Μαθηματικά ΙΙ

Υπεύθυνος Καθηγητής:

Γιάννης Ανδρουλιδάκης

ΒΑΘΜΙΔΑ (GRADIENT), ΔΙΑΦΟΡΙΚΟ, ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΤΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Εαρινό Εξάμηνο 2024-2025

Βαθμίδα ή gradient

η παράγωγος df/dx → ρυθμός μεταβολής της f

Σε τρεις διαστάσεις → Τρεις ρυθμούς μεταβολής της f: $R^3 \rightarrow R$

Σε κάθε σημείο r = (x, y, z) Ε R^3

↓

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

διανυσματικό πεδίο βαθμίδας

$$\boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}$$

Κλίση
ή
Βαθμίδα
ή
Gradient

συμβολίζεται με $\operatorname{grad}\phi(\mathbf{r})$ ή $\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r})$

Το **διάνυσμα βαθμίδας** $\nabla\phi$ έχει δύο βασικές ιδιότητες:

1. **Κατεύθυνση:** Δείχνει προς τη μέγιστη κατεύθυνση αύξησης της συνάρτησης ϕ.
2. **Μέτρο:** Το μέτρο του είναι ο ρυθμός μεταβολής της ϕ προς αυτήν την κατεύθυνση.

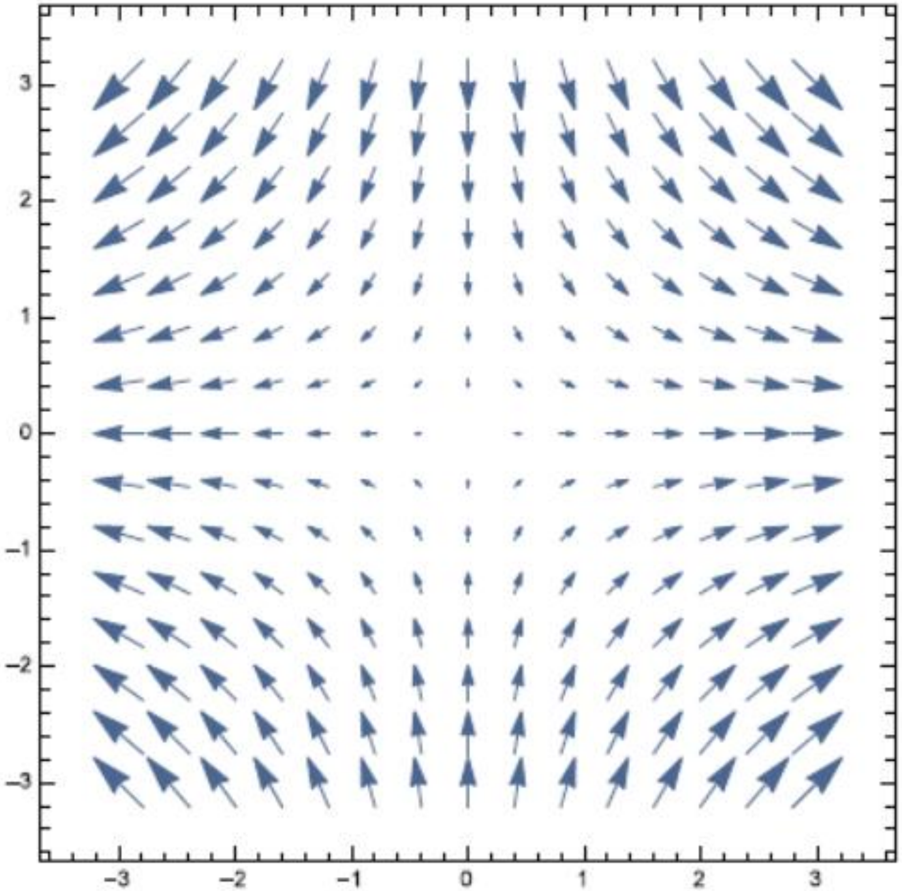
Βαθμίδα ή gradient

το gradient της πίεσης → **βαροβαθμίδα**

το gradient της θερμοκρασίας → **θερμοβαθμίδα**

Παράδειγμα 12

Ποια είνα η βαθμίδα της συνάρτησης $\varphi(x,y)=x^2-y^2$;



διανυσματικό πεδίο βαθμίδας

Βαθμίδα ή gradient

Παράδειγμα 12

Ποια είνα η βαθμίδα της συνάρτησης $\phi(x, y, z) = xe^{-y} + z$;

Διαφορικό

το διαφορικό $df = f'(x)dx$ → "απειροστή μεταβολή" της συνάρτησης κατά Δx

η μεταβολή της συνάρτησης είναι $\Delta f \simeq f'(x)\,\Delta x$

Παράδειγμα

- Η **παράγωγος** $f'(x)$ είναι ένας αριθμός που μετράει τον ρυθμό μεταβολής της $f(x)$.
- Το **διαφορικό** df είναι μια **γραμμική προσέγγιση** της μεταβολής της $f(x)$, εκφρασμένη ως $df = f'(x)dx$.

Διαφορικό

Σε τρεις διαστάσεις, το διαφορικό της ϕ γράφεται

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz$$

όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές μεταβάλλονται κατά Δx, Δy, Δz.

Η μεταβολη της φ προσεγγιστικά είναι:

$$\Delta\phi \simeq \frac{\partial \phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\Delta z$$

Εναλλακτικά

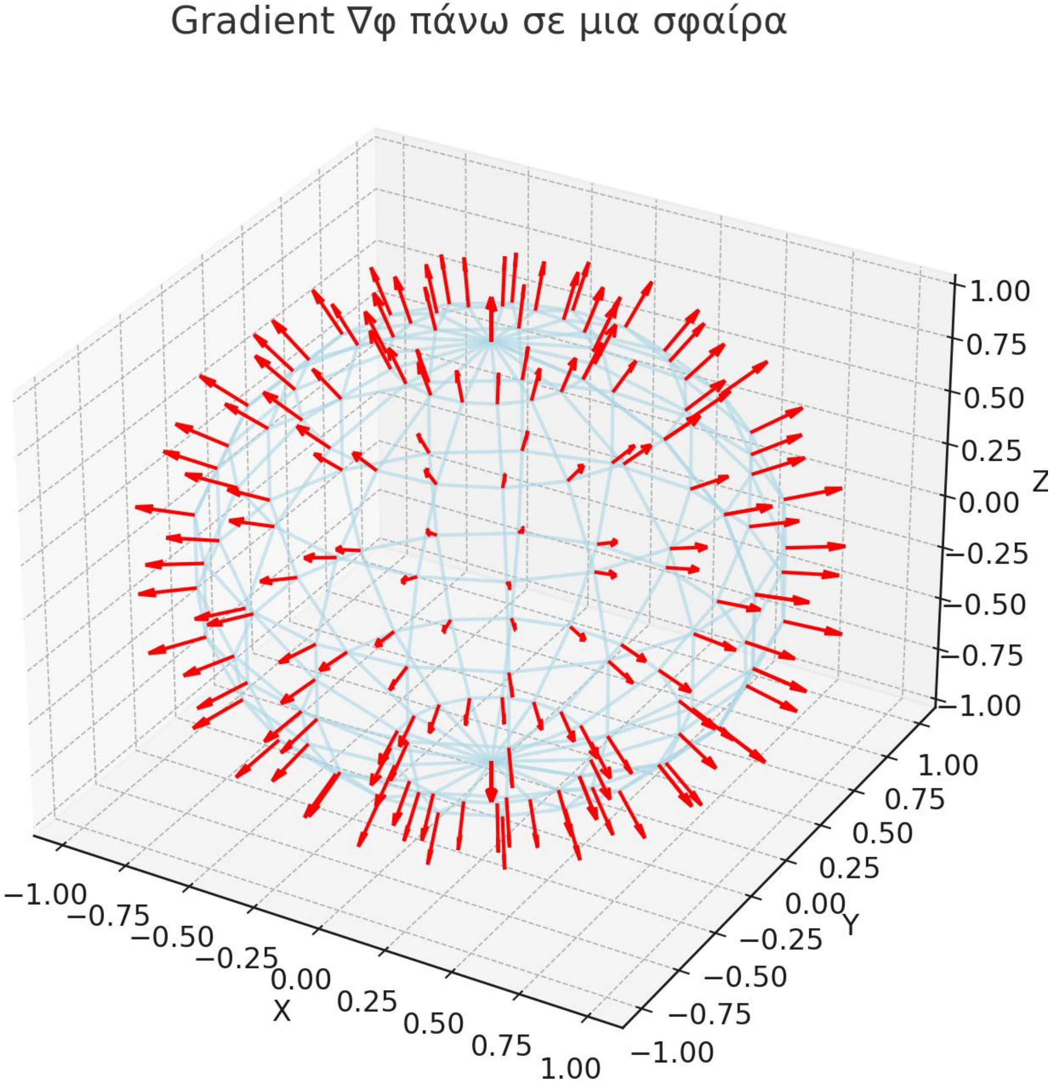
εσωτερικό γινόμενο του $\boldsymbol{\nabla}\phi$ με το $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ $\Rightarrow$ $d\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$

Εφαρμογή στο Θεώρημα Taylor (next chapter)

Βαθμίδα ή gradient

Παράδειγμα

Βρείτε το gradient της $\phi(x, y, z) = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Παρατηρείστε ότι είναι κάθετο στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας r.



Βαθμίδα ή gradient

Η ιδιότητα της καθετότητας του grad φ είναι γενική

∇φ είναι ορθογώνιο στις ισοσταθμικές επιφάνειες S του φ.

- Ας θεωρήσουμε την ισοσταθμική επιφάνεια

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x, y, z) = \text{constant}\}$$

- Θεωρούμε μία «απειροστή» μετατόπιση πάνω στην S

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz$$

- Δηλαδή τα διαφορικά dx, dy, dz υπολογίζονται πάνω στην επιφάνεια S
- Όμως η συνάρτηση φ είναι σταθερή πάνω στην S
- Άρα dφ=0 → $d\phi = \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ = 0 (εσωτερικό γινόμενο = 0)

άρα ∇φ είναι κάθετο στο dr
(το οποίο βρίσκεται πάνω στην S).

άρα ∇φ είναι κάθετο
και στο S

Βαθμίδα ή gradient

Οι βασικές ιδιότητες της βαθμίδας είναι οι παρακάτω:

1. Αν $\phi = \text{constant}$, τότε $\boldsymbol{\nabla}\phi = 0$

Αν η ϕ είναι **σταθερή** ($\phi = c$, όπου c είναι κάποιος αριθμός), τότε **δεν εξαρτάται από τις μεταβλητές** x, y, z, επομένως οι μερικές παράγωγοι της είναι όλες **μηδέν**:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0$$

Άρα:

$$\boxed{\nabla\phi = (0, 0, 0)}$$

2. $\boldsymbol{\nabla}(\phi + \psi) = \boldsymbol{\nabla}\phi + \boldsymbol{\nabla}\psi \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\nabla}(\lambda\phi) = \lambda\boldsymbol{\nabla}\phi, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Αν έχουμε δύο συναρτήσεις $\phi(x, y, z)$ και $\psi(x, y, z)$, τότε:

$$\nabla(\phi + \psi) = \left(\frac{\partial(\phi + \psi)}{\partial x}, \frac{\partial(\phi + \psi)}{\partial y}, \frac{\partial(\phi + \psi)}{\partial z}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα της μερικής παραγώγου:

$$\frac{\partial(\phi + \psi)}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad \frac{\partial(\phi + \psi)}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial(\phi + \psi)}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial z}$$

Βαθμίδα ή gradient

Οι βασικές ιδιότητες της βαθμίδας είναι οι παρακάτω:

2. $\boldsymbol{\nabla}(\phi+\psi)=\boldsymbol{\nabla}\phi+\boldsymbol{\nabla}\psi$ και $\boldsymbol{\nabla}(\lambda\phi)=\lambda\boldsymbol{\nabla}\phi, \quad \lambda\in\mathbb{R}$

Άρα:

$$\nabla(\phi+\psi)=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \Rightarrow \boxed{\nabla(\phi+\psi)=\nabla\phi+\nabla\psi}$$

Το gradient του $\lambda\phi$ είναι:

$$\nabla(\lambda\phi)=\left(\frac{\partial(\lambda\phi)}{\partial x},\frac{\partial(\lambda\phi)}{\partial y},\frac{\partial(\lambda\phi)}{\partial z}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla(\lambda\phi)=\lambda\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\nabla(\lambda\phi)=\lambda\nabla\phi}$$

Βαθμίδα ή gradient

Οι βασικές ιδιότητες της βαθμίδας είναι οι παρακάτω:

$$3. \ \nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi$$

Τώρα υπολογίζουμε το gradient του γινομένου φψ

$$\nabla(\phi\psi) = \left(\frac{\partial(\phi\psi)}{\partial x}, \frac{\partial(\phi\psi)}{\partial y}, \frac{\partial(\phi\psi)}{\partial z}\right)$$

Χρησιμοποιώντας τον **κανόνα του γινομένου** της παραγώγου:

$$\frac{\partial(\phi\psi)}{\partial x} = \phi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\phi\psi)}{\partial y} = \phi\frac{\partial\psi}{\partial y} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(\phi\psi)}{\partial z} = \phi\frac{\partial\psi}{\partial z} + \psi\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\nabla(\phi\psi) = \left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial x} + \phi\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \psi\frac{\partial\phi}{\partial y} + \phi\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \psi\frac{\partial\phi}{\partial z} + \phi\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) \Rightarrow \boxed{\psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi}$$

Βαθμίδα ή gradient

Οι βασικές ιδιότητες της βαθμίδας είναι οι παρακάτω:

4. $\boldsymbol{\nabla}\left(\phi/\psi\right) = \left(\psi\boldsymbol{\nabla}\phi - \phi\boldsymbol{\nabla}\psi\right)/\psi^2$, εκεί όπου $\psi \neq 0$.

Θέλουμε να βρούμε το gradient της συνάρτησης:

$$h = \frac{\phi}{\psi}$$

Χρησιμοποιούμε τον **κανόνα του πηλίκου** για τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\psi\frac{\partial\phi}{\partial x} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\psi^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\psi\frac{\partial\phi}{\partial y} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial y}}{\psi^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\psi\frac{\partial\phi}{\partial z} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial z}}{\psi^2}$$

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \left(\frac{\psi\frac{\partial\phi}{\partial x} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\psi^2}, \quad \frac{\psi\frac{\partial\phi}{\partial y} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial y}}{\psi^2}, \quad \frac{\psi\frac{\partial\phi}{\partial z} - \phi\frac{\partial\psi}{\partial z}}{\psi^2}\right) \Rightarrow \boxed{\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi}{\psi^2}}$$

Παράγωγος κατά μήκος καμπύλης και κατευθυνόμενη παράγωγος

Μέχρι τώρα είδαμε ότι με τις μερικές παραγώγους εκφράζουμε τους στιγμαίους ρυθμούς μεταβολής της συνάρτησης *f* προς μία συγκεκριμένη κατεύθυνση:
Π.χ. x ή y στην περίπτωση της *f(x,y).*

1. **Μερική παράγωγος ως προς x**:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

   Εδώ, θεωρούμε το y ως σταθερό και διαφορίζουμε τη συνάρτηση μόνο ως προς x.

2. **Μερική παράγωγος ως προς y**:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

   Σε αυτή την περίπτωση, το x θεωρείται σταθερό και διαφορίζουμε τη συνάρτηση μόνο ως προς y.

Τι συμβαίνει όμως όταν μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε το πως μεταβάλλεται η f όταν x και y μεταβάλλονται ταυτόχρονα;

Δηλαδή όταν χρειάζεται να γνωρίζουμε τον ρυθμό μεταβολής της f σε οποιαδήποτε κατεύθυνση;

Παράγωγος κατά μήκος καμπύλης και κατευθυνόμενη παράγωγος

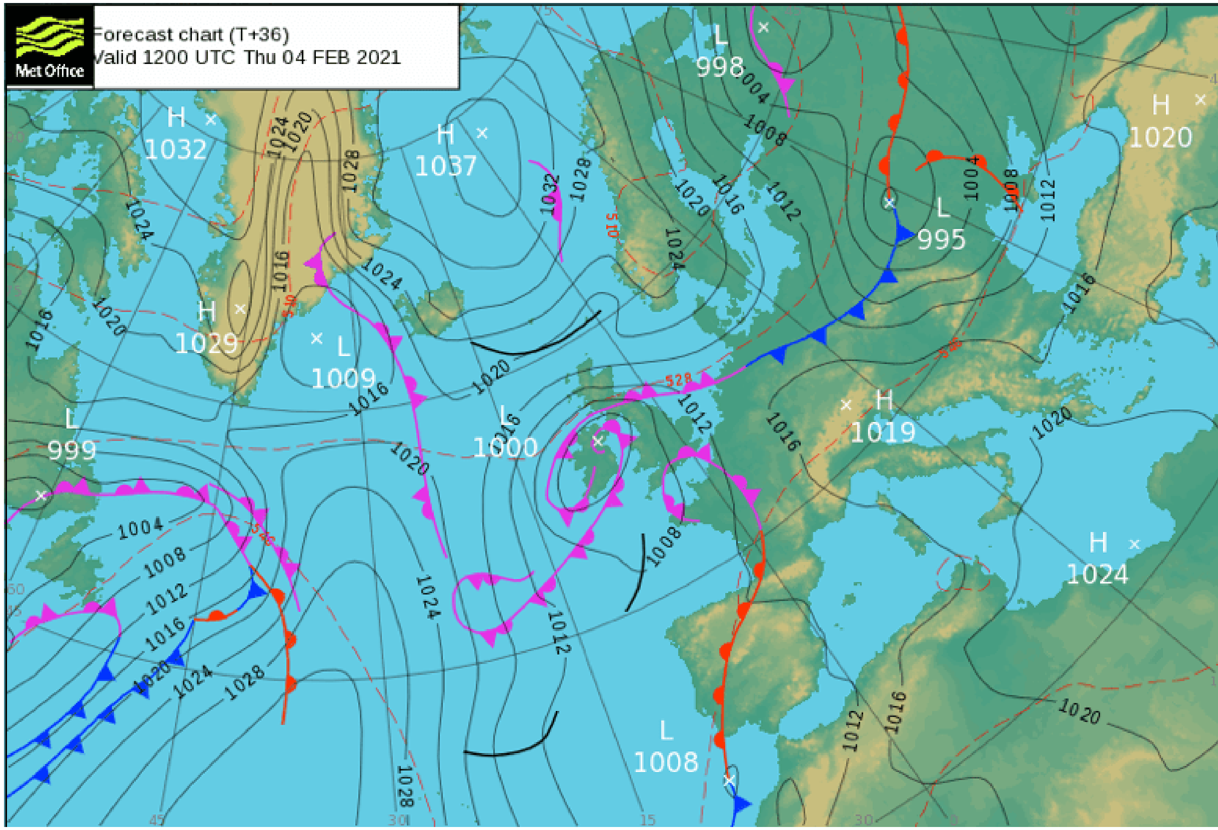
Για παράδειγμα:

Έχουμε τον χάρτη των ισοσταθμικών καμπυλών της επιφανειακής ατμοσφαιρικής πίεσης P(x,y)

Η μερική παράγωγος P_x *στη θέση του βαρομετρικού υψηλού (H=1037) είναι ο ρυθμός μεταβολής της πίεσης ως προς την απόσταση x (δηλαδή αν μετακινηθούμε ανατολικά ή δυτικά)*

Αντίστοιχα, η P_y *είναι ο ρυθμός μεταβολής κατα βορρά – νότο.*

Πως όμως θα εκφαστεί ο ρυθμός μεταβολής της πίεσης μεταξύ του H=1037 και το L=1009?



Παράγωγος κατά μήκος καμπύλης και κατευθυνόμενη παράγωγος

Έστω μία βαθμωτή συνάρτηση *φ(x,y,z)*: $R^3 \rightarrow R$

Επιπλέον, έστω ότι έχουμε μια **καμπύλη** στον χώρο, η οποία ορίζεται παραμετρικά ως:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

όπου το *t* είναι κάποια παράμετρος που περιγράφει τη θέση στην καμπύλη.

$$C = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{r} = \mathbf{r}\,(t)\})$$

- **Ορισμός της παραγώγου κατά μήκος καμπύλης**

Η σύνθεση της συνάρτησης φ(x,y,z) με την καμπύλη r(t) μας δίνει μια νέα συνάρτηση μιας μεταβλητής:

$$\psi(t) = \phi(x(t), y(t), z(t))$$

- Η **παράγωγος κατά μήκος της καμπύλης** δίνεται από τον **κανόνα της αλυσίδας**:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt}\phi(x(t), y(t), z(t))$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

ή

Βαθμίδα συνάρτησης φ

Διάνυσμα Ταχύτητας dr/dt

$$\frac{d\phi}{dt} = \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

*Αυτή η παράγωγος μας λέει **πόσο γρήγορα αλλάζει η συνάρτηση φ καθώς κινούμαστε πάνω στην καμπύλη**.*

Παράγωγος κατά μήκος καμπύλης και κατευθυνόμενη παράγωγος

Παράδειγμα 13

Παράγωγος κατά μήκος καμπύλης και κατευθυνόμενη παράγωγος

Μία ειδική περίπτωση παραγώγου κατά μήκος καμπύλης → κατευθυνόμενη παράγωγος

Θεωρούμε ότι η **r**(*t*) είναι η ευθεία που περνά από το σημείο a και έχει διεύθυνση του διανύσματος **v** → που ορίζεται ως **r**(t)=a+t**v**

Τότε $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{v} \text{ για κάθε } t$

Το 2ο μέλος της εξίσωσης $\dfrac{d\phi}{dt} = \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot \dot{\mathbf{r}}$

$$\frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t)) = \nabla\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t)$$

στο σημείο a γίνεται: $$\left.\frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t))\right|_{t=0} = \nabla\phi(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$$

Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Ή

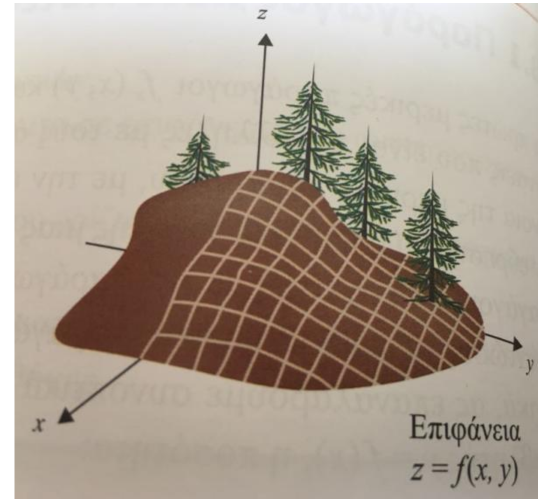
Κατευθυνόμενη Παράγωγος (D: direction)

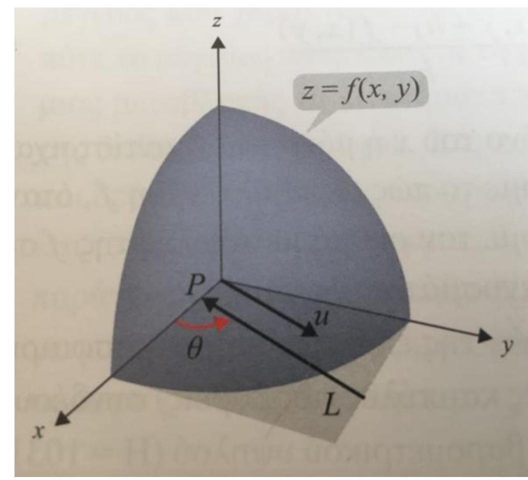
Σε ποια περίπτωση είναι μέγιστος ο ρυθμός;
Όταν τα 2 διανύσματα είναι κάθετα ή παράλληλα;

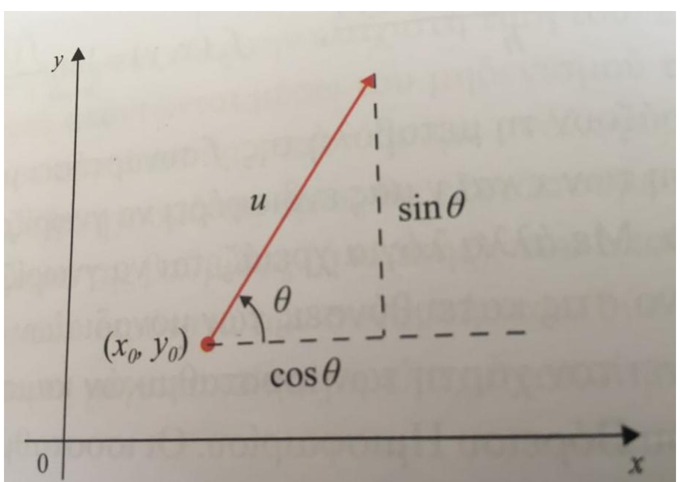
$$D_{\mathbf{v}}\phi(\mathbf{a}) = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{a})$$

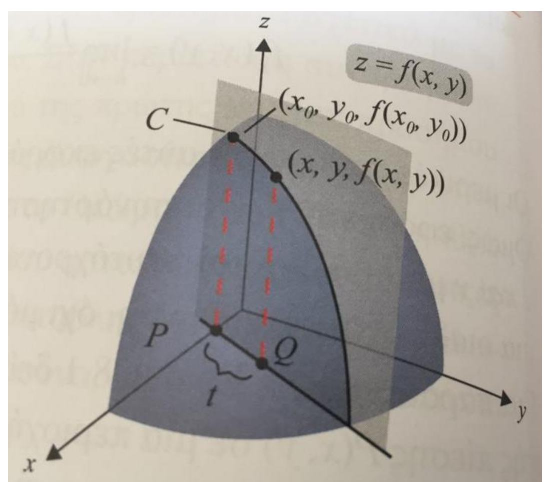
Αυτό σημαίνει ότι το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{v} \cdot \nabla\phi(\mathbf{a})$ εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης ϕ κατά την κατεύθυνση του $\mathbf{v}$, δηλαδή είναι ο **κατευθυντικός παράγωγος** της ϕ προς το $\mathbf{v}$ στο σημείο $\mathbf{a}$:

Γεωμετρική Ερμηνεία της Παραγώγου Κατεύθυνσης









Παράγωγος κατά μήκος καμπύλης και κατευθυνόμενη παράγωγος

Για την $(x, y) = x^2 + y^2$, ποια είναι η κατευθυνόμενη παράγωγός της κατά μήκος του διανύσματος $\mathbf{v} = (1, 1)$ στο σημείο $a = (2, 2)$

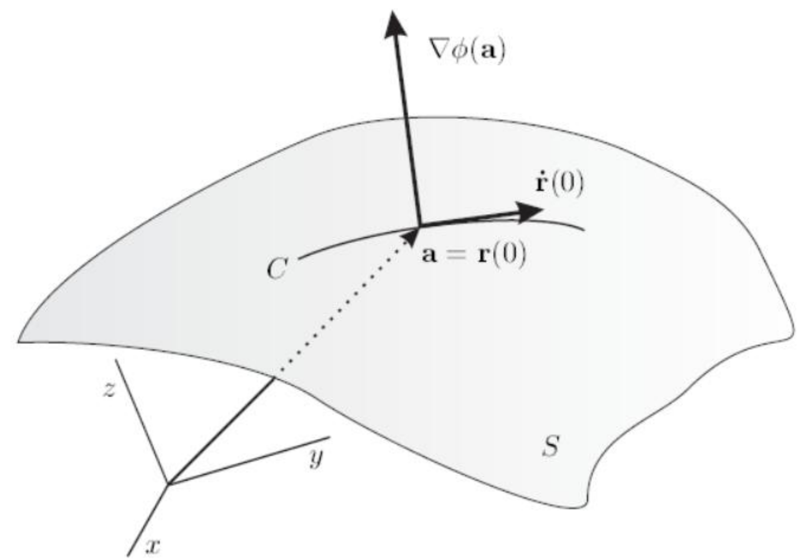
Παράδειγμα 14.

Ιδιότητες

Θεώρημα 2.2. *Αν* $\nabla\phi(\mathbf{r}) \neq \mathbf{0}$, *τότε η κλίση* $\nabla\phi(\mathbf{r})$ *δείχνει προς εκείνη την κατεύθυνση κατά την οποία η* ϕ *αυξάνει γρηγορότερα.*

Ιδιότητες

Θεώρημα 2.3. *Έστω ϕ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση τριών μεταβλητών και S_k η επιφάνεια στάθμης με τιμή k, $S_k = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : \phi(\mathbf{r}) = k\}$. Έστω ένα σημείο $\mathbf{a}$ της S_k και μία οποιαδήποτε καμπύλη επί της επιφάνειας S_k, $\mathbf{r}(t)$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, που τη στιγμή $t = 0$ περνά από το $\mathbf{a}$, Σχήμα 2.11. Τότε $\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{a}) \cdot \dot{\mathbf{r}}(0) = 0$.*



Παράγωγος κατά μήκος καμπύλης και κατευθυνόμενη παράγωγος

Παράδειγμα 15. Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων των ωκεανογράφων, δηλαδή άξονας $x'x$ κατά τη διεύθυνση W-E, άξονας $y'y$ κατά τη διεύθυνση S-N. Αν $\phi = \phi(x, y)$ είναι η θερμοκρασία στην επιφάνεια της θάλασσας, τότε $\partial\phi/\partial x$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας όταν κινούμαστε προς τα ανατολικά και $-\partial\phi/\partial y$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας όταν κινούμαστε προς τα νότια. Ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας όταν κινούμεστε κατά την "βορειο-βορειοανατολική" κατεύθυνση $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ είναι

Παράγωγος κατά μήκος καμπύλης και κατευθυνόμενη παράγωγος

Σημείωση

Ο ορισμός της κατευθυνόμενης παραγώγου εμπεριέχει την έννοια της μερικής παραγώγου

Πράγματι, για ένα βαθμωτό πεδίο φ(x,y,z)

$$D_{\mathbf{i}}\phi = \mathbf{i}\cdot\nabla\phi = \mathbf{i}\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

Η μερική παράγωγος ως προς x, δεν είναι παρά η κατευθυνόμενη παράγωγος κατά την διεύθυνση του διανύσματος i = (1, 0, 0) και γενικά:

$$D_{\mathbf{i}}\phi(\mathbf{a}) = \frac{\partial\phi(\mathbf{a})}{\partial x},\quad D_{\mathbf{j}}\phi(\mathbf{a}) = \frac{\partial\phi(\mathbf{a})}{\partial y},\quad D_{\mathbf{k}}\phi(\mathbf{a}) = \frac{\partial\phi(\mathbf{a})}{\partial z}$$

Ασκήσεις

1. Σχεδιάστε μερικές ισοσταθμικές και μερικές ισοϋψείς καμπύλες της $\phi(x, y) = x^2 + 2y^2$.

Ασκήσεις

2. Σχεδιάστε μερικές ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης με τύπο

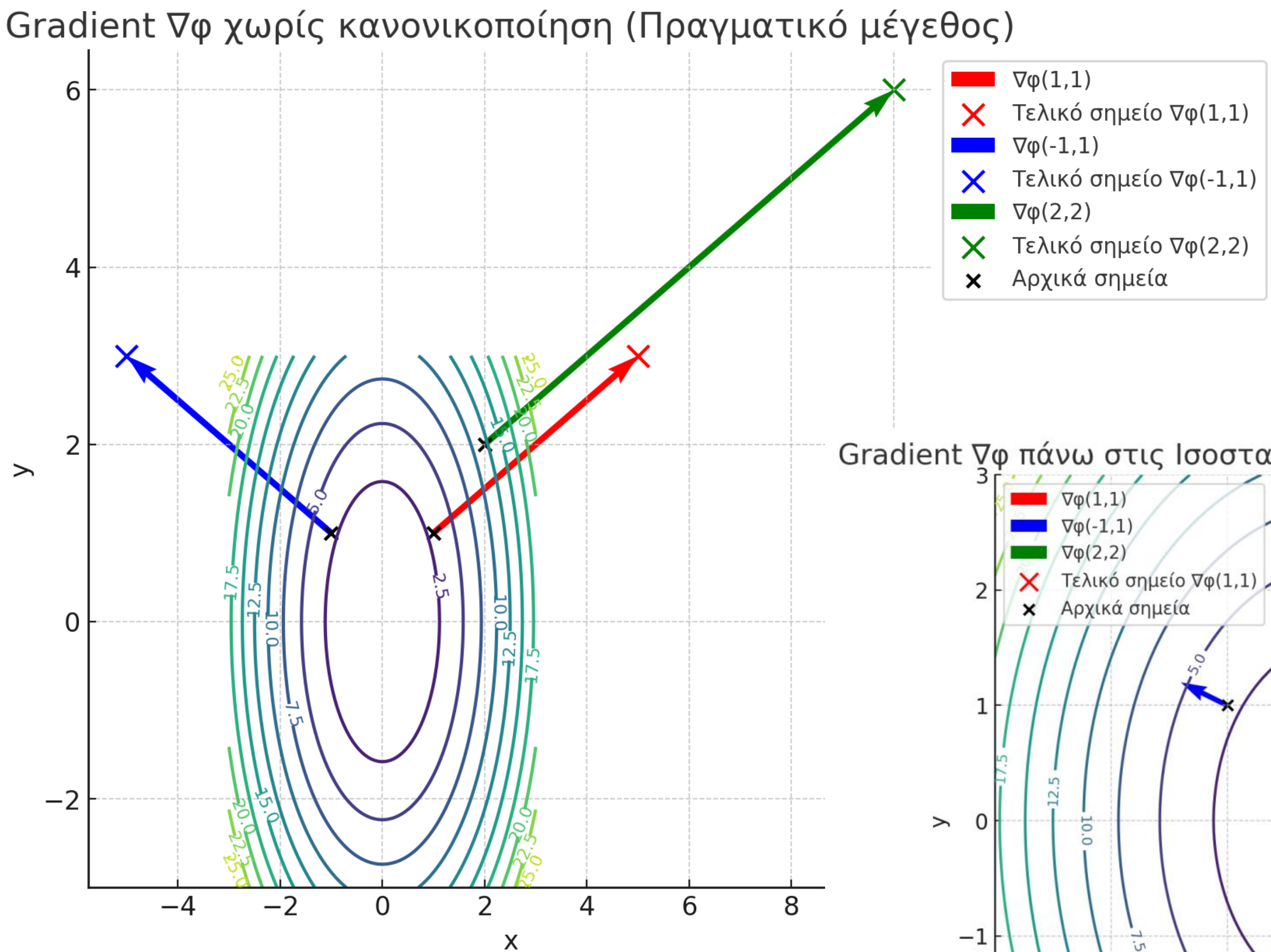
$$\phi(x, y) = 2x^2 + y^2.$$

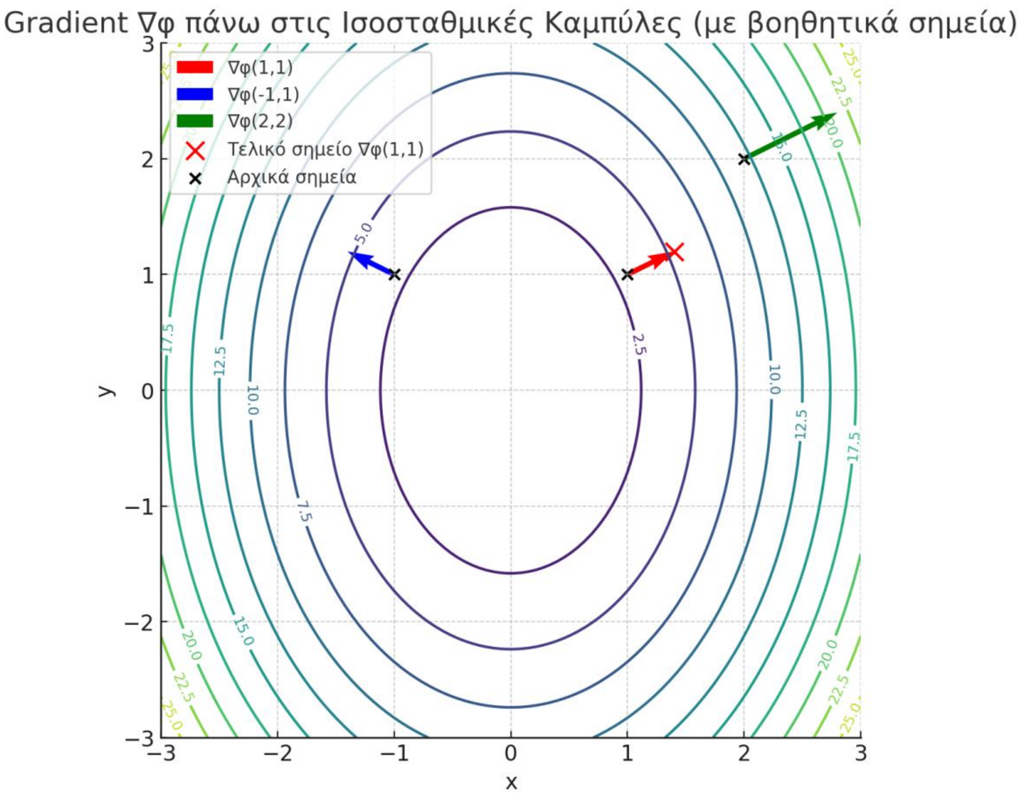
Βρείτε το gradient $\boldsymbol{\nabla}\phi$ στα σημεία $(1,1)\,,(-1,1)$. Σχεδιάστε το $\boldsymbol{\nabla}\phi$ υπό κλίμακα (κατ΄ εκτίμηση) σε τρία σημεία του σχήματος. Υπολογίστε την παράγωγο της ϕ κατά μήκος της καμπύλης

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\ \mathbf{i} + y(t)\ \mathbf{j} \ \text{ με } \ x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \quad \text{και } y(t) = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi]\,.$$

Εξηγείστε γιατί το αποτέλεσμα ήταν αναμενόμενο.

Ασκήσεις


Gradient ∇φ χωρίς κανονικοποίηση (Πραγματικό μέγεθος)
∇φ(1,1)
Τελικό σημείο ∇φ(1,1)
∇φ(-1,1)
Τελικό σημείο ∇φ(-1,1)
∇φ(2,2)
Τελικό σημείο ∇φ(2,2)
Αρχικά σημεία
x
y


Gradient ∇φ πάνω στις Ισοσταθμικές Καμπύλες (με βοηθητικά σημεία)
∇φ(1,1)
∇φ(-1,1)
∇φ(2,2)
Τελικό σημείο ∇φ(1,1)
Αρχικά σημεία
x
y

Ασκήσεις

3. Έστω ένα βαθμωτό πεδίο $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και μία καμπύλη $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Ο ρυθμός μεταβολής του ϕ κατά μήκος της καμπύλης θα δίνεται από τον τύπο (2.1.7), προσαρμοσμένο στις δύο διαστάσεις. Δείξτε ότι η δεύτερη παράγωγος της ϕ κατά μήκος της καμπύλης είναι

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Ασκήσεις

5. Δείξτε ότι $D_{-\mathbf{n}}\phi = -D_{\mathbf{n}}\phi$. Αν $\boldsymbol{\nabla}\phi \perp \mathbf{n}$, τότε $D_{\mathbf{n}}\phi = 0$.

Ασκήσεις

6. Κατά πόσο θα μεταβληθεί η $\phi(x, y, z) = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ αν το σημείο $(3, 4, 12)$ μετακινηθεί κατά $\Delta s = 0.1$ κατά μήκος του $3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$;

Ασκήσεις

8. Το υπερβολοειδές $x^2+y^2-z^2=1$ και το επίπεδο $x+y+z=5$ τέμνονται σε μια καμπύλη C. Βρείτε την εφαπτομένη της C στο σημείο $(1,2,2)$.