Μαθηματικά ΙΙ

Υπεύθυνος Καθηγητής:
Γιάννης Ανδρουλιδάκης

ΣΥΝΑΡΤΉΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Εαρινό Εξάμηνο 2024-2025

Το αντικείμενο του λογισμού είναι οι πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής

Δηλαδή η απεικόνιση ενός αριθμού *x* στον αριθμό *f(x)*
(συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής)

$$x \mapsto f(x)$$

Το σύμβολο αυτό σημαίνει «απεικονίζεται σε»

Στην φύση όμως: Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Παράδειγμα 1: Ατμοσφαιρική Πίεση *P* → εξαρτάται απο το γεωγραφικό πλάτος *X* & μήκος *Y*

$$P = f(X, Y)$$

όπου:

- X = γεωγραφικό μήκος (λ)
- Y = γεωγραφικό πλάτος (ϕ)

Αυτή η σχέση δείχνει ότι η ατμοσφαιρική πίεση εξαρτάται από το σημείο της Γης

Βασικοί Ορισμοί:

Συνάρτηση

Μία συνάρτηση *f* δύο ανεξάρτητων μεταβλητών είναι ένας κανόνας που αποδίδει σε κάθε διατεταγμένο ζέυγος πραγματικών αριθμών (x,y) του συνόλου *D* το μοναδικό πραγματικό αριθμό z=f(x,y)

Πεδίο Ορισμού

Το συνολο D ονομάζεται πεδίο ορισμού της *f.* <u>Το πεδίο ορισμού είναι υποσύνολο του R^2</u>

Σύνολο Τιμών

Το σύνολο των αντίστοιχων τιμών z δηλαδη $\{f(x,y)|(x,y) \in D\}$ ονομάζεται σύνολο τιμών της *f*. <u>Το σύνολο τιμών είναι υποσύνολο του R</u>

Παράδειγμα 2: Θερμοκρασία θάλασσας *T*→ εξαρτάται απο το γεωγραφικό πλάτος *X,* μήκος *Y, και βάθος Z.*

Χρειαζόμαστε μία συνάρτηση: T=f(x,y,z) $(x, y, z) \mapsto T(x, y, z)$

Πώς επηρεάζουν οι μεταβλητές τη θερμοκρασία της θάλασσας;

1. X, Y **(Γεωγραφικό μήκος και πλάτος)**
   - Η θερμοκρασία της επιφάνειας της θάλασσας ποικίλει με το γεωγραφικό πλάτος:
     - Στον **ισημερινό** είναι υψηλή (~25-30°C) λόγω της έντονης ηλιακής ακτινοβολίας.
     - Στους **πόλους** είναι χαμηλή (~-2°C) λόγω της μειωμένης ηλιακής ενέργειας.
   - Το μήκος επηρεάζει τη θερμοκρασία λόγω των **ωκεάνιων ρευμάτων** (π.χ. το θερμό Ρεύμα του Κόλπου και το ψυχρό Ρεύμα του Περού).
2. Z **(Βάθος στη θάλασσα)**
   - Η θερμοκρασία μειώνεται καθώς αυξάνεται το βάθος.
   - Στα πρώτα 100-200 μέτρα υπάρχει η **μικτή επιφάνεια** όπου η θερμοκρασία είναι σχετικά ομοιόμορφη.
   - Στη **θερμοκλινή** (~200-1000m), η θερμοκρασία πέφτει απότομα.
   - Στα μεγάλα βάθη (>1000m), η θερμοκρασία σταθεροποιείται γύρω στους **2-4°C**.

Οι πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών (λέγονται και **βαθμωτά πεδία**) είναι λοιπόν απεικονίσεις της μορφής:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

όπου n=2,3,4,….

*Δηλαδή, παίρνουν **n** πραγματικούς αριθμούς ως είσοδο (π.χ. συντεταγμένες στο χώρο) και δίνουν έναν πραγματικό αριθμό ως έξοδο.*

Παραδείγματα βαθμωτών πεδίων στη φύση

. **Θερμοκρασία της θάλασσας**:

$$T(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

Η θερμοκρασία του νερού σε μια τοποθεσία (x, y) και σε ένα συγκεκριμένο βάθος (z).

. **Υψόμετρο ενός σημείου σε έναν χάρτη**:

$$H(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Το ύψος μιας περιοχής εξαρτάται από το γεωγραφικό μήκος και πλάτος (x, y).

Παραδείγματα 1, 2, 3

Εκτός από τα **βαθμωτά** πεδία στην φύση υπάρχουν και τα **διανυσματικά** πεδία. Η διαφορά τους είναι:

Ότι περιγράφουν **μέγεθος και κατεύθυνση** σε κάθε σημείο του χώρου

Ένα **διανυσματικό πεδίο** είναι μια συνάρτηση της μορφής:

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο (x, y, z) έναν διανυσματικό αριθμό $\mathbf{F}(x, y, z)$, δηλαδή ένα διάνυσμα με **μέτρο** και **κατεύθυνση**.

Διαφορά βαθμωτού και διανυσματικού πεδίου

Τύπος Πεδίου	Ορισμός	Παράδειγμα
Βαθμωτό πεδίο	Αντιστοιχεί σε κάθε σημείο έναν αριθμό	Θερμοκρασία $T(x, y, z)$, Πίεση $P(x, y, z)$
Διανυσματικό πεδίο	Αντιστοιχεί σε κάθε σημείο ένα διάνυσμα	Ταχύτητα ρευστού $\mathbf{V}(x, y, z)$, Ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}(x, y, z)$

Το διανυσματικό πεδίο μπορεί να εξαρτάται και από το **χρόνο**

Παράδειγμα

Αναφέρουμε πάλι την ταχύτητα ρευστού $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$

Τι σημαίνει αυτό;

- Η είσοδος της συνάρτησης είναι **τέσσερις πραγματικοί αριθμοί**:

$$(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$$

  που αντιστοιχούν στις **χωρικές συντεταγμένες** και στον **χρόνο**.

- Η έξοδος είναι ένα **διάνυσμα** στο $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}(x, y, z, t) = (v_x, v_y, v_z)$$

  που περιγράφει την ταχύτητα στις τρεις διαστάσεις του χώρου.

Διανυσματικές Συναρτήσεις Μίας Μεταβλητής (Καμπύλες)

Μια **διανυσματική συνάρτηση μίας μεταβλητής** είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από **μία πραγματική παράμετρο** t και επιστρέφει ένα διάνυσμα στο χώρο.

Μια **καμπύλη** στο χώρο περιγράφεται από μια διανυσματική συνάρτηση:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

όπου οι συναρτήσεις $x(t), y(t), z(t)$ περιγράφουν τις **συντεταγμένες του σημείου** που κινείται στον χώρο καθώς το t αλλάζει.

👉 Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι στο **επίπεδο**, τότε έχουμε:

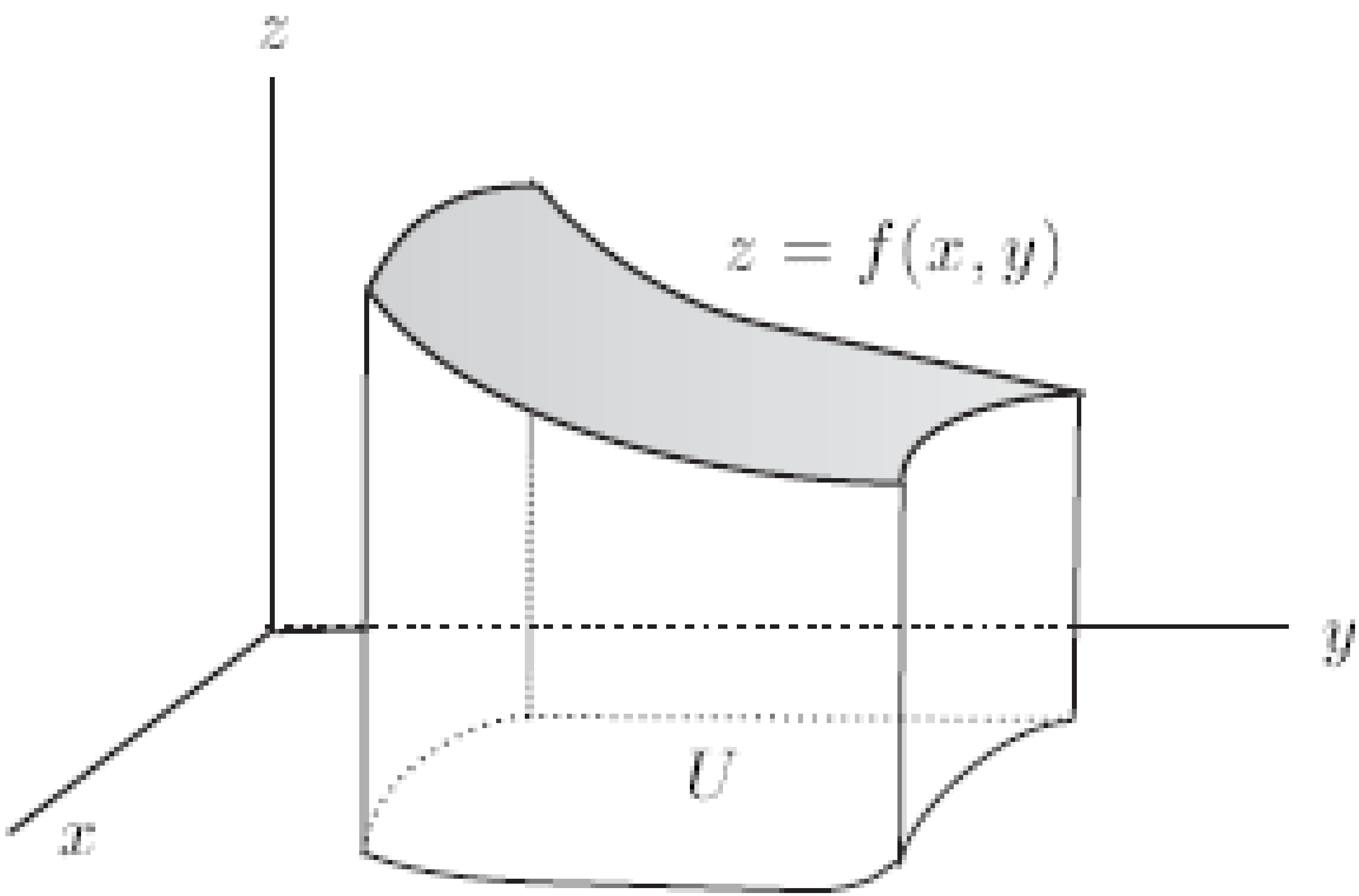
$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

👉 Αν $\mathbf{r}(t)$ είναι στον **τρισδιάστατο χώρο**, τότε:

$$\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad n = 2, 3.$$

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$



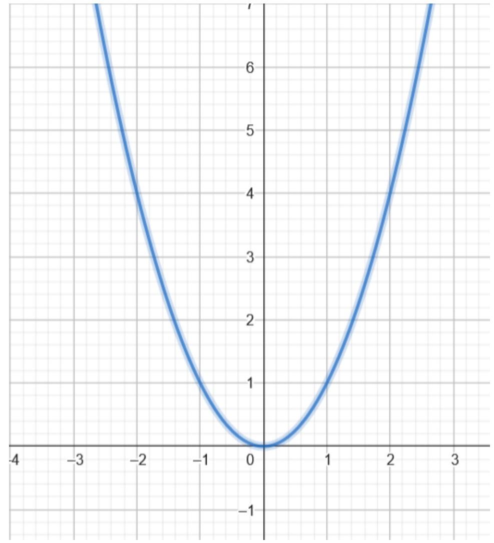
Για διάφορα ζεύγη (1η περιπτωση) ή τριάδες (2η περίπτωση) μεταβλητών μπορουμε να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις

Πώς μπορούμε να δείξουμε παραστατικά (γραφικά) τη συμπεριφορά μιάς τέτοιας συνάρτησης;

Γράφημα Βαθμωτής Συνάρτησης

1η περιπτωση: Συνάρτηση μία μεταβλητής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Π.χ. $f(x)=x^2$

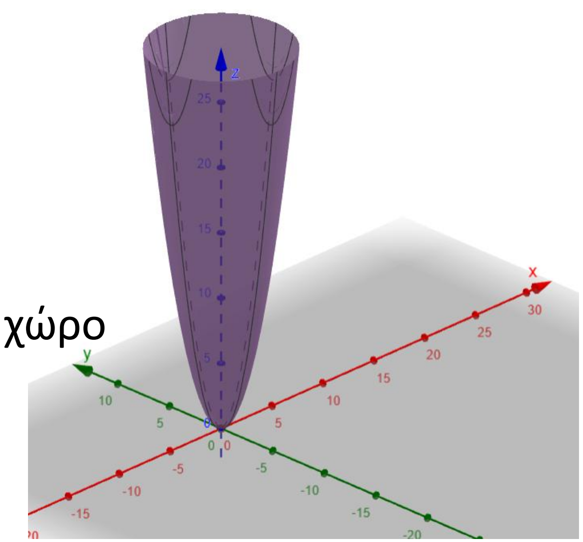


καμπύλη στο επίπεδο

2η περιπτωση: Συνάρτηση δύο μεταβλητών

Π.χ. $g(x,y)=x^2+y^2$

επιφάνεια στον 3-διαστατο χώρο



Γράφημα Βαθμωτής Συνάρτησης

Η έννοια του *Συνόλου Στάθμης (Level Set)* ενός βαθμωτού πεδίου:

Είναι το σύνολο των σημείων του πεδίου ορισμού (ανεξάρτητες μεταβλητές εισόδου) της συνάρτησης *f*, στα οποία η *f* είναι σταθερή (έχει την ίδια τιμή).

Δηλαδή για μία συνάρτηση δύο μεταβλητών *f(x,y)*

Το σύνολο στάθμης είναι συνήθως μια καμπύλη στον επίπεδο, που αντιπροσωπεύει όλες τις θέσεις όπου η τιμή της συνάρτησης είναι ίση με τη σταθερά π.χ. c:

$$f(x,y) = c$$

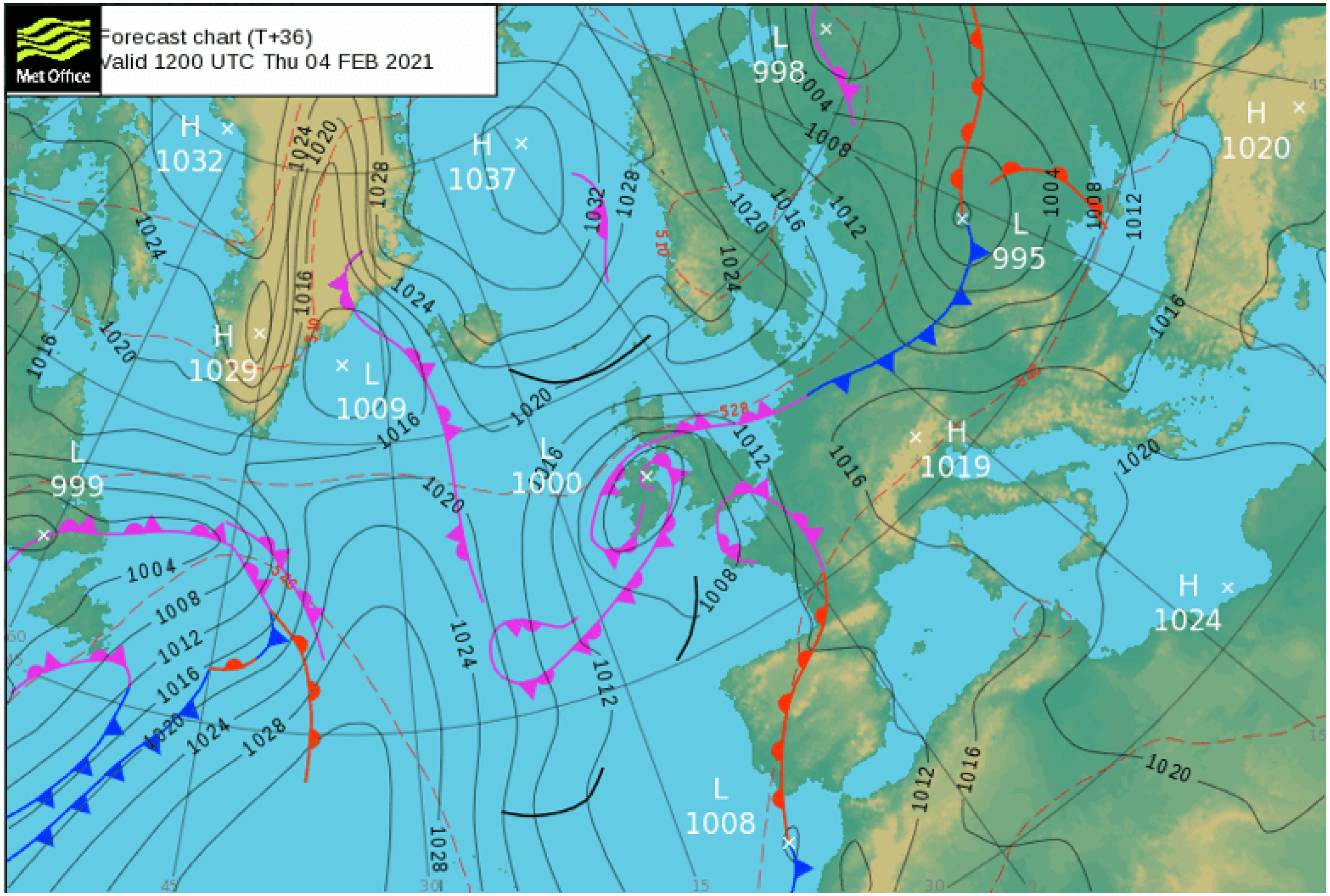
Επομένως L_c είναι εν γένει μία καμπύλη που λέγεται <u>ισοσταθμική καμπύλη</u> στάθμης c.

$$L_c = \{(x,y) \mid f(x,y) = c\}$$

Γράφημα Βαθμωτής Συνάρτησης

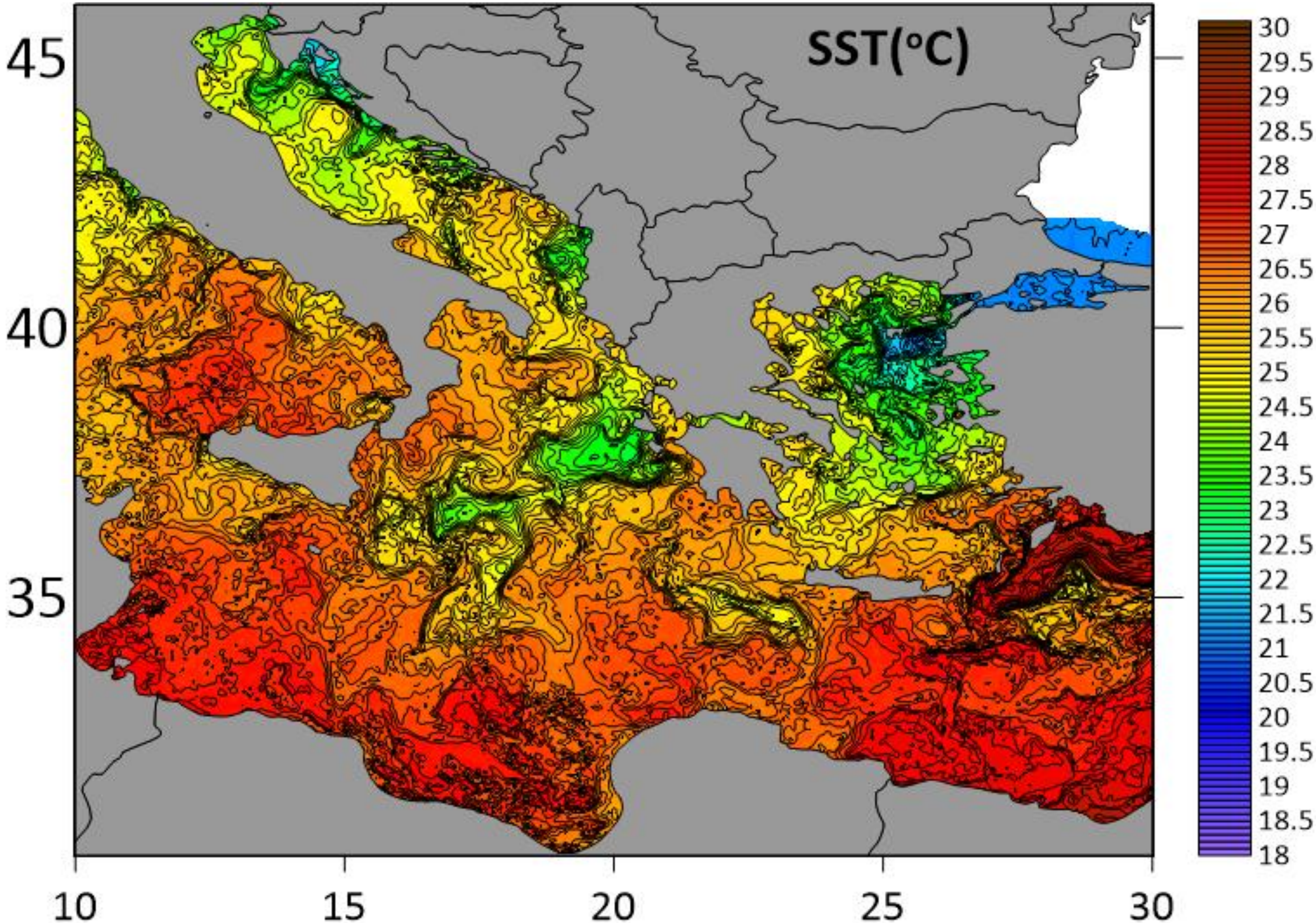
Παράδειγμα Συνόλου Σταθμής

Αν θεωρήσουμε την ατμοσφαιρική πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας ως συνάρτηση της θέσης p (x, y), τότε οι **ισοσταθμικές καμπύλες** $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : p(x, y) = c\}$ είναι οι ισοβαρείς που απεικονίζονται σ΄ ένα χάρτη βαρομετρικών συστημάτων.



Γράφημα Βαθμωτής Συνάρτησης

Παράδειγμα Συνόλου Σταθμής

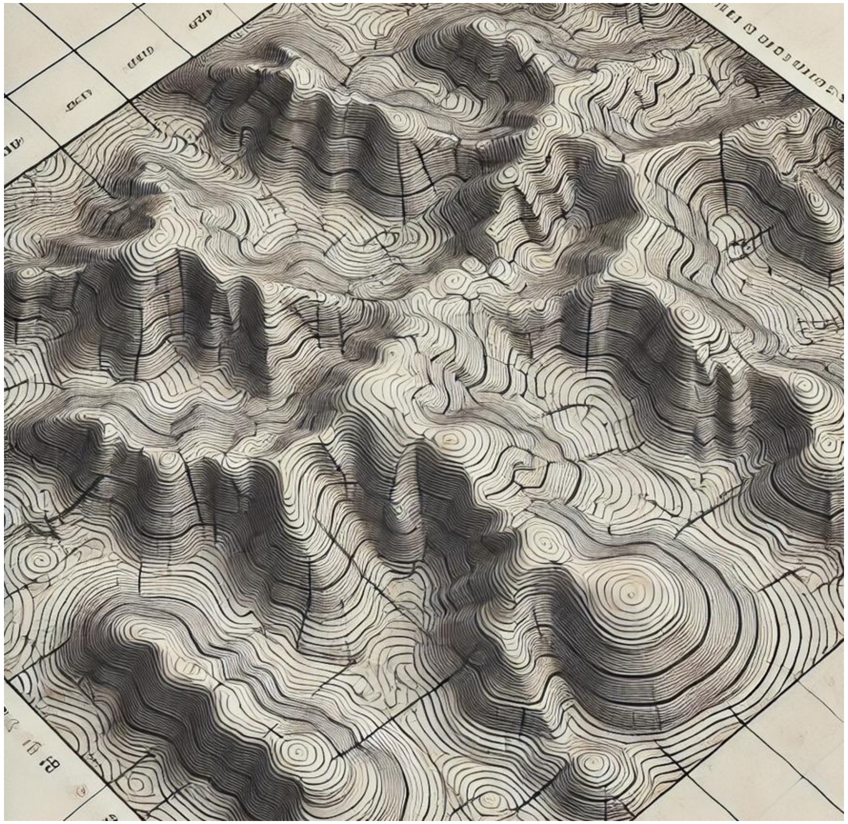


Γράφημα Βαθμωτής Συνάρτησης

Παράδειγμα Συνόλου Σταθμής

Ισουψείς (ή ισοβαθείς) Καμπύλες Εδάφους
Συνάρτηση ύψους πάνω από την επιφάνεια της Γης

Ολές οι συντεταγμένες (lon, lat) οι οποίες ορίζουν ένα σταθερό ύψος πάνω σε μια καμπύλη (ισουψή) αποτελούν το σύνολο στάθμης για το συγκεκριμένο ύψος (ή βάθος)



Γράφημα Βαθμωτής Συνάρτησης

Παραδείγματα 6, 7

Γράφημα Βαθμωτής Συνάρτησης

Παραδείγματα 1,2,3 (Σημειώσεις)

Γράφημα Βαθμωτής Συνάρτησης

Ισοσταθμική Επιφάνεια

Ειδικά για μία συνάρτηση τριών μεταβλητών φ (x, y, z)

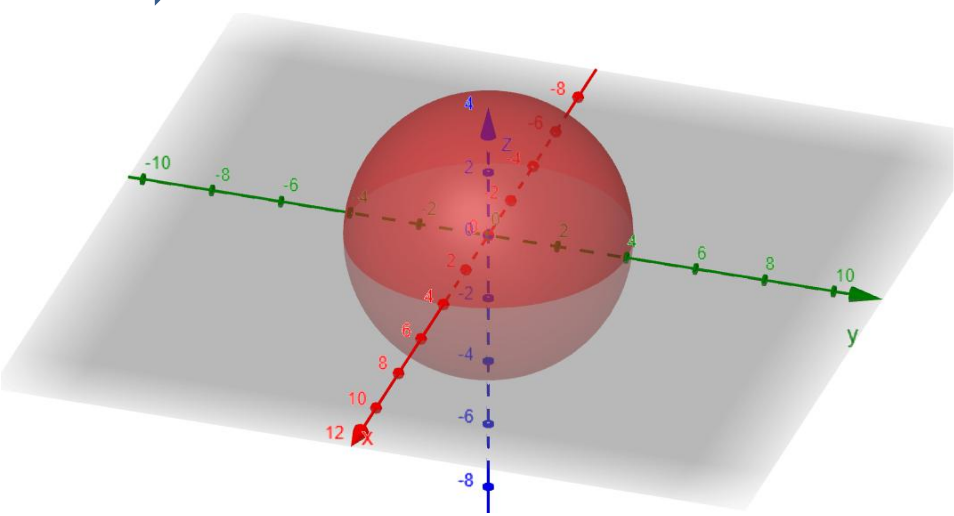
Η επιφάνεια που ορίζεται ονομάζεται ισοσταθμική επιφάνεια

$$S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \phi(x, y, z) = k\}$$

Παράδειγμα 5

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow S_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\}$$

Π.χ. Για k=16



Γράφημα Βαθμωτής Συνάρτησης

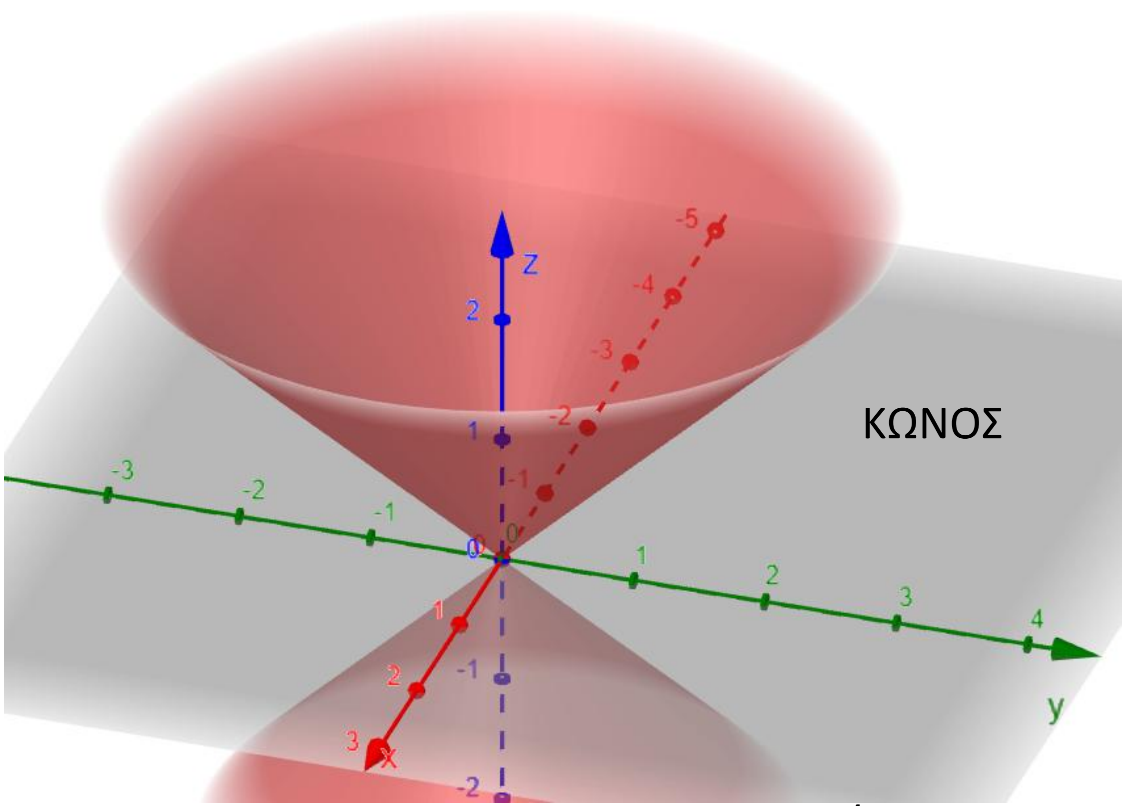
Παράδειγμα 6

Ποια είναι η μηδενική ισοσταθμικη επιφάνεια;

$$\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 \Rightarrow \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$



ΚΩΝΟΣ

Δοκιμάστε για -1 και 1 αντι για μηδεν

Γράφημα Βαθμωτής Συνάρτησης

Περιγράψτε τις παρακάτω επιφάνειες.

α) Ελλειπτικός κύλινδρος $y^2 + 4x^2 = 4,\ -2 \leq z \leq 2$

β) Ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

γ) Ελλειπτικό παραβολοειδές $z = a^2x^2 + b^2y^2$

δ) Ελλειπτικός κώνος $z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$

ε) Μονόχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

στ) Δίχωνο υπερβολοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

ζ) Υπερβολικό παραβολοειδές $z = a^2x^2 - b^2y^2$

ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

Ορισμός 2.1. *Έστω* ϕ *ένα βαθμωτό πεδίο που ορίζεται σε μιά περιοχή* U *του* $\mathbb{R}^n$, $\phi : U \to \mathbb{R}$ *και* k *μία σταθερά. Τότε το σύνολο στάθμης* S_k *της* ϕ *με τιμή* k, *αποτελείται από τα σημεία* $(x_1, \ldots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ *για τα οποία* $\phi(x_1, \ldots, x_n) = k$, *συμβολικά,*

$$S_k = \{(x_1, \ldots, x_n) \in U : \phi(x_1, \ldots, x_n) = k\}.$$

Συνεχείς συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Θα ασχοληθούμε με την έννοια της Συνέχειας των συναρτήσεων:

Με **μία** μεταβλητή π.χ. *f(x)* είναι συνεχής αν:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Το lim είναι η συντομογραφία του ορίου (limit) που περιγράφει πως συμπεριφέρεται η συνάρτηση όταν η μεταβλητή τείνει σε συγκεκριμένη τιμή

Παράδειγμα συνέχειας

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Θέλουμε να εξετάσουμε αν είναι συνεχής στο $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 2^2 = 4$$

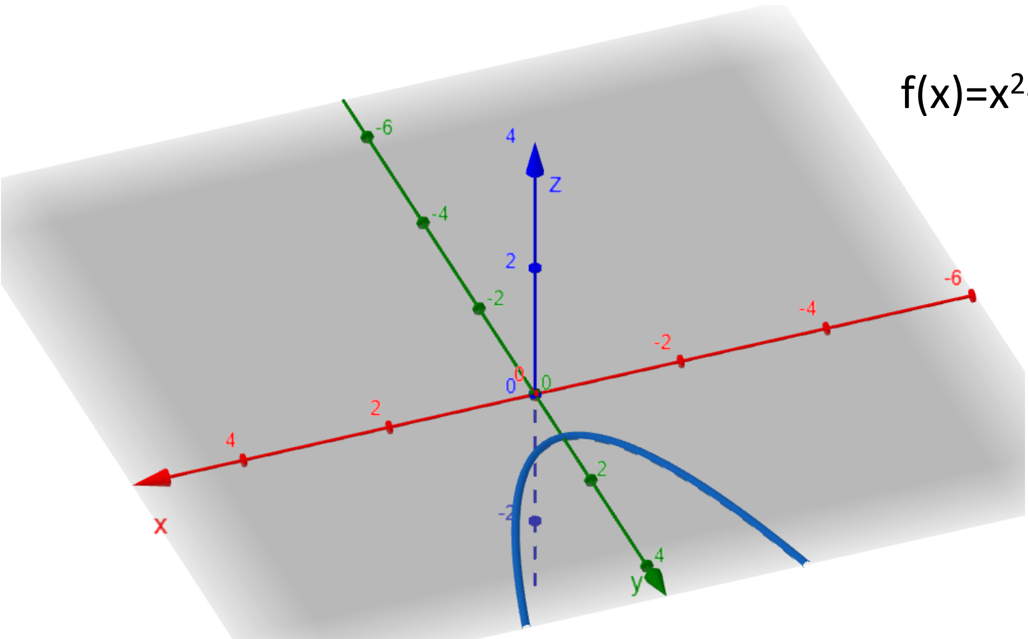
και $f(2) = 4$, άρα η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x = 2$.

Μια συνάρτηση θα ήταν **ασυνεχής** αν παρουσιάσει κάποια ασυνέχεια σε κάποιο όριο π.χ.:

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ⇒ Έλεγχος συνέχειας στο x=0 $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2}$ ⇒ Αφού το όριο πάει στο **άπειρο** και δεν είναι πεπερασμένος αριθμός, **δεν υπάρχει το** $\lim_{x \to 0} f(x)$

*Η **φυσική σημασία** της συνέχειας μιας συνάρτησης είναι ότι δεν υπάρχουν **απότομες αλλαγές** ή **ασυνέχειες** στο φαινόμενο που περιγράφει η συνάρτηση.*

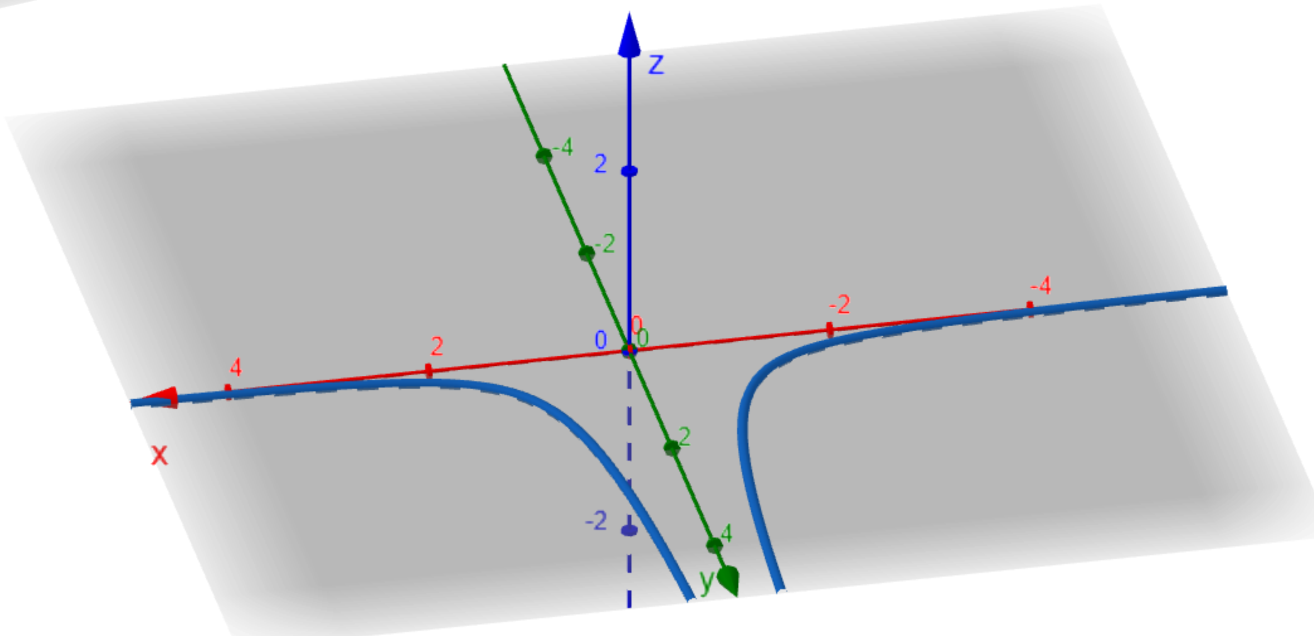
Συνεχείς συναρτήσεις πολλών μεταβλητών



f(x)=x^2+1

Ποια είναι συνεχής από τις δύο;

f(x)=$1/x^2$

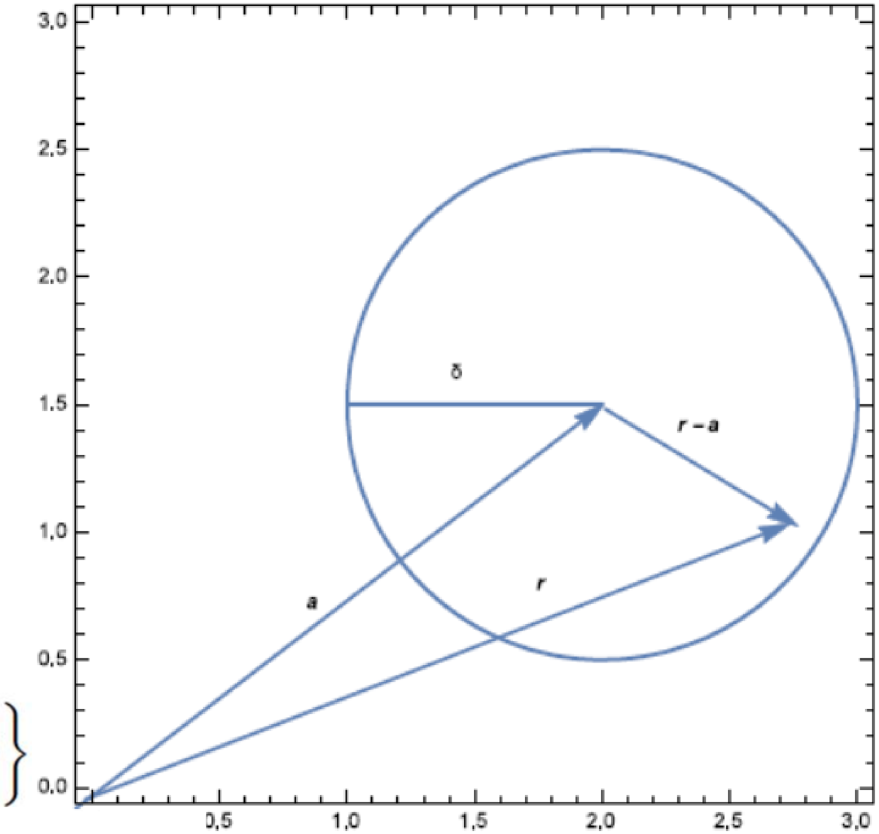


Συνεχείς συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Θα ασχοληθούμε με την έννοια της Συνέχειας των συναρτήσεων:

Με **πολλές** μεταβλητές π.χ. *f(x,y)*:

- Θεωρούμε ένα **δίσκο**, δηλαδή το εσωτερικό ενός **κύκλου** με κέντρο το σημείο a.
- Το κέντρο του ορίζεται με ένα διάνυσμα **a(α,b)**
- Το σύνολο των σημείων **r(x,y)** με |r-a|<δ είναι ένας κυκλικός δίσκος (εσωτερικά του ορίου – χωρίς το σύνορο του)
- Αν συμβολίσουμε τον δίσκο αυτο με D_δ(a):



$$
\begin{aligned}
D_\delta(\mathbf{a}) &= \left\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{r}-\mathbf{a}\| < \delta\right\} \\
&= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta\right\}
\end{aligned}
$$

Όπου:

- $a = (\alpha, \beta)$ είναι το κέντρο του δίσκου.
- $r = (x, y)$ είναι ένα σημείο στο επίπεδο.
- $|r-a|$ είναι η **Ευκλείδεια απόσταση** του σημείου r από το κέντρο a:

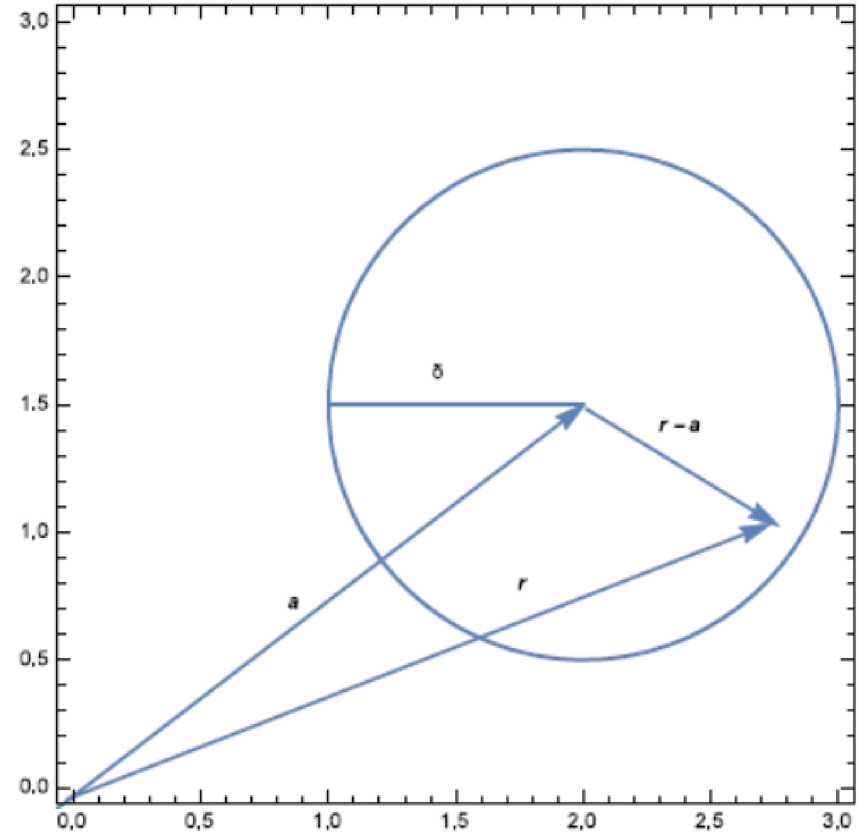
$$\|r-a| = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

Αν έχω x=α, y=β
Τότε;

Συνεχείς συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Θα ασχοληθούμε με την έννοια της Συνέχειας των συναρτήσεων:

Με **πολλές** μεταβλητές π.χ. *f(x,y)*:



- Αν θέλουμε να περιγράψουμε δίσκο που περιλαβάνει το σύνορό του, δηλαδή τον κύκλο, θα έχουμε το σύνολο

$$\begin{aligned}\bar{D}_\delta(\mathbf{a}) &= \left\{\mathbf{r}\in\mathbb{R}^2 : \|\mathbf{r}-\mathbf{a}\|\leq\delta\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\leq\delta\right\}\end{aligned}$$

κλειστός δίσκος, κέντρου a *και ακτίνας δ.*

Συνεχείς συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Υπενθυμίζουμε ότι μία πραγματική συνάρτηση φ είναι συνεχής αν γειτονικά σημεία του πεδίου ορισμού της έχουν γειτονικές εικόνες (μέσω της φ).

Τι σημαίνει αυτό;

αν τα σημεία στην είσοδο είναι κοντά, τότε και οι αντίστοιχες τιμές στην έξοδο θα είναι κοντά. → **Συνεχής συνάρτηση**

Μαθηματικός Ορισμός της Συνέχειας

Η συνάρτηση $\varphi : U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο a αν: $\|r - a\| < \delta, \text{ τότε } |\varphi(r) - \varphi(a)| < \epsilon$

Διαισθητική Ερμηνεία

- $\|r - a\| < \delta$ σημαίνει ότι το σημείο r είναι **πολύ κοντά** στο a.
- $|\varphi(r) - \varphi(a)| < \epsilon$ σημαίνει ότι η τιμή της συνάρτησης $\varphi(r)$ είναι **πολύ κοντά** στην τιμή $\varphi(a)$.
- Δηλαδή, **αν τα πρότυπα (τα σημεία r και a) είναι κοντινά, τότε και οι εικόνες τους $\varphi(r)$ και $\varphi(a)$ είναι κοντινές.**

Αυτό αποτρέπει απότομες αλλαγές στη συνάρτηση, δηλαδή **αποτρέπει ασυνέχειες.**

Συνεχείς συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Παράδειγμα συνεχειας

$f(x,y)=x^2+y^2$ στο σημείο (1,2)

Μερική Παράγωγος

Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση τριών μεταβλητών

$$f(x,y,z)$$

η **μερική παράγωγος ως προς x** ορίζεται ως:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} =$$

Η **μερική παράγωγος** μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών είναι η παράγωγος της συνάρτησης **ως προς μία από τις μεταβλητές της**, ενώ οι υπόλοιπες μεταβλητές θεωρούνται σταθερές.

Παραδείγματα 7,8 (Σημειώσεις)

Παράδειγμα Παραγώγου στην Ωκεανογραφία

Μερική Παράγωγος

Η μερική παράγωγος έχει τις γνωστές ιδιότητες:

Έστω ότι έχουμε 2 συναρτήσεις παραγωγίσιμες *φ(x,y)* και *ψ(x,y)*

1. Γραμμικότητα

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\phi) = \lambda\frac{\partial\phi}{\partial x} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(\phi+\psi) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

2. Κανόνας γινομένου

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi\psi) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\psi + \phi\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

3. Κανόνας πηλίκου

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) = \frac{\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}}{\psi^2}$$

Σε ποια περίπτωση ισχύει αυτός ο κανόνας; $\psi(x,y) \neq 0,$

Παράδειγμα

$$\varphi(x,y) = x^2 + y, \quad \psi(x,y) = x + y^2$$

Μερική Παράγωγος

Γεωμετρική και φυσική σημασία της μερικής παραγώγου.

Η μερική παράγωγος ως προς x, εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της όταν μεταβαίνουμε από το σημείο (x, y, z), σε ένα γειτονικό σημείο που βρίσκεται στην ευθεία που περνά από το (x, y, z) και είναι παράλληλη με τον άξονα x.

Παράδειγμα – ύψος εδάφους

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση ύψους **h**, που για μια περιοχή της γης μας δείχνει το ύψος h στη θέση **(x, y) → δηλαδή h(x,y)**

- Η **μερική παράγωγος** $\frac{\partial h}{\partial x}$ μετράει **πόσο γρήγορα αλλάζει το ύψος όταν κινούμαστε κατά μήκος του άξονα** x (ανατολή-δύση).
- Η **μερική παράγωγος** $\frac{\partial h}{\partial y}$ μετράει **πόσο γρήγορα αλλάζει το ύψος όταν κινούμαστε κατά μήκος του άξονα** y (βορράς-νότος).

Έτσι, οι **μερικές παράγωγοι περιγράφουν τις τοπικές κλίσεις του εδάφους**.

Το ίδιο παράδειγμα μπορεί να δοθεί και για την βαθυμετρία με τις κλίσεις του πυθμένα

Μερική Παράγωγος

Παραδείγμα 5

Μερική Παράγωγος

Ορισμός 2.3. *Μία συνάρτηση $\phi : U \to \mathbb{R}$ λέγεται παραγωγίσιμη στο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ αν όλες οι μερικές παράγωγοι της ϕ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο U. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το βαθμωτό πεδίο ϕ είναι τάξης $C^1(U)$.*

Σημαίνει ότι η συνάρτηση έχει συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους στο U

Παράδειγμα 1 (Παραγωγίσιμη Συνάρτηση)

Έστω η συνάρτηση:

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2$$

Οι μερικές παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι συνεχείς σε όλο το $\mathbb{R}^2$, άρα $\varphi(x, y)$ **είναι τάξης** $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Δεύτερη Μερική Παράγωγος

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right).$$

Οι **δεύτερες μερικές παράγωγοι** είναι οι μερικές παράγωγοι των πρώτων παραγώγων

Παράδειγμα και απόδειξη του θεωρήματος Schwarz!

$$\phi(x, y) = x^2 + xy^5$$

Κανόνας της αλυσίδας

- αν f είναι συνάρτηση του x, δηλαδή f(x)
- και x είναι συνάρτηση του t, δηλαδή x(t)
- και οι δύο παραγωγίσιμες
- Τότε η σύνθετη συνάρτηση f(x(t)) είναι παραγωγίσιμη

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}\frac{dx}{dt}$$

- αντίστοιχα και σε ένα βαθμωτό πεδίο (συνάρτηση 2 μεταβλητών π.χ. φ(x,y)
- τα x και y είναι συναρτήσεις του t, δηλαδή x(t) και y(t)

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

- αντίστοιχα και όταν έχουμε σύνθεση βαθμωτών πεδίων, δηλαδή

$$\phi(u,v) \text{ με } u = u(x,y) \text{ και } v = v(x,y)$$

τότε η **μερική παράγωγος της** φ **ως προς** x δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Παρόμοια, για τη **μερική παράγωγο ως προς** y:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

Κανόνας της αλυσίδας

Παραδείγμα 10, 11

Ασκήσεις

1. Βρείτε τα $\partial z/\partial u$, $\partial z/\partial \theta$ αν $z = x^2 + 2xy$, $x = u\cos\theta$, $y = u\sin\theta$. Βρείτε τα $\partial z/\partial u$, $\partial z/\partial \theta$ αν $z = e^x + xy^2$, $x = u + \theta$, $y = e^{u+\theta}$. Βρείτε την dw/dt αν $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x(t) = e^t \cos t$, $y(t) = e^t \sin t$, $z(t) = e^t$.

Ασκήσεις

2. Αν $z = f(u)$, $u = (x+y)/xy$, δείξτε ότι

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$$