόμα

$$\phi(x + \Delta x, y + \Delta y) = \phi(x, y) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta y + \mathcal{O}(2),$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο (x, y) .

Το αποτέλεσμα γενικεύεται σε τρεις διαστάσεις κατά προφανή τρόπο:

$$\begin{aligned} \phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) &= \\ \phi(x, y, z) &+ \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \Delta z + \frac{1}{2!} \left[\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \right]^2 \phi(x, y, z) + \dots \end{aligned}$$

Συνήθως γράφουμε απλώς,

$$\phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = \phi(x, y, z) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \Delta z + \mathcal{O}(2), \quad (3.3.1)$$

όπου οι όροι ανώτερης τάξης $\mathcal{O}(2)$ είναι ανάλογοι γινομένων $\Delta x^2, \Delta y^2, \Delta z^2, \Delta x \Delta y, \Delta x \Delta z, \Delta y \Delta z$, και $\Delta x^3, \Delta y^3, \Delta z^3, \Delta x^2 \Delta y, \dots$, κ.ο.κ.

Από τον τύπο (3.3.1) προκύπτει ότι η μεταβολή

$$\Delta\phi := \phi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - \phi(x, y, z),$$

του βαθμωτού πεδίου δίνεται από τη σχέση

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z + \mathcal{O}(2). \quad (3.3.2)$$

Παραλείποντας τους όρους ανώτερης τάξης θα έχουμε για την μεταβολή $\Delta\phi$ του βαθμωτού πεδίου

$$\Delta\phi \simeq \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z,$$

όπου οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται στο (x, y, z) . Έτσι η σημασία της (2.1.5) γίνεται κατανοητή με αυστηρό τρόπο.

Παρατήρηση 3.3. Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα $\Delta\mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, τότε ο τύπος (3.3.2) της μεταβολής του βαθμωτού πεδίου ϕ , γράφεται ως,

$$\Delta\phi = \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot \Delta\mathbf{r} + \mathcal{O}(2).$$

Ανακεφαλαίωση

1. Το Θεώρημα Taylor χρησιμοποιείται συνήθως με τη μορφή (3.3.1). Καθώς $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$, οι όροι ανώτερης τάξης $\mathcal{O}(2)$ τείνουν στο μηδέν ταχύτερα από τους όρους $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.
2. Από το Θεώρημα Taylor προκύπτει ο τύπος (3.3.2) που μας δίνει τη μεταβολή του πεδίου ϕ .

Συμβολική μορφή της σειράς Taylor

Με τη βοήθεια του τελεστή παραγώγισης

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \dots, \quad D^n = \frac{d^n}{dx^n},$$

η σειρά Taylor μίας συνάρτησης μίας μεταβλητής f , γράφεται

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \frac{hD}{1!}f(x) + \frac{h^2D^2}{2!}f(x) + \frac{h^3D^3}{3!}f(x) + \dots \\ &= \left(1 + \frac{hD}{1!} + \frac{h^2D^2}{2!} + \frac{h^3D^3}{3!} + \dots\right) f(x), \end{aligned}$$

και συμβολικά

$$f(x+h) = e^{hD} f(x).$$

Στη μαθηματική ανάλυση αποδεικνύεται ότι η σειρά τελεστών

$$I + \frac{hD}{1!} + \frac{h^2 D^2}{2!} + \frac{h^3 D^3}{3!} + \dots$$

συγκλίνει για κάθε h , σε κάποιο τελεστή και το όριο της σειράς ορίζεται ως ο τελεστής e^{hD} .

Ασκήσεις

1. Βρείτε το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού γύρω από το $(0, 0)$ της $\phi(x, y) = \cos(x + y^2)$.
2. Δείξτε ότι στις τρεις διαστάσεις μπορούμε να γράψουμε συμβολικά τον τύπο της σειράς Taylor ως

$$\phi(x + h_1, y + h_2, z + h_3) = e^{\mathbf{h} \cdot \nabla} \phi(x, y, z),$$

όπου $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$.

3. Μία συνάρτηση της μορφής

$$\phi(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2,$$

λέγεται τετραγωνική μορφή στον \mathbb{R}^2 . Παρατηρείστε ότι θεωρώντας τον πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

και το διάνυσμα $\mathbf{x}^T \equiv [x, y] \in \mathbb{R}^2$, η ϕ γράφεται ως

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = [x, y] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Για να αντιληφθούμε τη σημασία των τετραγωνικών μορφών ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών με $f(0, 0) = 0$ και $\partial f / \partial x = 0 = \partial f / \partial y$. Τότε στο ανάπτυγμα Taylor της f , οι πρώτοι μή μηδενικοί όροι είναι δεύτερης τάξης και η f προσεγγίζεται κοντά στο $(0, 0)$ με μία τετραγωνική μορφή

$$f(x, y) = \frac{1}{2!} \left(x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{(0,0)} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{(0,0)} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Big|_{(0,0)} \right) + O(3).$$

Δώστε δύο παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων f , που να έχουν κρίσιμο σημείο το $(0, 0)$.

4. Η θερμοκρασία μιας θαλάσσιας περιοχής μοντελοποιείται από μια ομαλή συνάρτηση $T(x, y, z)$, όπου οι συντεταγμένες x, y και z ορίζονται σε ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^3 . Θεωρούμε δύο γειτονικά σημεία (x, y, z) και $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Γράψτε τη μεταβολή της θερμοκρασίας $\Delta T := T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - T(x, y, z)$ σε πρώτης τάξης προσέγγιση ως προς τις μεταβλητές x, y και z .

Κεφάλαιο 4

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Οι περισσότερες εξισώσεις της Μαθηματικής Φυσικής είναι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ΜΔΕ). Έχουμε ήδη συναντήσει κάποιες από αυτές.

Η εξίσωση Laplace

$$\nabla^2 u = 0, \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Στην εξίσωση Laplace ανάγονται συνήθως τα προβλήματα που περιγράφουν στάσιμες καταστάσεις.

Η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας

$$\frac{\partial T}{\partial t} = h \nabla^2 T,$$

όπου ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας h συνήθως θεωρείται σταθερός. Όταν αποκατασταθεί θερμική ισοροπία στο σύστημα που εξετάζουμε (στάσιμη κατάσταση, δηλαδή η θερμοκρασία είναι ανεξάρτητη του χρόνου, $\partial T / \partial t = 0$), τότε η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας ανάγεται στην

$$\nabla^2 T = 0.$$

Όμοια είναι και η εξίσωση της διάχυσης (diffusion equation),

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

όπου $u(t, x, y, z)$ παριστά συγκέντρωση (“υλικό” ανά μονάδα όγκου, π.χ. mol/lit, particles/cm³ κ.λπ.) και D είναι ο συντελεστής διάχυσης.

Η κυματική εξίσωση

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nabla^2 u,$$

όπου c είναι η ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Στην περίπτωση μονοχρωματικού κύματος,

$$u(t, x, y, z) = e^{-i\omega t} \phi(x, y, z),$$

δείξτε ότι η ϕ ικανοποιεί την εξίσωση Helmholtz

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0, \quad k = \omega/c.$$

Η εξίσωση Schrödinger στην κβαντομηχανική

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi,$$

όπου $\Psi(t, x, y, z)$ είναι η κυματοσυνάρτηση και $V(x, y, z)$ το δυναμικό. Σε αντιδιαστολή με τις υπόλοιπες ΜΔΕ, οι λύσεις της είναι εν γένει μιγαδικές συναρτήσεις. Η εξίσωση αυτή λέγεται μερικές φορές *χρονοεξαρτημένη* εξίσωση Schrödinger. “Μονοχρωματικές” λύσεις που παριστούν καταστάσεις σταθερής ενέργειας E έχουν τη μορφή,

$$\Psi(t, x, y, z) = e^{-iEt/\hbar} \psi(x, y, z).$$

Δείξτε ότι η ψ ικανοποιεί την εξίσωση ιδιοτιμών

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi,$$

που μερικές φορές λέγεται (κακώς!) *χρονοανεξάρτητη* εξίσωση Schrödinger.

Οι εξισώσεις Maxwell

Πρόκειται για 4 διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης που διέπουν όλα τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα. Στα επόμενα, $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ είναι το ηλεκτρικό πεδίο, $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ είναι το μαγνητικό πεδίο, ρ είναι η πυκνότητα του φορτίου, $\mathbf{j} = (j_1, j_2, j_3)$ είναι η πυκνότητα του ρεύματος και ϵ_0 και μ_0 είναι αντίστοιχα η ηλεκτρική και μαγνητική διαπερατότητα του κενού. Τα πεδία (\mathbf{E} και \mathbf{B}) και οι πηγές (ρ και \mathbf{j}) μεταβάλλονται στο χώρο και το χρόνο, δηλαδή θεωρούνται συναρτήσεις του χρόνου t και της θέσης (x, y, z) , π.χ. $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, x, y, z)$. Οι εξισώσεις του Maxwell είναι (βλ. σχετικό άρθρο στο Wikipedia)

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\
\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\
\nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{4.0.1}$$

Επομένως οι εξισώσεις Maxwell γράφονται ως ένα σύστημα 8 γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξεως με μερικές παραγώγους. Δοθεισών των πηγών ρ και \mathbf{j} , το σύστημα περιέχει 6 άγνωστες συναρτήσεις (E_1, E_2, E_3) , (B_1, B_2, B_3) . Στην περίπτωση που τα πεδία και οι πηγές δεν εξαρτώνται από το χρόνο, οι εξισώσεις Maxwell για το ηλεκτροστατικό πεδίο ανάγονται στις εξισώσεις της ηλεκτροστατικής

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}. \tag{4.0.2}$$

Επειδή το ηλεκτροστατικό πεδίο είναι αστρόβιλο, $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει συνάρτηση δυναμικού ϕ , τέτοια ώστε

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi.$$

Τότε η πρώτη από τις (4.0.2) γράφεται

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho,$$

δηλαδή η ηλεκτροστατική ανάγεται στην εξίσωση του Poisson. Ειδικά έξω από φορτία, όπου $\rho = 0$, η ηλεκτροστατική περιγράφεται από την εξίσωση Laplace, $\nabla^2 \phi = 0$, φυσικά με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.

Ανάλογη είναι η εξίσωση Poisson στο πεδίο βαρύτητας: Σε μιά κατανομή ύλης με πυκνότητα ρ , το δυναμικό, ϕ , του πεδίου βαρύτητας δίνεται από την εξίσωση

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho.$$

Η εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

όπου $\rho(t, x, y, z)$ είναι η πυκνότητα του ρευστού και $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ το πεδίο ταχυτήτων.

Οι εξισώσεις Navier-Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \rho \nabla \phi + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \zeta) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}),$$

όπου p η πίεση, η και ζ ο πρώτος και δεύτερος συντελεστής ιξώδους και ϕ το δυναμικό βαρύτητας. Όπως θα δούμε, πρόκειται για τις εξισώσεις που διέπουν την κίνηση των ρευστών.

Οι εξισώσεις Einstein

Οι πιο πολύπλοκες εξισώσεις της μαθηματικής φυσικής είναι οι εξισώσεις Einstein που περιγράφουν το πεδίο βαρύτητας. Πρόκειται για ένα σύστημα 10 μή γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης για δέκα άγνωστες συναρτήσεις.

Εκτός από την εξίσωση συνέχειας, τις εξισώσεις Navier-Stokes και τις εξισώσεις Einstein, όλες οι άλλες εξισώσεις που γράψαμε είναι γραμμικές. Από την εποχή του Euler οι εξισώσεις αυτές έχουν αποτελέσει αντικείμενο εντατικής έρευνας και σήμερα υπάρχει σχεδόν πλήρης θεωρία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Ακόμα και προβλήματα με πολύπλοκες αρχικές ή συνοριακές συνθήκες μπορούν να αντιμετωπισθούν, ιδιαιτέρως με χρήση αριθμητικών μεθόδων. Οι μη γραμμικές εξισώσεις, όπως είναι οι εξισώσεις Navier-Stokes ή οι εξισώσεις Einstein της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας, παραμένουν άλυτες στη γενική περίπτωση. Ειδικές λύσεις τους έχουν επιτευχθεί, ιδίως αν το πρόβλημα παρουσιάζει κάποιο είδος συμμετρίας. Θα μπορούσε κανείς να πει ότι το μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών κλάδων του εικοστού αιώνα έχει προκύψει από την προσπάθεια να αναπτυχθεί η γενική θεωρία των ΜΔΕ.

4.1 Λύσεις των ΜΔΕ

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση Laplace σε δύο διαστάσεις

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (4.1.1)$$

Η εξίσωση αυτή έχει άπειρες λύσεις, π.χ. οι συναρτήσεις u με τύπο $x+y$, x^2-y^2 , $\ln \sqrt{x^2+y^2}$, $\arctan(y/x)$ ικανοποιούν την (4.1.1). Ποιά από αυτές περιγράφει τη λύση του φυσικού προβλήματος που αντιμετωπίζουμε κάθε φορά; Για να συγκεκριμενοποιήσουμε τα πράγματα, ας υποθέσουμε ότι σε μία αβαθή λίμνη έχει αποκατασταθεί θερμική ισορροπία και $u(x, y)$ είναι η θερμοκρασία T στη

θέση (x, y) της επιφάνειας της λίμνης. Συμβολίζουμε με $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ το χωρίο που παριστά την επιφάνεια της λίμνης και με $\partial\Omega$ το σύνορο της. Προφανώς $\partial\Omega$ είναι μία κλειστή καμπύλη στον \mathbb{R}^2 με εσωτερικό Ω . Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε τη θερμοκρασία στο σύνορο, π.χ.

$$T(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega \quad (4.1.2)$$

όπου f είναι γνωστή συνάρτηση. Η (4.1.2) καθορίζει τις *συνοριακές συνθήκες* και το πρόβλημα

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \quad \text{με } T(x, y) = f(x, y) \text{ όταν } (x, y) \in \partial\Omega, \quad (4.1.3)$$

λέγεται *πρόβλημα συνοριακών τιμών*. Αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα συνοριακών τιμών (4.1.3) έχει μοναδική λύση.

- Έστω ότι η θερμοκρασία στο σύνορο $\partial\Omega$ μιάς θαλάσσιας περιοχής Ω είναι σταθερή. Έχουμε λοιπόν το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\nabla^2 T = 0 \text{ όταν } (x, y, z) \in \Omega, \quad T(x, y, z) = c \text{ όταν } (x, y, z) \in \partial\Omega.$$

Δείξτε ότι η λύση του προβλήματος είναι $T(x, y, z) = c \forall (x, y, z) \in \Omega$

Ως ένα δεύτερο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την κυματική εξίσωση σε μία διάσταση

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (4.1.4)$$

Εύκολα δείχνουμε ότι αν f είναι οποιαδήποτε (δύο φορές παραγωγίσιμη) συνάρτηση μιάς μεταβλητής, τότε η συνάρτηση

$$u_1(t, x) = f(x - ct)$$

είναι λύση της ΔΕ. Αλλά και κάθε συνάρτηση της μορφής

$$u_2(t, x) = g(x + ct)$$

(με g αυθαίρετη συνάρτηση μιάς μεταβλητής κλάσεως C^2) είναι επίσης λύση. Στη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της ΔΕ γράφεται ως

$$u(t, x) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

(D' Alembert 1747). Η γενική λύση δείχνει ότι η κυματική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις. Παρ' όλο που είναι γνωστή η γενική λύση, δεν είναι πάντα εφικτό να

επιλέξουμε τις κατάλληλες συναρτήσεις f και g για κάθε συγκεκριμένο πρόβλημα. Τα φυσικά προβλήματα επιβάλλουν κάποιες συνθήκες στη λύση $u(x, t)$. Οι συνθήκες αυτές είναι δύο τύπων: αρχικές συνθήκες και συνοριακές συνθήκες του συστήματος που εξετάζουμε. Ας υποθέσουμε ότι η κυματική εξίσωση περιγράφει την παλλόμενη χορδή, δηλαδή $u(t, x)$ είναι η απομάκρυνση από την ισορροπία του σημείου x τη στιγμή t . Υποθέτουμε ότι τα άκρα της $x = 0$ και $x = L$ είναι σταθερά (πακτωμένα), οπότε η λύση πρέπει να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.1.5)$$

Επί πλέον, για τον προσδιορισμό της κίνησης, απαιτείται η γνώση των αρχικών θέσεων και αρχικών ταχυτήτων όλων των σημείων της χορδής. Οι αρχικές αυτές συνθήκες εκφράζονται μέσω των

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (4.1.6)$$

όπου f και g θεωρούνται γνωστές συναρτήσεις. Οι (4.1.4), (4.1.5) και (4.1.6) συνιστούν ένα πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών. Αποδεικνύεται ότι και αυτό το πρόβλημα έχει μοναδική λύση.

Όπως έχουμε αναφέρει και αλλού, μία φυσική θεωρία πρέπει απαντά στο ακόλουθο ερώτημα: Δίνεται η κατάσταση ενός συστήματος τη στιγμή $t = 0$. Ποια είναι η κατάσταση του συστήματος κάποια άλλη στιγμή t ; Με άλλα λόγια, η φυσική θεωρία είναι επιτυχής αν μπορεί να προβλέψει την χρονική εξέλιξη του συστήματος. Η θεωρία ισχυροποιείται αν η προβλεπόμενη τελική κατάσταση δεν επηρεάζεται από αμελητέες διαφοροποιήσεις της αρχικής κατάστασης, ή ακριβέστερα, αν μικρές μεταβολές στην αρχική κατάσταση, επιφέρουν επίσης μικρές μεταβολές στην τελική κατάσταση.

Στο παράδειγμα της τεντωμένης χορδής αναμένουμε ότι η γνώση της αρχικής μετατόπισης και αρχικής ταχύτητας της χορδής, αρκούν για τον προσδιορισμό της επακόλουθης κίνησης. Με άλλα λόγια περιμένουμε το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6) να έχει μοναδική λύση για κάθε $t \geq 0$.

Θα λέμε ότι ένα πρόβλημα όπου υπεισέρχεται μία διαφορική εξίσωση είναι καλώς τοποθετημένο (well-posed) αν:

- (α) Υπάρχει λύση του προβλήματος.
- (β) Η λύση είναι μοναδική.
- (γ) Η λύση εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τα δεδομένα.

Υπό ορισμένες προϋποθέσεις τα προβλήματα αρχικών τιμών και τα προβλήματα συνοριακών τιμών είναι καλώς τοποθετημένα. Η μελέτη της πλειοψηφίας των φυσικών συστημάτων οδηγεί σε προβλήματα αρχικών, ή συνοριακών, ή αρχικών-συνοριακών τιμών που είναι καλώς τοποθετημένα. Κατά τη μελέτη των ΜΔΕ έχουμε ως κύριους σκοπούς:

- Να βρούμε τις συνθήκες υπό τις οποίες ένα πρόβλημα είναι καλώς τοποθετημένο.
- Να βρούμε μεθόδους επίλυσης, ή προσέγγισης της λύσης του προβλήματος.
- Να προσδιορίσουμε γενικές ιδιότητες της λύσης.

4.1.1 Ασκήσεις

1. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις με τύπο

$$u(t, x) = \sin ct \cos x, \quad w(t, x) = \sin(x - ct),$$

είναι λύσεις της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης.

2. Βρείτε λύσεις της εξίσωσης Laplace σε μία και δύο διαστάσεις.
3. Θεωρούμε την εξίσωση Laplace σε δύο διαστάσεις

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b],$$

με συνοριακές συνθήκες στο ορθογώνιο $[0, a] \times [0, b]$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0 = u(a, y).$$

Δείξτε ότι για αυθαίρετες σταθερές C_k , $k = 1, 2, \dots, n$ και $n \in \mathbb{N}$, οι συναρτήσεις

$$u_n(x, y) = \sum_{k=1}^n C_k \sinh \frac{k\pi y}{a} \sin \frac{k\pi x}{a},$$

είναι λύσεις της εξίσωσης Laplace και ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες.

4. Δείξτε ότι η συνάρτηση u με τύπο

$$u(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right),$$

είναι λύση της εξίσωσης διάχυσης σε μία διάσταση. Ποιές είναι οι διαστάσεις του συντελεστή διάχυσης D ; Σχεδιάστε τρία διαδοχικά στιγμιότυπα της $u(t, x)$.

5. Στο κενό, οι εξισώσεις Maxwell (4.0.1), γράφονται

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (4.1.7)$$

Οι τιμές των σταθερών ϵ_0 και μ_0 στο διεθνές σύστημα μονάδων είναι $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{Fm}^{-1}$ και $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{NA}^{-2}$, ισχύει δε η εκπληκτική σχέση

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (4.1.8)$$

όπου $c \simeq 3 \times 10^8 \text{m/sec}$. Το δεύτερο ζεύγος δείχνει τη σύζευξη του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου: η χρονική μεταβολή ενός πεδίου προκαλεί στροβιλισμό του άλλου. Η παρατήρηση αυτή οδήγησε τον Maxwell στην μεγάλη του ανακάλυψη, ότι οι εξισώσεις του προβλέπουν την διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό με την ταχύτητα του φωτός. Πράγματι, παραγωγίζοντας ως προς t μία εξίσωση από το δεύτερο ζεύγος των (4.1.7), π.χ. την τρίτη, προκύπτει

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

(Δικαιολογείστε την εναλλαγή των τελεστών $\partial/\partial t$ και ∇). Αντικαθιστώντας το $\partial \mathbf{E}/\partial t$ από την τέταρτη των (4.1.7), δείξτε ότι

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

και χρησιμοποιώντας την (4.1.8), προκύπτει

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}.$$

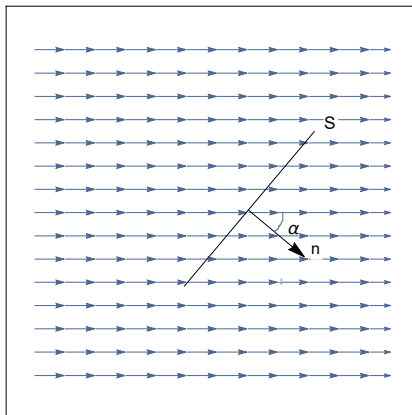
Θα χρειαστείτε την ταυτότητα $\nabla \times \nabla \times \mathbf{B} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}$ και την δεύτερη εξίσωση Maxwell. Με εντελώς όμοιο τρόπο δείξτε ότι

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Οι δύο παραπάνω κυματικές εξισώσεις, δείχνουν ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο διαδίδονται στο κενό με την ταχύτητα του φωτός.

4.2 Η ροή ενός διανυσματικού πεδίου

Στην επόμενη παράγραφο θα αναζητήσουμε τη φυσική και γεωμετρική ερμηνεία της απόκλισης (divergence) ενός διανυσματικού πεδίου (δ.π.). Για την ανάλυση θα χρειαστούμε την έννοια της ροής του διανυσματικού πεδίου.



Σχήμα 4.1: Η ροή σταθερού πεδίου μέσα από επίπεδη επιφάνεια.

Υπενθυμίζουμε ότι για ένα σταθερό δ.π. \mathbf{F} και μία επίπεδη επιφάνεια S , η ροή του πεδίου μέσα από την επιφάνεια ορίζεται ως το μέγεθος

$$\Phi = FS \cos \alpha,$$

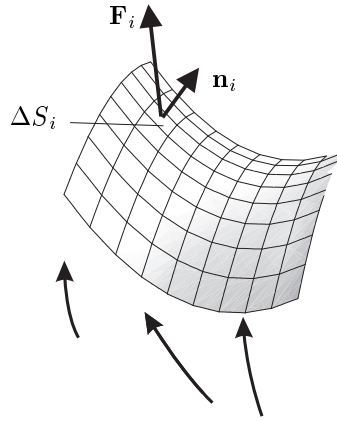
όπου $F = |\mathbf{F}|$, και α είναι η γωνία που σχηματίζει η κάθετη στην επιφάνεια με το διανυσματικό πεδίο, Σχήμα 4.1. Αν \mathbf{n} είναι ένα μοναδιαίο κάθετο στην S , τότε η ροή μπορεί να γραφεί ως

$$\Phi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}S.$$

Μπορούμε ακόμα να ορίσουμε ένα διάνυσμα $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$, που έχει μέτρο $|\mathbf{S}| = S$, οπότε η ροή γράφεται ακόμα πιο συνοπτικά ως

$$\Phi = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}.$$

Όταν το διανυσματικό πεδίο δεν είναι σταθερό και η επιφάνεια δεν είναι επίπεδη, η γενίκευση για το μέγεθος ροή γίνεται ως εξής. Θεωρούμε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ και μία επιφάνεια S . Χωρίζουμε την επιφάνεια σε n στοιχειώδη τμήματα ΔS_i , $i = 1, 2, \dots, n$, που προσεγγιστικά θεωρούνται επίπεδα, Σχήμα 4.2. Αν \mathbf{n}_i είναι το μοναδιαίο κάθετο στο ΔS_i , τότε το διάνυσμα $\Delta \mathbf{S}_i = \mathbf{n}_i \Delta S_i$ έχει μέτρο ΔS_i . Επειδή το εμβαδό ΔS_i είναι πολύ μικρό,



Σχήμα 4.2: Η στοιχειώδης ροή μέσα από κάθε στοιχειώδη επιφάνεια ΔS_i είναι $\mathbf{F}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta S_i$

μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το διανυσματικό πεδίο έχει την ίδια τιμή, \mathbf{F}_i , σε οποιοδήποτε σημείο του τμήματος ΔS_i .

Συνεπώς, η στοιχειώδης ροή, $\Delta \Phi_i$, του διανυσματικού πεδίου που περνά μέσα από κάθε στοιχειώδες τμήμα εμβαδού ΔS_i , είναι $\Delta \Phi_i = \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i$. Κατά συνέπεια, το άθροισμα

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i,$$

παριστάνει κατά προσέγγιση την ολική ροή του διανυσματικού πεδίου που περνά μέσα από την επιφάνεια S . Το όριο του αθροίσματος όταν $n \rightarrow \infty$ (και όταν η λεπτότητα της διαμέρισης, ΔS_i , τείνει στο μηδέν), λέγεται επιφανειακό ολοκλήρωμα του \mathbf{F} πάνω στην επιφάνεια S και συμβολίζεται

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Αν η επιφάνεια είναι κλειστή, σε κάποια βιβλία χρησιμοποιείται το σύμβολο

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Η διαδικασία που χρησιμοποιήσαμε για τη διαισθητική εισαγωγή της έννοιας του επιφανειακού ολοκληρώματος κατάγεται από τη Φυσική. Επισημαίνουμε ότι το μέγεθος ροή (flux), είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το μέγεθος ροή είναι πάντα το επιφανειακό ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου. Υπάρχει λοιπόν διαφορά μεταξύ της έννοιας “ροή” (flow) και του μεγέθους “ροή” (flux). Θεωρούμε τη ροή

(με τη συνήθη έννοια) ενός “υλικού”, όπου “υλικό” μπορεί να είναι κάποιο ρευστό, νέφος ηλεκτρονίων, πληθυσμός ενός βιολογικού είδους, οχήματα κ.λπ. Τα μεγέθη που χαρακτηρίζουν τη ροή είναι (α) η πυκνότητα και (β) το ρεύμα. Η πυκνότητα ή συγκέντρωση του υλικού εκφράζεται ως “υλικό” ανά μονάδα όγκου, ή “υλικό” ανά μονάδα εμβαδού ή “υλικό” ανά μονάδα μήκους, π.χ. kg/m^3 , mol/l , C/m^2 , οχήματα/ km κ.λπ. Το ρεύμα (ή πυκνότητα ρεύματος) εκφράζεται ως “υλικό” που διέρχεται ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στη διεύθυνση της ροής, πχ $\text{kg}/\text{m}^2 \cdot \text{s}$, $\text{mol}/\text{ft}^2 \cdot \text{min}$, $\text{C}/\text{s} \cdot \text{m}^2$. Για παράδειγμα, αν έχουμε ροή μιάς συνεχούς κατανομής ηλεκτρικού φορτίου σε μία περιοχή του χώρου, τότε: (α) η πυκνότητα φορτίου ρ εκφράζεται ως φορτίο ανά μονάδα όγκου. (β) η πυκνότητα ρεύματος \mathbf{J} εκφράζεται ως φορτίο ανά μονάδα χρόνου και επιφάνειας που περνάει από επιφάνεια κάθετη στην ταχύτητα. Στο σύστημα MKSA η πυκνότητα φορτίου $\rho(x, y, z, t)$ μετρείται σε C/m^3 , και η πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ μετρείται σε $\text{C}/\text{s} \cdot \text{m}^2 \equiv \text{A}/\text{m}^2$.

Έστω ένα ρευστό με πυκνότητα $\rho = \rho(x, y, z, t)$ και πεδίο ταχυτήτων $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t)$. Το διανυσματικό πεδίο $\rho\mathbf{v}$ έχει διαστάσεις “μάζα ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας” και όντως όπως θα δούμε στο επόμενο θεώρημα, εκφράζει την παροχή μάζας ανά μονάδα επιφάνειας. Θα μπορούσε να ονομάζεται πυκνότητα ρεύματος, κατ’ αναλογία

με τον ηλεκρομαγνητισμό. Η φυσική σημασία του $\rho\mathbf{v}$ δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

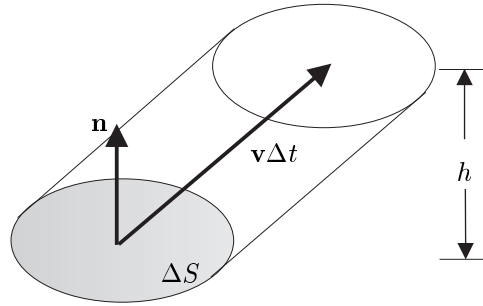
Θεώρημα 4.1. Η ροή του $\rho\mathbf{v}$ μέσα από επιφάνεια S ισούται με την παροχή μάζας δια μέσου της S ,

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τμήμα φλέβας και μία στοιχειώδη επιφάνεια ΔS κάθετη στην ταχύτητα. Τότε μέσα σε χρόνο Δt το ρευστό θα έχει γεμίσει ένα όγκο $\Delta V = \Delta S(v\Delta t)$, οπότε η μάζα αυτού του όγκου είναι $\Delta m = \rho\Delta S(v\Delta t)$. Ήρα η παροχή μάζας μέσα από την ΔS είναι

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho v \Delta S.$$

Συμπεραίνουμε ότι το μέτρο του $\rho\mathbf{v}$ ισούται με την παροχή μάζας ανά μονάδα επιφάνειας τοποθετημένης κάθετα στην ταχύτητα. Γενικότερα, έστω \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο στη στοιχειώδη επιφάνεια ΔS και ας θεωρήσουμε το $\rho\mathbf{v}$ υπολογισμένο σε κάποιο σημείο της ΔS . Στο Σχήμα 4.3 φαίνεται ότι το ύψος του κυλίνδρου είναι $h = (\mathbf{v}\Delta t) \cdot \mathbf{n}$, συνεπώς το ρευστό που περνά από την ΔS ,



Σχήμα 4.3: Μέσα σε χρόνο Δt από τη βάση του κυλίνδρου περνά μάζα ίση με $\rho \Delta S (\mathbf{v} \Delta t) \cdot \mathbf{n}$.

γεμίζει μέσα σε χρόνο Δt κύλινδρο όγκου: (βάση) \times (ύψος) = $\Delta S (\mathbf{v} \Delta t) \cdot \mathbf{n}$ (άρα μάζας $\Delta m = \rho \Delta S (\mathbf{v} \Delta t) \cdot \mathbf{n}$), συνεπώς

$$\frac{dm}{dt} = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Delta S.$$

Αν αντί στοιχειώδους επιφάνειας ΔS έχουμε πεπερασμένη επιφάνεια S , ο παραπάνω τύπος θα γράφεται

$$\frac{dm}{dt} = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad \square$$

- Αν \mathbf{v} είναι το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, δείξτε ότι η ροή της \mathbf{v} μέσα από επιφάνεια S ισούται με την παροχή όγκου (dV/dt) δια μέσου της S ,

$$\frac{dV}{dt} = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

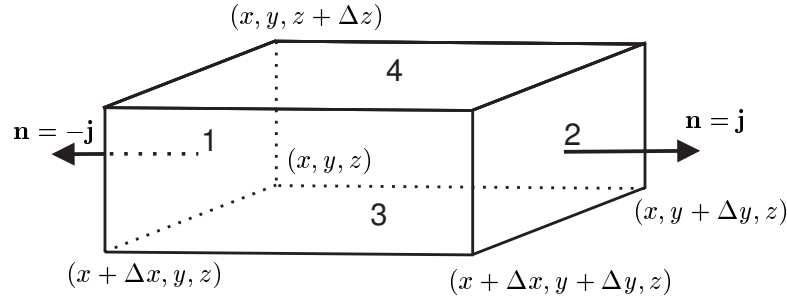
4.2.1 Η γεωμετρική σημασία της απόκλισης

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο προσανατολισμένο κατά τους άξονες (x, y, z) με ακμές $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, βλ. Σχήμα 4.4. Για να υπολογίσουμε τη ροή ενός δ.π. \mathbf{F} δια μέσου της επιφάνειας S του παραλληλεπιπέδου, αρκεί να αθροίσουμε τα επιφανειακά ολοκληρώματα του δ.π. πάνω στις έξι έδρες, δηλαδή

$$\oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \dots + \iint_{S_6} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Στο σχήμα συμβολίζουμε με 1 το κέντρο της έδρας στο επίπεδο (x, z) που περνά από το (x, y, z) , με 2 το κέντρο της απέναντι έδρας κλ.π. Για την πρώτη έδρα το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο είναι $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$, οπότε θα έχουμε

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = - \iint_{S_1} F_y dx dz \simeq -F_y(1) \iint_{S_1} dx dz = -F_y(1) \Delta x \Delta z,$$



Σχήμα 4.4: Ροή μέσα από παραλληλεπίπεδο

όπου με $F_y(1)$ συμβολίζουμε την τιμή της $F_y(x, y, z)$ στο σημείο 1. Δηλαδή για να γράψουμε την τιμή του ολοκληρώματος προσεγγιστικά $\simeq F_y(1) \Delta x \Delta z$, χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα μέσης τιμής για τα ολοκληρώματα (εξηγήστε). Όμοια βρίσκουμε

$$\iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \simeq F_y(2) \Delta x \Delta z.$$

Από το Θεώρημα Taylor, θα έχουμε

$$F_y(2) = F_y(1) + \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta y + \mathcal{O}(\Delta y^2),$$

όπου η τιμή της παραγώγου $\partial F_y / \partial y$ υπολογίζεται στο σημείο 1. Στο όριο $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$, η τιμή της πλησιάζει στην

$$\left. \frac{\partial F_y}{\partial y} \right|_{(x,y,z)}.$$

Επομένως, σε πρώτης τάξης προσέγγιση θα έχουμε

$$\iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial F_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \mathcal{O}(2).$$

Με όμοιο τρόπο, βρίσκουμε για τα άλλα δύο ζεύγη απέναντι εδρών

$$\iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_4} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial F_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z + \mathcal{O}(2),$$

$$\iint_{S_5} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_6} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial F_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \mathcal{O}(2).$$

Συνεπώς το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned} \oiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z + \mathcal{O}(2) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{F} \Delta x \Delta y \Delta z + \mathcal{O}(2). \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να εκφρασθεί ως εξής: $\nabla \cdot \mathbf{F} = \text{ροή σε κλειστή επιφάνεια } S(V) \text{ προς τον όγκο της,}$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{S(V)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}{V}.$$

Επομένως, ένα πεδίο έχει απόκλιση σε κάποιο σημείο (δηλαδή $\nabla \cdot \mathbf{F} \neq 0$), αν η ροή σε μικρή κλειστή επιφάνεια περί το σημείο δεν μηδενίζεται. Με άλλα λόγια, η τιμή του $\nabla \cdot \mathbf{F}$ σε ένα σημείο εκφράζει τη ροή που “εξέρχεται” ή “εισέρχεται” από μικρή κλειστή επιφάνεια περί το σημείο. Για εξερχόμενη ροή θα έχουμε $\nabla \cdot \mathbf{F} > 0$ (πηγή) και για εισερχόμενη ροή θα έχουμε $\nabla \cdot \mathbf{F} < 0$ (καταβόθρα).

4.2.2 Η εξίσωση συνέχειας

Η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (4.2.2)$$

είναι η διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης της μάζας και ονομάζεται εξίσωση της συνέχειας. Όπως θα δούμε έχει μεγάλη σημασία στη μελέτη των ρευστών. Ειδικώς αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο ($\rho(x, y, z, t) = \rho = \text{constant}$), τότε από την (4.2.2) προκύπτει

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Αυστηρή απόδειξη της διαφορικής εξίσωσης συνέχειας μπορεί να δοθεί χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Gauss που διδάσκεται σε μάθημα επιλογής. Παρά ταύτα, η επιχειρηματολογία που ακολουθεί μας επιτρέπει να κατανοήσουμε πώς προκύπτει η εξίσωση αυτή. Έστω μία ποσότητα ρευστού, όγκου ΔV που περικλείεται από κλειστή επιφάνεια S . Μπορούμε να θεωρούμε ως όγκο τον όγκο $\Delta x \Delta y \Delta z$ του στοιχειώδους παραλληλεπίπεδου της προηγούμενης παραγράφου. Λόγω της εκροής του ρευστού από την επιφάνεια S , ο ρυθμός μεταβολής της μάζας θα δίνεται σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1 από τη σχέση

$$\frac{dm}{dt} = - \oiint_S \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}.$$

Το πρόσημο μείον οφείλεται στο ότι θεωρούμε ότι η μάζα ελαττώνεται καθώς το ρευστό εκρέει διαπερνώντας την επιφάνεια S . Η μάζα του ρευστού μέσα στον όγκο είναι

$$m(t) \simeq \rho \Delta V = \rho(x, y, z, t) \Delta V. \quad (4.2.3)$$

Το σύμβολο \simeq τίθεται γιατί η πυκνότητα μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, αν όμως ΔV είναι πολύ μικρός, τότε η πυκνότητα ρ μπορεί να θεωρηθεί σταθερή

μέσα στον ΔV . Παραγωγίζοντας την (4.2.3) θα έχουμε

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\Delta V) = \frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta V.$$

Έχουμε λοιπόν δύο σχέσεις που εκφράζουν την παροχή dm/dt , επομένως τα δεύτερα μέλη τους δίνουν

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta V = - \oiint_S \rho\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.2.4)$$

Η εξίσωση (4.2.4), είναι η ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης της μάζας, (σχολιάστε τη φυσική σημασία της). Χρησιμοποιούμε τώρα το αποτέλεσμα (4.2.1) της προηγούμενης παραγράφου για να εκφράσουμε τη ροή του $\rho\mathbf{v}$, οπότε θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho}{\partial t}\Delta V &= -\nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \Delta V \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) \right) \Delta V &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Επειδή ο όγκος ΔV είναι αυθαίρετος (δηλαδή η (4.2.5) ισχύει σε κάθε στοιχειώδη όγκο ΔV), θα έχουμε

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0,$$

δηλαδή την εξίσωση της συνέχειας.

4.3 Οι εξισώσεις κίνησης των ρευστών

Όπως είναι γνωστό, μεταξύ των μορίων ασκούνται δυνάμεις Van der Waals που είναι ελκτικές για σχετικώς μικρές αποστάσεις. Οι δυνάμεις αυτές είναι υπεύθυνες για την εμφάνιση διαφόρων φαινομένων όπως, η υγροποίηση των αερίων, η επιφανειακή τάση κ.λπ. Δυνάμεις μεταξύ ομοειδών μορίων λέγονται *δυνάμεις συνοχής*. Στα στερεά σώματα η συνοχή είναι έκδηλη (αντοχή των υλικών). Συνοχή εμφανίζεται και στα ρευστά, π.χ. ο σίφωνας λειτουργεί ακριβώς λόγω των δυνάμεων συνοχής του υγρού. Ελκτικές δυνάμεις μεταξύ ετεροειδών μορίων λέγονται *δυνάμεις συνάφειας*. Για παράδειγμα, τα μόρια της κιμωλίας συγκρατούνται στον πίνακα με δυνάμεις συνάφειας. Όμοια, οι δυνάμεις μεταξύ υγρών και των στερεών τοιχωμάτων των δοχείων που τα περιέχουν είναι δυνάμεις συνάφειας.

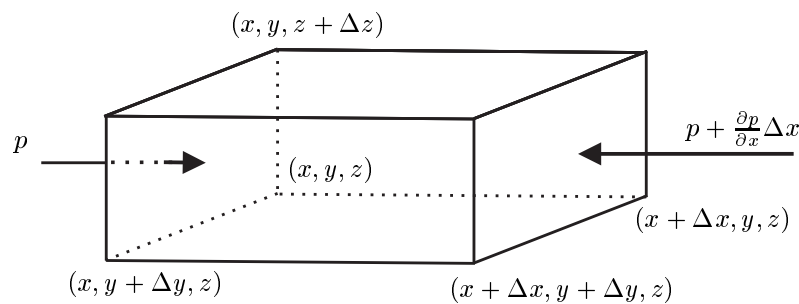
Στις επόμενες παραγράφους, θα εξετάσουμε την κατασκευή των εξισώσεων κίνησης των ρευστών, πρώτα αγνοώντας τις δυνάμεις συνοχής και στη συνέχεια

λαμβάνοντας τις υπ' όψιν, ουσιωδώς λαμβάνοντας υπ' όψιν και το ιξώδες του ρευστού. Οι εξισώσεις κίνησης συμπληρώνονται από την εξίσωση συνέχειας που θεωρούμε γνωστή από προηγούμενη παράγραφο.

4.3.1 Ιδανικά ρευστά

Θα εξετάσουμε πρώτα *ιδανικά ρευστά*, δηλαδή ρευστά με μηδενικό ιξώδες. Σε ένα ιδανικό ρευστό οι δυνάμεις είναι πάντα κάθετες σε οποιαδήποτε επιφάνεια μέσα στο ρευστό. Ένα ιδανικό ρευστό δεν παρουσιάζει εσωτερική τριβή και δεν παρουσιάζει δυνάμεις συνάφειας με τα στερεά με τα οποία έρχεται σε επαφή. Επομένως οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα στοιχειώδη όγκο του ρευστού είναι δύο τύπων: δύναμη λόγω πίεσης και εξωτερική δύναμη (π.χ. βαρύτητα).

Θεώρημα 4.2. Η δύναμη ανά μονάδα όγκου λόγω πίεσης είναι $-\nabla p$.



Σχήμα 4.5: Για την καλύτερη απόδοση του σχήματος, επελέγη αριστερόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

Απόδειξη. Η πίεση μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο, είναι δηλαδή συνάρτηση της θέσης. Για να βρούμε την ολική δύναμη λόγω πίεσης σε ένα στοιχειώδη όγκο του υγρού, θεωρούμε ένα μικρό παραλληλεπίπεδο προσανατολισμένο κατά τους άξονες (x, y, z) με ακμές $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, βλ. Σχήμα 4.5. Συμβολίζουμε με 1 το κέντρο της έδρας στο επίπεδο (x, z) που περνά από το (x, y, z) , με 2 το κέντρο της απέναντι έδρας κλ.π. Η πίεση στην μία έδρα στο x προκαλεί πάνω στην έδρα δύναμη $p\Delta y\Delta z$, όπου $p = p(1)$. Η πίεση στην απέναντι έδρα στο $x + \Delta x$ είναι

$$p(2) = p(1) + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

άρα η δύναμη στην έδρα αυτή θα είναι

$$-\left[p(1) + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x + \mathcal{O}(\Delta x^2)\right]\Delta y\Delta z,$$

και η ολική δύναμη που δρα στο παραλληλεπίπεδο όταν $\Delta x \rightarrow 0$ έχει x συνιστώσα

$$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Ανάλογες είναι και οι άλλες συνιστώσες της δύναμης π.χ., η ολική δύναμη στο παραλληλεπίπεδο έχει y συνιστώσα

$$F_y = -\frac{\partial p}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Τελικά θα έχουμε

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k}\right) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η δύναμη ανά μονάδα όγκου που οφείλεται στην πίεση είναι $-\nabla p$. □

Οι εξισώσεις Euler

Πρωταρχικό μέγεθος είναι το πεδίο ταχυτήτων $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ με συνιστώσες (v_x, v_y, v_z) . Σημειώστε ότι οι ωκεανογράφοι συμβολίζουν τις συνιστώσες της ταχύτητας ως (u, v, w) , δηλαδή $(v_x, v_y, v_z) \equiv (u, v, w)$. Οι εξισώσεις κίνησης ενός ρευστού προκύπτουν από την εφαρμογή του νόμου του Νεύτωνα σε ένα στοιχείο όγκου. Συμβολίζοντας με \mathbf{f} την ολική δύναμη ανά μονάδα όγκου, ο νόμος του Νεύτωνα γράφεται

$$\rho \times (\text{επιτάχυνση}) = \mathbf{f}.$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις, η μοναδική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο υγρό είναι η βαρύτητα. Η ολική δύναμη είναι το άθροισμα τριών όρων: δύναμη λόγω πίεσης, $-\nabla p$, εξωτερική δύναμη, \mathbf{f}_{ext} , π.χ. βαρύτητα και δύναμη τριβής \mathbf{f}_{visc} , που οφείλεται στο ιξώδες του ρευστού. Όπως υποθέσαμε από την αρχή, αγνοούμε το ιξώδες, οπότε η εξίσωση κίνησης γράφεται ως

$$\rho \times (\text{επιτάχυνση}) = -\nabla p + \mathbf{f}_{ext}.$$

Για την επιτάχυνση, η πρώτη σκέψη είναι ότι δίνεται από τη μερική παράγωγο της ταχύτητας ως προς το χρόνο, δηλαδή $\partial \mathbf{v} / \partial t$. Όμως $\partial \mathbf{v} / \partial t$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ σε κάποιο σταθερό σημείο (x, y, z) του χώρου. Ενδιαφερόμαστε για το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας ενός στοιχειώδους τμήματος του ρευστού. Ας φανταστούμε ότι χρωματίζουμε μία στοιχειώδη σταγόνα και παρακολουθούμε την κίνησή της. Μέσα σε χρόνο Δt θα έχει μετακινηθεί στη διεύθυνση x κατά $v_x \Delta t$, στη διεύθυνση y κατά $v_y \Delta t$ και στη διεύθυνση

z κατά $v_z \Delta t$. Συνεπώς, η ταχύτητα της που τη στιγμή t στη θέση (x, y, z) ήταν $\mathbf{v}(t, x, y, z)$, τη στιγμή $t + \Delta t$ θα είναι $\mathbf{v}(t + \Delta t, x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t)$. Από το θεώρημα Taylor, θα έχουμε

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}(t + \Delta t, x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t) \\ &= \mathbf{v}(t, x, y, z) + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} v_x \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} v_y \Delta t + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} v_z \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2). \end{aligned}$$

Σχηματίζοντας το πηλίκο Newton

$$\frac{\mathbf{v}(t + \Delta t, x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t) - \mathbf{v}(t, x, y, z)}{\Delta t},$$

και παίρνοντας το όριο όταν $\Delta t \rightarrow 0$, βρίσκουμε ότι η επιτάχυνση δίνεται από την

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}.$$

Η παράσταση αυτή, λέγεται ολική παράγωγος (ή υλική παράγωγος από το material derivative) της ταχύτητας ως προς το χρόνο (σε αντιδιαστολή με τη μερική παράγωγο $\partial \mathbf{v} / \partial t$) και συμβολίζεται με $D\mathbf{v} / Dt$. Παρατηρούμε ότι η ολική παράγωγος της ταχύτητας γράφεται ως

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v},$$

και χρησιμοποιώντας τον τελεστή ανάδελτα ∇ , θα έχουμε τελικά

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (4.3.1)$$

Έτσι οι εξισώσεις κίνησης του ρευστού παίρνουν τη μορφή

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathbf{f}_{ext}. \quad (4.3.2)$$

Οι εξισώσεις αυτές διατυπώθηκαν από τον Euler (1755) και φέρουν το όνομά του. Οι εξισώσεις Euler συμπληρώνονται με την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

και περιγράφουν πλήρως τη ροή ενός ιδανικού ρευστού.

Παρατήρηση 4.1. Όσοι αδυνατούν να παρακολουθήσουν τη φυσική επιχειρηματολογία για την εξαγωγή του τύπου της ολικής παραγώγου, μπορούν να περιοριστούν απλά στην παράγωγο κατά μήκος καμπύλης. Υπενθυμίζουμε ότι

για μία βαθμωτή συνάρτηση $\phi(x, y, z)$, η παράγωγος κατά μήκος καμπύλης με εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο \mathbf{v} δίνεται από τον τύπο $\mathbf{v} \cdot \nabla \phi$, όπου

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \phi \equiv v_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Προφανώς αν ϕ εξαρτάται και από το χρόνο t , τότε η (ολική) παράγωγος κατά μήκος της καμπύλης θα δίνεται από την

$$\frac{D\phi}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Για διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} , θα έχουμε

$$\frac{D\mathbf{F}}{Dt} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t},$$

και ο τύπος (4.3.1) είναι πλέον προφανής.

Παρατήρηση 4.2. Αν η κίνηση πραγματοποιείται μέσα σε πεδίο βαρύτητας με δυναμικό ϕ , τότε $\mathbf{f}_{ext} = -\rho \nabla \phi$. Κοντά στην επιφάνεια της γης και θεωρώντας τον άξονα z κατακόρυφο με φορά προς τα πάνω, θα έχουμε $\phi(x, y, z) = gz$, όπου $g = 9.8 \text{ N/kg}$ είναι το μέτρο της έντασης του πεδίου βαρύτητας \mathbf{g} . Επειδή

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = g,$$

θα έχουμε $\nabla \phi = g\mathbf{k}$, όπου \mathbf{k} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη θετική φορά του άξονα z . Συμπεραίνουμε ότι η δύναμη ανά μονάδα όγκου θα είναι $\mathbf{f}_{ext} = -\rho g\mathbf{k} = \rho \mathbf{g}$. Επομένως, μέσα στο βαρυτικό πεδίο της γης οι εξισώσεις Euler γράφονται

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}. \quad (4.3.3)$$

Οι εξισώσεις Euler ανάγονται στις εξισώσεις της υδροστατικής στην περίπτωση που το ρευστό ηρεμεί μέσα σε σταθερό πεδίο βαρύτητας. Πράγματι, όταν $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ παντού, οι (4.3.3) παίρνουν τη μορφή

$$\nabla p = \rho \mathbf{g},$$

και περιγράφουν τη μηχανική ισορροπία του ρευστού. Αν υποθέσουμε ότι η πυκνότητα είναι σταθερή, οι εξισώσεις αυτές, δηλαδή οι

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

ολοκληρώνονται αμέσως,

$$p = p(z) = -\rho g z + C,$$

όπου C είναι σταθερή.

Ορισμός 4.1. Μία ροή λέγεται ασυμπίεστη αν $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$.

Παρατήρηση 4.3. Ο παραπάνω ορισμός δεν αναφέρεται σε ασυμπίεστα ρευστά και δεν συνεπάγεται ότι η πυκνότητα είναι σταθερή. Πράγματι, αν η ροή είναι ασυμπίεστη, τότε η εξίσωση της συνέχειας γράφεται

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0,$$

δηλαδή $\partial \rho / \partial t \neq 0$.

Αν η ροή είναι αστρόβιλη, δηλαδή $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, τότε υπάρχει συνάρτηση δυναμικού U τέτοια ώστε $\mathbf{v} = \nabla U$. Στην περίπτωση αυτή, η συνθήκη ασυμπίεστης ροής, $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, γράφεται

$$\nabla^2 U = 0.$$

Συνεπώς το πρόβλημα προσδιορισμού του πεδίου ταχυτήτων ανάγεται στην επίλυση της εξίσωσης Laplace με κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.

Το Θεώρημα Bernoulli

Σε περίπτωση *στάσιμης ροής*, δηλαδή όταν η ταχύτητα του ρευστού σε οποιοδήποτε σημείο δεν μεταβάλλεται,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0},$$

συνέπεια των εξισώσεων Euler είναι το Θεώρημα Bernoulli.

Θεώρημα 4.3 (Bernoulli). Σε *στάσιμη ροή ιδανικού, ασυμπίεστου ρευστού, το άθροισμα*

$$p + \rho \phi + \frac{1}{2} \rho v^2,$$

παραμένει σταθερό κατά μήκος μιάς ρευματικής γραμμής.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε το συμβολισμό $v^2 \equiv |\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$. Από την υπόθεση του ασυμπίεστου ρευστού προκύπτει ότι $\rho = \text{constant}$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}),$$

οι εξισώσεις Euler για στάσιμη ροή μέσα σε πεδίο βαρύτητας με δυναμικό ϕ , παίρνουν τη μορφή

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi. \quad (4.3.4)$$

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά την (4.3.4) με \mathbf{v} (και επειδή ο όρος $(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$ δίνει μηδέν), προκύπτει

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}v^2 \right) = 0.$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης μέσα στην παρένθεση κατά την διεύθυνση \mathbf{v} (κατευθυνόμενη παράγωγος) είναι μηδέν. Επομένως, κατά μήκος μίας ρευματικής γραμμής θα έχουμε

$$\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}v^2 = C,$$

όπου η σταθερά C είναι διαφορετική για κάθε ρευματική γραμμή. \square

Το αποτέλεσμα ισχύει προσεγγιστικά και κατά μήκος μίας φλέβας.

Παρατήρηση 4.4. Σε περίπτωση αστρόβιλης ροής, ο όρος $(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$ είναι παντού μηδέν, επομένως για στάσιμη ροή από την (4.3.4) προκύπτει

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}v^2 \right) = 0,$$

άρα

$$\frac{p}{\rho} + \phi + \frac{1}{2}v^2 = C,$$

όπου η σταθερά C έχει την ίδια τιμή παντού.

Παρατήρηση 4.5. Όπως προαναφέραμε, κοντά στην επιφάνεια της γης είναι $\phi(x, y, z) = gz$, οπότε το θεώρημα του Bernoulli διατυπώνεται στη συνήθη μορφή ως εξής. Για ασυμπίεστο ρευστό και στάσιμη ροή,

$$p + \rho gz + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constant},$$

κατά μήκος μίας ρευματικής γραμμής. Ας σημειωθεί ακόμα ότι στη γενικώτατη περίπτωση συμπιεστού ρευστού, μη στάσιμης ροής και μη αμελητέο ιξώδες, το θεώρημα Bernoulli ισχύει “ποιοτικά” με την εξής διατύπωση: Η πίεση ελαττώνεται σε περιοχές μεγάλων ταχυτήτων.

4.3.2 Πραγματικά ρευστά

Στα ακίνητα ρευστά η δύναμη σε οποιοδήποτε τμήμα επιφάνειας είναι κάθετη σ' αυτό. Τούτο δεν ισχύει σε κινούμενα πραγματικά ρευστά. Σ' αυτά εμφανίζονται διατμητικές τάσεις, δηλαδή μεταξύ στρωμάτων διαφορετικής ταχύτητας εξασκούνται δυνάμεις πλάγιες ως προς το τμήμα επιφάνειας που θεωρούμε.

Η παράλληλη προς την επιφάνεια συνιστώσα της δύναμης λέγεται *διατμητική δύναμη*. Η φορά της δύναμης αυτής είναι τέτοια ώστε να τείνει να εξισώσει τις ταχύτητες των στρωμάτων, επιταχύνοντας το βραδύτερο στρώμα και επιβραδύνοντας το ταχύτερο. Για τη μελέτη της κίνησης των πραγματικών ρευστών θα θεωρούμε όχι μόνο την πίεση, αλλά και την διατμητική τάση. Ακόμα, λόγω της συνάφειας, το ρευστό έχει την ταχύτητα του στερεού στα σημεία επαφής.

Οι εξισώσεις Navier-Stokes

Αποδεικνύεται ότι η δύναμη ανά μονάδα όγκου λόγω του ιξώδους, \mathbf{f}_{visc} , περιέχει τις δεύτερες παραγώγους τις ταχύτητας ως προς τις συντεταγμένες x, y, z . Μπορεί να αποδειχθεί ότι η πιο γενική μορφή μιάς διανυσματικής παράστασης που περιέχει δεύτερες παραγώγους του διανυσματικού πεδίου \mathbf{v} είναι γραμμικός συνδυασμός δυο όρων: ένας όρος που περιέχει τη Laplacian του \mathbf{v} (δηλαδή $\nabla^2 \mathbf{v}$) και ένας όρος που περιέχει το gradient του $\text{div } \mathbf{v}$ (δηλαδή $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$). Υπάρχει ακόμα ένα διανυσματικό πεδίο που περιέχει δεύτερες παραγώγους του \mathbf{v} , το $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$. Λόγω της ταυτότητας όμως

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v},$$

η προσθήκη του δεν προσφέρει τίποτα παραπάνω από τους δύο όρους που προαναφέρθηκαν. Επομένως η πιο γενική μορφή μιας διανυσματικής παράστασης που περιέχει δεύτερες παραγώγους του διανυσματικού πεδίου \mathbf{v} είναι γραμμικός συνδυασμός των όρων $\nabla^2 \mathbf{v}$ και $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$. Το τελικό αποτέλεσμα γράφεται ως

$$\mathbf{f}_{visc} = \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \zeta) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}).$$

Οι συντελεστές η και ζ λέγονται πρώτος και δεύτερος συντελεστής ιξώδους αντίστοιχα.

Έτσι, οι εξισώσεις κίνησης των ρευστών παίρνουν τη μορφή

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - \rho \nabla \phi + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \zeta) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (4.3.5)$$

Πρόκειται για τις εξισώσεις Navier-Stokes που γενικεύουν τις εξισώσεις Euler διότι περιγράφουν ρευστά με τριβή.

Για ασυμπίεστη ροή (δηλ. $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) μέσα σε σταθερό πεδίο βαρύτητας οι εξισώσεις κίνησης των ρευστών παίρνουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Όταν $\eta = 0$, οι εξισώσεις Navier-Stokes (4.3.6) ανάγονται στις εξισώσεις Euler. Οι εξισώσεις Navier-Stokes όπως και οι εξισώσεις Euler, είναι μη γραμμικές λόγω του όρου $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$.

Σημειώνουμε ότι για ασυμπίεστη ροή, η εξίσωση συνέχειας $(\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0)$ γράφεται

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\rho = 0.$$

4.3.3 Συνοριακές συνθήκες

Υποθέτουμε ότι το ρευστό καταλαμβάνει μιά περιοχή $D \subset \mathbb{R}^3$. Κατά συνέπεια οι εξισώσεις Euler ή οι εξισώσεις Navier-Stokes (4.3.6) και η εξίσωση συνέχειας ισχύουν στην περιοχή D .

Ας θεωρήσουμε πρώτα τις συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στις εξισώσεις Euler. Ένα ιδανικό ρευστό έχει μηδενική κάθετη συνιστώσα ταχύτητας στα στερεά τοιχώματα με τα οποία είναι σε επαφή. Με άλλα λόγια, το ρευστό δεν μπορεί να διαπεράσει το σύνορο, μπορεί όμως να κινείται εφαπτομενικά με αυτό. Επομένως αν ∂D είναι το σύνορο της περιοχής D , και \mathbf{n} είναι το μοναδιαίο κάθετο στο ∂D , οι συνοριακές συνθήκες για τις εξισώσεις Euler είναι

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{στο } \partial D.$$

Θεωρούμε τώρα τις συνοριακές συνθήκες που επιβάλλονται στις εξισώσεις Navier-Stokes. Όπως έχουμε αναφέρει, στα πραγματικά ρευστά ισχύει η συνθήκη μη ολίσθησης (*no slip condition*), δηλαδή η ταχύτητα του ρευστού στα ακίνητα στερεά τοιχώματα είναι μηδέν. Επομένως, οι συνοριακές συνθήκες για τις εξισώσεις Navier-Stokes είναι

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{στο } \partial D.$$

Η συνθήκη $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ μας λέει ότι, όχι μόνο η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο σύνορο ∂D μηδενίζεται, αλλά όλες οι συνιστώσες της \mathbf{v} είναι μηδέν.

Η αύξηση του αριθμού των συνοριακών συνθηκών από τις εξισώσεις Euler στις εξισώσεις Navier-Stokes είναι απαραίτητη και από μαθηματικής πλευράς, λόγω του επιπλέον όρου $\nabla^2 \mathbf{v}$ που περιέχει κατά μία τάξη ανώτερες παραγωγούς του πεδίου \mathbf{v} . Οι επιπλέον συνοριακές συνθήκες είναι αναγκαίες για την απόδειξη ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών για τις εξισώσεις Navier-Stokes είναι καλώς τοποθετημένο, δηλαδή ότι υπάρχει μοναδική λύση που εξαρτάται με συνεχή τρόπο από τα αρχικά δεδομένα. Η ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων των (4.3.6) για μικρά χρονικά διαστήματα, καθώς και η συνεχής εξάρτηση από τα

αρχικά δεδομένα εξασφαλίζεται από τα γνωστά θεωρήματα (local existence and uniqueness theorems). Παραμένει όμως ανοικτό το πρόβλημα ύπαρξης και μοναδικότητας ομαλών λύσεων (smooth solutions) για *κάθε χρόνο* στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής. Παρ' όλο που αριθμητικές λύσεις παράγονται καθημερινά (π.χ. στην πρόγνωση του καιρού ή στα πλαίσια της παράκτιας μηχανικής), οι ιδιότητες των λύσεων αποτελούν ακόμα ανοικτό μαθηματικό πρόβλημα. Το πρόβλημα (smoothness problem), της ύπαρξης λύσεων για κάθε t που είναι συνεχείς και δεν εμφανίζουν ιδιομορφίες (singularities), είναι αθλοθετημένο για 1.000.000 \$ από το Clay Mathematics Institute, ως ένα από τα επτά σημαντικότερα μαθηματικά προβλήματα της χιλιετίας.¹

4.3.4 Καταστατικές εξισώσεις

Η κατάσταση ενός θερμοδυναμικού συστήματος, π.χ. ενός αερίου καθορίζεται από κάποια μεγέθη όπως η πίεση p , ο όγκος V και η θερμοκρασία T . Συνήθως δύο από αυτά καθορίζουν το τρίτο και εξισώσεις της μορφής $p = p(V, T)$, ή $p = p(\rho, T)$ λέγονται καταστατικές εξισώσεις. Στα επόμενα, χάριν απλότητας θα θεωρούμε σταθερή τη θερμοκρασία του ρευστού και ως *εξίσωση κατάστασης* θα υποθέτουμε μία σχέση μεταξύ πίεσης και πυκνότητας, $p = p(\rho)$.

Από μαθηματικής πλευράς, θεωρούμε ένα βαθμωτό πεδίο, $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, και μία πραγματική συνάρτηση, $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε η σύνθεση $p \circ \rho$ ορίζει ένα νέο βαθμωτό πεδίο $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $p = p(\rho(x, y, z))$. Το gradient του p δίνεται από τον τύπο

$$\nabla p = \frac{dp}{d\rho} \nabla \rho. \quad (4.3.7)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί ειδική περίπτωση του κανόνα της αλυσίδας. Διοθέντος ότι σε ρεαλιστικά μοντέλα η πίεση είναι αύξουσα συνάρτηση της πυκνότητας, δηλ $dp/d\rho > 0$, συμπεραίνουμε από την (4.3.7) ότι το gradient της πίεσης είναι ομόρροπο με το gradient της πυκνότητας.

Ως παράδειγμα θεωρούμε ένα αέριο πυκνότητας $\rho = \rho(x, y, z)$, με πίεση p , που δίνεται από την καταστατική εξίσωση $p = k\rho^\gamma$, με $\gamma \geq 1$. Τότε $\nabla p = \gamma k\rho^{\gamma-1} \nabla \rho$. Ο τύπος (4.3.7) παραμένει αληθής και στην περίπτωση

¹Στην παρουσίαση του μαθηματικού προβλήματος ο Fefferman, (Fields medal 1978), καταλήγει ως εξής. Let me end with a few words about the significance of the problems posed here. Fluids are important and hard to understand. There are many fascinating problems and conjectures about the behavior of solutions of the Euler and Navier–Stokes equations. Since we don't even know whether these solutions exist, our understanding is at a very primitive level. Standard methods from PDE appear inadequate to settle the problem. Instead, we probably need some deep, new ideas.

που η πυκνότητα είναι συνάρτηση και του χρόνου, $\rho = \rho(x, y, z, t)$.

4.3.5 Σύνοψη

- Οι εξισώσεις κίνησης των ρευστών έχουν τη μορφή

$$\rho \times (\text{επιτάχυνση}) = \text{ολική δύναμη ανά μονάδα όγκου.}$$

Η ολική δύναμη ανά μονάδα όγκου είναι το άθροισμα της δύναμης λόγω πίεσης ($-\nabla p$), της δύναμης βαρύτητας (π.χ. $\rho \mathbf{g}$) και της δύναμης τριβής ($\eta \nabla^2 \mathbf{v} + (\eta + \zeta) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$).

- Η υλική παράγωγος (D/Dt) γενικεύει την κατευθυνόμενη παράγωγο και εκφράζει ρυθμό μεταβολής κατά μήκος της ροής του ρευστού.
- Ασυμπίεστη ροή ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), δεν συνεπάγεται ότι $\partial \rho / \partial t = 0$, βλ. Παρατήρηση 4.3.
- Τα ιδανικά ρευστά περιγράφονται από τις εξισώσεις Euler (4.3.3), τις οποίες επαναλαμβάνουμε

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}.$$

Τα πραγματικά ρευστά (δηλαδή με τριβή) περιγράφονται από τις εξισώσεις Navier-Stokes (4.3.5) τις οποίες επαναλαμβάνουμε για ασυμπίεστη ροή μέσα σε σταθερό πεδίο βαρύτητας

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0. \end{aligned}$$

- Οι συνοριακές συνθήκες των εξισώσεων Navier-Stokes είναι περισσότερες από τις συνοριακές συνθήκες των εξισώσεων Euler.

4.3.6 Ασκήσεις

1. Στην περίπτωση υγρού σε σταθερό πεδίο βαρύτητας στην επιφάνεια της γης, θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων των ωκεανογράφων, δηλαδή άξονας $x'x$ κατά τη διεύθυνση W-E, άξονας $y'y$ κατά τη διεύθυνση S-N, άξονας $z'z$ κατακόρυφος. Γράψετε την τρίτη συνιστώσα των εξισώσεων (4.3.5) και την τρίτη συνιστώσα των εξισώσεων (4.3.6).

2. Δείξτε ότι αν η ροή είναι ασυμπίεστη, δηλαδή $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, τότε από την εξίσωση της συνέχειας προκύπτει

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

3. Δείξτε τις ιδιότητες της ολικής παραγώγου (γραμμικότητα και ιδιότητα Leibniz)

$$\frac{D}{Dt}(\phi + \psi) = \frac{D\phi}{Dt} + \frac{D\psi}{Dt}, \quad \text{και} \quad \frac{D(\lambda\phi)}{Dt} = \lambda \frac{D\phi}{Dt}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{D}{Dt}(\phi\psi) = \frac{D\phi}{Dt}\psi + \phi \frac{D\psi}{Dt}.$$

4. Θεωρούμε ένα ρευστό σταθερής πυκνότητας ρ , με πεδίο ταχυτήτων $\mathbf{v} = (u, v, w)$, όπου $v = \text{const}$, και $u = u(x, y, z)$, $w = w(x, y, z)$ αυθαίρετες συναρτήσεις της θέσης. Έστω S το εμβαδόν ενός δίσκου στο επίπεδο $x - z$. Δείξτε ότι η ροή του πεδίου \mathbf{v} δια μέσου της επιφάνειας S , δηλαδή το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$, ισούται με vS . Τι εκφράζουν τα vS και ρvS ;
5. Δίνεται το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού

$$\mathbf{v}(t, x, y, z) = (0, x(1-x), 0).$$

Σχεδιάστε το δ.π. \mathbf{v} . Τι μπορεί να παριστάνει; Δείξτε ότι η ροή είναι στάσιμη, ασυμπίεστη, αλλά όχι αστρόβιλη. Αντικαταστήστε το δ.π. \mathbf{v} στις εξισώσεις Euler και δείξτε ότι η βαθμίδα πίεσης ισορροπεί με τις εξωτερικές δυνάμεις ανά μονάδα όγκου, δηλαδή, $\nabla p = \mathbf{f}_{ext}$.

6. Το πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού είναι $\mathbf{v}(t, x, y, z) = xy\mathbf{i} + 4tz^2\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$. Εξετάστε αν η ροή είναι στάσιμη, ασυμπίεστη ή αστρόβιλη. Υπολογίστε την επιτάχυνση $D\mathbf{v}/Dt$.
7. Το πεδίο ταχυτήτων μιας στρωματοποιημένης ροής είναι $\mathbf{v}(t, x, y, z) = 10(z - z^2)\mathbf{i}$, και η πυκνότητα του ρευστού είναι $\rho(t, x, y, z) = 1000(1 - 0.1z)$. Εξετάστε αν η ροή είναι στάσιμη, ασυμπίεστη ή αστρόβιλη. Υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας κατά την διεύθυνση της ροής, $D\rho/Dt$.

8. Θεωρούμε ιδανικό ρευστό μέσα σε πεδίο βαρύτητας με δυναμικό ϕ , οπότε οι εξισώσεις Euler παίρνουν τη μορφή

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p - \rho \nabla \phi.$$

Υποθέτουμε ότι η πίεση είναι συνάρτηση της πυκνότητας, $p = p(\rho)$, και μάλιστα αύξουσα, οπότε π.χ. $\nabla p = p'(\rho) \nabla \rho$, με $p'(\rho) = dp/d\rho > 0$. Αποδείξτε πρώτα την ταυτότητα

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla u^2,$$

όπου $u = |\mathbf{u}|$. Στη συνέχεια ορίζουμε ένα νέο διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{\Omega}$, ως $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, ουσιαδώς τον στροβιλισμό (vorticity) της ταχύτητας. Δείξτε ότι η εξίσωση κίνησης των ρευστών γράφεται

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{2} \nabla u^2 - \frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \phi.$$

Παίρνοντας το στροβιλισμό και στα δύο μέλη, δείξτε ότι

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

Ερώτηση: Πού χρειάστηκε η υπόθεση $p = p(\rho)$;

Βιβλιογραφία

- [1] M.R. Spiegel, *Ανώτερα Μαθηματικά*, σειρά Schaum's (Εκδόσεις Τζιόλα 2005).
- [2] R.L. Finney, M.D. Weir, F.R. Giordano, *Απειροστικός Λογισμός*, (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).
- [3] J.E. Marsden and A.J. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός* (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης).
- [4] H.M. Schey, *Div, Grad, Curl, and All That: An Informal Text on Vector Calculus*, W.W. Norton and Company 2005).
- [5] D. Bachman, *Advanced Calculus Demystified*, (McGraw-Hill 2007).