Μαθηματικά ΙΙ

Υπεύθυνος Καθηγητής:

Γιάννης Ανδρουλιδάκης

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ, ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ, ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ

Εαρινό Εξάμηνο 2024-2025

διανυσματικά πεδία

Τα **διανυσματικά πεδία** (vector fields) είναι μαθηματικές συναρτήσεις που σε κάθε σημείο του χώρου (ή του επιπέδου) αντιστοιχούν ένα διάνυσμα. Δηλαδή, σε αντίθεση με τα **βαθμωτά πεδία** που δίνουν μία μόνο τιμή (π.χ. θερμοκρασία), τα διανυσματικά πεδία δίνουν μέγεθος και κατεύθυνση (π.χ. ταχύτητα ανέμου, ταχύτητα ρεύματος, μαγνητικό πεδίο).

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_y) \qquad \text{ή } \mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) \qquad \text{ή } \mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$$

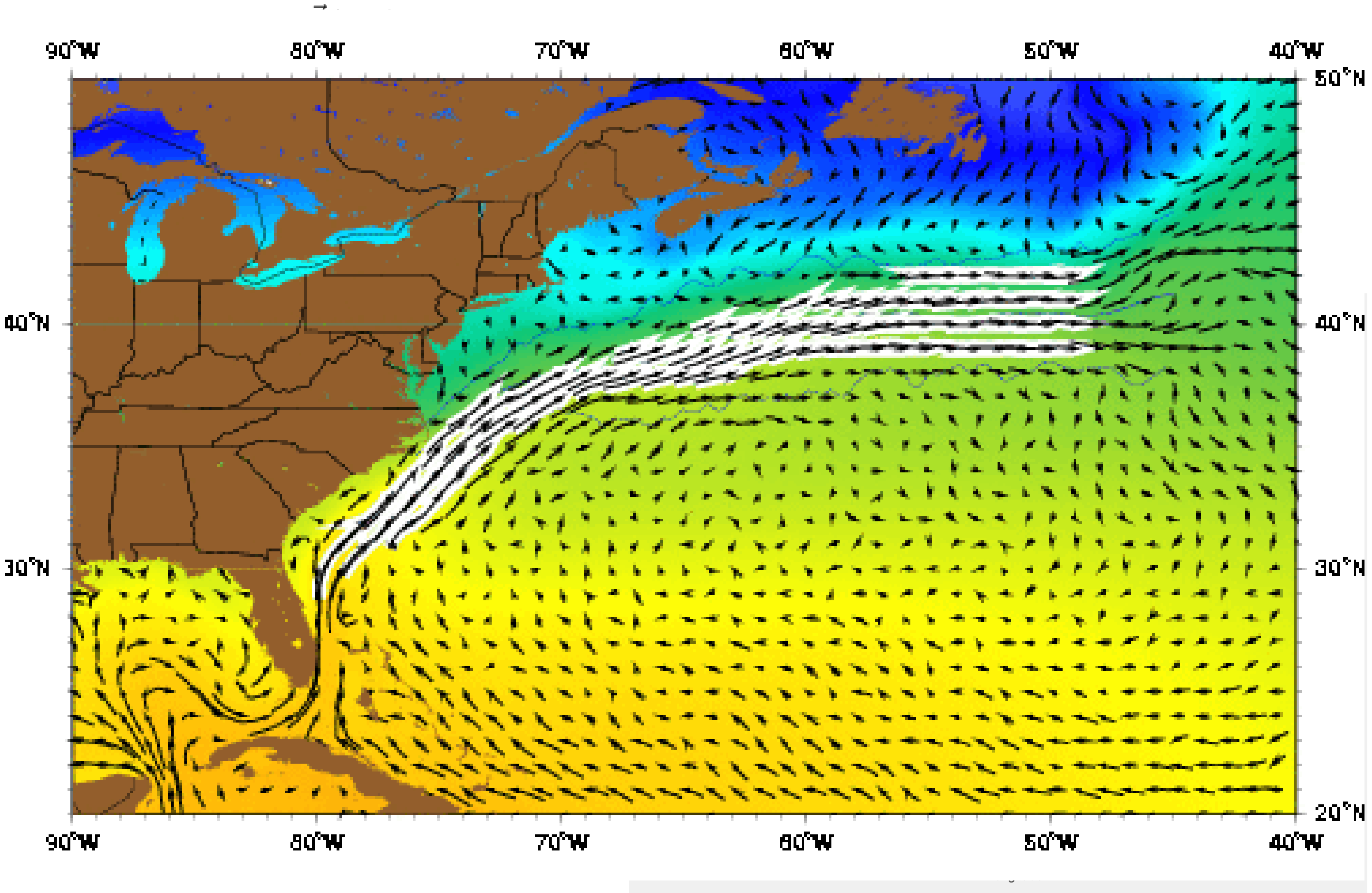
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\,\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\,\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\,\mathbf{k}$$

Όπου:

- $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ και $F_3(x, y, z)$ είναι συναρτήσεις που δίνουν τις συνιστώσες του διανύσματος ως προς x, y και z.
- i, j, k είναι μοναδιαία διανύσματα στις κατευθύνσεις x, y, και z

διανυσματικά πεδία

Παράδειγμα: Διανυσματικό Πεδίο Ρευμάτων



διανυσματικά πεδία

Πως χρησιμοποιούνται τα διανύσματα στην Ωκεανογραφία;

διανυσματικά πεδία

Παράδειγμα: Διανυσματικό Πεδίο Ρευμάτων

Έστω το σημείο $(x, y) = (0, 0)$

Έστω $(x, y) = (5\pi, 0) \approx (15.71, 0)$

Έστω το σημείο $(x, y) = (10, 5)$

$(x, y) = (0, 5\pi)$

διανυσματικά πεδία

Ας θεωρήσουμε τα παρακάτω 4 διανυσματικά πεδία:

$$x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j},\;\; -y\mathbf{i} + x\,\mathbf{j},\;\; \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j},\;\; \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Στο εξής, θα υποθέτουμε ότι όλα τα διανυσματικά πεδία είναι παραγωγίσιμα τάξης τουλάχιστον C^1 (U)

δηλαδή θα υποθέτουμε ότι αν F είναι ένα διανυσματικό πεδίο, όλες οι μερικές παράγωγοι των συνιστωσών Fi του F, υπάρχουν και είναι συνεχείς στο U.

Πάμε να εξετάσουμε **για κάθε διανυσματικό πεδίο**, ποιο είναι το **μέγιστο υποσύνολο του** $\mathbf{R^2}$ στο οποίο είναι **τάξης $\mathbf{C^1}$**, δηλαδή συνεχώς παραγωγίσιμο (οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς).

διανυσματικά πεδία

1. $\vec{F}(x,y) = x\hat{i} + y\hat{j}$

2. $\vec{F}(x,y) = -y\hat{i} + x\hat{j}$

3. $\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{i} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathbf{j}$

4. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$

διανυσματικά πεδία – πεδίο βαρύτητας

Ο νόμος της παγκόσμιας έλξης, όπως διατυπώθηκε από τον Νεύτωνα, περιγράφει το βαρυτικό πεδίο που δημιουργεί μια σημειακή μάζα M. Ο νόμος αυτός δίνεται από τη σχέση:

Γιατί βάζουμε - ?

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

- $\mathbf{F}$: η βαρυτική δύναμη που ασκεί η μεγάλη μάζα M στη μικρότερη m (διάνυσμα).
- G: σταθερά της βαρύτητας ($\approx 6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$).
- M: η μεγάλη μάζα (π.χ. η Γη).
- m: η μικρότερη μάζα (π.χ. ένα αντικείμενο).
- $\mathbf{r}$: διάνυσμα από το κέντρο της M προς το κέντρο της m.
- $r = |\mathbf{r}|$: απόσταση μεταξύ των δύο μαζών.

Το **r** είναι ένα διάνυσμα που δείχνει από το M στο m (δηλαδή προς τα «έξω»).

Αν δεν υπήρχε το αρνητικό πρόσημο, τότε η δύναμη **F** θα ήταν στην **ίδια κατεύθυνση** με το r (σαν να ήταν απωστική – αλλα είναι ελκτική!)

Θεωρούμε ότι η γη και το σώμα είναι σημειακές μάζες και έχουμε ορίσει σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε το κέντρο της γης να βρίσκεται στην αρχή (0, 0, 0)

→ **r** είναι το διάνυσμα θέσης του σώματος

→ Συμβολίζουμε ως συνήθως με r το μέτρο του **r (παίρνουμε έτσι το μέτρο του F) →**

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3} \xrightarrow{r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} |\mathbf{F}| = GMm\frac{|\mathbf{r}|}{r^3} = \frac{GMm}{r^2}$$

διανυσματικά πεδία – πεδίο βαρύτητας

Άρα σε καρτεσιανές συντεταγμένες το διανυσματικό πεδίο βαρύτητας γράφεται:

διάνυσμα θέσης από τη μάζα M προς τη μάζα m

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3} \Longrightarrow -G\frac{Mm}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right)$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Μέτρο του διανύσματος θέσης

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -GMm\left(\frac{x\,\mathbf{i}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{y\,\mathbf{j}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{z\,\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

διανυσματικά πεδία – πεδίο βαρύτητας

Άσκηση βαρυτικού πεδίου

Μια σημειακή μάζα $m = 2\,\mathrm{kg}$ βρίσκεται στο σημείο $(3, 4, 0)\,\mathrm{m}$ στο χώρο. Στο κέντρο $(0, 0, 0)$ υπάρχει μια μεγάλη σημειακή μάζα $M = 5 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ (σαν να είναι η Γη, περίπου).

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -GMm\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Ολοκληρωτική Καμπύλη – Πεδία ροής

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες περιγράφουν **τι τροχιές θα ακολουθούσε ένα σωματίδιο** αν κινούνταν "μέσα" στο πεδίο $\vec{F}$, με ταχύτητα που σε κάθε σημείο είναι ίση με το $\vec{F}$ εκεί.

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες λέγονται ακόμα

- Πεδιακές γραμμές (ή γραμμές πεδίου)
- Γραμμές ροής
- Ροϊκές γραμμές
- Δυναμικές γραμμές

Εκφράζεται μαθηματικά:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \qquad \dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

- Το $\mathbf{r}(t)$ είναι η **τροχιά** ενός σωματιδίου στο χώρο.
- Το $\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ είναι η **ταχύτητα** του σωματιδίου.

Η F(r) καθορίζει τη **φορά και μέτρο της ταχύτητας** σε κάθε σημείο του χώρου.

Ολοκληρωτική Καμπύλη – Πεδία ροής

Παράδειγμα 1

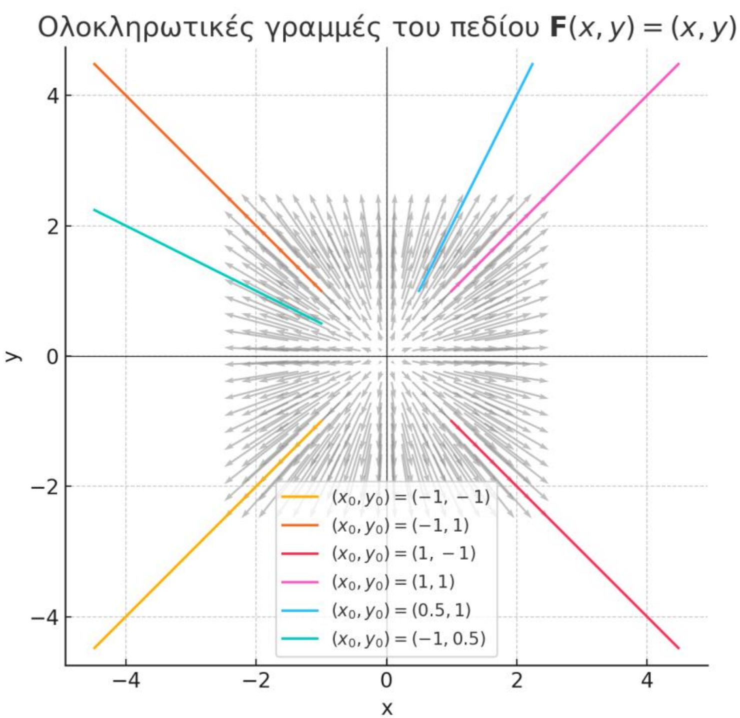
Βρες τις ολοκληρωτικές γραμμές του διανυσματικού πεδίου F(x, y)= r = (x, y)

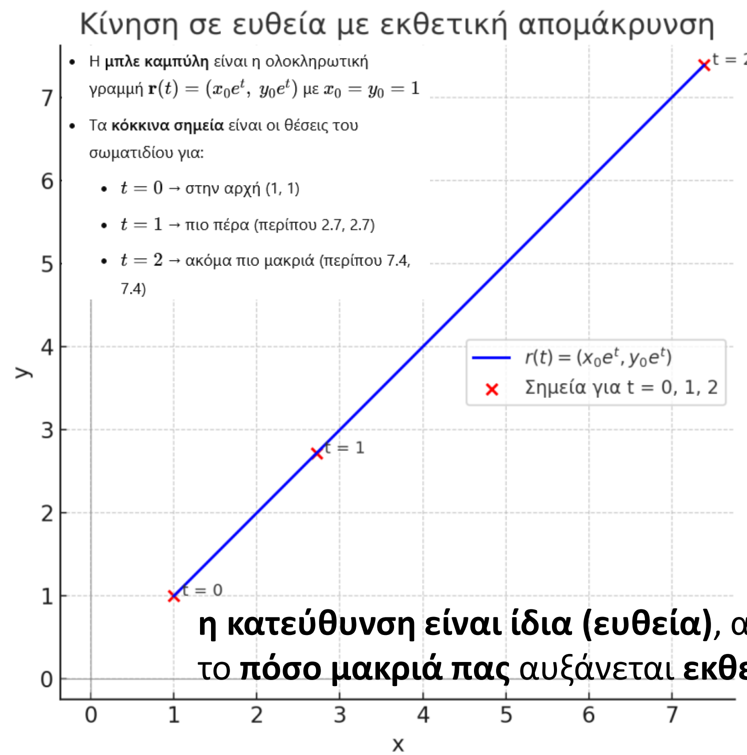
Αν πάρουμε τον λόγο $\frac{y(t)}{x(t)}$:

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y_0 e^t}{x_0 e^t} = \frac{y_0}{x_0}$$

Αυτό είναι **σταθερό** ⇒ η καμπύλη **παραμένει πάνω στην ευθεία** $y = \frac{y_0}{x_0} x$.

Δηλαδή το σωματίδιο **κινείται πάνω σε ευθεία γραμμή** που περνάει από το σημείο (x_0, y_0) και την **αρχή (0,0)**.

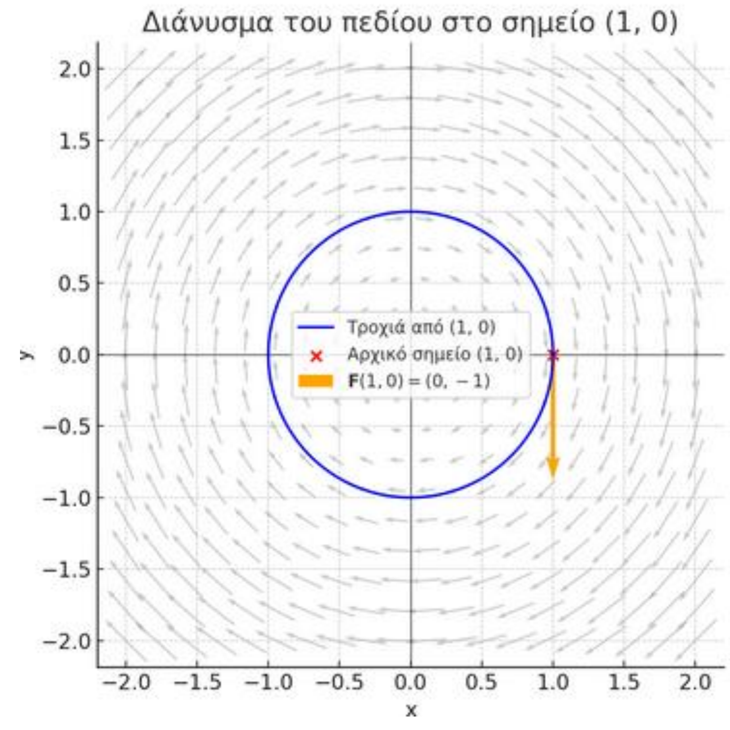




η κατεύθυνση είναι ίδια (ευθεία), αλλά το **πόσο μακριά πας** αυξάνεται **εκθετικά**.

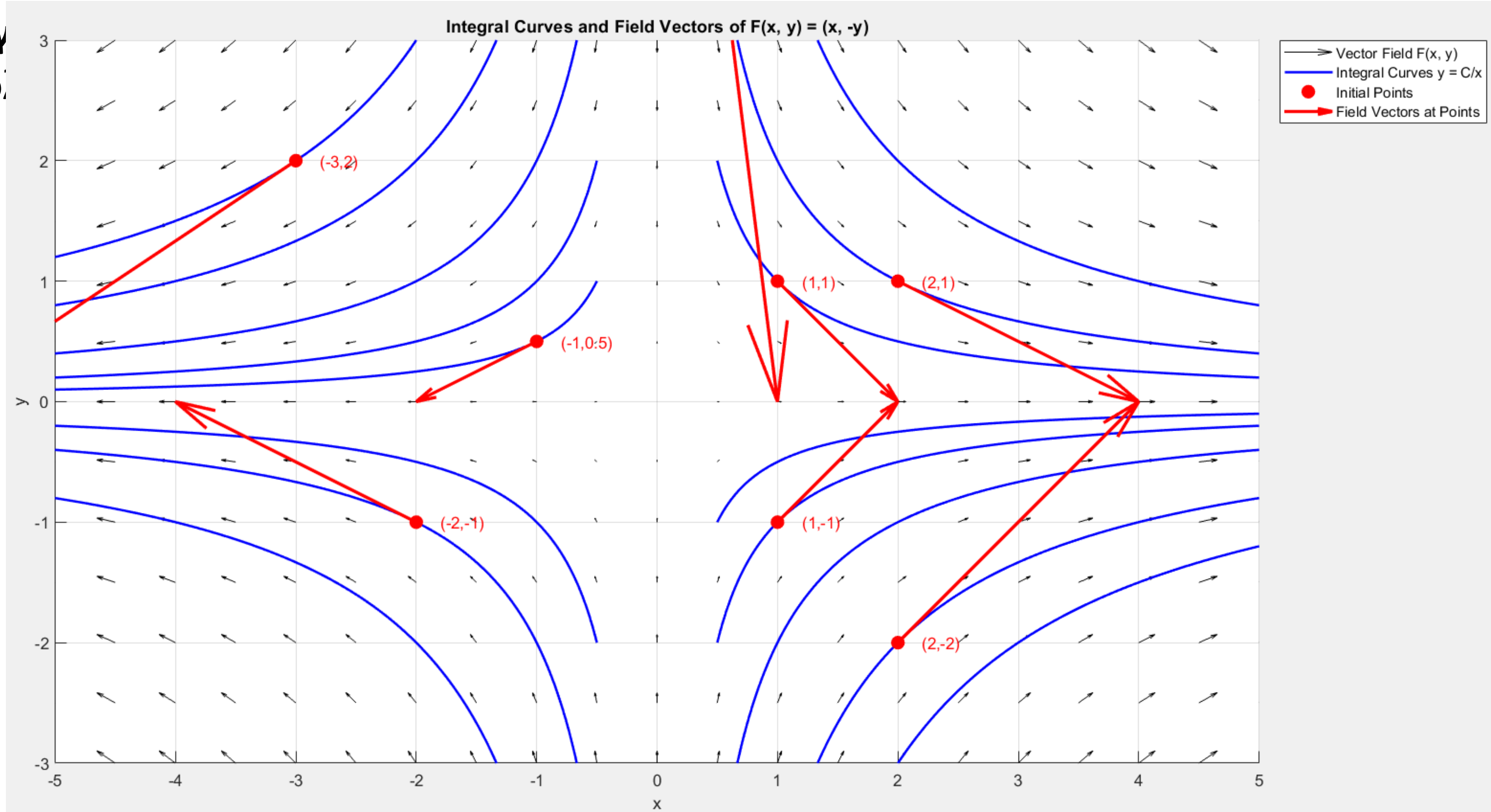
Παράδειγμα 16 (1)

Βρες τις ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου F(x, y)=(y,-x)



Παράδειγ

Βρες τις ο



Αρχικό Σημείο (x_0, y_0)	Σταθερά $C = x_0 y_0$	Καμπύλη $y = \frac{C}{x}$	Διάνυσμα πεδίου $\vec{F}(x_0, y_0)$
(1, 1)	1	$y = \frac{1}{x}$	$(1, -1)$
(2, 1)	2	$y = \frac{2}{x}$	$(2, -1)$
(1, -1)	-1	$y = \frac{-1}{x}$	$(1, 1)$
(2, -2)	-4	$y = \frac{-4}{x}$	$(2, 2)$
(-3, 2)	-6	$y = \frac{-6}{x}$	$(-3, -2)$
(-2, -1)	2	$y = \frac{2}{x}$	$(-2, 1)$
(0.5, 4)	2	$y = \frac{2}{x}$	$(0.5, -4)$
(-1, 0.5)	-0.5	$y = \frac{-0.5}{x}$	$(-1, -0.5)$

Ο τελεστής ανάδελτα
Απόκλιση και στροβιλισμός

Ορισμός 2.6. *Ο διανυσματικός τελεστής*

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \Rightarrow \quad \textbf{τελεστής ανάδελτα}$$

Πάνω σε βαθμωτό πεδίο *φ* → παράγει ένα διανυσματικό πεδίο *φ*

$$\operatorname{grad}\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi = \mathbf{i}\partial\phi/\partial x + \mathbf{j}\partial\phi/\partial y + \mathbf{k}\partial\phi/\partial z$$

Ας δούμε την δράση του ανάδελτα πάνω σε ένα διανυσματικό πεδίο $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$

Απόκλιση (divergence): Εσωτερική δράση → Εσωτερικό Γινόμενο

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Στροβιλισμό (curl): Εξωτερική δράση → Εξωτερικό Γινόμενο

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Ποιο απο τα δύο είναι βαθμωτο και ποιο διανυσματικό πεδίο;

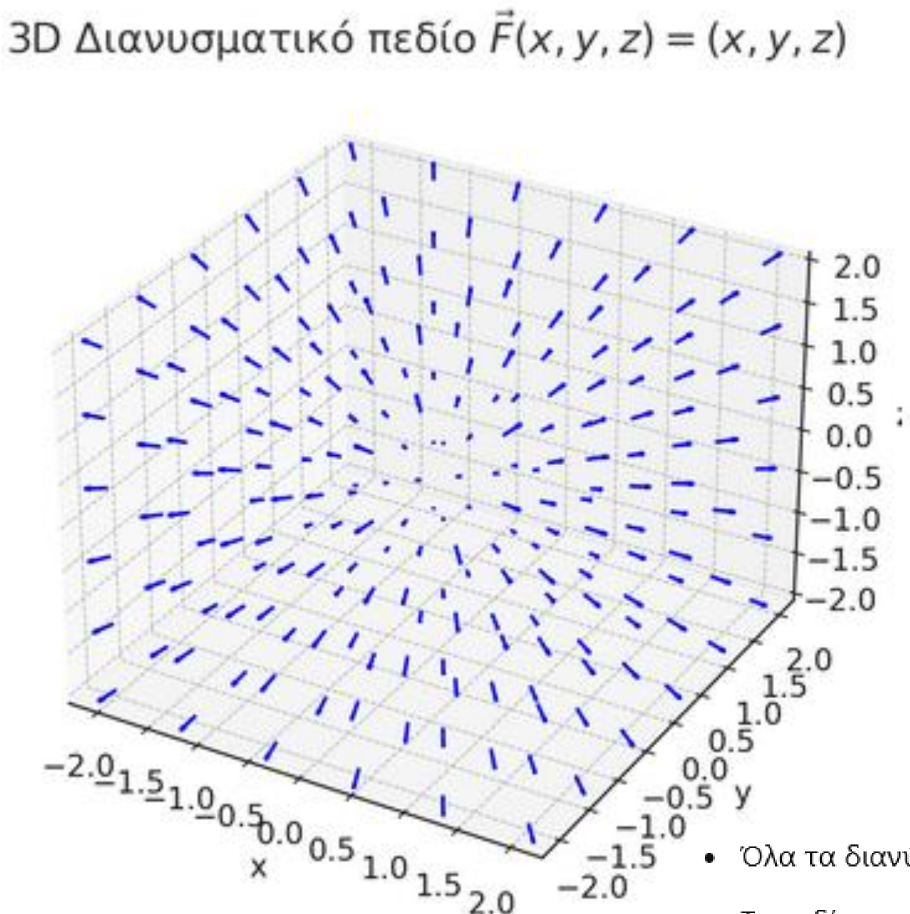
Ο τελεστής ανάδελτα
Απόκλιση και στροβιλισμός

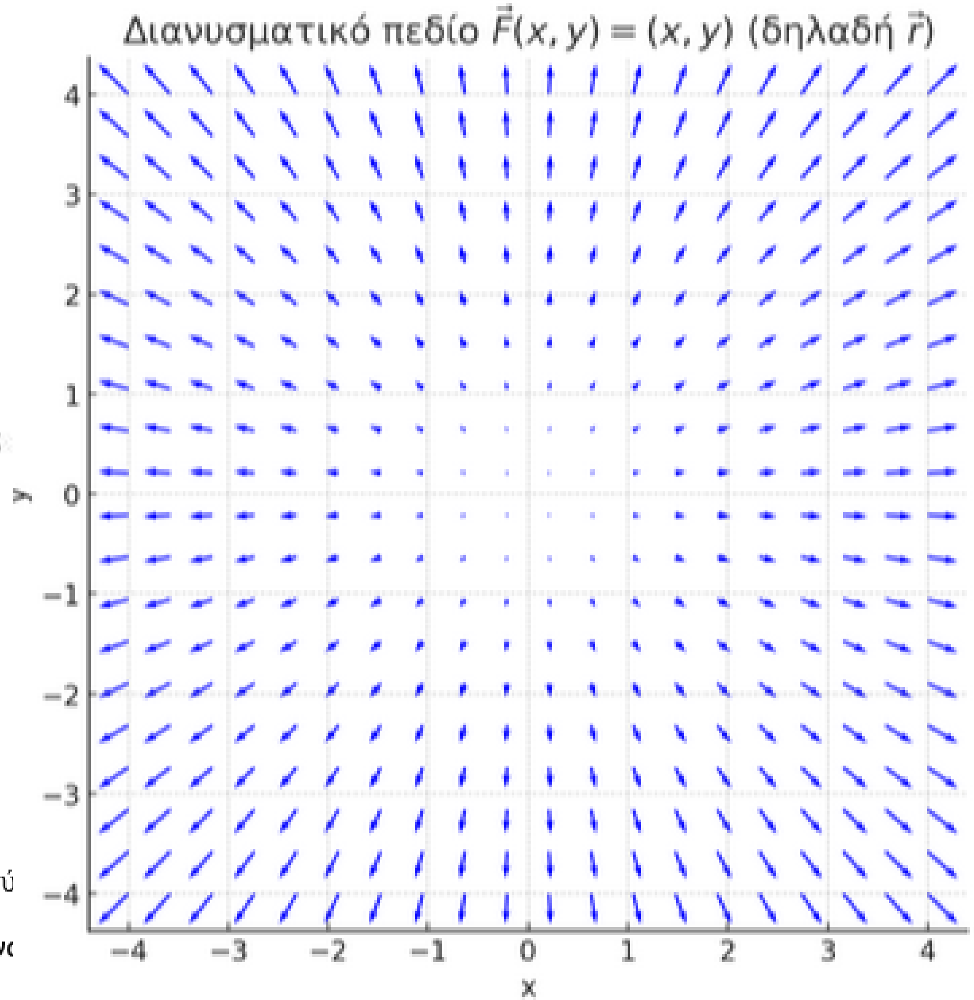
Παράδειγμα 17. Για το δ.π $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2, xy, yz)$

Ο τελεστής ανάδελτα
Απόκλιση και στροβιλισμός

Παράδειγμα 18. Για το δ.π. $\mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{r}$, $\operatorname{div}\mathbf{r}=3$ και $\operatorname{curl}\mathbf{r}=\mathbf{0}$

Πόση θα ήταν η απόκλιση αν το πεδίο ήταν δύο διαστάσεων F(x,y)=r?

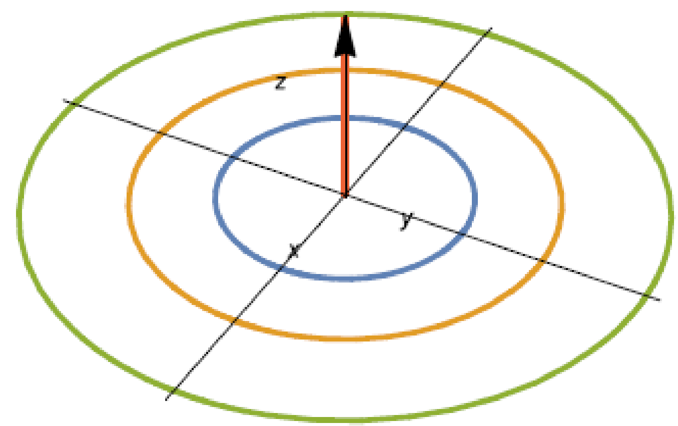




- Όλα τα διανύ
- Το πεδίο **μεγ**
- Υπάρχει **καθαρή διαστολή** (div = 3), σαν ένα **ρευστό που εκρήγνυται από το κέντρο**.
- **Δεν υπάρχει καμία περιστροφή** → το πεδίο είναι **αβαρές** (curl = 0).

Ο τελεστής ανάδελτα
Απόκλιση και στροβιλισμός

Παράδειγμα 18. δ.π. $\mathbf{F}(x,y,z) = (-\omega y, \omega x, 0)$, $\omega > 0$, είναι $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ και $\operatorname{curl}\mathbf{F} = 2\omega\mathbf{k}$,



Ο τελεστής ανάδελτα
Απόκλιση και στροβιλισμός

Ιδιότητες

Για οποιαδήποτε παραγωγίσιμα δ.π. $\mathbf{F}$ και $\mathbf{G}$ και οποιονδήποτε αριθμό λ, ισχύουν,

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{div}\mathbf{F} + \operatorname{div}\mathbf{G},} \quad \text{και} \quad \boxed{\operatorname{div}(\lambda\mathbf{F}) = \lambda \operatorname{div}\mathbf{F},}$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\mathbf{F}+\mathbf{G}) &= \nabla\cdot(F_1+G_1, F_2+G_2, F_3+G_3)\\ &= \frac{\partial(F_1+G_1)}{\partial x} + \frac{\partial(F_2+G_2)}{\partial y} + \frac{\partial(F_3+G_3)}{\partial z}\\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial G_2}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial G_3}{\partial z}\right)\\ &= \nabla\cdot\mathbf{F} + \nabla\cdot\mathbf{G}\end{aligned}$$

$$\lambda\mathbf{F} = (\lambda F_1, \lambda F_2, \lambda F_3)$$

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(\lambda\mathbf{F}) &= \frac{\partial(\lambda F_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\lambda F_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\lambda F_3)}{\partial z}\\ &= \lambda\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) = \lambda\,\nabla\cdot\mathbf{F}\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \operatorname{curl}\mathbf{F} + \operatorname{curl}\mathbf{G}} \quad \text{και} \quad \boxed{\operatorname{curl}(\lambda\mathbf{F}) = \lambda \operatorname{curl}\mathbf{F}}$$

Παίρνουμε το στροβιλισμό του αθροίσματος:

$$\begin{aligned}\nabla\times(\mathbf{F}+\mathbf{G}) &= \nabla\times(F_1+G_1, F_2+G_2, F_3+G_3)\\ &= \nabla\times\mathbf{F} + \nabla\times\mathbf{G}\end{aligned}$$

$$\lambda\mathbf{F} = (\lambda F_1, \lambda F_2, \lambda F_3)$$

$$\nabla\times(\lambda\mathbf{F}) = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \lambda F_1 & \lambda F_2 & \lambda F_3\end{vmatrix}$$

$$= \lambda\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix} = \lambda(\nabla\times\mathbf{F})$$

Ο τελεστής ανάδελτα
Απόκλιση και στροβιλισμός

Θεώρημα 2.4. *Για κάθε βαθμωτό πεδίο ϕ (που είναι τουλάχιστον τάξης C^2) ισχύει*

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad}\phi) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\phi = \mathbf{0}.$$

το gradient οποιασδήποτε βαθμωτής συνάρτησης είναι αστρόβιλο δ.π.

Απόδειξη

Το **gradient** δείχνει πάντα προς τη διεύθυνση της **μέγιστης αύξησης** της ϕ, άρα δεν υπάρχει "κυκλική" κίνηση γύρω από κανένα σημείο → **μηδενικός στροβιλισμός**.

Ο τελεστής ανάδελτα
Απόκλιση και στροβιλισμός

Θεώρημα 2.4. *Για κάθε βαθμωτό πεδίο* ϕ *(που είναι τουλάχιστον τάξης* C^2*) ισχύει*

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad}\phi) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\phi = \mathbf{0}.$$

Άσκηση 5

Δείξτε ότι το βαρυτικό πεδίο (2.2.1) είναι αστρόβιλο, δηλαδή $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.
Δείξτε ακόμα ότι $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$, όπου U είναι η συνάρτηση δυναμική ενέργεια

$$U(x, y, z) = -\frac{GMm}{r}, \qquad r = |\mathbf{r}|$$

Ο τελεστής ανάδελτα
Απόκλιση και στροβιλισμός

Θεώρημα 2.5. *Για κάθε διανυσματικό πεδίο* $\mathbf{F}$ *(που είναι τουλάχιστον τάξης* C^2*) ισχύει*

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}\mathbf{F}) = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F}) = 0.$$

δείχνει ότι ο στροβιλισμός οποιουδήποτε δ.π. είναι ασυμπίεστο δ.π.

Απόδειξη

Τελεστής Laplace

Σε αντίθεση με τον στροβιλισμό του gradient ενός βαθμωτού πεδίου φ που είναι πάντα μηδέν, η **απόκλιση (εσωτερικο γινόμενο)** του **gradient** είναι ένα νέο βαθμωτό πεδίο

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \phi \Rightarrow \nabla^2 \phi$$

$$Laplacian\ \phi$$

Επομένως η Laplacian του φ γράφεται

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ τελεστής Laplace

$$\nabla^2 u = 0, \qquad ή \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$ εξίσωση Laplace

σε δύο διαστάσεις η εξίσωση Laplace $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Τελεστής Laplace

Παράδειγμα 19. Για το βαθμωτό πεδίο $\phi(x,y) = x^3 + y^2$, είναι $\nabla^2\phi = 6x + 2$, ενώ για το $\psi(x,y) = x^2 - y^2$, είναι $\nabla^2\psi = 0$.

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Τελεστής Laplace

Παράδειγμα 20. Επιβεβαιώστε ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι λύσεις της εξίσωσης Laplace σε δύο διαστάσεις:

$$u(x,y) = 2x - 3y, \quad v(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right), \quad w(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

Τελεστής Laplace

Ιδιότητες

$$\nabla^2(c\phi) = c\nabla^2\phi$$

$$\nabla^2(\phi + \psi) = \nabla^2\phi + \nabla^2\psi$$

ο τελεστής Laplace είναι γραμμικός.

Πολλαπλασιασμός με σταθερά:

$$\nabla^2(c\phi) = \frac{\partial^2(c\phi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(c\phi)}{\partial y^2} = c\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = c\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) = c\nabla^2\phi$$

Πρόσθεση δύο πεδίων:

$$\nabla^2(\phi + \psi) = \frac{\partial^2(\phi + \psi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\phi + \psi)}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = \nabla^2\phi + \nabla^2\psi$$